

МАМЕДОВА Т. Ф., ПАНЯГИНА И. А., КУДАШКИНА Е. А.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Аннотация. В статье решается задача оптимального управления для математической модели экономического роста долгосрочного прогнозирования. На ее основе строится система дифференциальных уравнений, описывающих траектории сбалансированного роста.

Ключевые слова: экономический рост, оптимизационная задача, сбалансированный рост, человеческий капитал, физический капитал.

MAMEDOVA T. F., PANYAGINA I. A., KUDASHKINA E. A.

THE PROBLEM OF OPTIMALITY IN MATHEMATICAL MODEL OF
ECONOMIC GROWTH LONG-TERM FORECASTING

Abstract. The authors solve the problem of optimum control for mathematical model of economic growth of long-term forecasting. Considering the problem solution, the article presents a system of differential equations describing the trajectories of balanced growth.

Keywords: economic growth, optimizing task, balanced growth, human capital, physical capital.

Решение задачи оптимальности в моделях долгосрочного прогнозирования экономического роста обеспечивает равномерное, устойчивое развитие. В результате решения задачи оптимального управления, можно выявить оптимальную траекторию, находясь на которой экономика переходит в устойчивое состояние равновесия.

Устойчивый экономический рост может быть достигнут в рамках неоклассической модели с учетом научно-технического прогресса, технологических изменений и образовательного сектора, поэтому в математической модели необходимо также рассматривать эндогенный фактор изменения человеческого капитала.

Рассмотрим описание такой модели [1-5].

Пусть уравнение динамики объема физического капитала имеет вид:

$$\frac{dK(t)}{dt} = A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta} [u_a(t)h_a(t)^\gamma] - \mu_k K(t) - c(t)N(t), \quad (1)$$

где $A(t)$ – функция, описывающая технологический прогресс, $K(t)$ – физический капитал, $N(t)$ – численность рабочей силы, $c(t)$ – удельное потребление, β – доля физического капитала, γ – положительный параметр, μ_k – норма амортизации физического капитала, $u(t)$ – доля времени индивида, посвященного производственной деятельности, $h(t)$

– уровень человеческого капитала, h_a – средний уровень человеческого капитала, u_a – средняя доля времени, затраченного на производство.

Уравнение динамики накопления человеческого капитала имеет вид:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \delta(1-u(t))^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t), \quad (2)$$

где δ – положительный технологический параметр, p, s, q, r – неотрицательные параметры.

Функция полезности имеет вид:

$$J = J(c, u) = \int_0^\infty e^{-\rho t} N(t) U(c(t)) dt, \quad (3)$$

где ρ – неотрицательный фактор дисконтирования.

Таким образом, оптимизационная задача состоит в выборе таких управляющих параметров (уровня потребления c и доли активного времени, посвященного производственной деятельности u), которые бы максимизировали бы функционал (3) на допустимых траекториях $\{K(t), h(t)\}$.

Решения оптимизационной задачи необходимы для определения траекторий сбалансированного роста, т. е. траекторий, где темпы роста всех переменных постоянны, а также для сравнения планового и конкурентного вариантов развития экономики.

Решим задачу оптимального управления следующим образом: выпишем функцию Гамильтона-Понтрягина, осуществим переход к сопряженной системе, выпишем необходимые условия экстремума, после чего запишем общую оптимизационную задачу.

Функция Гамильтона-Понтрягина имеет вид:

$$H = \psi_0 e^{-\rho t} N(t) \frac{c(t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + \psi_K (A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta} [u_a(t)h_a(t)^\gamma] - \mu_K K(t) - c(t)N(t) + \psi_H [\delta(1-u(t))^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t)]). \quad (4)$$

Функции ψ можно интерпретировать как цены ресурсов.

Сделаем замену переменных:

$$\psi_i = e^{-\rho t} o_i(t).$$

Получаем:

$$H = N(t) \frac{c(t)^{(1-\sigma)}}{1-\sigma} + o_K [A(t)K(t)^\beta (u(t)h(t)N(t))^{1-\beta} [u_a(t)h_a(t)^\gamma] - \mu_K K(t) - c(t)N(t)] + o_H [\delta(1-u(t))^p [1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r - \mu_h h(t)]. \quad (5)$$

