

БАРИНОВА М. К., ГОГУЛИНА Е. Ю., ПОЧИНКА О. В.
РЕАЛИЗАЦИЯ АЦИКЛИЧЕСКОЙ ДИАГРАММЫ СМЕЙЛА
ОМЕГА-УСТОЙЧИВЫМ ДИФФЕОМОРФИЗМОМ ПОВЕРХНОСТИ¹

Аннотация. Диаграммой Смейла Ω -устойчивого диффеоморфизма является граф, вершины которого соответствуют базисным множествам, а ориентированные ребра последовательно соединяют вершины максимальных цепей. Одной из проблем, поставленных Смейлом, является описание допустимых диаграмм — диаграмм, реализуемых каким-либо диффеоморфизмом. В настоящей работе доказано, что любой ациклический граф реализуется Ω -устойчивым диффеоморфизмом поверхности с нетривиальными базисными множествами.

Ключевые слова: Диаграмма Смейла, Ω -устойчивость, базисное множество, DA-диффеоморфизм, ациклический граф.

BARINOVA M. K., GOGULINA E. YU., POCHINKA O. V.
REALIZATION OF THE ACYCLIC SMALE DIAGRAM
BY AN OMEGA-STABLE SURFACE DIFFEOMORFISM

Abstract. Smale diagram of Ω -stable diffeomorphism is a graph, which vertices correspond to basic sets and oriented edges sequentially connect vertices of maximal chain. Smale formulated description of acceptable diagrams, which are realized by a diffeomorphism. Present paper proves that an acyclic graph is implemented by an Ω -stable diffeomorphism on surface with nontrivial basic sets.

Keywords: Smale diagram, Ω -stability, basic set, DA-diffeomorphism, acyclic graph.

Введение и формулировка результатов. Пусть f — диффеоморфизм замкнутого n -многообразия M^n . Говорят, что диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A , если его неблуждающее множество является гиперболическим, и периодические точки плотны в нем. Для A -диффеоморфизмов справедлива теорема о спектральном разложении С. Смейла [2], устанавливающая единственное представление неблуждающего множества в виде конечного объединения попарно непересекающихся множеств, называемых *базисными*, каждое из которых является компактным, инвариантным и топологически транзитивным.

На множестве базисных множеств любого A -диффеоморфизма f можно ввести отношение частичного порядка С. Смейла [2]. Именно, пусть Λ_i, Λ_j — базисные множества

¹ Исследование поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, договор 075-15-2019-1931.

А-дiffeоморфизма f . Говорят, что Λ_i, Λ_j находятся в отношении $\prec$ ($\Lambda_i \prec \Lambda_j$), если $W_{\Lambda_i}^s \cap W_{\Lambda_j}^u \neq \emptyset$.

Последовательность, состоящая из базисных множеств $\Lambda_i = \Lambda_{i_0}, \Lambda_{i_1}, \dots, \Lambda_{i_k} = \Lambda_j$ ($k \geq 1$), такая что $\Lambda_{i_0} \prec \Lambda_{i_1} \prec \dots \prec \Lambda_{i_k}$ называется *цепью длины $k \in \mathbb{N}$* , соединяющей периодические орбиты Λ_i и Λ_j .

Такая цепь называется *максимальной*, если в нее нельзя добавить ни одного нового базисного множества. Цепь называется *циклом*, если $\Lambda_i = \Lambda_j$.

Дiffeоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ называется Ω -устойчивым, если C^1 -близкие к f диффеоморфизмы топологически сопряжены на неблуждающих множествах. Согласно [3], диффеоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ является Ω -устойчивым тогда и только тогда, когда он удовлетворяет аксиоме А и не имеет циклов.

Диаграммой Смейла Δ_f Ω -устойчивого диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$ называется граф, вершины которого соответствуют базисным множествам, а ориентированные ребра последовательно соединяют вершины максимальных цепей.

В дальнейшем под *направленным циклом* ориентированного графа будем понимать замкнутый путь, пройденный в соответствии с направлениями ребер ([6]). Граф называют *ациклическим*, если у него нет направленных циклов. При этом не исключаются "параллельные" пути, которые выходят из одной начальной вершины и приходят в одну конечную, но при этом не совпадают.

В работе ([2]), в качестве проблемы сформулирован следующий вопрос: какие диаграммы могут соответствовать Ω -устойчивым диффеоморфизмам?

Настоящая работа дает частичный ответ на этот вопрос в виде доказательства следующей теоремы.

