

КЯШКИН А. А., ШАМАНАЕВ П. А.

НАХОЖДЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ
УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Аннотация. В статье с использованием метода Ляпунова-Шмидта найдено семейство периодических решений для уравнения колебаний математического маятника. Получено асимптотическое разложение периода решений по малому параметру.

Ключевые слова: уравнение колебаний математического маятника, периодические решения, метод Ляпунова-Шмидта.

KYASHKIN A. A., SHAMANAEV P. A.

FINDING PERIODIC SOLUTIONS FOR THE EQUATION
OF MATHEMATICAL PENDULUM OSCILLATIONS

Abstract. The article presents a family of periodic solutions for the equation of mathematical pendulum oscillations found by the method of Lyapunov-Schmidt. An asymptotic expansion of the period of solutions in the small parameter is obtained.

Keywords: equation of mathematical pendulum oscillations, periodic solution, Lyapunov-Schmidt method.

Рассмотрим модельный пример – уравнение колебаний математического маятника [2]

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \sin z = \varepsilon \cdot f\left(z, \frac{dz}{dt}\right). \quad (1)$$

Отвечающие от $z \equiv 0$ $\frac{2\pi}{1+\mu}$ – периодические решения уравнения (1)

рассматриваются как решение системы

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \frac{x_1^3}{3!} - \frac{x_1^5}{5!} + \dots + \varepsilon \cdot \sum_{j_1+j_2 \geq 1} a_{j_1 j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2}, \end{cases} \quad (2)$$

где $x_1 = z$.

$$\text{С учетом обозначений } R(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_1^5}{5!} - \dots - \varepsilon \cdot \sum_{j_1+j_2 \geq 1} a_{j_1 j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, система (2) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = Bx - R(x, \varepsilon), \quad (3)$$

где $B: E_1 \mapsto E_2$.

После применения подстановки А. Пуанкаре $t = \frac{\tau}{1+\mu}$, где $\mu(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$,

получаем $x(t)|_{t=\frac{\tau}{1+\mu}} = x\left(\frac{\tau}{1+\mu}\right) \stackrel{\text{def}}{=} y(\tau)$. Тогда система (3) перепишется в виде

$$By = \mu Cy + R(y, \varepsilon), \quad (4)$$

где $By \equiv (B-C)y$, $Cy \equiv y'(\tau)$, $B: \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_k = E_k + iE_k$, $k = \overline{1,2}$. Множество нулей оператора

$$B \text{ имеет вид } N(B) = \{\varphi(\tau), \bar{\varphi}(\tau)\}, \text{ где } \varphi(\tau) = \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\tau}, \bar{\varphi}(\tau) = \bar{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\tau}.$$

Рассмотрим также сопряженные операторы $B^*: E_2^* \mapsto E_1^*$ и $B^*: \mathcal{E}_2^* \mapsto \mathcal{E}_1^*$, $\mathcal{E}_k^* = E_k^* + iE_k^*$, $k = \overline{1,2}$. Множество нулей сопряженного оператора имеет вид $N(B^*) = \{\psi(\tau), \bar{\psi}(\tau)\}$, где $\psi(\tau) = \psi = \varphi$, $\bar{\psi}(\tau) = \bar{\psi} = \bar{\varphi}$.

Согласно следствию из теоремы Хана-Банаха в $\mathcal{E}_1^*$ существуют функционалы γ_1, γ_2 такие, что [1, с. 337]

$$\langle\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle\rangle = \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1,2}.$$

По тому же следствию из теоремы Хана-Банаха в $\mathcal{E}_2$ существуют элементы z_1, z_2 такие, что

$$\langle\langle z_k, \psi_s \rangle\rangle = \delta_{k,s}, \quad k, s = \overline{1,2}.$$

Здесь $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \bar{\varphi}$; $\psi_1 = \psi$, $\psi_2 = \bar{\psi}$; а $\langle\langle f, g \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle f(\tau), g(\tau) \rangle d\tau$ – значение функционала $g(\tau)$ на элементе $f(\tau)$. Используя лемму о биортогональности, получим $\gamma_i = \psi_i = z_i = \varphi_i$, $i = \overline{1,2}$.

