КЯШКИН А. А., ЛОГИНОВ Б. В., ШАМАНАЕВ П. А.

К ЗАДАЧЕ О ВОЗМУЩЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация. Методами теории ветвления исследована задача о возмущении *n*-кратной пары чисто мнимых собственных значений при наличии обобщенных жордановых цепочек. Получена разрешающая система в виде однородной системы линейных алгебраических уравнений. Проведена редукция исследуемой задачи к возмущенной операторной матричной задаче на собственные значения.

Ключевые слова: ветвление периодических решений, обобщенные жордановы цепочки, возмущение критической пары собственных значений.

KYASHKIN A. A., LOGINOV B. V., SHAMANAEV P. A.

ON THE PROBLEM OF PERTURBATION OF PERIODICAL SOLUTIONS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATE OPERATOR BEFORE THE DERIVATIVE

Abstract. By the methods of bifurcation theory, the authors investigate the perturbation problem for *n*-multiple pair of pure imaginary eigenvalues at the presence of generalized Jordan chains. The resolving system in the form of a homogeneous system of linear algebraic equations is obtained. A reduction of the problem to the perturbed operator matrix problem is carried out.

Keywords: bifurcation of periodical solutions, generalized Jordan chains, perturbation of critical eigenvalues pair.

1. Введение

В банаховых пространствах E_1, E_2 в обозначениях и терминологии [1; 2] задача о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа с необратимым оператором при производной описывается дифференциальным уравнением

$$A\frac{dx}{dt} = \mathrm{B}(\lambda)x - R(x,\lambda), \quad R(0,\lambda)\equiv 0, \quad \mathrm{B}(\lambda) = B_0 + B(\lambda-\lambda_0), \quad B(\varepsilon) = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots, \quad \varepsilon = \lambda - \lambda_0, \quad (1.1)$$

где A и B_0 – плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, $N(A) = span\{\phi_j\}_1^m$, $N^*(A) = span\{\psi_j\}_1^m$; $N(B_0) = span\{\hat{\phi}_k\}_1^n$, $N^*(B_0) = span\{\hat{\psi}_k\}_1^n$ – их подпространства нулей и дефектных функционалов, $\{\sigma_l\}_1^m$, $\langle\phi_j,\sigma_l\rangle = \delta_{jl}$, $\{\zeta_l\}_1^m$, $\langle\zeta_l,\psi_j\rangle = \delta_{lj}$; $\{\hat{\sigma}_s\}_1^n$, $\langle\hat{\phi}_k,\hat{\sigma}_s\rangle = \delta_{ks}$, $\{\hat{\zeta}_s\}_1^n$, $\langle\hat{\zeta}_s,\hat{\psi}_k\rangle = \delta_{sk}$ – соответствующие биортогональные системы, $\|R(x,\lambda_0{+}\varepsilon)\| = o(\|x\|)$. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: 1°

$D_B \subset D_A$ и A подчинен B_0, т. е. $\|Ax\| \leqslant \|B_0 x\| + \|x\|$ на D_{B_0} или $D_A \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A, т. е. $\|B_0 x\| \leqslant \|Ax\| + \|x\|$ на D_A, что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам.

В статье [3] дано применение уравнения разветвления в корневых подпространствах к рассматриваемым в [1] стационарным задачам о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристиках линейного оператора, и соответственно в статье [4] – к рассмотренной в [2] задаче о ветвлении периодических решений.

Здесь исследуется ветвление чисто мнимых A-собственных значений оператора B_0 и отвечающих им периодических собственных элементов (периодических решений) линеаризованного уравнения при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0

$$A\frac{dx}{dt} = (B_0 + B(\varepsilon))x \tag{1.2}$$

в следующих предположениях [1], [5-7]:

1°. Число α является $\mathcal{A}$-собственным значением матричного оператора $\mathscr{B}(\alpha)$, т. е. $\mathscr{B}(\alpha)U_k = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $\mathscr{B}^*(\alpha)V_k = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A_0^* \\ \alpha A_0^* & B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $k = \overline{1,n}$, с $2n$-мерным подпространством нуль-элементов

$$\mathcal{N}(\mathscr{B}(\alpha)) = span\left\{\Phi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix},\ \Phi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{2k} \\ -u_{1k} \end{pmatrix},\ k = \overline{1,n}\right\}, \tag{1.3}$$

$$\mathcal{N}(\mathscr{B}^*(\alpha)) = span\left\{\Psi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} -v_{2k} \\ v_{1k} \end{pmatrix},\ \Psi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix},\ k = \overline{1,n}\right\}. \tag{1.4}$$

При этом числа $\pm k\alpha$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ не являются $\mathcal{A}$-собственными значениями матричного оператора $\mathscr{B}(\alpha) \not\equiv 0$.