Теорема. *Любой связный ациклический граф реализуется Ω -устойчивым диффеоморфизмом поверхности.*

Построение базисных множеств для диффеоморфизма двумерного тора.
Диффеоморфизм Аносова на 2-торе. Пусть $C \in GL(2, \mathbb{R})$ – гиперболическая матрица с собственными значениями λ_1, λ_2 такими что $|\lambda_1| > 1$ и $|\lambda_2| = 1/|\lambda_1|$. Так как матрица C имеет определитель, равный 1, то она индуцирует гиперболический автоморфизм $\hat{C}: T^2 \rightarrow T^2$ с неподвижной точкой О. Этот диффеоморфизм является диффеоморфизмом Аносова, обладающий двумя трансверсальными инвариантными слоениями (устойчивым и

неустойчивым), любой слой каждого из которых всюду плотен на торе. Кроме того, множество периодических точек диффеоморфизма $\hat{C}$ также плотно на T^2 .

«Хирургическая операция» Смейла. Пусть $\sigma: \square \rightarrow [0,1]$ – функция, заданная формулой (см. рис. 1)

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x, \lambda^{-3}, \\ \frac{1}{\frac{\lambda^{-3}+1}{2}-x}, & \lambda^{-3} < x < 1, \\ 1 + e^{\frac{2}{(x-\lambda^{-3})^2(x-1)^2}}, & \\ 1, & x..1. \end{cases}$$

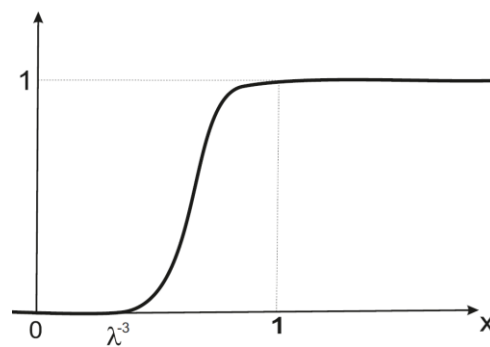


Рис. 1. График функции $\sigma(x)$.

Определим функцию $\nu: [0,1] \rightarrow [0,1]$ формулой (см. рис. 2)

$$\nu(x) = \begin{cases} \lambda^2 x, & 0, x, \lambda^{-3}, \\ \sigma(x)x + (1-\sigma(x))\lambda^2 x, & \lambda^{-3} < x, 1. \end{cases}$$

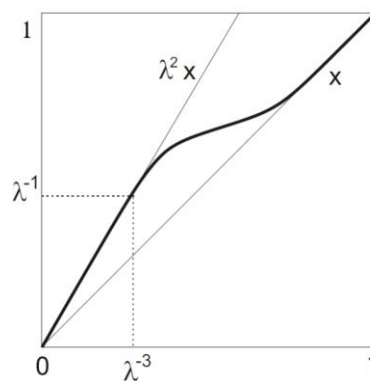


Рис. 2. График функции $\nu(x)$.

Продолжим функцию ν нечетным образом на отрезок $[-1,1]$, положив $\nu(-x) = -\nu(x)$ для $x \in [0,1]$.

Положим $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$. Определим функцию $\gamma_A : D \rightarrow [0, 1]$ формулой

$$\gamma_A(x, y) = \begin{cases} \nu(x), & 0 \leq |y| \leq \lambda^{-3}, \\ \sigma(|y|)x + (1 - \sigma(|y|))\nu(x), & \lambda^{-3} < |y| \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

Определим диффеоморфизм $B_A : D \rightarrow D$ формулой $B_A(x, y) = (\gamma_A(x, y), y)$. По построению, $B_A(x, y) = (\lambda^2 x, y)$, если $x^2 + y^2 \leq \lambda^{-6}$ и является тождественным на ∂D .

Пусть x, y – локальные координаты в окрестности $U(O)$ точки на T^2 такие, что диффеоморфизм $\hat{C}$ в этих координатах имеет форму $\hat{C}(x, y) = (x/\lambda, \lambda y)$. Тогда $Ox \subset W_O^s$ и $Oy \subset W_O^u$, а также $\{y = \text{const}\}$ и $\{x = \text{const}\}$ являются устойчивым и неустойчивым слоениями. Определим диффеоморфизм $\hat{B}_A : T^2 \rightarrow T^2$, совпадающий с диффеоморфизмом B_A внутри окрестности $U(O)$ и тождественный вне этой окрестности. Тогда согласно [4], [1], диффеоморфизм $\hat{\Psi}_A = \hat{B}_A \circ \hat{C}$ является DA-диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из одномерного аттрактора A , обладающего единственной связкой степени 2 с двумя различными граничными неподвижными p_1 и p_2 , и источниковой неподвижной точкой α (см. рис. 3).

