

НИЗИНА Т. А., БАЛБАЛИН А. В., БАЛЫКОВ А. С.

**ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КРИВЫХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
КОМПОЗИЦИОННЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЖАТИИ**

Аннотация. Изложен алгоритм определения фрактальной размерности кривых деформирования на основе анализа индекса длины, позволяющий получать интегральную количественную оценку процесса разрушения строительных композитов при сжатии. Проведено сравнение предлагаемого метода с алгоритмами определения показателя Херста и фрактальной размерности методом покрытия квадратами. Показано преимущество методики, основанной на определении фрактальной размерности по индексу длины кривых деформирования.

Ключевые слова: кривая деформирования при сжатии, композиционный строительный материал, фрактальная размерность, индекс длины, метод Херста, метод покрытия квадратами.

NIZINA T. A., BALBALIN A. V., BALYKOV A. S.

**FRactal Analysis of Deformation Curves
of Composite Building Materials under Compression**

Abstract. The article considers the algorithm of determining the fractal dimension of deformation curves based on the index of length analysis in order to obtain the integral quantitative estimation of destruction of building composites under compression. The authors compare the method suggested with the algorithms of determining the Hurst exponent and fractal dimension by the method of squares. The study shows the advantage of the method based on determining of the fractal dimension on the index of length of deformation curves.

Keywords: deformation curve under compression, composite building material, fractal dimension, index of length, Hurst exponent, method of squares.

Известно, что разрушение строительных материалов представляет собой процесс множественного зарождения, развития и агрегации различного рода дефектов и микротрещин вплоть до появления макротрещин. Процесс разрушения бетона под действием силовых факторов зарождается на микроуровне как дискретный акт продвижения первичной микротрещины до точки бифуркации, которая является дефектом структуры в виде зерна наполнителя или поры. Процесс разрушения образца складывается из дискретных актов разрушения на микромасштабном уровне [1]. При этом разрушение имеет вероятностную природу, а сам процесс накопления повреждений самоподобен, что позволяет использовать аппарат теории фракталов.

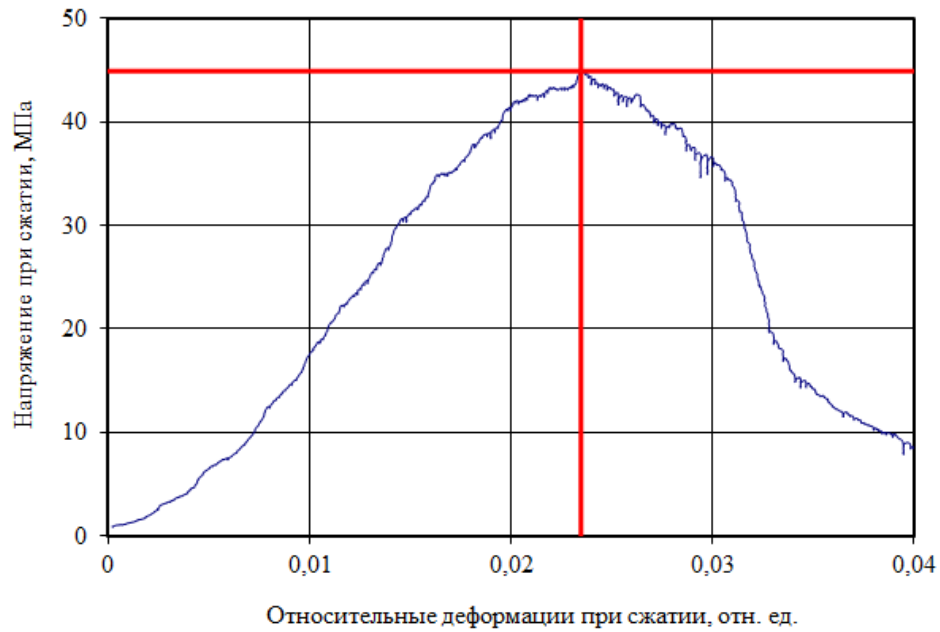
В научной литературе приводится достаточно много различных способов определения фрактальной размерности структуры реальных композиционных материалов на основе цементных вяжущих и полимерных связующих [2–8]. Выявлено, что использование фрактального анализа для количественной оценки структурной неоднородности полимерных материалов и поровой структуры цементных композитов позволяет найти компактный способ описания подобных объектов. Предложены модифицированные методы определения фрактальной размерности наполненных полимерных композитов по длине профиля и площади поверхности, являющиеся более удобными и легко реализуемыми по сравнению с традиционным методом покрытия квадратами [7; 8].

