

ГОЛИКОВА И. В., ПОЧИНКА О. В.

НАДСТРОЙКИ НАД ГРУБЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ ОКРУЖНОСТИ¹

Аннотация. В первом разделе данной статьи даны основополагающие определения рассмотренной темы, второй раздел посвящен классификации грубых преобразований окружности, последний – надстройкам над модельными преобразованиями окружности. Основным результатом исследования является теорема 3.1 об эквивалентности надстроек над модельными диффеоморфизмами, сохраняющими и меняющими ориентацию, а также утверждение о том, что из эквивалентности надстроек над меняющими ориентацию диффеоморфизмами следует сопряженность этих диффеоморфизмов.

Ключевые слова: градиентно-подобные диффеоморфизмы, топологическая сопряженность, топологическая эквивалентность, надстройки, грубые преобразования окружности.

GOLIKOVA I. V., POCHINKA O. V.

SUSPENSION OVER ROUGH CIRCLE TRANSFORMATIONS

Abstract. The first section of this article presents the basic definitions of the topic, the second chapter focuses on structurally stable circle transformations, and the last chapter is dedicated to suspensions on model transformation of $\mathbb{S}^1$. The basic results of the research are theorem 3.1 about equivalence of suspensions on model diffeomorphisms and statement 4.1 that equivalence of suspensions on orientation-reversing diffeomorphisms implies the diffeomorphisms conjugacy.

Keywords: gradient-like diffeomorphisms, topological conjugacy and equivalence, suspensions, structurally stable circle transformations.

1. Необходимые определения и факты.

Определение 1.1 Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если:

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q .

Диффеоморфизм Морса-Смейла называется градиентно-подобным, если из условия $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u \neq \emptyset$ для различных точек $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_{\sigma_1}^u < \dim W_{\sigma_2}^u$.

Аналогичным образом определяется поток Морса-Смейла на многообразии M^n ,

¹ Исследование поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грант Правительства РФ, договор 075-15-2019-1931.

который называется градиентно-подобным в случае отсутствия периодических траекторий и называется неособым, в случае отсутствия неподвижных точек.

Неособыми, например, являются потоки, полученные с помощью следующей конструкции надстройки над диффеоморфизмом Морса-Смейла.

Определение 1.2. Пусть $f: M^n \rightarrow M^n$ и φ^t — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$ такой, что $\varphi^t(x, r) = (x, r + t)$. Определим диффеоморфизм $g: M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x, r) = (f(x), r - 1)$. Положим $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $W = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_W: M^n \times \mathbb{R} \rightarrow W$ естественную проекцию и через f^t поток на многообразии W , заданный формулой $f^t(x) = p_W(\varphi^t(p_W^{-1}(x)))$. Поток f^t называется надстройкой над диффеоморфизмом f .

2. Классификация грубых преобразований окружности.

Динамика грубых преобразований окружности. В данном разделе будут изучаться грубые (структурно устойчивые) диффеоморфизмы окружности, то есть те, для которых C^1 -близкие (близкие по координатам и по производной) к ним диффеоморфизмы принадлежат одному и тому же классу эквивалентности.

Результат А. Г. Майера [3] говорит о том, что грубые диффеоморфизмы (обозначим их множество через G) имеют очень простую динамику, которая с современной точки зрения может быть описана следующим предложением (см., например, [1]).

Предложение 2.1. Пусть $f \in G$. Тогда

- 1) f имеет конечное (не меньшее двух) число периодических точек p , то есть точек, для которых существует натуральное число m_p такое, что $f^{m_p}(p) = p$ и $f^j(p) \neq p$ для любого целого $0 < j < m_p$ (обозначим через $Per(f)$ множество периодических точек диффеоморфизма f);
- 2) в окрестности U_p точки p , являющейся компонентой связности множества $\mathbb{S}^1 \setminus (Per(f) \setminus p)$, диффеоморфизм f^{m_p} топологически сопряжен либо с растяжением $\alpha_{\pm}(x) = \pm 2x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (в этом случае точка p называется источником, а окрестность U_p — его неустойчивым многообразием W_p^u), либо со сжатием $\alpha_{\pm}^{-1} = \pm \frac{x}{2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (в этом случае точка p называется стоком, а окрестность U_p — его устойчивым многообразием W_p^s).

Непосредственным следствием такого описания грубого преобразования окружности f является тот факт, что множество $Per(f)$ содержит одинаковое число (обозначим его через r) источников и стоков, которые чередуются на окружности.

