

ШАМАНАЕВ П. А., КАРЧИГАНОВ А. Ф.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ
СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ**

Аннотация. В работе реализован алгоритм нахождения периодических решений одной линейной системы двух связанных осцилляторов с малым параметром на основе метода Ляпунова-Шмидта. Рассмотрены случаи, когда частота вынужденных колебаний совпадает с одной из частот собственных колебаний. Построены графики периодических решений и фазовых траекторий системы двух связанных осцилляторов.

Ключевые слова: система двух связанных осцилляторов, малый параметр, колебания, метод Ляпунова-Шмидта, резонанс.

SHAMANAEV P. A., KARCHIGANOV A. F.

**INVESTIGATION OF FORCED OSCILLATIONS OF A LINEAR SYSTEM
OF TWO COUPLED OSCILLATORS WITH A SMALL PARAMETER**

Abstract. The article is devoted to the description of the development of an algorithm for finding periodic solutions of one linear system of two coupled oscillators with a small parameter based on the Lyapunov-Schmidt method. The cases when the frequency of forced oscillations coincides with one of the natural oscillation frequencies are considered. Graphs of periodic solutions and phase trajectories of a system of two coupled oscillators have been constructed.

Keywords: system of two coupled oscillators, small parameter, oscillations, Lyapunov-Schmidt method, resonance.

Введение. Основные подходы метода Ляпунова-Шмидта нахождения решений нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром в банаховом пространстве изложены в работах [1; 2]. Для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром в банаховом пространстве задача нахождения периодических решений методом Ляпунова-Шмидта рассматривалась в работах [3–5]. В работе [6] методом Ляпунова-Шмидта построено периодическое решение для одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым линейным возмущением. В настоящей работе на основании результатов работы [5] методом Ляпунова-Шмидта построено периодическое решение одной линейной системы двух связанных осцилляторов с малым параметром в резонансном случае.

Математическая модель системы двух связанных осцилляторов с малым параметром. Рассмотрим математическую модель вынужденных колебаний двух связанных осцилляторов [7] с малым параметром

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + (c_{11} + \varepsilon d_{11})q_1 + (c_{12} + \varepsilon d_{12})q_2 &= F_1(t), \\ m_2 \ddot{q}_2 + (c_{12} + \varepsilon d_{12})q_1 + (c_{22} + \varepsilon d_{22})q_2 &= F_2(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где q_1 и q_2 – обобщенные координаты системы двух связанных осцилляторов; ε – малый вещественный параметр; $F_1(t)$, $F_2(t)$ – внешние силы, изменяющиеся по закону

$$F_1(t) = r_1 \sin(\omega t + \theta_1), \quad F_2(t) = r_2 \sin(\omega t + \theta_2),$$

здесь $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\theta_1, \theta_2, \omega \in R$.

Будем предполагать, что для параметров $m_i, c_{ij}, d_{ij} \in R, i \leq j, i, j = 1, 2$, системы (1) и достаточно малого ε справедливы неравенства

$$m_i > 0, c_{11} + \varepsilon d_{11} > 0, (c_{11} + \varepsilon d_{11})(c_{22} + \varepsilon d_{22}) - (c_{12} + \varepsilon d_{12})^2 > 0.$$

Выполняя замену координат

$$\begin{cases} x_1 = q_1 \\ x_3 = q_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q}_1 \\ x_4 = \dot{x}_3 = \dot{q}_2 \end{cases},$$

в системе (1), запишем ее в векторной форме

$$A \frac{dx}{dt} = (B_0 - \varepsilon B_1)x - f(t), \quad (2)$$

где $x = colon(x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}, & B_0 &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ c_{12} & 0 & c_{22} & 0 \end{pmatrix}, \\ B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{11} & 0 & d_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{12} & 0 & d_{22} & 0 \end{pmatrix}, & f(t) &= -\begin{pmatrix} 0 \\ r_1 \sin(\omega t + \theta_1) \\ 0 \\ r_2 \sin(\omega t + \theta_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На основании результатов работы [5] исследуем вынужденные колебания системы (2) в математическом пакете Maple при следующих значениях параметров

$$m_1 = m_2 = 1, \quad c_{11} = c_{22} = 5, \quad c_{12} = 4, \quad d_{11} = -2, \quad d_{22} = 2, \quad d_{12} = 0.$$