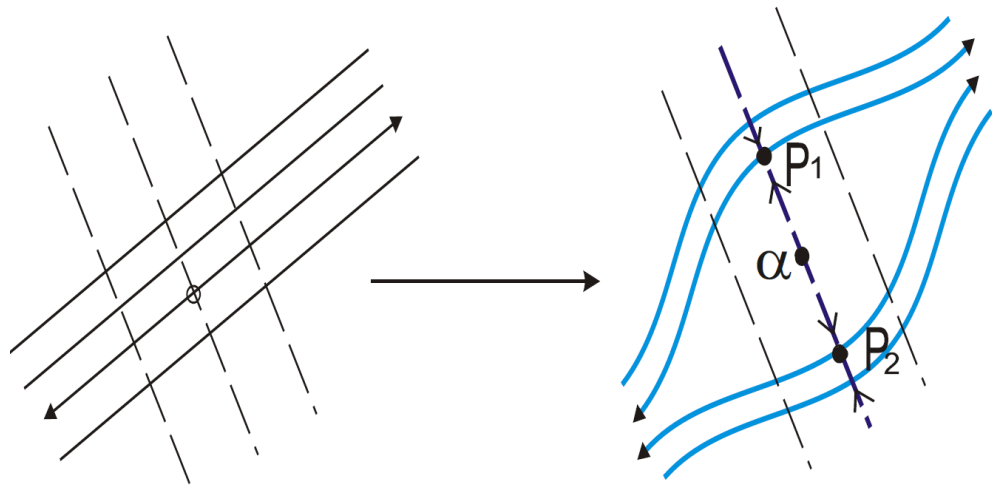


Рис. 3. «Хирургическая операция» Смейла.

Модельные диффеоморфизмы на торе. В этом разделе, используя хирургическую операцию Смейла, мы построим модельные диффеоморфизмы на двумерном торе.

Диффеоморфизм $F_{m_1, \dots, m_k}$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ периодических орбит $O_1, \dots, O_k$ диффеоморфизма Аносова $\hat{C}$ периодов $m_1, \dots, m_k$, соответственно. В окрестности каждой орбиты произведем хирургическую операцию Смейла вдоль устойчивого слоения.

Полученный диффеоморфизм $F_{m_1, \dots, m_k} : T^2 \rightarrow T^2$ имеет единственный нетривиальный одномерный аттрактор $\Lambda_{m_1, \dots, m_k}$ и k периодических источниковых орбит $\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_k}$ периодов $m_1, \dots, m_k$, соответственно.

Диффеоморфизм $F^{n_1, \dots, n_l}$. Выберем $l \in \mathbb{N}$ периодических орбит $O^1, \dots, O^l$ диффеоморфизма Аносова $\hat{C}$ периодов $n_1, \dots, n_l$, соответственно. В окрестности каждой орбиты произведем хирургическую операцию Смейла вдоль неустойчивого слоения. Полученный диффеоморфизм $F^{n_1, \dots, n_l} : T^2 \rightarrow T^2$ имеет единственный нетривиальный одномерный репеллер $\Lambda^{n_1, \dots, n_l}$ и l периодических стоковых орбит $\omega_{n_1}, \dots, \omega_{n_l}$ периодов $n_1, \dots, n_l$, соответственно.

Диффеоморфизм $F_{m_1, \dots, m_k}^{n_1, \dots, n_l}$. Выберем $l+k \in \mathbb{N}$ периодических орбит $O_1, \dots, O_k, O^1, \dots, O^l$ диффеоморфизма Аносова $\hat{C}$ периодов $m_1, \dots, m_k, n_1, \dots, n_l$, соответственно. В окрестности каждой орбиты $O_1, \dots, O_k$ произведем хирургическую операцию Смейла вдоль устойчивого слоения и в окрестности каждой орбиты $O^1, \dots, O^l$ произведем хирургическую операцию Смейла вдоль неустойчивого слоения. Полученный диффеоморфизм $F_{m_1, \dots, m_k}^{n_1, \dots, n_l} : T^2 \rightarrow T^2$ имеет единственное нетривиальное нульмерное базисное множество $\Lambda_{m_1, \dots, m_k}^{n_1, \dots, n_l}$, k периодических источниковых орбит $\alpha_{m_1}, \dots, \alpha_{m_k}$ периодов $m_1, \dots, m_k$ и l периодических стоковых орбит $m_1, \dots, m_k$ периодов $n_1, \dots, n_l$, соответственно.