Решение системы (4) будем искать по обобщенной лемме Шмидта. Введем оператор

$$\tilde{B}y \equiv By + \sum_{i=1}^2 \xi_i z_i,$$

где

$$\xi_j = \langle\langle y, \gamma_j \rangle\rangle, \quad j = \overline{1,2}, \quad (5)$$

$$\xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \bar{\xi}, \quad (6)$$

и запишем (4) в эквивалентной форме

$$\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{y} = \mu C\mathbf{y} + R(y, \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 \xi_i z_i. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) представим в виде

$$y = w + \sum_{i=1}^2 \xi_i \varphi_i, \quad (8)$$

где

$$w = w(\xi_1, \xi_2, \mu, \varepsilon) = y_{0010}\mu + y_{0001}\varepsilon + \sum_{k_1+k_2+k+l \geq 2} y_{k_1 k_2 k l} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \mu^k \varepsilon^l. \quad (9)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\tilde{\mathbf{B}}w = \mu w' + \mu \xi_1 \varphi_1'(\tau) + \mu \xi_2 \varphi_2'(\tau) + R\left(w + \sum_{i=1}^2 \xi_i \varphi_i, \varepsilon\right). \quad (10)$$

Подставив ряд (9) в систему (10), методом неопределенных коэффициентов найдем коэффициенты для w , а значит и для y .

Для нахождения системы разветвления подставим полученный ряд (9) в уравнения (5):

$$\sum_{i+j \geq 2} L_{ij00}^{(m)} \xi_1^i \xi_2^j + \sum_{i+j \geq 0} \xi_1^i \xi_2^j \sum_{k+l \geq 1} L_{ijkl}^{(m)} \mu^k \varepsilon^l = 0, \quad m = 1, 2,$$

где коэффициенты уравнения разветвления задаются так:

$$L_{ijkl}^{(m)} = \langle \langle y_{ijkl}, \gamma_s \rangle \rangle, \quad m = 1, 2. \quad (11)$$

Для реализации метода неопределенных коэффициентов используется математический пакет *Mathematica*. Для построения системы разветвления ограничимся третьим порядком коэффициентов.

Приведем значения ненулевых коэффициентов:

$$\begin{aligned} y_{1010} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{i\tau}, \quad y_{0110} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{1001} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10}) + i(2a_{01} - a_{10}) \\ -(2a_{01} + a_{10}) + i(-a_{01} + 2a_{10}) \end{pmatrix} e^{i\tau}, \\ y_{0101} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10}) - i(2a_{01} - a_{10}) \\ -(2a_{01} + a_{10}) - i(-a_{01} + 2a_{10}) \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{3000} = \frac{1}{32\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i/3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3i\tau}, \\ y_{2100} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2-i \\ -1+2i \end{pmatrix} e^{i\tau}, \quad y_{1200} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2+i \\ -1-2i \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{0300} = \frac{1}{32\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i/3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3i\tau}, \\ y_{1020} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\tau}, \quad y_{0120} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\tau}, \quad y_{2001} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02}) + ia_{11} \\ -2a_{11} + i(2a_{20} - 2a_{02}) \end{pmatrix} e^{2i\tau}, \quad y_{1101} = \begin{pmatrix} a_{20} + a_{02} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ y_{0201} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02}) - ia_{11} \\ -2a_{11} - i(2a_{20} - 2a_{02}) \end{pmatrix} e^{-2i\tau}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{1011} &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\frac{(-9a_{01} + 2a_{10}) + i(2a_{01} + 9a_{10})}{(2a_{01} - 7a_{10}) - i(7a_{01} + 2a_{10})} \right) e^{ir}, \\
y_{0111} &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\frac{(-9a_{01} + 2a_{10}) - i(2a_{01} + 9a_{10})}{(2a_{01} - 7a_{10}) + i(7a_{01} + 2a_{10})} \right) e^{-ir}, \\
y_{1002} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \left(\frac{(4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) + i(3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2)}{(-5a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} + 3a_{01}^2) - i(8a_{10}a_{01} - 4a_{01}^2)} \right) e^{ir}, \\
y_{0102} &= \frac{1}{16\sqrt{2}} \left(\frac{(4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) - i(3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2)}{(-5a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} + 3a_{01}^2) + i(8a_{10}a_{01} - 4a_{01}^2)} \right) e^{-ir}.
\end{aligned}$$

