

ЕРЕМИНА Е.П.

ПОСТРОЕНИЕ ДИВЕРГЕНТНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ В СЛУЧАЕ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

Аннотация. В статье рассмотрена задача распространения звуковых волн в неоднородной среде. Получены интегральные законы сохранения и выведены соответствующие дивергентные разностные схемы.

Ключевые слова: двумерная акустика, закон сохранения, дивергентная разностная схема, обобщенное решение.

YEREMINA E.P.

DIVERGENT DIFFERENCE SCHEME FOR ACOUSTICS EQUATIONS SYSTEM IN NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

Abstract. The article considers the problem of sound waves propagation in a non-homogeneous medium. Particularly, the author deduces the integral conservation laws. As a result, the divergent difference schemes are derived.

Keywords: two-dimensional acoustics, conservation law, divergent difference scheme, generalized solution.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую распространение звуковых волн в неоднородной среде, а также начальные условия, характеризующие состояние системы в начальный момент времени

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v(t, x, y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \right) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial p(t, x, y)}{\partial t} + c_o^2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t, x, y) u(t, x, y)) + c_o^2 \frac{\partial}{\partial y} (\rho(t, x, y) v(t, x, y)) = 0 \quad (1.3)$$

$$u(t, x, y)|_{t=0} = u_0(x, y) \quad (1.4)$$

$$v(t, x, y)|_{t=0} = v_0(x, y) \quad (1.5)$$

$$p(t, x, y)|_{t=0} = p_0(x, y) \quad (1.6)$$

$(t, x, y) \in D \cup S$, S – граница области D .

Здесь $u(t, x, y), v(t, x, y), p(t, x, y)$ -отклонения скоростей и давления от их значений в невозмущенной среде, $\rho(t, x, y)$ -плотность среды в момент времени t в точке (x, y) , c_0 - скорость распространения звука.

2. Обобщенное решение системы по Л.С. Соболеву

Рассмотрим бесконечные дифференцируемые функции $\varphi(t, x, y), \psi(t, x, y), \theta(t, x, y)$, носитель которых принадлежит ограниченной области.

Рассмотрим некоторое выражение:

$$\frac{\partial(u\varphi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} p \varphi \right) + \frac{\partial(v\psi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} p \psi \right) + \frac{\partial(p\theta)}{\partial t} + c_0^2 \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \theta) + c_0^2 \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \theta) \quad (2.1)$$

После некоторых преобразований из выражения (2.1) получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \psi}{\partial y} + p \frac{\partial \theta}{\partial t} + c_0^2 \rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + c_0^2 \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} (u + v + p) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} p + c_0^2 \rho u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} p + c_0^2 \rho v \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Проинтегрируем выражение (2.2) по области D , далее применим формулу Остроградского-Гаусса. Конкретизируем область D и границу G следующим образом:

$$D: t \geq 0, S: t=0$$

Рассмотрим три случая:

$$\psi(t, x, y) \equiv 0, \theta(t, x, y) \equiv 0, \varphi(t, x, y) \neq 0 \quad (2.3)$$

$$\psi(t, x, y) \equiv 0, \theta(t, x, y) \neq 0, \varphi(t, x, y) \equiv 0 \quad (2.4)$$

$$\psi(t, x, y) \neq 0, \theta(t, x, y) \equiv 0, \varphi(t, x, y) \equiv 0 \quad (2.5)$$

Получим обобщенное решение по Л.С Соболеву для задачи (1.1) – (1.6)

$$\int_{t \geq 0} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx dy = \int_{t=0} u \varphi dx dy \quad (2.6)$$

$$\int_{t \geq 0} \left(v \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{\rho(t, x, y)} p(t, x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dt dx dy = \int_{t=0} v \psi dx dy \quad (2.7)$$

$$\int_{t \geq 0} \left(p \frac{\partial \theta}{\partial t} + c_0^2 \rho u \frac{\partial \theta}{\partial x} + c_0^2 \rho v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) dt dx dy = \int_{t=0} p \theta dx dy \quad (2.8)$$

