

МИХЕЕВ Д.С., ПИЧУШКИН М.М.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА

Аннотация. В статье рассмотрены уравнения, описывающие движение жидкостей и газов, в код программы для моделирования задач гидродинамики cfd_2d, разрабатываемой на кафедре прикладной математики, добавлена возможность расчёта течений вязкого газа. Также проведён анализ решения типовых задач.

Ключевые слова: гидродинамика, вязкость, численное моделирование, уравнения Навье-Стокса.

MIKHEEV D.S., PICHUSHKIN M.M.

COMPUTER SIMULATION OF VISCOUS GAS FLOWS

Abstract. The article considers equations to describe fluid and gas motions. Particularly, the authors have added formulas for viscous fluid flows computing to the code of fluid mechanics computational program cfd_2d developed by the Chair of Applied Mathematics. The article also includes an analysis of typical problems.

Key words: fluid mechanics, viscosity, computational simulation, Navier-Stokes equations.

Многие вопросы современной науки и техники в той или иной мере связаны с решением уравнений газовой динамики, описывающих движение сплошной сжимаемой среды. Одними из важнейших уравнений являются уравнения Навье-Стокса, описывающие движение вязкой ньютоновской жидкости. Они широко применяются в математическом моделировании многих природных явлений и технических задач.

Для прямоугольной декартовой системы координат (x, y) все уравнения, входящие в систему уравнений Навье-Стокса, можно записать в следующей общей консервативной форме [2]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^e - \partial F^v}{\partial x} + \frac{\partial G^e - \partial G^v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

где консервативные переменные U и декартовы компоненты F^e и G^e функции невязкого потока и компоненты F^v и G^v функции вязкого потока заданы в виде:

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}; F^e = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(E + p) \end{pmatrix}; G^e = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{pmatrix};$$

$$F^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{yx} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{yx} \end{pmatrix}; G^v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} \end{pmatrix};$$

где ρ – плотность газа, u, v – компоненты вектора скорости; E – полная внутренняя энергия, t – время, p – давление.

Компоненты тензора вязких напряжений и вектора плотности теплового потока выражаются по формулам:

$$\tau_{xx} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\tau_{yy} = \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

где λ – коэффициент объёмной вязкости, μ – коэффициент динамической вязкости.

В рамках данной работы в пакет программ cfd-2d [1] был добавлен код, отвечающий за расчёт вязких потоков.

Для расчёта целевых значений в программе используется метод конечных объёмов [2]. В качестве контрольного объёма возьмем ячейки сетки, являющиеся треугольниками. Тогда разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + \frac{1}{S_{\Delta i}} \left(\sum_{j=1}^3 \overline{F_{nij}^k} l_{ij} - \sum_{j=1}^3 \overline{H_{nij}^k} l_{ij} \right)$$

где τ – шаг по времени, $\overline{F_{nij}}$, $\overline{H_{nij}}$ – конвективный и вязкий потоки на границе между ячейками Δi и Δj соответственно, l_{ij} – длина стороны треугольника. Отсюда выражается u_i^{k+1} – величина на следующем временном слое, и так далее до тех пор, пока не будет достигнуто заданное время и установление течения для стационарных задач.

Фактически алгоритм сводится к вычислению потоков на границе ячейки и нахождению значений вектора u_i на новом временном слое. Конвективные потоки получаются как решение задачи о распаде разрыва на границе между соответствующими ячейками [3]. Для вычисления вязких потоков предварительно вычисляются значения градиентов компонент скорости в ячейках, а затем значения компонент тензора вязких напряжений. Для вычисления градиентов используется формула Гаусса-Грина [4]:

$$\nabla u_i = \frac{1}{S_{\Delta_i}} \oint_{\partial \Delta_i} u \vec{n} dl.$$

Для проверки корректности работы программы были решены две задачи.