Коэффициенты уравнения разветвления найдем по формуле (11). Приведем ненулевые коэффициенты:

$$\begin{aligned}
L_{1001}^{(1)} &= \langle \langle y_{1001}, \gamma_1 \rangle \rangle = -\frac{1}{2}(a_{01} - a_{10}i), & L_{0101}^{(2)} &= \langle \langle y_{0101}, \gamma_2 \rangle \rangle = -\frac{1}{2}(a_{01} + a_{10}i), \\
L_{1010}^{(1)} &= \langle \langle y_{1010}, \gamma_1 \rangle \rangle = i, & L_{0110}^{(2)} &= \langle \langle y_{0110}, \gamma_2 \rangle \rangle = -i, \\
L_{1002}^{(1)} &= \langle \langle y_{1002}, \gamma_1 \rangle \rangle = & L_{0102}^{(2)} &= \langle \langle y_{0102}, \gamma_2 \rangle \rangle = \\
&= \frac{1}{4}(a_{01}^2 - a_{10}^2) - \frac{1}{8}i(4a_{01}a_{10} - a_{10}^2 - a_{01}^2), & &= \frac{1}{4}(a_{01}^2 - a_{10}^2) + \frac{1}{8}i(4a_{01}a_{10} - a_{10}^2 - a_{01}^2), \\
L_{1020}^{(1)} &= \langle \langle y_{1020}, \gamma_1 \rangle \rangle = -1, & L_{0120}^{(2)} &= \langle \langle y_{0120}, \gamma_2 \rangle \rangle = -1, \\
L_{2100}^{(1)} &= \langle \langle y_{2100}, \gamma_1 \rangle \rangle = \frac{i}{8}, & L_{1200}^{(2)} &= \langle \langle y_{1200}, \gamma_2 \rangle \rangle = -\frac{i}{8}, \\
L_{1011}^{(1)} &= \langle \langle y_{1011}, \gamma_1 \rangle \rangle = -a_{10} - ia_{01}, & L_{0111}^{(2)} &= \langle \langle y_{0111}, \gamma_2 \rangle \rangle = -a_{10} + ia_{01}.
\end{aligned}$$

С учетом (6) и $\xi\bar{\xi} = |\xi|^2$ записываем систему разветвления:

$$\begin{aligned}
&\xi \left(-\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon \right) + \\
&\quad + \xi i \left(-a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\xi|^2 \right) = 0, \\
&\bar{\xi} \left(-\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon \right) - \\
&\quad - \bar{\xi} i \left(-a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\xi|^2 \right) = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

Рассматриваем первое уравнение системы (12). Решение $\xi = 0$ отвечает тривиальному решению уравнения (1).

