

КОСОЛАПОВ В.П.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ БЕЗ ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НЕЕ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Аннотация: В статье рассматривается задача о распределении температуры в однородной пластине без воздействия на нее источником тепла. Построена дивергентная разностная схема. Приведены результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, численное моделирование, закон сохранения, дивергентная разностная схема.

KOSOLAPOV V.P.

NUMERICAL MODELLING OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN HOMOGENEOUS PLATE WITHOUT AFFECTING IT BY HEAT SOURCE

Abstract: The article considers the problem of temperature distribution in a homogeneous plate without affecting it by heat source. Divergent difference scheme is constructed. Consequently, the numerical experiment results are presented.

Keywords: heat equation, numerical modelling, conservation law, divergent difference scheme.

1. Постановка начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0 \quad (1)$$

в области $D = [0, L] \times [0, M]$, $t \geq 0$ с начальными данными

$$u(x_1, x_2, t)|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, t)|_{x_1=0} &= p_1(x_2, t), \\ u(x_1, x_2, t)|_{x_2=0} &= p_2(x_1, t), \\ u(x_1, x_2, t)|_{x_1=L} &= p_3(x_2, t) \quad u(x_1, x_2, t)|_{x_2=M} = p_4(x_1, t). \end{aligned} \quad (3)$$

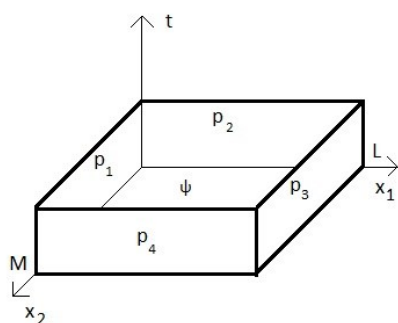


Рис. 1. Начальные и граничные данные для двумерного уравнения теплопроводности

Уравнения (1)-(3) описывает распределение температуры в однородной пластине без воздействия на нее источником тепла и имеющей начальную температуру $\psi(x_1, x_2)$.

2. Дивергентная разностная схема для уравнения теплопроводности

На основе закона сохранения энергии задачи Коши для уравнения теплопроводности будет иметь следующий вид

$$\oint u dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 dt + 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 dt = 0 \quad (4)$$

Построим дивергентную разностную схему для решения уравнения (4). Положим

$$x_{1i} = ih, \quad i = 0, \dots, \left[\frac{L}{h} \right]$$

$$x_{2j} = jh, \quad j = 0, \dots, \left[\frac{M}{h} \right]$$

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right]$$

и выберем на этой сетке один прямоугольный параллелепипед

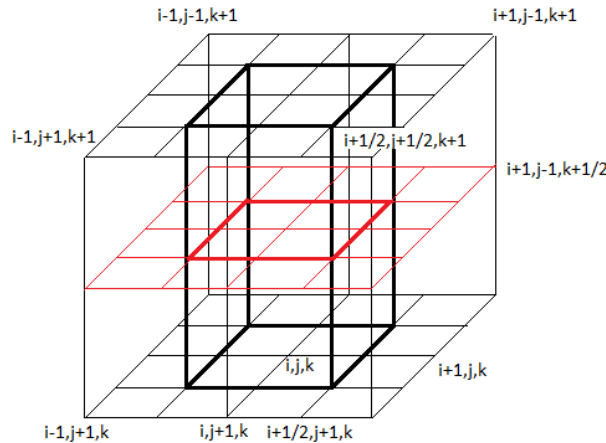


Рис. 2. Прямоугольный параллелепипед

Отметим на сторонах возникающих параллелепипедов их середины и отнесем их к сетке D_h путем усреднения решения $u(x, y, t)$ по той стороне сеточного прямоугольника, которому принадлежит рассматриваемая точка сетки. Получим

$$[u]_h \Big|_{\substack{x_1=x_{1i} \\ x_2=x_{2j} \\ t=t_k}} \equiv \tilde{u}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{1i-1/2}}^{x_{1i+1/2}} \int_{x_{2j-1/2}}^{x_{2j+1/2}} u(x_1, x_2, t_k) dx_1 dx_2,$$

$$[u]_h \Big|_{\substack{x_1=x_{1i+1/2} \\ x_2=x_{2j} \\ t=t_{k+1/2}}} \equiv \tilde{U}_{i+1/2,j,k+1/2} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{2j-1/2}}^{x_{2j+1/2}} u(x_{i+1/2}, x_2, t) dt dx_2,$$

$$[u]_h \Big|_{x_2=x_{2j+\frac{1}{2}}}^{x_1=x_{1i}} \Big|_{t=t_{k+\frac{1}{2}}} \equiv \tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_{1j-\frac{1}{2}}}^{x_{1j+\frac{1}{2}}} u(x_1, x_{j+\frac{1}{2}}, t) dt dx_1,$$