Будем считать окружность ориентированной по ходу часовой стрелки и называть ориентацию на дуге $\gamma \subset \mathbb{S}^1$ положительной (отрицательной), если она совпадает (не совпадает) с ориентацией окружности.

Разобьем множество G на два подкласса G_+ и G_- , состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно.

Непосредственным следствием определения ориентируемости отображения и предложения 2.1 являются следующие факты.

Следствие 2.1.

1. Любой диффеоморфизм $f \in G_-$ имеет неподвижную точку.
2. Любой диффеоморфизм $f \in G_+$ ($f \in G_-$) на многообразии $W_{\omega_i}^S$ топологически сопряжен посредством некоторого гомеоморфизма $h_{\alpha_i} : W_{\alpha_i}^u \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизму α_+^{-1} (α_-^{-1}) и на многообразии $W_{\alpha_i}^u$ топологически сопряжен посредством некоторого гомеоморфизма $h_{\alpha_i} : W_{\alpha_i}^u \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизму α_+ (α_-).

В следующей теореме уточняется структура периодических данных диффеоморфизмов класса G .

Теорема 2.1. ([3]).

1. Для каждого диффеоморфизма $f \in G_+$ множество $Per(f)$ состоит из $2n$, $n \in \mathbb{N}$ периодических орбит, каждая из которых имеет период k .
2. Для каждого диффеоморфизма $f \in G_-$ множество $Per(f)$ состоит из $2q$, $q \in \mathbb{N}$ периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2.

Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности грубых преобразований окружности. Пусть $f \in G_+$. Перенумеруем периодические точки множества $Per(f)$:

$p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $f(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in 1, \dots, k-1$ для $k > 1$ и числа (k, l) являются взаимнопростыми. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0 .

Для $f \in G_-$ положим $v = -1$; $v = 0$; $v = +1$, если его неподвижные точки являются источниками; стоком и источником; стоками, соответственно. Заметим, что $v = 0$, если q нечетное и $v = \pm 1$, если q четное.

Следующий результат доставляет необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса G .

Теорема 2.2 ([3]).

1. Дiffeоморфизмы $f; f' \in G_+$ с параметрами $n, k, l; n', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и верно одно из следующих утверждений:
 - $l = l'$ (при этом, если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),
 - $l = k' - l'$ (при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).
2. Дiffeоморфизмы $f; f' \in G_-$ с параметрами $q, v; q', v'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $v = v'$.

Реализация грубых преобразований окружности. Следующая теорема реализации является заключительным этапом топологической классификации и гарантирует существование грубого диффеоморфизма окружности с любым допустимым набором параметров.

Теорема 2.3 ([3]).

1. Для любой тройки целых чисел n, k, l такой, что $n, k \in \mathbb{N}$, $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ и является взаимно простым с k для $k > 1$, существует грубый сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с заданными параметрами.
2. Для любой пары целых чисел q, v такой, что $v = 0$, если q нечетное и $v = \pm 1$, если q четное, существует грубый меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с заданными параметрами.

3. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности.

В настоящем разделе мы рассмотрим надстройки над модельными грубыми преобразованиями окружности. Именно:

1. Сохраняющие ориентацию: $\phi_{n,k,l} = \pi F_{n,k,l} \pi^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, где

$$F_{n,k,l}(x) = x + \frac{1}{4\pi nk} \sin(2\pi nkx) + \frac{l}{k} \text{ для любой тройки целых чисел } n, k, l \text{ такой, что } n, k \in \mathbb{N}, l = 0 \text{ для } k = 1, l \in \{1, \dots, k-1\} \text{ и является взаимно простым с } k \text{ для } k > 1.$$

2. Меняющие ориентацию: $\phi_{q,v} = \pi F_{q,v} \pi^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, где

$$F_{2m+1,0}(x) = -x - \frac{1}{4\pi(2m+1)} \sin(2\pi(2m+1)x); F_{q,+1} = -x + \frac{1}{4\pi q} \sin(2\pi qx);$$

$F_{q,-1} = -x - \frac{1}{4\pi q} \sin(2\pi qx)$ для любой пары целых чисел q, v такой, что $v = 0$, если q нечетное и $v = \pm 1$, если q четное, существует грубый меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с заданными параметрами.

Обозначим через $\phi_{n,k,l}^t, \phi_{q,v}^t$ надстройки над модельными диффеоморфизмами. По построению поток $\phi_{n,k,l}^t$ задан на двумерном торе, тогда как поток $\phi_{q,v}^t$ задан на бутылке

Клейна.