2°. $\mathcal{A}$-жордановы цепочки элементов $\Phi_{ik}^{(1)}$, $\Psi_{ik}^{(1)}$, $i=1,2$, $k=\overline{1,n}$, оператор-функций $\mathscr{B}(\alpha+\mu) \equiv \mathscr{B}(\alpha) - \mu\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathscr{B}^*(\alpha+\mu) \equiv \mathscr{B}^*(\alpha) - \mu\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A^* \\ \alpha A^* & B_0^* \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ -A^* & 0 \end{pmatrix}$, определенные равенствами $\mathscr{B}(\alpha)\Phi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}\Phi_{jk}^{(s-1)}$, $\mathscr{B}^*(\alpha)\Psi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}^*\Psi_{jk}^{(s-1)}$, имеют конечные длины p_k, т. е. образуют полный канонический обобщенный жорданов ($\mathcal{A}$-жорданов) набор (ОЖН) [1]. Без ограничения общности в силу разрешимости определяющих ОЖН уравнений это означает, что

$$\langle \mathcal{A}\Phi_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(1)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_k},\ \ \langle \Phi_{ik}^{(1)}, \mathcal{A}^*\Psi_{jl}^{(s)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_l},\ \ s = \overline{1, p_k(p_l)},\ \ i,j = 1,2,\ \ k,l = \overline{1,n}, \tag{1.5}$$

или, эквивалентно, в координатной форме

$$\begin{aligned}\langle Au_{1k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)}\rangle = \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)}\rangle, \quad s=\overline{1,p_k}, \quad \langle Au_{1k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)}\rangle + \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)}\rangle = \delta_{kl}\delta_{sp_k},\\ \langle u_{1k}^{(1)}, A^* v_{2l}^{(s)}\rangle = \langle u_{2k}^{(1)}, A^* v_{1l}^{(s)}\rangle, \ \ s=\overline{1,p_l}, \ \ \langle u_{1k}^{(1)}, A^* v_{1l}^{(s)}\rangle + \langle u_{2k}^{(1)}, A^* v_{2l}^{(s)}\rangle = \delta_{kl}\delta_{sp_l}, \ \ k,l=\overline{1,n}.\end{aligned} \qquad (1.6)$$

В силу леммы о биортогональности обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) [5-15] и линейности оператор-функций $\mathscr{B}(\alpha)-\mu\mathcal{A}$ и $\mathscr{B}^*(\alpha)-\mu\mathcal{A}^*$ этот набор всегда может быть выбран триканоническим, т. е.

$$\begin{aligned}\langle \Phi_{ik}^{(s)}, \Gamma_{jl}^{(\sigma)}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{s\sigma}, \quad \Gamma_{jl}^{(\sigma)} = \mathcal{A}^*\Psi_{jl}^{(p_l+1-\sigma)}; \quad \langle Z_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(\sigma)}\rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{s\sigma},\\ Z_{ik}^{(s)} = \mathcal{A}\Phi_{ik}^{(p_k+1-s)}, \quad j=1,2, \quad s(\sigma)=\overline{1,p_k(p_l)}, \quad k,l=\overline{1,n}.\end{aligned} \qquad (1.7)$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned}\langle u_{1k}^{(s)}, A^* v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)}\rangle + \langle u_{2k}^{(s)}, A^* v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)}\rangle = \delta_{kl}\delta_{s\sigma} \sim \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)}\rangle + \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)}\rangle = \delta_{kl}\delta_{s\sigma};\\ \langle u_{1k}^{(s)}, A^* v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)}\rangle = \langle u_{2k}^{(s)}, A^* v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)}\rangle \ \sim \ \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)}\rangle = \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)}\rangle.\end{aligned} \qquad (1.8)$$

Следуя [3], в этой работе далее исследуется уравнение (1.2) на основе кратко представленного аппарата обобщенных жордановых цепочек.