Программное обеспечение современного испытательного оборудования представляет собой высокоточную систему сбора и регистрации результатов с возможностью получения обширного объема данных. Фиксирование изменения силы и деформации в процессе нагружения образца может происходить с интервалом не только в доли минуты, но и доли секунды [1; 9]. В зависимости от режима испытания, скорость нагружения при использовании подобных испытательных комплексов может быть задана в виде постоянной величины, характеризующейся нарастанием напряжений или деформаций во времени. Используемый в данной работе программно-аппаратный комплекс установки для испытания строительных материалов WilleGeotechnik® (модель 13-PD/401) позволяет фиксировать изменение напряжений и деформаций образца в процессе нагружения с достаточно малым шагом (0,01 сек. и менее), что дает возможным использовать получаемые результаты (рис. 1, а) для их анализа с позиций фрактальной геометрии.

При построении фрагментов кривой деформирования в более крупном масштабе наглядно видно (рис. 1, б), что процесс нарастания деформаций сопровождается дискретными актами повышения и падения напряжений. Так же для ряда участков диаграммы деформирования наблюдается прирост и снижение относительных деформаций без существенного прироста напряжений.

Учитывая, что прирост напряжений и деформаций в образце при проведении испытаний на сжатие развивается во времени с определенным (заданным) шагом, появляется возможность применения для анализа кривых деформирования теории фракталов. К подобным временным рядам относят широкий спектр различных процессов – от стохастических (броуновского движения) до детерминированных. Широкая распространенность фрактальных свойств временных рядов свидетельствует о наличии единого универсального механизма, приводящего к возникновению фрактальности в совершенно различных реальных системах.

а)



б)

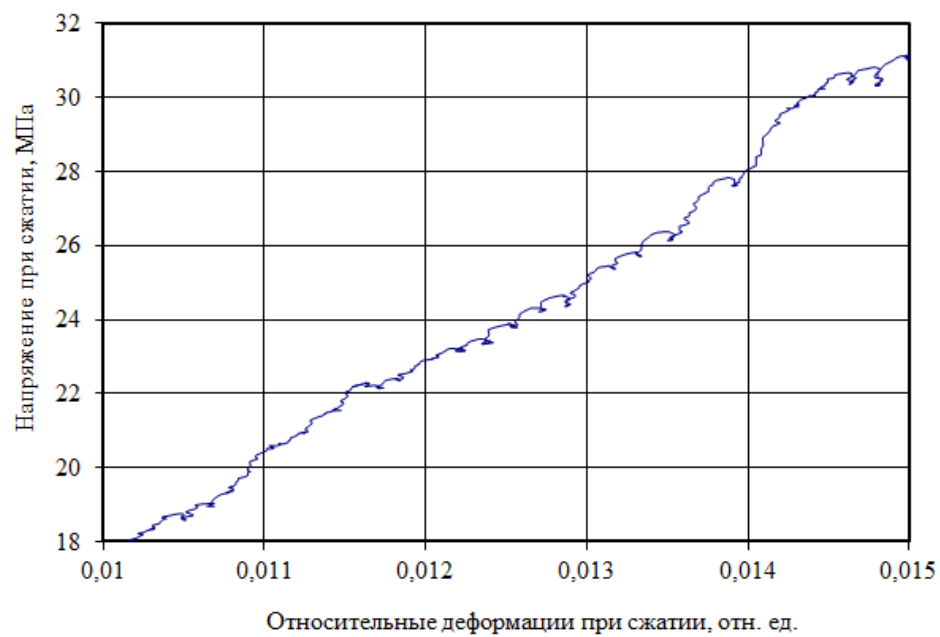


Рис. 1. Общий вид (а) и фрагмент (б) кривой деформирования составов цементных композитов при сжатии.