Примеры модельных диффеоморфизмов $F_{2,3}, F^{1,4}, F_2^4$ изображены на рисунке 4.

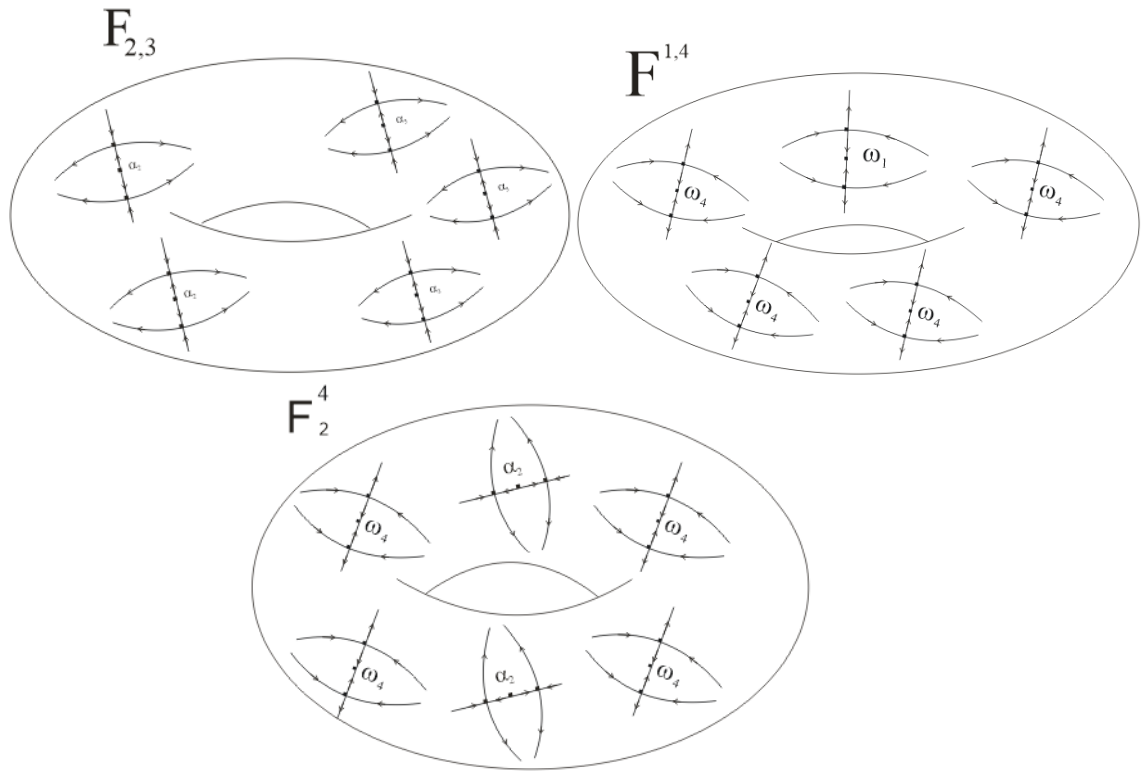


Рис. 4. Модельные диффеоморфизмы $F_{2,3}, F^{1,4}, F_2^4$.

Доказательство основного результата. В настоящем разделе мы реализуем диаграмму Смейла Ω -устойчивым диффеоморфизмом поверхности.

Распределение вершин графа по уровням. Так как в графе Γ нет направленных циклов, на нем можно ввести частичный порядок. Упорядочим вершины графа по следующему принципу:

- уровень B_0 состоит из вершин $b_0^0, \dots, b_0^{q_0}$, в которые не входит ни одно ребро;
- уровень B_r состоит из вершин $b_r^0, \dots, b_r^{q_r}$, в которые входят, только ребра из вершин уровней $B_0, \dots, B_{r-1}$,
- последний уровень B_p состоит из вершин $b_p^0, \dots, b_p^{q_p}$, из которых не выходят ребра (см. рис. 5).