3. Интегральный закон сохранения для системы уравнений акустики

Рассмотрим поверхности γ и γ' , на которых функции $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$, $\theta(t, x, y)$ определены следующим образом:

$$\varphi(x, y, t), \psi(x, y, t), \theta(x, y, t) = \begin{cases} 1 & \text{внутри } \gamma \\ 0 & \text{вне } \gamma' \\ \text{изменяется от 1 до 0 от } \gamma \text{ до } \gamma' \end{cases}$$

Рассмотрим выражение (2.6). Запишем первый интеграл выражения (2.6) в следующем виде:

$$\iint_{\gamma'} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} p \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt dx dy \quad (3.1)$$

Интегрирование по полосе заменим интегрированием по нормали. С учетом правой части выражения (2.6) получим интегральный закон сохранения:

$$\oint\!\!\!\oint u dx dy - \frac{1}{\rho} p dt dy = 0. \quad (3.2)$$

Аналогично для выражений (2.7) и (2.8) получим:

$$\oint\!\!\!\oint v dx dy - \frac{1}{\rho} p dt dx = 0. \quad (3.3)$$

$$\oint\!\!\!\oint p dx dy - c_0^2 \rho u dt dy - c_0^2 \rho v dx dy = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом (3.2) – (3.4) – интегральные законы сохранения для задачи (1.1) – (1.6).

4. Конструирование системы дивергентных разностных уравнений

Рассмотрим сетку следующего вида:

$$t = k\tau, \quad x = \left(i + \frac{1}{2}\right)h, \quad y = \left(j + \frac{1}{2}\right)h, \quad k = 0, 1, \dots; i = 0, \pm 1, \dots; j = 0, \pm 1, \dots \quad (4.1)$$

Введем следующие обозначения:

$$[u]_h \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{u}_{i+1/2, j, k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} u(x, y, t_k) dx dy, \quad (4.2)$$

$$[u]_h \Big|_{\substack{x=x_{i+1/2} \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2} \\ y=y_{j+1/2}} \equiv \tilde{U}_{i+1/2, j, k} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} u(x_{i+1/2}, y, t) dy dt, \quad (4.3)$$

$$[p]_h \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_i} \equiv \tilde{p}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p(x, y, t_k) dx dy, \quad (4.4)$$

$$[p]_h \Big|_{\substack{x=x_{i+1/2} \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{P}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} p(x_{i+1/2}, y, t) dy dt, \quad (4.5)$$

$$[v]_h \Big|_{\substack{x=x_i \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_i} \equiv \tilde{v}_{i,j,k} = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} v(x, y, t_k) dx dy, \quad (4.6)$$

$$[v]_h \Big|_{\substack{x=x_{i+1/2} \\ y=y_j \\ t=t_k}}^{x=x_{i+1/2}} \equiv \tilde{V}_{i+1/2,j,k} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} v(x_{i+1/2}, y, t) dy dt, \quad (4.7)$$

Связь между величинами (4.2) – (4.7) установим исходя из интегрального закона сохранения (3.2) – (3.4). Получим дивергентные разностные схемы:

$$\frac{\rho(t_k, x_i, y_j)(\tilde{u}_{i,j,k+1} - \tilde{u}_{i,j,k})}{\tau} - \frac{\tilde{P}_{i+1/2,j,k} - \tilde{P}_{i-1/2,j,k}}{h} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\rho(t_k, x_i, y_j)(\tilde{v}_{i,j,k+1} - \tilde{v}_{i,j,k})}{\tau} - \frac{\tilde{P}_{i,j+1/2,k} - \tilde{P}_{i,j-1/2,k}}{h} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\tilde{P}_{i,j,k+1} - \tilde{P}_{i,j,k}}{\tau} - c_0^2 \rho(t_k, x_i, y_j) \frac{\tilde{U}_{i+1/2,j,k} - \tilde{U}_{i-1/2,j,k}}{h} - c_0^2 \rho(t_k, x_i, y_j) \frac{\tilde{V}_{i,j+1/2,k} - \tilde{V}_{i,j-1/2,k}}{h} = 0 \quad (4.10)$$

Таким образом (4.8) – (4.10) – дивергентные разностные схемы для задачи (1.1) – (1.6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – 2-е изд. стер. – М.: Высш. шк., 2006. – 480 с.
2. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию) / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
3. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.