Рассмотрим способы определения фрактальной структуры временных рядов $y(t)$. Пусть Δ – окрестность точки $t \in [0, T]$. Тогда фрактальная размерность функции $y(t)$ на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$, определяемая методом покрытия квадратов со стороной $\delta < \Delta$, будет определяться по формуле:

$$D(\Delta, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{N(\delta)}{\ln(\frac{1}{\delta})} = 1 + \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(A(\delta))}{\ln(\frac{1}{\delta})}, \quad (1)$$

где $N(\delta)$ – количество квадратов со стороной δ , покрывающих график функции $y(t)$ на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$;

$A(\delta)$ – площадь покрытия, определяемая как $A(\delta) = N(\delta) \times \delta$.

Фрактальная размерность $D(\Delta, t)$ является интегральной характеристикой функции на промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$, зависит от длины промежутка Δ и существует для любой непрерывной функции $y(t)$. Если функция непрерывно дифференцируема, то [10]:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(A(\delta))}{\ln(\frac{1}{\delta})} = 0 \text{ и } D(\Delta, t) = 1.$$

Следовательно, если $D(\Delta, t) > 1$, то это свидетельствует о наличии фрактальной структуры рассматриваемого временного процесса.

Выберем в промежутке $[t - \Delta, t + \Delta]$ совокупность точек $t_o = t - \Delta < t_1 < \dots < t_n = t + \Delta$ и определим длину ломаной

$$L_n = \sum_{i=1}^n l_i, \quad (2)$$

соединяющей прямыми отрезками последовательные соседние точки $(t - \Delta, y_o)$, $(t_1, y_1), \dots, (t + \Delta, y_n)$, где l_i – длина отрезка, соединяющего на плоскости $y(t) - t$ точки $(t_{i-1}, y_{i-1}), (t_i, y_i)$, определяемая по формуле:

$$l_i = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (3)$$

В случае равномерной сетки разбиения интервала $[t - \Delta, t + \Delta]$ имеем $t_i = t_{i-1} + \delta$.

Пусть количество точек неограниченно увеличивается ($n \rightarrow \infty$) так, что $\delta \rightarrow 0$. Если функция не имеет фрактальной структуры, то $\lim_{\delta \rightarrow 0} L_n(\delta) = L$,

где L – длина кривой, соответствующей графику функции $y(t)$.

Пусть функция $y(t)$ такова, что $L_n(\delta) \rightarrow +\infty$ при $\delta \rightarrow +0$, причем

$$L_n(\delta) \sim \delta^{-\gamma}; \gamma > 0; \delta \rightarrow 0. \quad (4)$$

Тогда функция $y(t)$ имеет фрактальную структуру, а величина $\gamma > 0$ является её показателем и определяет степень фрактальной структуры: чем больше величина γ , тем больше степень фрактальной структуры исследуемой функции. В работе [10] величину γ предлагается называть индексом длины и определять как

$$\gamma = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(L(\delta))}{\ln(\frac{1}{\delta})}. \quad (5)$$

Геометрически индекс длины определяется как тангенс угла наклона в двойном логарифмическом масштабе прямой при малых $\delta > 0$:

$$\ln(L(\delta)) = a + \gamma \times \ln(\frac{1}{\delta}). \quad (6)$$

Из определения фрактальной размерности функции $y(t)$ следует, что исследуемая функция должна быть определена на всем множестве точек промежутка $[t - \Delta, t + \Delta]$.