При выбранных значениях параметров матрица B_0 имеет следующие собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm 3i.$$

Тогда возможны два случая возникновения резонанса: 1) $\omega = 1$; 2) $\omega = 3$.
Следовательно, согласно [5], в случае 1) $T = 2\pi$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, а в случае 2) $T = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha_1 = 3$.

Ставится задача [1]: при достаточно малых вещественных ε найти T -периодические решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $x(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ является T -периодическим решением уравнения

$$A \frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \quad (3)$$

В дальнейшем систему (2) будем называть возмущенной системой, а систему (3) – невозмущенной системой.

Обобщенные жордановы наборы, удовлетворяющие условию биортогональности.

Элементы $\varphi_k^{(j)}$, $\psi_k^{(j)}$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, p_k}$ обобщенных жордановых цепочек оператора

$$B_0 \equiv B_0 - A \frac{d}{dt}$$

и его сопряженного

$$B_0^* \equiv B_0^* + A^* \frac{d}{dt}$$

определяются по формулам [5]

$$\begin{aligned} B_0 \varphi_k^{(1)} &= 0, & B_0 \varphi_k^{(j)} &= B_1 \varphi_k^{(j-1)}, & j &= \overline{2, p_k}, \\ B_0^* \psi_s^{(1)} &= 0, & B_0^* \psi_s^{(l)} &= B_1^* \psi_s^{(l-1)}, & l &= \overline{2, p_s}, \\ & & k, s &= \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (4)$$

где B_1^* – матрица, сопряженная к B_1 .

Полагая

$$\varphi_k^{(j)} = v_k^{(j)} e^{\lambda t}, \quad \psi_s^{(l)} = u_s^{(l)} e^{\lambda t},$$

где $v_k^{(j)}$, $u_s^{(l)} \in C^4$ из формул (4) вычислим

1) в случае $\omega = 1$: $n = 2$, $p_1 = p_2 = 2$,

$$\varphi_1^{(1)} = e^{3it} \begin{pmatrix} \frac{i}{3} \\ -1 \\ -\frac{i}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1^{(2)} = e^{3it} \begin{pmatrix} -\frac{i}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2^{(1)} = e^{it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2^{(2)} = e^{it} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\psi_1^{(1)} = e^{3it} \begin{pmatrix} 9 \\ 3i \\ -9 \\ -3i \end{pmatrix}, \quad \psi_1^{(2)} = e^{3it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{2} \\ 3i \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}, \quad \psi_2^{(1)} = e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \psi_2^{(2)} = e^{it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ i \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) в случае $\omega = 3$: $n = 1, p_1 = 2$,

$$\varphi_1^{(1)} = e^{3it} \begin{pmatrix} \frac{i}{3} \\ -1 \\ -\frac{i}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi_1^{(2)} = e^{3it} \begin{pmatrix} -\frac{i}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_1^{(1)} = e^{3it} \begin{pmatrix} 9 \\ 3i \\ -9 \\ -3i \end{pmatrix}, \quad \psi_1^{(2)} = e^{3it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{2} \\ -\frac{3i}{2} \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что обобщенные жордановы наборы в случаях

1) и 2) удовлетворяют условиям биортогональности [5]

$$\begin{aligned} \langle\langle z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)} \rangle\rangle &= \delta_{ks} \delta_{jl}, & \langle\langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \rangle\rangle &= \delta_{ks} \delta_{jl}, \\ z_k^{(j)} &= B_1 \varphi_k^{(p_k+1-j)}, & \gamma_s^{(l)} &= B_1^* \psi_s^{(p_s+1-l)}, \\ j &= \overline{2, p_k}, & l &= \overline{2, p_s}, & k, s &= \overline{1, n}. \end{aligned}$$