Первая задача – двумерная задача дозвукового ($M=0.7$) обтекания симметричного крылового профиля NACA 0012 потоком вязкого газа.

Профиль обтекается потоком воздуха под углом атаки 1.489 градуса, при давлении 46066.16 Па и температуре 248 К.

Использовалась неструктурированная треугольная сетка [5]. В качестве сравнительной характеристики между результатом численного метода и ранее проведенным экспериментом рассматривается коэффициент давления по поверхности профиля (рис. 1).

$C_p = \frac{p}{(\rho_\infty u_\infty^2)/2}$, где ρ_∞, u_∞^2 – параметры набегающего потока.

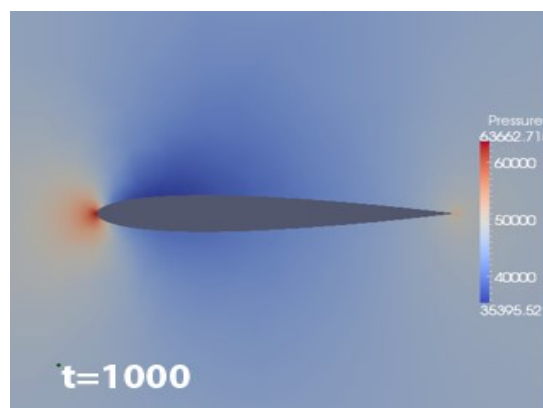
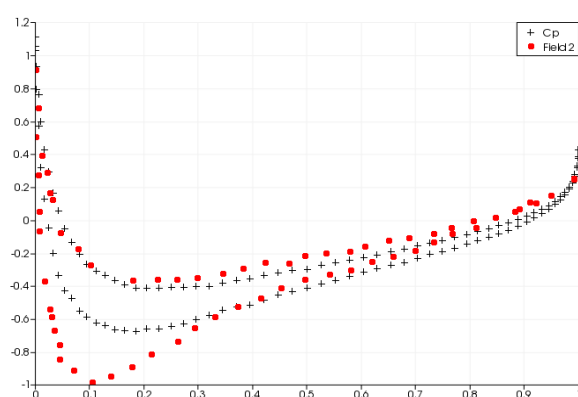


Рис. 1. Распределение коэффициента давления по поверхности профиля (слева; красные маркеры – эксперимент, черные – результаты расчетов) и поле давления вокруг профиля (справа).

Исходя из графика, можно утверждать, что по результатам расчетов предложенный численный метод и разработанный программный код показали хорошее соответствие полученных расчетных результатов с экспериментальными данными. Имеется расхождение экспериментальных и расчетных данных на верхней части профиля, это связано с тем, что в расчетах не учтено влияние турбулентной вязкости.

Вторая задача - задача о стационарном сверхзвуковом обтекании клина с числом Маха $M = 2$. Производится анализ конфигурации системы скачков уплотнения возникающих при обтекании клина (рис. 2) и многократного отражения начального скачка от стенок канала.

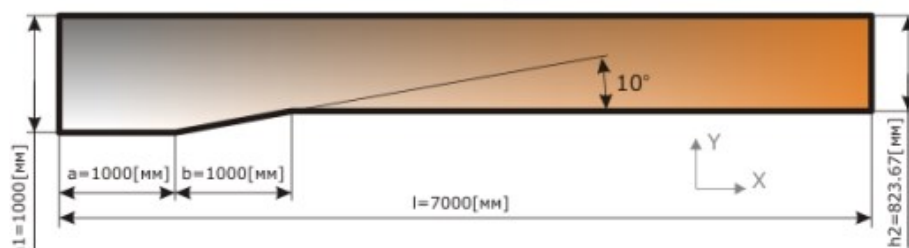


Рис. 2. Эскиз геометрии

Использовалась неструктурированная треугольная сетка [5], модель газа - вязкий газ. На рисунках 3 и 4 представлено распределение полей числа Маха и давления.