2. Ветвление пары чисто мнимых *A*-собственных значений оператора *B*₀

Выполним комплексификацию уравнения (1.2), рассматривая его в пространствах $\mathcal{E}_k = E_k \dot{+} iE_k, \ k=1,2,$ и учитывая, что оператор $B(\varepsilon)$ в силу его линейности также допускает достаточно гладкое расширение на эти пространства. Тогда элементы $u_k = u_{1k} + i\,u_{2k}$, $\bar{u}_k$ и $v_k = v_{1k} + i\,v_{2k}$, $\bar{v}_k$ являются A-собственными элементами оператора B_0, т. е. собственными элементами следующих задач на собственные значения

$$B_0 u_k = i\alpha A u_k, \ \ B_0\bar{u}_k = -i\alpha A\bar{u}_k, \ \ B_0^* v_k = -i\alpha A^* v_k, \ \ B_0^*\bar{v}_k = i\alpha A^*\bar{v}_k, \ \ k=\overline{1,n}. \qquad (2.1)$$

Им отвечают A- и A^*-жордановы наборы (A- и A^*-ЖН ≡ ОЖН), $\{u_k^{(j)}\}$, $\{\bar{u}_k^{(j)}\}$ и $\{v_k^{(j)}\}$, $\{\bar{v}_k^{(j)}\}$, в которых обобщенные жордановы цепочки определяются уравнениями $(B_0 - i\alpha A)u_k^{(j)} = Au_k^{(j-1)}$, $(B_0+i\alpha A)\bar{u}_k^{(j)} = -A\bar{u}_k^{(j-1)}$; $(B_0^*+i\alpha A^*)v_k^{(j)} = -A^* v_k^{(j-1)}$, $(B_0^*-i\alpha A^*)\bar{v}_k^{(j)} = A^*\bar{v}_k^{(j-1)}$, $j=\overline{2,p_k}$, $k=\overline{1,n}$, и соответственно (1.7) и (1.8) могут быть выбраны удовлетворяющими условиям биортогональности

$$\langle u_k^{(j)}, \vartheta_s^{(l)}\rangle = \delta_{jl}\delta_{ks}, \ \ \langle \mathrm{z}_k^{(j)}, v_s^{(l)}\rangle = \delta_{ks}\delta_{jl}, \ \ \mathrm{z}_j^{(k)} = Au_k^{(p_k+1-j)}, \ \ \vartheta_s^{(l)} = A^* v_s^{(p_s+1-l)}. \qquad (2.2)$$

Выполнением подстановки А. Пуанкаре $t = \frac{\tau}{\alpha+\mu}$, $x(t) = y(\tau)$, где $\mu = \mu(\varepsilon)$ – подлежащая определению малая добавка к частоте колебаний, задача (1.2) сводится к определению 2π-периодических решений уравнения

$$\mathcal{B}_0 y = \mu\mathscr{C} y + B(\varepsilon)y, \ \ \mathcal{B}_0 y = (\mathcal{B}_0 y)(\tau) \equiv B_0 y(\tau) - \alpha A\frac{dy}{d\tau}, \ \ \mathscr{C} y = (\mathscr{C} y)(\tau) \equiv A\frac{dy}{d\tau}. \qquad (2.3)$$

Здесь предполагаемый фредгольмовым оператор $(\mathcal{B}_0 y)(\tau)$ и остальные операторы отображают пространство $\mathcal{Y}$ 2π-периодических непрерывно-дифференцируемых функций $\mathcal{T}$ со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 \dot{+} i\,E_1$ в пространство $\mathcal{Z}$ 2π-периодических функций τ со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 \dot{+} i\,E_2$. Дуальность между $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^*$ ($\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}^*$) определяется специального вида функционалами

$$\langle\langle y, f\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle y(\tau), f(\tau)\rangle d\tau, \quad y \in \mathcal{Y},\ \ f \in \mathcal{Y}^*\ \ (y \in \mathcal{Z},\ f \in \mathcal{Z}^*).$$

Подпространства $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ нулей операторов $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_0^*$ $2n$-мерны

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}_0) = span\{\varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(1)}(\tau) = u_k e^{i\tau}, \bar{\varphi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n,\ \ \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) = span\{\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(1)}(\tau) = v_k e^{i\tau}, \bar{\psi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n,$$