где δ_{ks}, δ_{jl} – символы Кронекера,

$$\langle\langle z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)} \rangle\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle z_k^{(j)}(t), \psi_s^{(l)}(t) \rangle dt, \quad \langle\langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \rangle\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \langle \varphi_k^{(j)}(t), \gamma_s^{(l)}(t) \rangle dt,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов.

Нахождение коэффициентов в разложении искомого периодического решения по обобщенному жорданову набору. Согласно [5] вычислим коэффициенты в разложении периодического решения возмущенной системы по формуле

$$g_{kj} = \langle\langle f, \psi_k^{(j)} \rangle\rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T \langle f(t), \psi_k^{(j)}(t) \rangle dt, \quad k = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_k}.$$

Заметим, что для того, чтобы невозмущенная система (3) имела T -периодические решения необходимо и достаточно, чтобы $g_{k1} = 0, k = \overline{1, n}$.

Рассмотрим случай 1) $\omega = 1$. Имеем

$$g_{11} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad g_{21} = i(-r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}), \quad g_{22} = \frac{1}{4}.$$

Если $-r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = 0$, то $g_{21} = 0$ и система (3) имеет семейство 2π -периодических решений. В частности, это условие выполняется при $r_1 = r_2 = 1$ и $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим случай 2) $\omega = 3$. Имеем

$$g_{11} = 3i(r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}), \quad g_{12} = -\frac{3i}{4}.$$

Если $(r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2}) = 0$, то $g_{11} = 0$ и система (3) имеет семейство $\frac{2\pi}{3}$ -периодических решений. Это условие выполняется, например, при $r_1 = r_2 = 1$, $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$.

Нахождение дополнительного линейного слагаемого. Дополнительное линейное слагаемое, входящее в периодическое решение возмущенной системы и принадлежащее к дополнению корневого пространства, имеет вид

$$y(t, \varepsilon) = e^{i\omega t} b + e^{-i\omega t} \bar{b},$$

где $b \in C^4$ находится из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} B_0 - \varepsilon B_1 + \operatorname{Re}(S) & \omega A - \operatorname{Im}(S) \\ -\omega A + \operatorname{Im}(S) & B_0 - \varepsilon B_1 + \operatorname{Re}(S) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(b) \\ \operatorname{Im}(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(h) \\ \operatorname{Im}(h) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Здесь $h = \operatorname{colon}(0, r_1 e^{i\theta_1}, 0, r_2 e^{i\theta_2})$, $S - (2 \times 2)$ – матрица, элементы которой вычисляются по формулам

$$S = \sum_{k=1}^n S_k, \quad S_k = \frac{1}{T} \int_0^T z_k^{(1)}(t) \bar{\gamma}_k^{(1)}(t) dt, \\ z_k^{(1)} = B_1 \varphi_k^{(p_k)}, \quad \gamma_k^{(1)} = B_1^* \psi_k^{(p_k)}, \\ k = \overline{1, n}.$$

Решая систему (5) в случае $\omega = 1$, получим

$$y(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{(2\varepsilon + 1) \sin t}{4(\varepsilon^2 - 1)} \\ \frac{(2\varepsilon + 1) \cos t}{4(\varepsilon^2 - 1)} \\ \frac{\varepsilon \sin t}{2(\varepsilon^2 - 1)} \\ -\frac{\varepsilon \cos t}{2(\varepsilon^2 - 1)} \end{pmatrix}, \quad y(t, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\sin t}{4} \\ \frac{\cos t}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая систему (5) в случае $\omega = 3$, получим