Пусть $\xi \neq 0$. После сокращения первого уравнения на ξ и отделения вещественной и мнимой части [2, 3] получим:

$$\begin{aligned}
Re: \quad & -\mu^2 - a_{10}\varepsilon\mu - \frac{1}{4}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{4}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}\varepsilon = 0, \\
Im: \quad & -a_{01}\varepsilon\mu + \mu + \frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon + \frac{1}{8}|\zeta|^2 = 0.
\end{aligned}$$

Из второго уравнения выразим μ :

$$\mu = \mu(|\zeta|, \varepsilon) = \frac{1}{1 - a_{01}\varepsilon} \left(-\frac{1}{8}a_{10}^2\varepsilon^2 + \frac{1}{2}a_{01}a_{10}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}a_{01}^2\varepsilon^2 - \frac{1}{2}a_{10}\varepsilon - \frac{1}{8}|\zeta|^2 \right), \quad \varepsilon \neq \frac{1}{a_{01}}. \quad (13)$$

Подставив (13) в первое уравнение, получаем приближенное редуцированное уравнение разветвления:

$$|\zeta|^4 + 2\varepsilon^2(a_{01}^2 + a_{10}^2)|\zeta|^2 + (a_{10}^4\varepsilon^4 - 15a_{01}^4\varepsilon^4 + 2a_{01}^2a_{10}^2\varepsilon^4 + 64a_{01}^3\varepsilon^3 - 80a_{01}^2\varepsilon^2 + 32a_{01}\varepsilon) = 0. \quad (14)$$

Пусть ζ и $\bar{\zeta}$ имеют вид [3]: $\zeta = r(\varepsilon)e^{i\theta}$, $\bar{\zeta} = r(\varepsilon)e^{-i\theta}$, где $\theta \in \mathbf{R}$. Следовательно, $r \equiv r(\varepsilon) = |\zeta|$.

Найдем решения биквадратного относительно $|\zeta|$ уравнения (14). Очевидно, имеет смысл только корень уравнения:

$$|\zeta| = \sqrt{-\varepsilon^2(a_{01}^2 + a_{10}^2) + 4\sqrt{a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2)}} \quad (15)$$

при условиях

$$\begin{cases} -\varepsilon^2(a_{01}^2 + a_{10}^2) + 4\sqrt{a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2)} > 0, \\ a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2) > 0. \end{cases}$$

Подставив (15) в (13), получаем

$$\mu \equiv \mu(r(\varepsilon), \varepsilon) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - a_{01}\varepsilon} \left(a_{01}a_{10}\varepsilon^2 - a_{10}\varepsilon - \sqrt{a_{01}\varepsilon(a_{01}^3\varepsilon^3 - 4a_{01}^2\varepsilon^2 + 5a_{01}\varepsilon - 2)} \right).$$

Подстановка найденных ζ и μ в (9) и (8) дает приближенное однопараметрическое семейство периодических решений системы (4):

$$\begin{aligned}
y(\tau, \varepsilon, \theta) = & \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} r + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10})\cos \alpha - (2a_{01} - a_{10})\sin \alpha \\ -(2a_{01} + a_{10})\cos \alpha - (-a_{01} + 2a_{10})\sin \alpha \end{pmatrix} r\varepsilon + \\
& + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} r\mu + \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/3 \cdot \sin 3\alpha \\ \cos 3\alpha \end{pmatrix} r^3 + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} r\mu^2 + \\
& + \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\cos \alpha + \sin \alpha \\ -\cos \alpha - 2\sin \alpha \end{pmatrix} r^3 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02})\cos 2\alpha - a_{11}\sin 2\alpha \\ -2a_{11}\cos 2\alpha - (2a_{20} - 2a_{02})\sin 2\alpha \end{pmatrix} r^2\varepsilon + \\
& + \begin{pmatrix} a_{20} + a_{02} \\ 0 \end{pmatrix} r^2\varepsilon + \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-9a_{01} + 2a_{10})\cos \alpha - (2a_{01} + 9a_{10})\sin \alpha \\ (2a_{01} - 7a_{10})\cos \alpha + (7a_{01} + 2a_{10})\sin \alpha \end{pmatrix} r\mu\varepsilon +
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{8\sqrt{2}} \left((4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) \cos \alpha - (3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2) \sin \alpha \right) r \varepsilon^2,$$

где $\alpha \equiv \alpha(\tau, \Theta) = \tau + \Theta$.