Однако, временные ряды во многих областях техники представляют собой последовательности $y_i, i = 1, \dots, n$, где индекс i указывает на дискретные фиксации времени, для которых известны значения исследуемого временного интервала.

Рассмотрим дискретный временной процесс в виде временного ряда

$$y_1, \dots, y_n. \quad (7)$$

Произведем разбиение совокупности чисел $i = 1, \dots, n$ на группы с делителем m_1 :

$$j = 1: i = 1, \dots, m_1; j = 2: i = m_1 + 1, \dots, 2 \times m_1;$$

$$j = n_1: i = (n_1 - 1) \times m_1 + 1, \dots, n_1 \times m_1,$$

$$\text{где } n_1 = \left\lfloor \frac{n}{m_1} \right\rfloor.$$

Аналогично проведем разбиение совокупности чисел $i = 1, \dots, n$ на n_2 групп ($n_2 = \left\lfloor \frac{n}{m_2} \right\rfloor$) с делителем m_2 и т.д. вплоть до m_k .

Рассмотрим для временного дискретного ряда аналог индекса длины γ , определяемого для функции непрерывного аргумента равенством (5). Соединим соседние последовательности точек

$$(0, y_1), \left(\frac{m_1}{n}, y_{m_1}\right), \left(\frac{2 \times m_1}{n}, y_{2 \times m_1}\right), \dots, \left(\frac{(n_1 - 1) \times m_1}{n}, y_{(n_1 - 1) \times m_1}\right), \left(\frac{n_1 \times m_1}{n}, y_{n_1 \times m_1}\right)$$

прямыми отрезками.

Обозначим $L(m_i)$ длину ломанной, соединяющей последовательно пары соседних точек. Тогда, соответственно, для m_1, m_2 и m_k имеем:

$$\begin{aligned} L(m_1) &= \sum_{i=1}^{n_1} \sqrt{\frac{m_1^2}{n^2} + (y_{i \times m_1} - y_{(i-1) \times m_1})^2}; \\ L(m_2) &= \sum_{i=1}^{n_2} \sqrt{\frac{4 \times m_1^2}{n^2} + (y_{i \times m_2} - y_{(i-1) \times m_2})^2}; \\ &\dots \\ L(m_k) &= \sum_{i=1}^{n_k} \sqrt{\frac{m_1^2 \times n_k^2}{n^2} + (y_{i \times m_k} - y_{(i-1) \times m_k})^2}. \end{aligned}$$

Очевидно, что справедливы неравенства

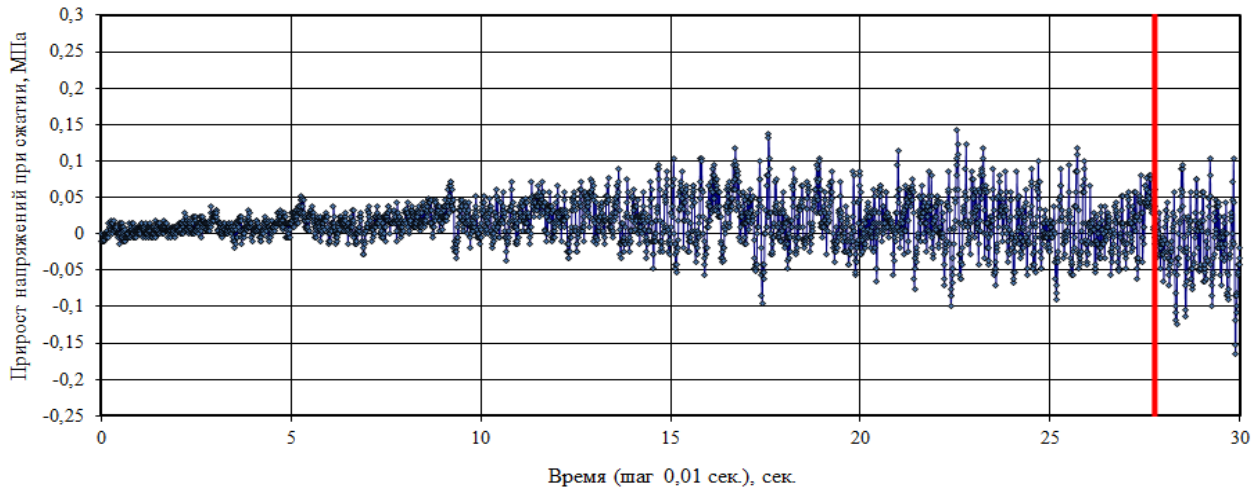
$$L(m_k) < L(m_{k-1}) < \dots < L(m_1).$$