$$y(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{(2\varepsilon - 1) \cos 3t}{4(\varepsilon^2 - 1)} \\ \frac{3(2\varepsilon - 1) \sin 2t}{4(\varepsilon^2 - 1)} \\ \frac{\varepsilon \cos 3t}{2(\varepsilon^2 - 1)} \\ -\frac{3\varepsilon \sin 3t}{2(\varepsilon^2 - 1)} \end{pmatrix}, \quad y(t, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos 3t}{4} \\ \frac{3 \sin 3t}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Периодические решения возмущенной и невозмущенной систем. С использованием математического пакета Maple методом Ляпунова-Шмидта [5] построены следующие периодические решения возмущенной и невозмущенной систем.

Единственное T -периодическое решение системы (2) имеет вид [5]

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \frac{\varepsilon^{j-1}}{1 - \varepsilon^{p_k}} \left(\xi_{k1} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(j)} \right) + y(t, \varepsilon), \quad (6)$$

где ξ_{k1} определяются из равенств

$$\xi_{k1} = -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}} (g_{k1} + g_{k2}\varepsilon + g_{k3}\varepsilon^2 + \dots + g_{kp_k}\varepsilon^{p_k-1}), \quad k = \overline{1, n}.$$

Семейство T -периодических решений системы (3), имеет вид [5]

$$x(t, 0) \equiv z(t) = \sum_{k=1}^2 c_k \left[\varphi_k^{(1)} + \bar{\varphi}_k^{(1)} \right] + y(t, 0), \quad (7)$$

1) Случай $\omega = 1$. По формулам (6) и (7) найдем 2π -периодические решения систем (2) и (3), соответственно,

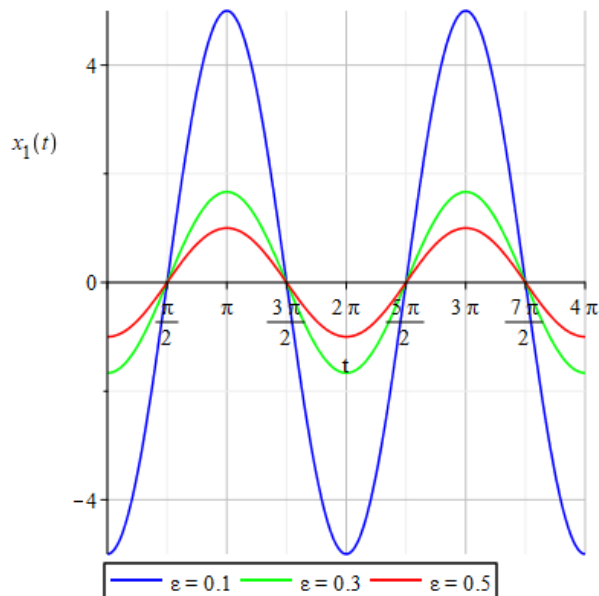
$$x(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{\cos t}{2\varepsilon} \\ \frac{\sin t}{2\varepsilon} \\ \frac{\cos t}{2\varepsilon} \\ -\frac{\sin t}{2\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c_1 \sin 3t - 2c_2 \sin t + \frac{1}{4} \cos t \\ 2c_1 \cos 3t - 2c_2 \cos t - \frac{1}{4} \sin t \\ \frac{2}{3}c_1 \sin 3t + 2c_2 \sin t \\ 2c_1 \cos 3t + 2c_2 \cos t \end{pmatrix}.$$

2) Случай $\omega = 3$. Учитывая формулы (6) и (7), найдем $\frac{2\pi}{3}$ -периодические решения систем (2) и (3), соответственно,