биортогональные им элементы выбираются как A^*- и A-образы последних элементов ОЖЦ $A^*\psi_k^{(p_k)} = A^* v_k^{(p_k)} e^{i\tau} = \gamma_k^{(1)}$ и $A^*\varphi_j^{(p_j)} = A^* u_j^{(p_j)} e^{i\tau} = z_k^{(1)}$. Отвечающие базисным элементам подпространств $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ ОЖЦ имеют вид $\varphi_k^{(j)} = u_k^{(j)} e^{i\tau}$, $\psi_k^{(j)} = v_k^{(j)} e^{i\tau}$ с соответствующими условиями биортогональности

$$\begin{gathered}\langle\langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)}\rangle\rangle = \delta_{ks}\delta_{jl}, \quad \langle\langle z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)}\rangle\rangle = \delta_{ks}\delta_{jl},\\ \gamma_s^{(l)} = \vartheta_s^{(l)} e^{i\tau} = A^* v_s^{(p_s+1-l)} e^{i\tau}, \quad z_k^{(j)} = \mathrm{z}_k^{(j)} e^{i\tau} = A\varphi_k^{(p_k+1-j)} e^{i\tau}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. [6; 8–10] *Соотношения биортогональности (2.4) определяют проекторы*

$$\mathbf{P} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\langle\langle \cdot, \gamma_k^{(j)}\rangle\rangle \varphi_k^{(j)} = \langle\langle \cdot, \gamma\rangle\rangle\phi, \quad \bar{\mathbf{P}} = \langle\langle \cdot, \bar{\gamma}\rangle\rangle\bar{\psi}, \quad \mathbb{P} = \mathbf{P} + \bar{\mathbf{P}} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_1^{2K} = K(\mathcal{B}, A) = span\{\varphi, \bar{\varphi}\},$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\langle\langle \cdot, \psi_k^{(j)}\rangle\rangle z_k^{(j)} = \langle\langle \cdot, \psi\rangle\rangle z, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \langle\langle \cdot, \bar{\psi}\rangle\rangle\bar{z}, \quad \mathbb{Q} = \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{Q}} : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_{2,2K} = span\{z_k^{(j)}, \bar{z}_k^{(j)}\},$$

где $\varphi = (\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(p_1)}, \ldots \varphi_n^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(p_n)})$*, векторы* γ*,* ψ *и* z *определяются аналогично, порождающие разложения пространств* $\mathcal{E}_1$ *и* $\mathcal{E}_2$ *в прямые суммы* $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^{2K} \dot{+} \mathcal{E}_1^{\infty-2K}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{2,2K} \dot{+} \mathcal{E}_{2,\infty-2K}$, $K = \sum_{s=1}^{n} p_s$ *– корневое число.*

При этом справедливы соотношения сплетения

$$\mathcal{B}_0\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathcal{B}_0,\ \mathcal{B}_0\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}}\mathcal{B}_0 \ \text{на}\ D(\mathcal{B}), \quad A\mathbf{P} = \mathbf{Q}A,\ A\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}}A \ \text{на}\ D(A),$$

$$\mathcal{B}_0\varphi = \mathcal{A}_{\mathcal{B}} z,\ \ \mathcal{B}_0\bar{\varphi} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}}\bar{z},\ \ A\varphi = \mathcal{A}_A z,\ \ A^*\psi = \mathcal{A}_A\gamma,\ \ A\bar{\varphi} = \mathcal{A}_A\bar{z},\ \ A^*\bar{\psi} = \mathcal{A}_A\bar{\gamma},$$

где $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ *и* $\mathcal{A}_A$ *– клеточно-диагональные матрицы* $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = (B_1, \ldots, B_n)$ *и* $\mathcal{A}_A = (A_1, \ldots, A_n)$ *с* $p_k \times p_k$*-клетками* $B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ldots & 0\end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Операторы A *и* $\mathcal{B}_0$*, действуют в инвариантных парах подпространств* $\mathcal{E}_1^{2K}$*,* $\mathcal{E}_{2,2K}$ *и* $\mathcal{E}_1^{\infty-2K}$*,* $\mathcal{E}_{2,\infty-2K}$*;* $\mathcal{B}_0 : D_{\mathcal{B}_0} \cap \mathcal{E}_1^{\infty-2K} \to \mathcal{E}_{2,\infty-2K}$*,* $A : \mathcal{E}_1^{2K} \to \mathcal{E}_{2,2K}$ *являются изоморфизмами.*

Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \langle\langle \cdot, \gamma_k^{(1)} \rangle\rangle z_k^{(1)} + \sum\limits_{k=1}^{n} \langle\langle \cdot, \bar{\gamma}_k^{(1)} \rangle\rangle \bar{z}_k^{(1)}$, запишем уравнение (2.3) в виде системы

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 y = \mu \mathscr{C} y + B(\varepsilon) y + \sum_{k=1}^{n} (\xi_{k1} z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{z}_k^{(1)}), \;\; \xi_{s\sigma} = \langle\langle y, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle\rangle, \;\; \bar{\xi}_{s\sigma} = \langle\langle y, \bar{\gamma}_s^{(\sigma)} \rangle\rangle, \;\; \sigma = \overline{1, p_s}, \; s = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Полагая $y = w + v$, $v = \xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi} \in E_1^{2k}$, находим

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 w + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \widetilde{\mathcal{B}}_0 \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \widetilde{\mathcal{B}}_0 \bar{\varphi}_k^{(j)}) - \mu \mathscr{C} w - B(\varepsilon) w =$$
$$= \mu \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \mathscr{C} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \mathscr{C} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} [\xi_{kj} B(\varepsilon) \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} B(\varepsilon) \bar{\varphi}_k^{(j)}].$$

Обращая оператор $\widetilde{\mathcal{B}}_0$, $\widetilde{\mathcal{B}}_0^{-1} = \Gamma_0$ [1], получим

$$w - \mu \Gamma_0 \mathscr{C} w - \Gamma_0 B(\varepsilon) w = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathscr{C} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) +$$
$$+ \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}).$$

Отсюда следует

$$w = \Big[I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon) \Big]^{-1} \Big\{ -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \varphi_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathscr{C} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) +$$
$$+ \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \Big\}.$$

Далее $[I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} = [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1}$, $[I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) = [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) = = (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) [I - \Gamma_0 B(\varepsilon) (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}$ и

$$(I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \Big\{ -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathscr{C} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \Big\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathscr{C} (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \sum_{k=1}^{n} (\xi_{k1} \varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(1)}).$$

Следовательно,

$$+ \mu \Gamma_0 \mathscr{C} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \Big] + [I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) =$$
$$= [I - (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} \Big[-\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) +$$
$$+ (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} \mu \Gamma_0 \mathscr{C} \sum_{k=1}^{n} (\xi_{k1} \varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(1)}) \Big] +$$
$$+ (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1} [I - \Gamma_0 B(\varepsilon) (I - \mu \Gamma_0 \mathscr{C})^{-1}]^{-1} \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) -$$

$$-[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)})+$$

$$+[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\mu\Gamma_0\mathscr{C}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})+$$

$$w=[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Big[-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)})+$$

$$+[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)})=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)})+$$

$$+[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\mu\Gamma_0\mathscr{C}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})+$$

$$+[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)})+\mu\Gamma_0\mathscr{C}(I-\mu\Gamma_0)^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})+$$

$$+(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\mu\Gamma_0\mathscr{C}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})+$$

$$+(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})=$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)})+\mu\Gamma_0\mathscr{C}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})+$$

$$+(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}).$$

(2.6)

Формулы

$$\Gamma_0\mathscr{C}\varphi_k^{(1)}=i\Gamma_0\widetilde{\mathcal{B}}_0\varphi_k^{(2)}=i\varphi_k^{(2)},\;\;(\Gamma_0\mathscr{C})^2\varphi_k^{(1)}=i(\Gamma_0\mathscr{C})\varphi_k^{(2)}=i^2\varphi_k^{(3)},\;\;\ldots$$
$$(\Gamma_0\mathscr{C})^s\varphi_k^{(1)}=i^s\varphi_k^{(s+1)}\text{ при } s<p_k,\;\;(\Gamma_0\mathscr{C})^{p_k}\varphi_k^{(1)}=i^{p_k}\varphi_k^{(1)},\tag{2.7}$$
$$(\Gamma_0\mathscr{C})^s\varphi_k^{(1)}=i^s\varphi_k^{(s-\left[\frac{s}{p_k}\right]p_k+1)}\text{ при } s>p_k,\;\;\psi_k^{(1)}=\Gamma_0^*\gamma_k^{(1)},\;\;\psi_k^{(s)}=\Gamma_0^*\gamma_k^{(p_k+1-s)},$$