Рассмотрим интеграл по выделенной области

$$\begin{aligned} & \int_{x_{2j-\frac{1}{2}}}^{x_{2j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{1i-\frac{1}{2}}}^{x_{1i+\frac{1}{2}}} u(x_1, x_2, t) \Big|_{t=t_k} dx_1 dx_2 + \int_{x_{2j-\frac{1}{2}}}^{x_{2j+\frac{1}{2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \Big|_{x=x_{i+\frac{1}{2}}} dx_2 dt + \\ & + \int_{x_{1i-\frac{1}{2}}}^{x_{1i+\frac{1}{2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x=x_{j+\frac{1}{2}}} dx_1 dt - \int_{x_{1i-\frac{1}{2}}}^{x_{1i+\frac{1}{2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x=x_{j-\frac{1}{2}}} dx_1 dt - \\ & - \int_{x_{2j-\frac{1}{2}}}^{x_{2j+\frac{1}{2}}} \int_{x_{1i-\frac{1}{2}}}^{x_{1i+\frac{1}{2}}} u(x_1, x_2, t) \Big|_{t=t_{k+1}} dx_1 dx_2 - \int_{x_{2j-\frac{1}{2}}}^{x_{2j+\frac{1}{2}}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} 2 \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} \Big|_{x=x_{i-\frac{1}{2}}} dx_2 dt = 0 \end{aligned}$$

Получим дивергентную схему

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{i,j,k} - \tilde{u}_{i,j,k+1} + \frac{4\tau}{h^2} \left[\tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - 2\tilde{U}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \tilde{U}_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + \frac{4\tau}{h^2} \left[\tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - 2\tilde{U}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \tilde{U}_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] = 0 \\ & \tilde{u}_{i,j,k+1} = \tilde{u}_{i,j,k} + \frac{4\tau}{h^2} \left[\tilde{U}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} - 2\tilde{U}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \tilde{U}_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\ & + \frac{4\tau}{h^2} \left[\tilde{U}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - 2\tilde{U}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \tilde{U}_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] = 0 \end{aligned}$$

Промежуточные значения на $k + \frac{1}{2}$ слое будем искать с помощью явной схемы с шагом $\frac{h}{2}$. Для этого будет необходимо доопределить промежуточные точки путем усреднения соседних значений.

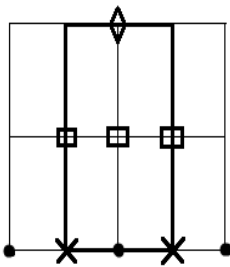


Рис. 3. Последовательность действий вычисления значения на новом слое для одномерного уравнения теплопроводности

• - известные значения

x - доопределяем эти значение путем усреднения соседних точек

□ - эти значения находим по явной схеме

◊ - искомое значение находим по дивергентной схеме

Изложенная дивергентная разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по h и первый порядок аппроксимации по τ .

Для доказательства устойчивости разностной схемы воспользуемся спектральным признаком Неймана. Зададим начальное условие в виде двумерной гармоники, зависящей от двух вещественных параметров α, β :

$$u_{ij}^0 = e^{I(\alpha i + \beta j)}, I^2 = -1, \alpha, \beta \in R$$

Тогда решение задачи при начальном условии имеет вид:

$$u_{ij}^k = \lambda^k e^{I(\alpha i + \beta j)}$$

Подставляя данную гармонику в схему получим:

$$\lambda = 1 - 16r \sin^2 \frac{\alpha}{4} - 16r \sin^2 \frac{\beta}{4} \quad r = \frac{\tau}{h^2}.$$

Для выполнения условия устойчивости необходимо, чтобы спектр разностного оператора $\lambda(\alpha, \beta)$ лежал в единичном круге, т.е. $|\lambda(\alpha, \beta)| \leq 1$. Откуда $r \leq \frac{1}{16}$.

Следовательно, $\tau \leq \frac{h^2}{16}$. При выполнении этого условия разностная схема будет устойчива.