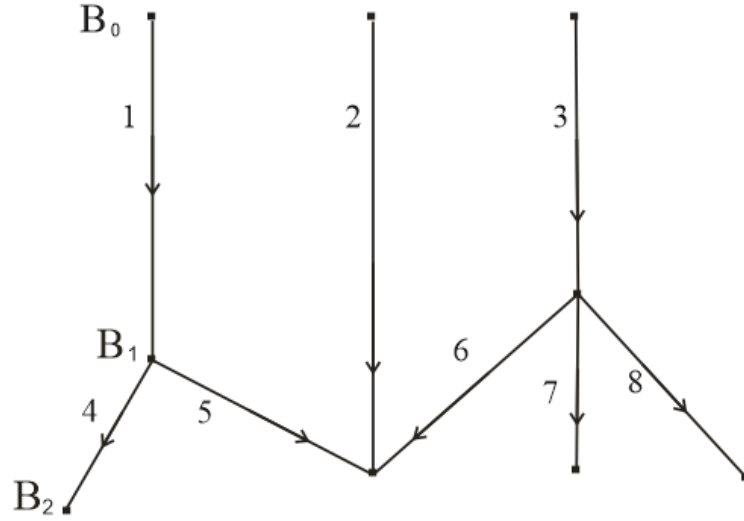


Рис. 5. Распределение вершин по уровням.

Перенумеруем ребра графа в произвольном порядке: каждому ребру $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2})$ поставим в соответствие некоторый номер $k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$, то есть каждое ребро будет определяться тройкой $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$.

Реализация вершин уровня B_0 . Для каждой вершины b_0^j и каждого выходящего ребра положим $n_i = k_{0, r_i}^{j, j_i}$ и $f_{b_0^j} = F^{n_1, \dots, n_{\nu_0^j}}$. Обозначим через ω_{0, r_i}^{j, j_i} стоковую орбиту, соответствующую выходящему ребру $(b_0^j, b_{r_i}^{j_i}, k_{0, r_i}^{j, j_i})$. В примере графа на рисунке 5, $f_{b_0^0} = F^1, f_{b_0^1} = F^2, f_{b_0^2} = F^3$.

Реализация вершин уровня B_r . Для каждой вершины b_r^j и каждого входящего ребра $(b_{r_i}^{j_i}, b_r^j, k_{r_i, r}^{j_i, j})$, $i = 1, \dots, \mu_r^j$ положим $m_i = k_{r_i, r}^{j_i, j}$. Для каждого выходящего ребра $(b_r^j, b_{r_i}^{j_i}, k_{r, r_i}^{j, j_i})$, $i = 1, \dots, \nu_r^j$ положим $n_i = k_{r, r_i}^{j, j_i}$. Положим $f_{b_r^j} = F_{m_1, \dots, m_{\mu_r^j}}^{n_1, \dots, n_{\nu_r^j}}$. Обозначим через $\alpha_{r_i, r}^{j_i, j}$ источниковую орбиту, соответствующую входящему ребру $(b_{r_i}^{j_i}, b_r^j, k_{r_i, r}^{j_i, j})$ и через ω_{r, r_i}^{j, j_i} — стоковую орбиту, соответствующую выходящему ребру $(b_r^j, b_{r_i}^{j_i}, k_{r, r_i}^{j, j_i})$. В примере графа на рисунке 5, $f_{b_0^0} = F_1^{4,5}, f_{b_1^1} = F_3^{6,7,8}$.

Реализация вершин уровня B_p . Для каждой вершины b_p^j и каждого входящего ребра $(b_{r_i}^{j_i}, b_p^j, k_{r_i, r}^{j_i, j}), i=1, \dots, \mu_p^j$ положим $m_i = k_{r_i, r}^{j_i, j}$ и $f_{b_p^j} = F_{m_1, \dots, m_{\mu_p^j}}$. Обозначим через $\alpha_{r_i, p}^{j_i, j}$ источниковую орбиту, соответствующую входящему ребру $(b_{r_i}^{j_i}, b_p^j, k_{r_i, r}^{j_i, j})$.

В примере графа на рисунке 5, $f_{b_2^0} = F_4, f_{b_2^1} = F_{2,5,6}, f_{b_2^2} = F_7, f_{b_2^3} = F_8$.

Склейка динамики вдоль ребра графа Γ . Каждому ребру $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$ графа Γ однозначно соответствует стоковая орбита $\omega_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ диффеоморфизма $f_{b_{r_1}^{j_1}}$ и источниковая орбита $\alpha_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ диффеоморфизма $f_{b_{r_2}^{j_2}}$. Обе орбиты имеют одинаковый период $k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$. Покажем, как склеить динамику вдоль ребра $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$.