Система сопряженных уравнений, определяющих цены ресурсов:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[o_K(t)] &= o_K(t)[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}(u(t)h(t)N(t))^{1-\beta}h_a(t)^\gamma u_a(t)^\gamma] \\ \frac{d}{dt}[o_H(t)] &= o_H(t)[\rho + \mu_H - q\delta(1-u(t))^\rho[1-u_a(t)]^s h(t)^{\rho-1}h_a(t)^r] - \\ &- o_K(t)[(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(u(t)N(t))^{1-\beta}h(t)^{-\beta}h_a(t)^\gamma u_a(t)^\gamma]\end{aligned}\quad (6)$$

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned}\frac{d}{du}H(K, h, o_K, o_H, c, u, t) &= 0, \\ \frac{d}{dc}H(K, h, o_K, o_H, c, u, t) &= 0\end{aligned}\quad (7)$$

принимают вид

$$\begin{aligned}o_K(t)(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(h(t)N(t))^{1-\beta}u(t)^{-\beta}h_a(t)^\gamma u_a(t)^\gamma &= \\ = o_H(t)\rho\delta(1-u(t))^{\rho-1}[1-u_a(t)]^s h(t)^q h_a(t)^r, \\ c^{-\sigma} &= o_K\end{aligned}\quad (8)$$

Так как было сделано предположение о том, что экономическая система должна находиться в состоянии равновесия, то для нахождения решения необходимо учесть равенства:

$$\begin{aligned}h(t) &= h_a(t), \\ u(t) &= u_a(t).\end{aligned}\quad (9)$$

Получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[o_K(t)] &= o_K(t)[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1}(N(t))^{1-\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma}] \\ \frac{d}{dt}[o_H(t)] &= o_H(t)(\rho + \mu_K - q\delta(1-u(t))) - o_K(t)[(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(N(t))^{1-\beta}h(t)^{-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma}] \\ c^{-\sigma} &= K, \\ o_K(t)(1-\beta)A(t)K(t)^\beta(N(t))^{1-\beta}u(t)^{-\beta+\gamma}h(t)^{1-\beta+\gamma} &= o_H(t)\rho\delta h(t).\end{aligned}\quad (10)$$

Система (1) – (2) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}K(t) &= A(t)K(t)^\beta N(t)^{1-\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \\ \frac{d}{dt}h(t) &= \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t).\end{aligned}\quad (11)$$

Таким образом, для определения оптимальной равновесной траектории экономический агент должен использовать уравнения движения (11), уравнения для сопряженных переменных (6), необходимые условия экстремума (8).

Будем рассматривать траектории сбалансированного роста – такие траектории $\{k(t), h(t), c(t)\}$, для которых темпы роста переменных k, h, c являются постоянными.

Из (10) имеем:

$$-\sigma w_c = w_{(o_K)}. \quad (12)$$

Из (12) и (6) имеем:

$$w_c = \frac{-w_{(o_K)}}{\sigma} = \frac{-o_K}{\sigma o_K} = \frac{[\rho + \mu_K - \beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma}]}{\sigma} \quad (13)$$

Получим дифференциальное уравнение для потребления:

$$\frac{d}{dt} c(t) = \frac{c(t) [\beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma} - (\rho + \mu_K)]}{\sigma}. \quad (14)$$

Из (13) также можно рассмотреть сбалансированную оптимальную траекторию, на которой темпы роста постоянны:

$$A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} (u(t)h(t))^{1-\beta+\gamma} = \frac{\sigma w_c + (\rho + \mu_K)}{\beta} = const. \quad (15)$$

Получаем систему дифференциальных уравнений для определения оптимальных траекторий:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K(t) &= A(t)K(t)^{\beta} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} u(t)^{1-\beta+\gamma} - \mu_K K(t) - c(t)N(t), \\ \frac{d}{dt} h(t) &= \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t), \\ \frac{d}{dt} c(t) &= \frac{c(t) [\beta A(t)K(t)^{\beta-1} N(t)^{1-\beta} h(t)^{1-\beta+\gamma} - (\rho + \mu_K)]}{\sigma}. \end{aligned} \quad (16)$$

Полученная система дифференциальных уравнений позволяет установить существование траекторий сбалансированного роста, а также изучить вопрос их устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корицкий А. В. Введение в теорию человеческого капитала. – Новосибирск: СибУПК, 2000. – 112 с.
2. Королев А. В. О структуре равновесных нестационарных траекторий в модели эндогенного роста. – Новосибирск: Автоматика и телемеханика, 2006. – 120 с.
3. Шараев Ю. В. Теория экономического роста. – М.: ГУ ВШЭ, 2006. – 254 с.
4. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К. Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15., № 2. – С. 55-58.
5. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А. Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 3 (27). – С. 48-57.