определяют выражение

$$\mu\Gamma_0\mathscr{C}(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)}+\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)})=$$
$$=\tfrac{\xi_{k1}}{1-(i\mu)^{p_k}}[(i\mu)^{p_k}\varphi_k^{(1)}+(i\mu)\varphi_k^{(2)}+\ldots+(i\mu)^{p_k-1}\varphi_k^{(p_k)}]+\tag{2.8}$$
$$+\tfrac{\bar{\xi}_{k1}}{1-(-i\mu)^{p_k}}[(-i\mu)^{p_k}\bar{\varphi}_k^{(1)}+(-i\mu)\bar{\varphi}_k^{(2)}+\ldots+(-i\mu)^{p_k-1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)}].$$

Теперь подстановка $y=w+\xi\cdot\varphi+\bar{\xi}\cdot\bar{\varphi}$ во вторые равенства системы (2.5) в силу соотношений (2.4) при условии принадлежности присоединенных (корневых) элементов прямому дополнению $\mathcal{E}_1^{\infty-2n}$ к подпространству собственных элементов $\mathcal{E}_1^{2n}$ и учете формул

(2.7), (2.8) дает линейную однородную разрешающую систему (аналог уравнения разветвления в корневом подпространстве), состоящую из уравнений

$$t_{k1}(\mu,\varepsilon)\equiv-\xi_{k1}\tfrac{(i\mu)^{p_k}}{1-(i\mu)^{p_k}}-\langle\langle(I-\mu\mathscr{C}\Gamma_0)^{-1}B(\varepsilon)\left[I-(I-\mu\mathscr{C}\Gamma_0)^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^{n}\tfrac{\xi_{k1}}{1-(i\mu)^{p_k}}[\varphi_k^{(1)}+(i\mu)\varphi_k^{(2)}+\ldots+(i\mu)^{p_k-1}\varphi_k^{(p_k)}]+$$
$$+\tfrac{\bar\xi_{k1}}{1-(-i\mu)^{p_k}}[\bar\varphi_k^{(1)}+(-i\mu)\bar\varphi_k^{(2)}+\ldots+(-i\mu)^{p_k-1}\bar\varphi_k^{(p_k)}],\ \psi_k^{(1)}\rangle\rangle=0,$$
$$t_{k\sigma}(\mu,\varepsilon)\equiv\xi_{k\sigma}-\tfrac{(i\mu)^{\sigma-1}}{1-(i\mu)^{p_k}}\xi_{k1}-\langle\langle(I-\mu\mathscr{C}\Gamma_0)^{-1}B(\varepsilon)\left[I-(I-\mu\mathscr{C}\Gamma_0)^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot\sum_{k=1}^{n}\tfrac{\xi_{k\sigma}}{1-(i\mu)^{p_k}}[\varphi_k^{(1)}+(i\mu)\varphi_k^{(2)}+\ldots+(i\mu)^{p_k-1}\varphi_k^{(p_k)}]+$$
$$+\tfrac{\bar\xi_{k\sigma}}{1-(-i\mu)^{p_k}}[\bar\varphi_k^{(1)}+(-i\mu)\bar\varphi_k^{(2)}+\ldots+(-i\mu)^{p_k-1}\bar\varphi_k^{(p_k)}],\ \psi_k^{(p_k+2-\sigma)}\rangle\rangle=0,$$
$$k=\overline{1,n},\ \ \sigma=\overline{1,p_k}. \tag{2.9}$$

и соответствующих им комплексно-сопряженных, равенство нулю определителя которой является уравнением разветвления в корневых подпространствах для определения периода колебаний $\frac{2\pi}{\alpha+\mu}$, $\mu=\mu(\varepsilon)$, возмущенной задачи (1.2).