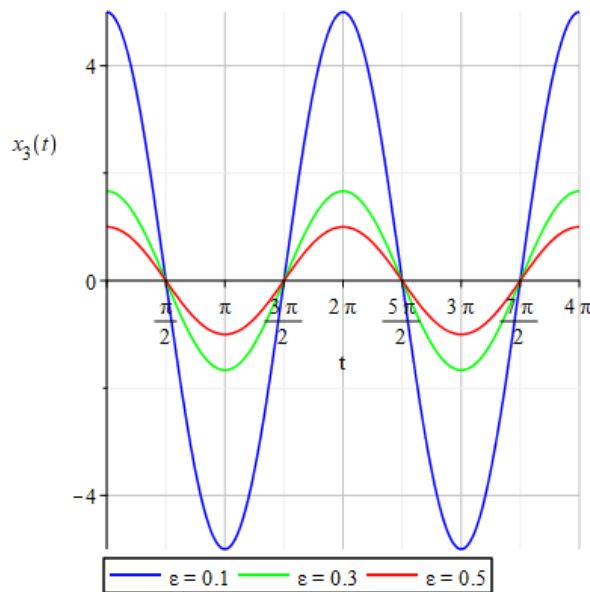
$$x(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin 3t}{2\varepsilon} \\ \frac{3 \cos 3t}{2\varepsilon} \\ -\frac{\sin 3t}{2\varepsilon} \\ \frac{3 \sin 3t}{2\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c_1 \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 3t \\ 2c_1 \cos 3t - \frac{3}{4} \cos 3t \\ \frac{2}{3}c_1 \sin 3t \\ 2c_1 \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Построение графиков компонент периодических решений возмущенной системы.

Учитывая, что обобщенным координатам q_1 и q_2 , соответствуют компоненты $x_1(t, \varepsilon)$ и $x_3(t, \varepsilon)$ периодического решения возмущенной системы (2), приведем графики этих компонент при различных ε в случаях 1) $\omega = 1$ и 2) $\omega = 3$.

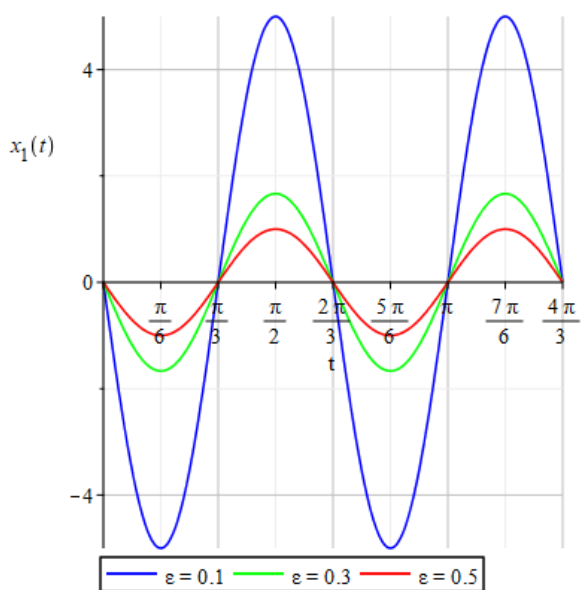


а) $x_1(t, \varepsilon)$;

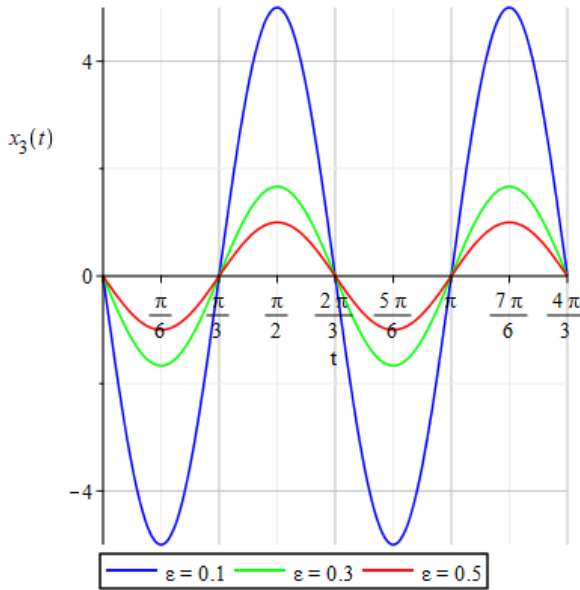


б) $x_3(t, \varepsilon)$;

Рис. 1. Графики компонент а) $x_1(t, \varepsilon)$ и б) $x_3(t, \varepsilon)$ 2π -периодических решений системы (2) при различных ε в случае 1) $\omega = 1$.