Основным результатом этой главы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1.

1. Потоки $\phi_{n,k,l}^t$; $\phi_{n',k',l'}^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = n'$.
2. Потоки $\phi_{q,v}^t$; $\phi_{q',v'}^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $v = v'$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся результатом работы [2], в которой классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях сведена к изоморфности их графов. Напомним понятие графа Υ_{ϕ^t} для потока ϕ^t на замкнутой поверхности S , который совпадает либо с $\phi_{n,k,l}^t$ на торе, либо с $\phi_{q,v}^t$ на бутылке Клейна. Любая замкнутая траектория с потока ϕ обладает трубчатой окрестностью U_c , которая не пересекается с окрестностями других замкнутых траекторий и чья граница R_c трансверсальна траекториям потока ϕ^t .

Пусть $\mathcal{R} = \bigcup_{c \in \Omega_{\phi^t}} R_c$. Компоненты связности множества $\mathcal{R}$ назовём разрезающими окрестностями. Элементарной ячейкой называется компонента связности множества $\hat{S} = S \setminus \mathcal{R}$. Таким образом, элементарные ячейки потока ϕ^t могут быть одного из двух типов:

- а) ячейка типа $\mathcal{L}$ – содержит ровно одну замкнутую траекторию потока ϕ^t ,
- б) ячейка типа $\mathcal{E}$ – не пересекается с неблуждающим множеством потока ϕ^t .

Ориентируемый граф Υ_{ϕ^t} называют графом потока ϕ^t , если вершины Υ_{ϕ^t} взаимно однозначно соответствуют элементарным ячейкам потока ϕ^t . Мы будем называть $\mathcal{L}$ –, $\mathcal{E}$ –вершиной вершину, соответствующую ячейке типа $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}$.

Трубчатая окрестность U_c окружности c на поверхности может быть либо кольцом с границей из двух окружностей, либо пленкой Мебиуса с границей из одной окружности (см. рис. 1).

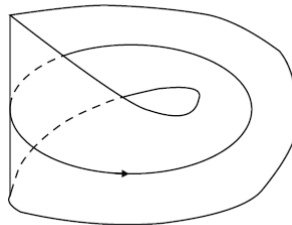


Рис. 1. Случай, когда U_c гомеоморфна пленке Мебиуса.

Тогда соответствующая такой окрестности $\mathcal{L}$ -вершина графа инцидентна либо двум

ребрам одинаковой направленности по отношению к этой вершине, либо одному ребру, соответственно. Поскольку плёнки Мебиуса существуют только на неориентируемых поверхностях, то $\mathcal{L}$ -вершина с одним инцидентным ей ребром может быть только на бутылке Клейна.

В общем случае у потока на поверхности $\mathcal{E}$ -ячейки могут быть двух типов: с согласованной и несогласованной ориентацией компонент связности границы области $\mathcal{E}$ (см. рис. 2).

Поскольку рассматриваемый поток ϕ^t является надстройкой над диффеоморфизмом окружности, то он имеет глобальную секущую и, следовательно, все его $\mathcal{E}$ -ячейки имеют согласованную ориентацию компонент связности границы области $\mathcal{E}$.

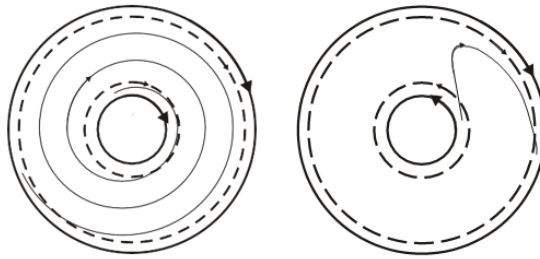


Рис. 2. Два типа $\mathcal{E}$ -ячеек.

Кроме того, любое ребро графа Υ_{ϕ^t} соединяет $\mathcal{L}$ -вершину с $\mathcal{E}$ -вершиной.

Согласно результатам работы [2], потоки ϕ^t, ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм графов $\Upsilon_{\phi^t}, \Upsilon_{\phi'^t}$, сохраняющий тип вершин и ориентацию ребер.

Таким образом, доказательство теоремы сводится к классификации описанных графов с точностью до изоморфизма с описанными свойствами. Приведем эту классификацию отдельно для тора и бутылки Клейна.