3. Численный эксперимент

Для численной реализации дивергентной разностной схемы рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0$$

с начальными данными

$$u(x_1, x_2, t)|_{t=0} = \begin{cases} 100, & x_1 \in ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]), x_2 \in ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]) \\ 0, & x_1 \notin ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]), x_2 \notin ([0.4, 0.6] \cup [1.4, 1.6]) \end{cases}$$

и краевыми условиями

$$u(x_1, x_2, t)|_{x_1=0} = 0, u(x_1, x_2, t)|_{x_2=0} = 0, u(x_1, x_2, t)|_{x_1=2} = 0, u(x_1, x_2, t)|_{x_2=2} = 0.$$

Результаты численных расчетов представлены визуально на рис.4–6.

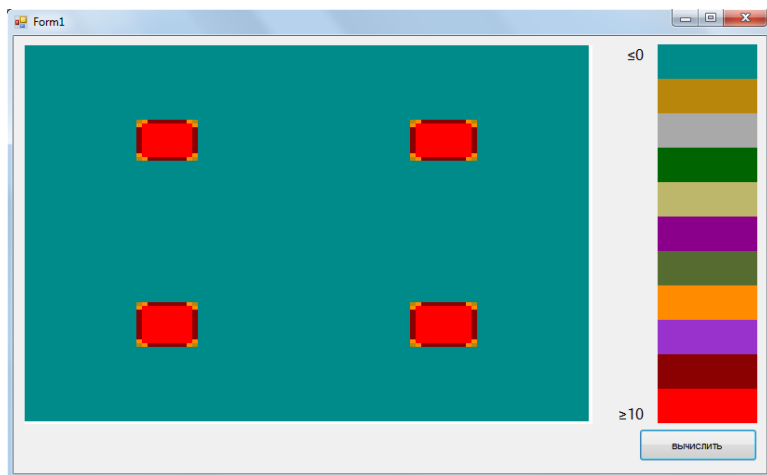


Рис.4. Распределения поля температуры в начальный момент времени

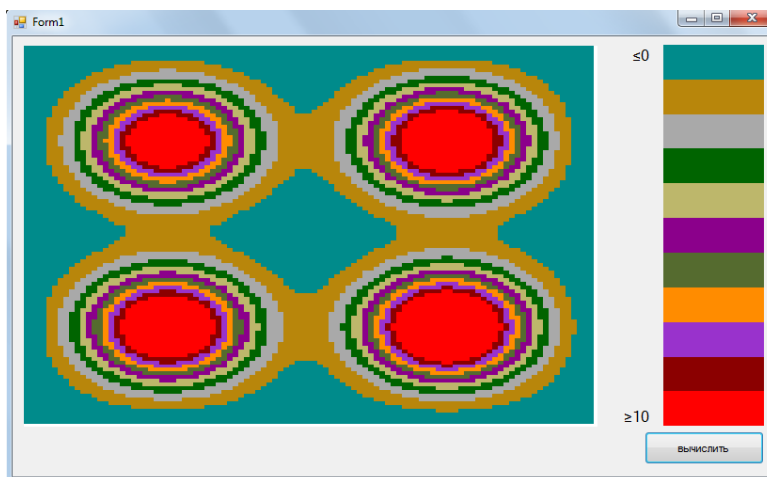


Рис.5. Распределение поля температуры на k-м слое (k=500)

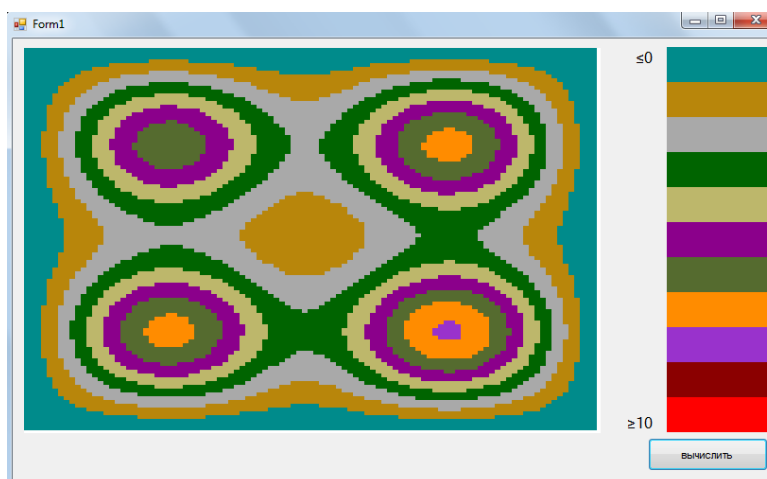


Рис.6. Распределение поля температуры на k-м слое (k=1000)

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. Введение в теорию.–М.: Наука, 1977. – 440 с.
2. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
3. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах. –М.: Высш. шк., 2008. – 480 с.