Замечание 2.1. *В линейной однородной разрешающей системе слагаемые в уравнениях и им сопряженных, содержащие двойственность, можно записать в виде*

$$\langle\langle(I-\mu\mathscr{C}\Gamma_0)^{-1}\left[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)\right]^{-1}\{...\},\psi_s^{(p_s+2-s)}\rangle\rangle=$$
$$=\langle\langle\left[I-(I-\mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)\right]^{-1}\{...\},(I-\mu\Gamma_0^*\mathscr{C}^*)^{-1}\psi_s^{(p_s+2-s)}\rangle\rangle,$$

и учитывая, что $C^*=-\frac{d}{dt}A^*$, *выразить компоненты*

$$(I-\mu\Gamma_0^*\mathscr{C}^*)^{-1}\psi_s^{(p_s+2-s)},\quad(I-\mu\Gamma_0^*\mathscr{C}^*)^{-1}\bar\psi_s^{(p_s+2-s)}$$

через линейную комбинацию ОЖЦ $\psi_s^{(1)},\psi_s^{(2)},...,\psi_s^{(p_s)}$, *соответственно* $\bar\psi_s^{(1)},\bar\psi_s^{(2)},...,\bar\psi_s^{(p_s)}$.

3. Редукция к возмущенной матричной задаче

Более компактным вариантом исследования задачи является ее редукция к возмущенной матричной задаче на собственные значения

$$\begin{pmatrix}B_0+B(\varepsilon)&(\alpha+\mu)A\\-(\alpha+\mu)A&B_0+B(\varepsilon)\end{pmatrix}U=\left[\begin{pmatrix}B_0+B(\varepsilon)&\alpha A\\-\alpha A&B_0+B(\varepsilon)\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix}0&-A\\A&0\end{pmatrix}\right]U=0,\ \ \mu=\mu(\varepsilon). \tag{3.1}$$

Следует выяснить как изменится $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&-A\\A&0\end{pmatrix}$-собственное значение α оператора $\mathscr{B}=\begin{pmatrix}B_0&\alpha A\\-\alpha A&B_0\end{pmatrix}$ при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0. Таким образом, рассматривается задача на собственные значения

$$\left[\mathscr{B}(\alpha)+\begin{pmatrix} B(\varepsilon) & 0\\ 0 & B(\varepsilon)\end{pmatrix}-\mu\begin{pmatrix} 0 & -A\\ A & 0\end{pmatrix}\right]U=0,\quad \mathbf{B}=\mathscr{B}(\alpha)=\begin{pmatrix} B_0 & 0\\ 0 & B_0\end{pmatrix}-\alpha\mathcal{A},$$
$$\mathbf{B}(\varepsilon)=\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & B_1\end{pmatrix}\varepsilon+\begin{pmatrix} B_2 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}\varepsilon^2+\ldots,$$

т. е.

$$\mathscr{B}(\alpha)U=[-\mathbf{B}(\varepsilon)U+\mu\mathcal{A}]\,U=0 \ \text{ или } \ \mathbf{B}U=-\mathbf{B}(\varepsilon)U+\mu\mathcal{A}U,\quad U=\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Согласно [5-7] обобщенный жорданов набор линейной по малому параметру μ оператор-функции $\mathbf{B}-\mu\mathcal{A}$ всегда может быть выбран триканоническим, т. е. для него справедливы формулы (1.7) или в координатной форме (1.8). Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{\mathbf{B}}=\mathbf{B}+\sum\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\langle\cdot,\Gamma_{jk}^{(1)}\rangle \mathrm{Z}_{jk}^{(1)}$, $\mathbf{\Gamma}=\widetilde{\mathbf{B}}^{-1}$, и, полагая

$$U=W+V,\ \ V=\xi_1\Phi_1+\xi_2\Phi_2,\ \ \xi_1=(\xi_{i1}^1,\xi_{i1}^2,\ldots\xi_{i1}^{p_1},\,\ldots,\,\xi_{in}^1,\xi_{in}^2,\ldots\xi_{in}^{p_n});$$
$$\Phi_1=(\Phi_{i1}^1,\Phi_{i1}^2,\ldots\Phi_{i1}^{p_1},\,\ldots,\,\Phi_{in}^1,\Phi_{in}^2,\ldots\Phi_{in}^{p_n}),\ \ i=1,2,$$