Для потока $\phi_{n,k,l}^t$ на торе граф $\Upsilon_{\phi_{n,k,l}^t}$ представляет из себя цикл из $4n$ чередующихся $\mathcal{L}$ - и $\mathcal{E}$ -вершин (см. рис. 3). Таким образом графы $\Upsilon_{\phi_{n,k,l}^t}; \Upsilon_{\phi_{n',k',l'}^t}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $n = n'$.

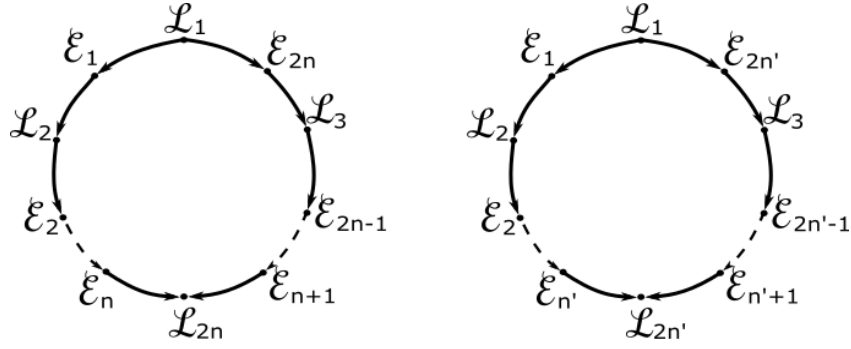


Рис. 3. Граф $Y_{\phi_{n,k,l}^t}$

Рассмотрим теперь две надстройки $\phi_{q,v}^t$ и $\phi_{q',v'}^t$ над меняющими ориентацию диффеоморфизмами с заданными различными q , q' , v и v' . Начнём с примера, который покажет выполнение условия (2) данной теоремы, для доказательства которого так же будем пользоваться изоморфизмом графов надстроек.

Пусть есть два диффеоморфизма, меняющих ориентацию, определенных следующими формулами: $\phi_{3,0} = \pi F_{3,0} \pi^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, где $F_{3,0}(x) = -x - \frac{1}{12\pi} \sin(6\pi x)$, и $\phi_{2,v'} = \pi F_{2,v'} \pi^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, где v' принимает значения ± 1 в силу четности $q' = 2$ и $F_{2,+1} = -x + \frac{1}{8\pi} \sin(4\pi x)$, $F_{2,-1} = -x - \frac{1}{8\pi} \sin(4\pi x)$.

У диффеоморфизма $\phi_{3,0}$ точка $x = 0$ – источник, а $x = \frac{1}{2}$ – сток, точки $x = \frac{1}{6}$ и $x = \frac{5}{6}$ – притягивающие периода 2, а точки $x = \frac{1}{3}$ и $x = \frac{2}{3}$ – отталкивающие периода 2. Для диффеоморфизма $\phi_{2,v'}$ имеем при $v = 1$ два стока $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ и две отталкивающие точки периода 2: $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$. При $v = -1$ имеем 2 источника $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, две притягивающие точки: $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$.

На рисунке 4 изображены ячейки типа $\mathcal{L}$ и $\mathcal{E}$ для потока $\phi_{3,0}^t$ и соответствующий ему граф $Y_{\phi_{3,0}^t}$.

Так как при склейке неподвижным точкам $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ диффеоморфизма $\phi_{3,0}$ соответствуют периодические орбиты на поверхности бутылки Клейна, окрестностью которых будут плёнки Мёбиуса, то исходя из того, что граница такой окрестности – это одна окружность, получим, что каждая из вершин $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_4$ графа надстройки для данного диффеоморфизма инцидентна одному ребру. Направление ребра, соединяющего вершины $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{E}_{i-1}$ зависит от характера орбиты. На рисунке 4 внизу изображен граф, где направление

ребер задано следующим образом: так как $x = \frac{1}{2}$ – отталкивающая неподвижная точка, то ребро, инцидентное вершине $\mathcal{L}_4$, направлено к вершине $\mathcal{E}_3$. Окрестностью каждой из периодических орбит, отмеченных красным цветом на рисунке 4, является кольцо, следовательно, вершинам $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ инциденты два ребра.