С учетом обратной замены $y(\tau)|_{\tau=t(1+\mu)} = y(\tau(1+\mu)) \stackrel{\text{def}}{=} x(t)$ получаем

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon, \Theta) = & \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin \beta \\ \cos \beta \end{pmatrix} r + \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (a_{01} + 2a_{10}) \cos \beta - (2a_{01} - a_{10}) \sin \beta \\ -(2a_{01} + a_{10}) \cos \beta - (-a_{01} + 2a_{10}) \sin \beta \end{pmatrix} r \varepsilon + \\ & + \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} r \mu + \frac{1}{16\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/3 \cdot \sin 3\beta \\ \cos 3\beta \end{pmatrix} r^3 + \sqrt{2} \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ -\cos \beta \end{pmatrix} r \mu^2 + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \cos \beta + \sin \beta \\ -\cos \beta - 2 \sin \beta \end{pmatrix} r^3 + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (a_{20} - a_{02}) \cos 2\beta - a_{11} \sin 2\beta \\ -2a_{11} \cos 2\beta - (2a_{20} - 2a_{02}) \sin 2\beta \end{pmatrix} r^2 \varepsilon + \\ & + \begin{pmatrix} a_{20} + a_{02} \\ 0 \end{pmatrix} r^2 \varepsilon + \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (-9a_{01} + 2a_{10}) \cos \beta - (2a_{01} + 9a_{10}) \sin \beta \\ (2a_{01} - 7a_{10}) \cos \beta + (7a_{01} + 2a_{10}) \sin \beta \end{pmatrix} r \mu \varepsilon + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} \left((4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) \cos \beta - (3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2) \sin \beta \right) r \varepsilon^2, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\beta \equiv \beta(t, \mu, \Theta) = (1 + \mu)t + \Theta$.

С учетом 1-го уравнения системы (2) и $x_1 = z$, запишем полученные приближенные решения уравнения (1):

$$\begin{aligned} z(t, \varepsilon, \Theta) = & \sqrt{2} \sin(\beta) \cdot r + \frac{1}{2\sqrt{2}} [(a_{01} + 2a_{10}) \cos \beta - (2a_{01} - a_{10}) \sin \beta] r \varepsilon + \\ & + \sqrt{2} \cos(\beta) \cdot r \mu + \frac{1}{48\sqrt{2}} \sin(3\beta) \cdot r^3 - \sqrt{2} \sin(\beta) \cdot r \mu^2 + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} (2 \cos \beta + \sin \beta) r^3 + \frac{1}{3} [(a_{20} - a_{02}) \cos 2\beta - a_{11} \sin 2\beta] r^2 \varepsilon + \\ & + (a_{20} + a_{02}) r^2 \varepsilon + \frac{1}{4\sqrt{2}} [(-9a_{01} + 2a_{10}) \cos \beta - (2a_{01} + 9a_{10}) \sin \beta] r \mu \varepsilon + \\ & + \frac{1}{8\sqrt{2}} [(4a_{10}^2 - 8a_{10}a_{01}) \cos \beta - (3a_{10}^2 + 4a_{10}a_{01} - 5a_{01}^2) \sin \beta] r \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Учитывая, что уравнение (1) автономное, $z(t, \varepsilon, \Theta)$ в (16) – приближенное решение этого уравнения, то приближенным решением уравнения (1) также будет

$$z(t + C, \varepsilon, \Theta), \text{ где } C \in \mathbf{R}, \beta \equiv \beta(t + C, \mu, \Theta) = (1 + \mu)(t + C) + \Theta. \quad (17)$$

Таким образом, мы получили двухпараметрическое семейство приближенных решений уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Кочуров В. В. Модельный пример бифуркации Андронова-Хопфа // Механика и процессы управления: сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2004. – С. 37–40.
3. Треногин В. А. Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. – Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. – С. 134–140.