(векторы Γ_i, Ψ_i, Z_i, $i=1,2$, определяются аналогично), запишем (3.2) в виде системы

$$\widetilde{\mathbf{B}}W+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)})-\mu\mathcal{A}W-\mu\mathcal{A}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)})+$$
$$+\mathbf{B}(\varepsilon)\left(W+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)})\right)=\sum_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^j\mathrm{Z}_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\mathrm{Z}_{2k}^{(j)}), \tag{3.3}$$
$$\xi_{1k}^j=\langle U,\,\Gamma_{1k}^{(j)}\rangle=\langle W,\,\Gamma_{1k}^{(j)}\rangle+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\langle(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}),\,\Gamma_{ik}^j\rangle,\quad i=1,2.$$

Обращая в первом уравнении оператор $\widetilde{\mathbf{B}}$, получаем

$$W=[I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}+\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1}\left\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})+\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})-\right.$$
$$\left.-\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})\right\}.$$

Так как $[I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}+\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1}=[I-(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}$ и $(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\left\{-\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})+\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})\right\}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+$ $+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})+\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^1\Phi_{1k}^{(1)}+\xi_{2k}^1\Phi_{2k}^{(1)})$, следовательно

$$W=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)}+\xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})+\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^1\Phi_{1k}^{(1)}+\xi_{2k}^1\Phi_{2k}^{(1)})-$$
$$-(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)[I-(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1}(I-\mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^1\Phi_{1k}^{(1)}+\xi_{2k}^1\Phi_{2k}^{(1)}). \tag{3.4}$$

Подстановка определенного по формуле (3.4) W во вторые уравнения системы (3.3) при учете формул

$$\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\Phi_{1k}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(2)} = \Phi_{1k}^{(2)},\ \ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^2\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(3)},\ \ \ldots,\ \ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^s\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k,$$
$$(\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{p_k}\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(p_k+1)} = \Phi_{1k}^{(1)},$$
$$\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\Phi_{2k}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(2)} = \Phi_{2k}^{(2)},\ \ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^2\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(3)},\ \ \ldots,\ \ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^s\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k,$$
$$(\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{p_k}\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(p_k+1)} = \Phi_{2k}^{(1)},$$
$$(\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^s\Phi_{ik}^{(1)} = \Phi_{ik}^{\left(s-\left[\frac{s}{p_k}\right]p_k+1\right)} \quad s > p_k, \quad i = 1, 2,$$

как и ранее, дает однородную систему $2K$-порядка линейных алгебраических уравнений, равенство нулю определителя которой является уравнением разветвления в корневом подпространстве относительно $\mu = \mu(\varepsilon)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 524 с.

2. Треногин В. А. Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука. СО АН СССР, 1988. – С. 133–140.

3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задачам о возмущении линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 3. – С. 100–107.

4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной // Журнал Средневолжского математического общества. – 2014. – Т. 16, № 4. – С. 33–40.

5. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными: сб. науч. работ / ред. М. С. Салахитдинов. – Ташкент: Изд-во «Фан» АН Узб.ССР, 1978. – С. 133–148.

6. Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления: дис. … канд. мат. наук. – Ташкент, 1979. – 126 с.

7. Русак Ю. Б. Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и

сопряженной к ней // Известия Акад. Наук Узб.ССР. Физ-мат. – 1978. – № 2. – С. 15–19.

8. Loginov B. V., Rousak Yu. B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions // Nonlinear Analysis: TMA. – 1991. – V. 17, N. 3. – pp. 219–232.

9. Loginov B. V. Determination of the branching equation by its group symmetry – Andronov-Hopf bifurcation // Nonlinear Analysis: TMA. – 1997. – V. 28, N. 12. – pp. 2033–2047.

10. Loginov B. V. Branching equation in the root subspace // Nonlinear Analysis: TMA. – 1998. – V. 32, N. 3. – pp. 439–448.

11. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu. B. On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative // Nonlinear Analysis. – 2007. – V. 67, N. 5. – pp. 1570–1585.

12. Коноплева И. В., Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. – 2009. – С. 115–124.

13. Loginov B. V. On the determination of branching equation by its group symmetry // Doklady Mathematics. – 1993. – V. 331, N. 6. – P. 667.

14. Loginov B. V., Trenogin V. A. Branching equation of Andronov-Hopf bifurcation under group symmetry conditions // CHAOS, Amer. Inst. Phys. – 1997. – V. 7, N. 2. – pp. 229–238.

15. Логинов Б. В., Коноплева И. В., Русак Ю. Б. Теоремы о неявных операторах в условиях групповой симметрии // Доклады РАН. Математика. – 2011. – Т. 440, № 1. – С. 15–20.