а) $x_1(t, \varepsilon)$;



б) $x_3(t, \varepsilon)$;

Рис. 2. Графики компонент а) $x_1(t, \varepsilon)$ и б) $x_3(t, \varepsilon)$ $\frac{2\pi}{3}$ -периодических решений системы (2) при различных ε в случае 2) $\omega = 3$.

Построение графиков проекций фазовых траекторий возмущенной и невозмущенной систем. Приведем графики проекций фазовых траекторий возмущенной и невозмущенной систем (2) и (3).

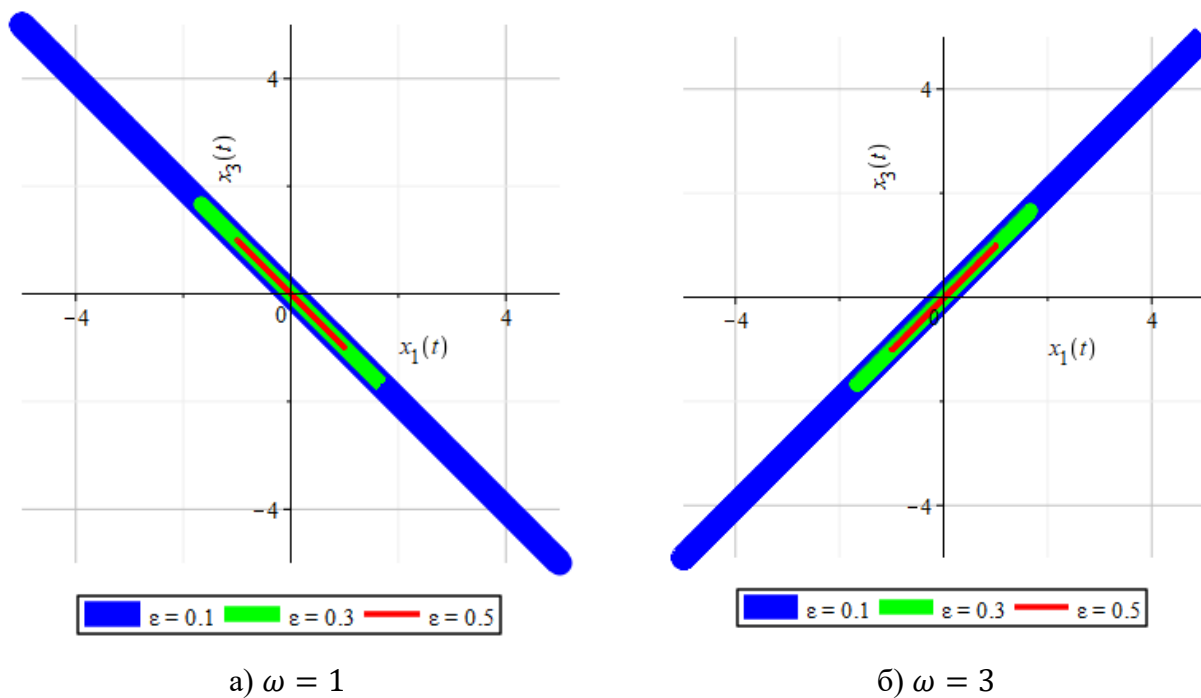


Рис. 3. Графики проекций фазовых траекторий на плоскость (x_1, x_3) возмущенной системы (2) при различных ε в случае а) $\omega = 1$ и б) $\omega = 3$.