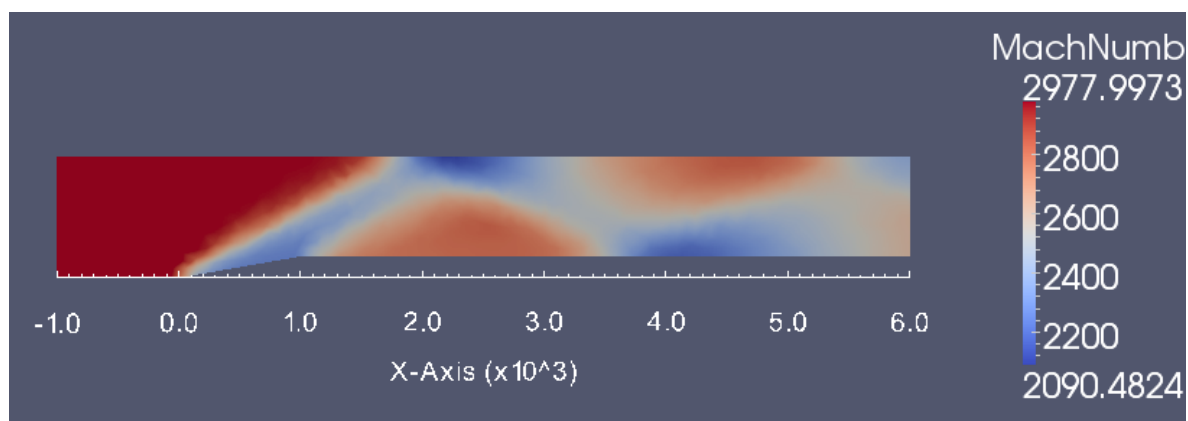


Рис. 3. Поле числа Маха М

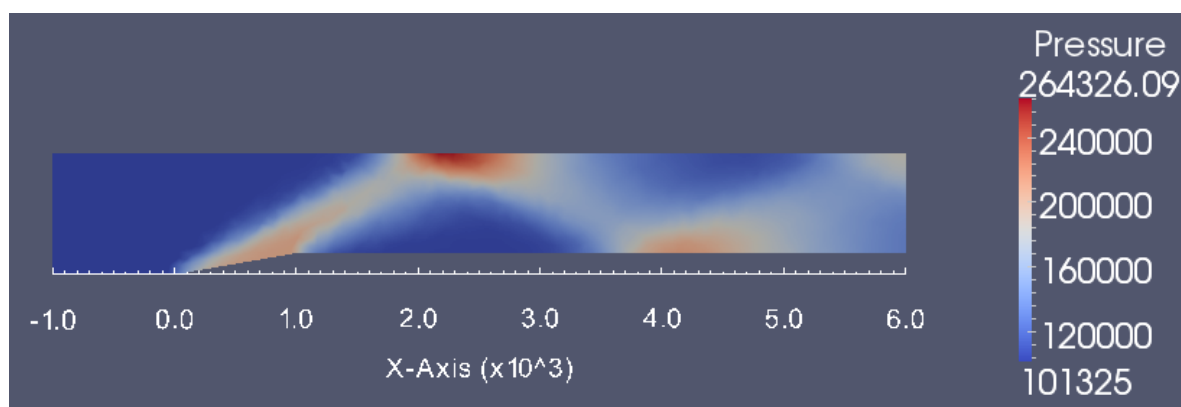


Рис. 4. Поле давления

ЛИТЕРАТУРА

1. CFD code for 2D simulation gas and fluid flows – [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://code.google.com/p/cfd-2d/>
2. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 т. Т. 1 : пер. с англ / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – М. : Мир, 1990. – 384 с.

3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – 3-е изд., доп. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
4. Куликовский А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семёнов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 608 с.
5. Программа генерации сетки – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>
6. Платформа для визуализации и анализа данных приложения – [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://paraview.org/>