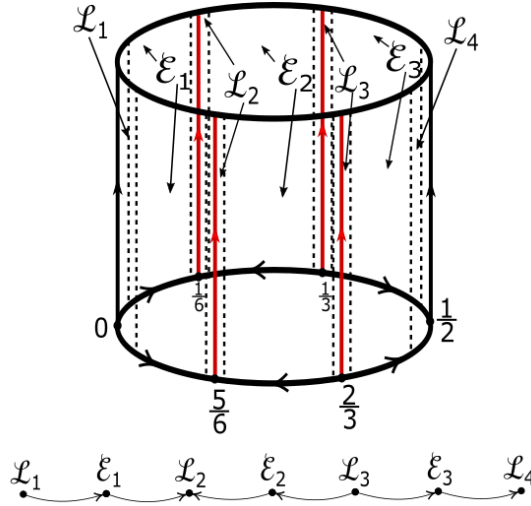


Рис. 4. Надстройка над $\phi_{3,0}$ и соответствующий ей граф $\mathcal{Y}_{\phi_{3,0}^t}$.

Направление рёбер от одной вершины к другой обусловлено поведением траекторий на поверхности бутылки Клейна, полученной склейкой точек на окружностях нижнего и верхнего уровней так, как это показано на рисунке 5 стрелками, изображенными черным пунктиром на видимой части цилиндра и серым – на задней части.

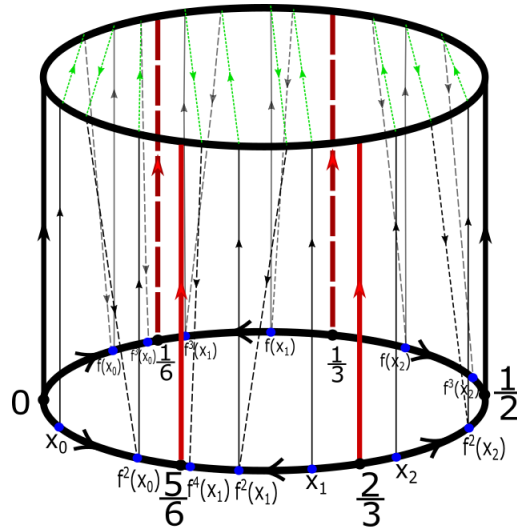


Рис. 5. Поведение траекторий на $\phi_{3,0}^t$ и направления склейки (пунктиром черного и серого цвета).

Аналогичным рассуждениям поддается и пример с грубым преобразованием окружности $\phi_{2,1}$. Так как орбиты, отмеченные красным на рисунке 3.6, отталкивающие, в силу того что $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$ – источники (см. поведение орбит на рис. 6), то ребра графа $Y_{\phi_{2,v'}^t}$, инцидентные вершине L_2 выходят из неё к вершинам ε_2 . Следовательно, получим граф, изображенный ниже.

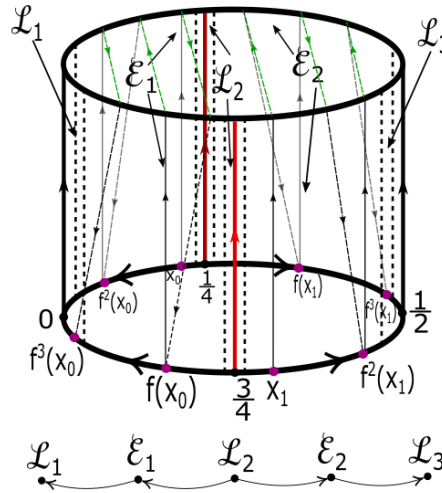


Рис. 6. Надстройка над $\phi_{2,1}$, поведение траекторий при склейке
и соответствующий ей граф $Y_{\phi_{2,1}^t}$

Для диффеоморфизма $\phi_{2,-1}$ надстройка $\phi_{2,-1}^t$ производится таким же образом, как и в случае, когда $v' = 1$, за исключением того, что $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ теперь источники. Тогда для графа $Y_{\phi_{2,-1}^t}$ справедливы те же рассуждения, что и для графа надстройки $\phi_{2,1}^t$, только в данном случае направление рёбер меняется в противоположную сторону (см. рис. 7).



Рис. 7. Граф $Y_{\phi_{2,-1}^t}$

Заметим, что графы $Y_{\phi_{3,0}^t}$, $Y_{\phi_{2,1}^t}$ и $Y_{\phi_{2,-1}^t}$ попарно не изоморфны, так как ни один из них нельзя получить переименованием вершин другого так, чтобы их тип и ориентация ребер не менялась. Количество вершин графа $Y_{\phi_{3,0}^t}$ отличается от количества вершин других двух построенных графов в примере, а у графов $Y_{\phi_{2,1}^t}$ и $Y_{\phi_{2,-1}^t}$ различается направление

рёбер. Соответственно, пользуясь снова критерием об эквивалентности потоков с помощью построения изоморфизма графов, получим, что надстройки $\phi_{3,0}^t$, $\phi_{2,1}^t$ и $\phi_{2,1}^t$ не эквивалентны.