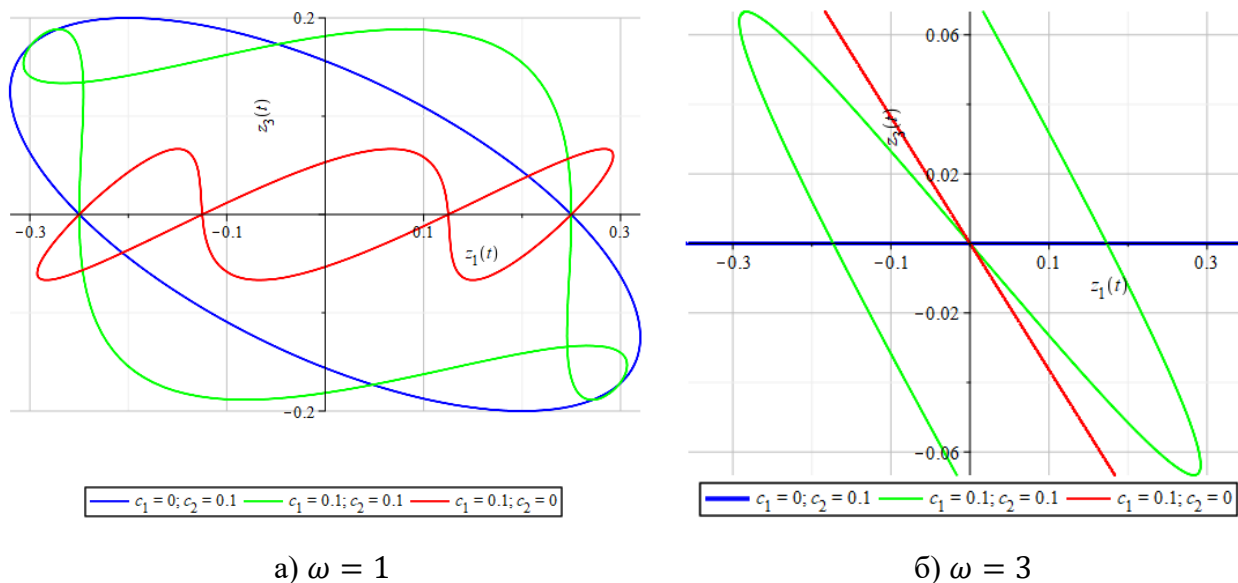


Рис. 4. Графики проекций фазовых траекторий на плоскость (z_1, z_3) невозмущенной системы (3) при различных ε в случае а) $\omega = 1$ и б) $\omega = 3$.

Заключение. Из формул (4) и (5) следует, что периодические решения $x(t, \varepsilon)$ возмущенной системы (2) в случаях 1) $\omega = 1$ и 2) $\omega = 3$ имеют полюс первого порядка в точке $\varepsilon = 0$, и, следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ не стремятся к соответствующим решениям $z(t)$ невозмущенной системы (3). Наличие полюса первого порядка обуславливается тем, что коэффициенты g_{22} в случае 1) $\omega = 1$ и g_{12} в случае 2) $\omega = 3$ отличны от нуля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука. – 1964. – 524 с.
2. Коноплева И. В., Логинов Б. В. Обобщенная жорданова структура и симметрия разрешающих систем ветвления // Вестн. Самарск. ун-та. – 2001. – №4. – С. 56–84.
3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 3. – С. 100–107.
4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 33–40.
5. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 45–53.
6. Кадрякова М. Р., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях одного класса линейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром в резонансном случае [Электронный ресурс] // Ogarev-online. – 2017. – №13. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/o-periodicheskix-resheniyax-odnogo-klassa-linejnyx-neodnorodnyx-sistem-obyknovennyx-differencialnyx-uravnenij-s-malym-parametrom-v-rezonansnom-sluchae> (дата обращения 12.09.2020).
7. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний: Учебник. 3-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2005. – 440 с.