Выберем окрестности $U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$, содержащие орбиты $\omega_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, \alpha_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$, соответственно, и такие, что $f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}) \subset \text{int} U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \subset \text{int} f_{b_{r_2}^{j_2}}(V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$. Положим $X_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}, \text{int} f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}), Y_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = f_{b_{r_2}^{j_2}}(V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}), \text{int} V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$. Оба множества состоят из одинакового количества двумерных колец. Обозначим через $H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} : X_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \rightarrow Y_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ диффеоморфизм такой, что $H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \circ f_{b_{r_1}^{j_1}}|_{\partial U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}} = f_{b_{r_2}^{j_2}} \circ H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}|_{\partial U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}}$.

На рисунке 6 введенные объекты изображены для ребра $(b_0^0, b_1^0, 1)$ графа, приведенного на рисунке 5.

Положим

$$Q_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = (\mathbb{T}^2, \text{int} f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})) \cup (\mathbb{T}^2, \text{int} V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$$

и

$$\hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} = (\mathbb{T}^2, \text{int} f_{b_{r_1}^{j_1}}(U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})) \cup_{H_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}} (\mathbb{T}^2, \text{int} V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}).$$

Обозначим через $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} : Q_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \rightarrow \hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ естественную проекцию.

Склейкой динамики вдоль ребра $(b_{r_1}^{j_1}, b_{r_2}^{j_2}, k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$ графа Γ назовем диффеоморфизм $f_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} : \hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} \rightarrow \hat{Q}_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$, совпадающий с диффеоморфизмом $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} f_{b_{r_2}^{j_2}}(p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})^{-1}|_{p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})}$ на $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, V_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$ и с диффеоморфизмом $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2} f_{b_{r_1}^{j_1}}(p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})^{-1}|_{p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})}$ на $p_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}(\mathbb{T}^2, U_{r_1, r_2}^{j_1, j_2})$.

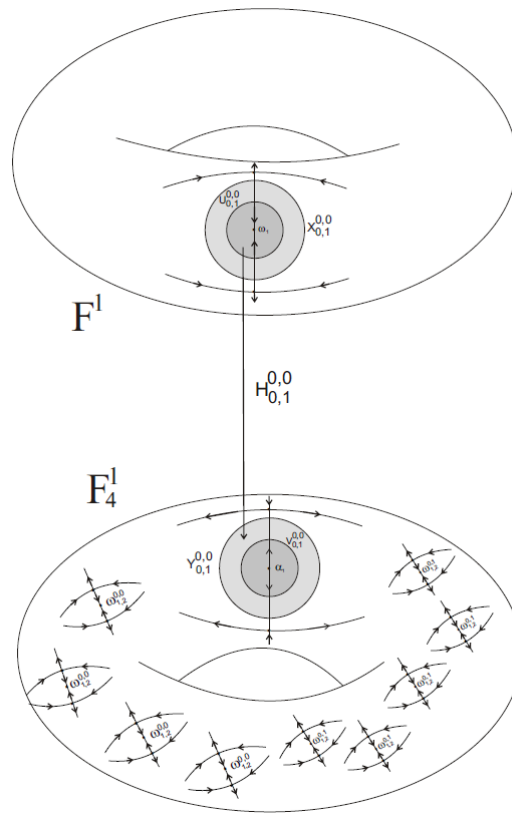


Рис. 6. Объекты, связанные с ребром $(b_0^0, b_1^0, 1)$.

Построение результирующего диффеоморфизма. В построенных по графу Γ моделях существует взаимно однозначное соответствие между стоковыми и источниковыми орбитами.

Именно стоковая орбита $\omega_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ диффеоморфизма $f_{b_{r_1}^h}$ соответствует источниковой орбите $\alpha_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$ диффеоморфизма $f_{b_{r_2}^{j_2}}$. Обе орбиты имеют одинаковый период $k_{r_1, r_2}^{j_1, j_2}$.

Результирующий диффеоморфизм $f: M^2 \rightarrow M^2$ представляет из себя склейку динамики вдоль всех ребер графа Γ .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каток А. Б., Хасселблатт Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999. — 767 с.
2. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. — 1970. — Т. 25, В. 1. — С. 113–185.
3. Smale S. The Ω -stability theorem // Same Proceedings. — 1970. — Vol. 14. — P. 289–297.

4. Williams R. The “ DA ” maps of Smale and structural stability // Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc. – 1970. – P. 329–334.
5. Карпов Д. В. Теория графов. – СПб.: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН. – 2017. – 482 с.