Перейдём к общему случаю для потоков $\phi_{q,v}^t$ и $\phi_{q',v'}^t$ для $q \neq q'$ и $v \neq v'$. Опираясь на рассуждения, приведенные выше в примерах, получим графы данных надстроек с различными q и v . Количество ячеек в графе надстройки над диффеоморфизмом $\phi_{q,v}$ равно $2q + 1$. Графы для различных q и v представлены на рисунках 8–10 ниже. Если оба числа q и q' нечётные ($v = v' = 0$), причем $q \neq q'$, то количество вершин графов надстроек с такими данными не совпадает, значит, нельзя построить биекцию между вершинами.

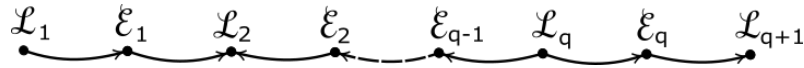


Рис. 8. Граф $Y_{\phi_{q,0}^t}$ для $q = 2n + 1$.

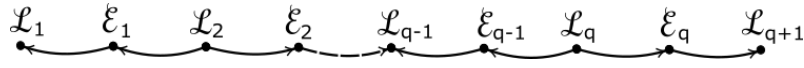


Рис. 9. Граф $Y_{\phi_{q,1}^t}$ для $q = 2n, v = 1$.

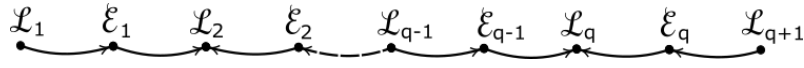


Рис. 10. Граф $Y_{\phi_{q,-1}^t}$ для $q = 2n, v = -1$.

Аналогично для чётных и не равных друг другу q и q' получим различное количество вершин у графов. Если же в данном случае $q = q'$, но $v \neq v'$, то количество вершин, конечно, совпадает, а направление рёбер – нет, как это показано на рисунках 9 и 10 для общего случая.

Для случая, когда $q = 2n$ и $q' = 2n + 1$, $n = 1, 2, \dots$, имеем и разное количество вершин, и меняющуюся ориентацию ребер (см. рисунки 8-10).

Значит, во всех рассмотренных случаях при $q \neq q'$ и $v \neq v'$ имеем не изоморфные графы $Y_{\phi_{q,v}^t}, Y_{\phi_{q',v'}^t}$. Следовательно надстройки $\phi_{q,v}^t$ и $\phi_{q',v'}^t$ не эквивалентны.

Значит, необходимым и достаточным условием того, чтобы $\phi_{q,v}^t$ и $\phi_{q',v'}^t$ были эквивалентны, является условие $q = q'$ и $v = v'$.

4. Заключение. Таким образом, делая вывод о классификации надстроек над градиентно-подобными диффеоморфизмами, мы получили доказательство того, что из эквивалентности надстроек $\phi_{n,k,l}^t$ и $\phi_{n',k',l'}^t$ не следует сопряженность диффеоморфизмов $\phi_{n,k,l}$ и $\phi_{n',k',l'}$. Тем не менее, если надстройки над меняющими ориентацию диффеоморфизмами $\phi_{q,v}^t$ и $\phi_{q',v'}^t$ эквивалентны, то и сами $\phi_{q,v}$ и $\phi_{q',v'}$ сопряжены.

То есть результатом данной работы можно считать следующее утверждение:

Предложение 4.1. Дiffeоморфизмы $\phi_{q,\nu}$ и $\phi_{q',\nu'}$ сопряжены тогда и только тогда, когда надстройки $\phi_{q,\nu}^t$ и $\phi_{q',\nu'}^t$ эквивалентны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3- Manifolds. – Switzerland: Springer International Publishing, 2016. – 313 p.
2. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. Topological Classification of Ω -stable Flows on Surfaces by Means of Effectively Distinguishable Multigraphs // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2018. – Vol. 38. No. 9. – P. 4305– 4327.
3. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. ун-та. – 1939. – Т. 12. – С. 215–229.
4. Peixoto M. M. On structural stability // Ann. Math. – 1959. – Vol. 69. – P. 199–222.