Тогда индекс длины дискретного временного ряда (7) определим как тангенс угла наклона прямой в двойном логарифмическом масштабе $\ln(m) - \ln(L(m))$.

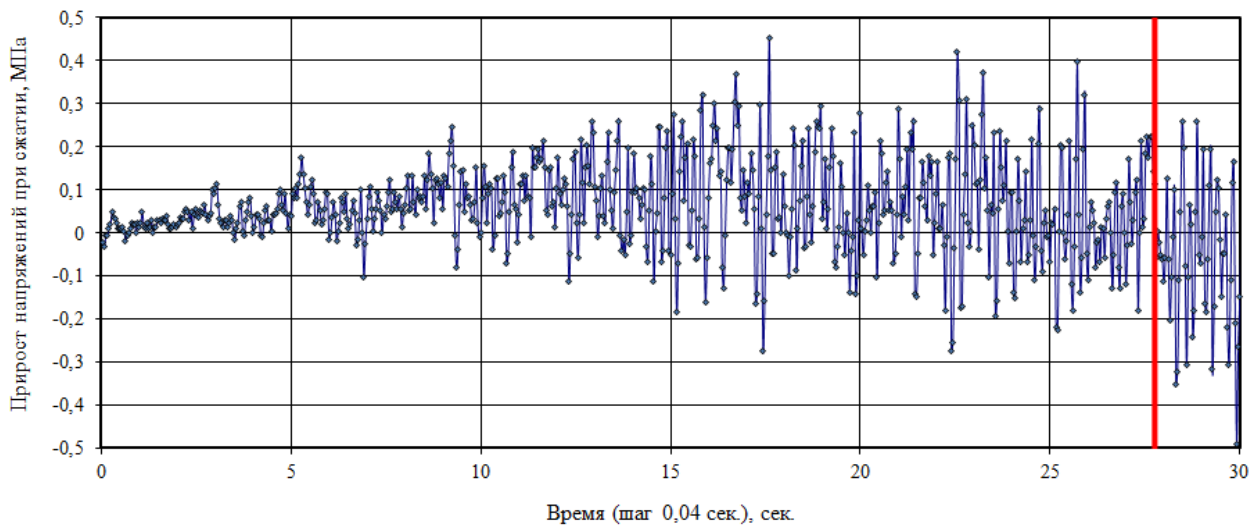
Проведем анализ кривых деформирования (до точки разрушения), представив данные в виде временных рядов, описывающих прирост в процессе нагружения напряжений (рис. 2) и относительных деформаций с разным шагом: 0,01; 0,04 и 0,16 сек. Определим длины ломанных, построенных на разных масштабных уровнях (с шагом 0,01; 0,02; 0,04; 0,08 и 0,16 сек.) по формуле (3). Индекс длины, определенный по тангенсу угла наклона длины временного ряда в зависимости от масштабного фактора (интервала между

экспериментальными точками) в двойных логарифмических координатах для данного образца составит $\gamma = 0,752$ (рис. 3). Соответственно, значение фрактальной размерности кривой деформирования исследуемого состава – $D_\gamma = 1,752$.

а)



б)



в)

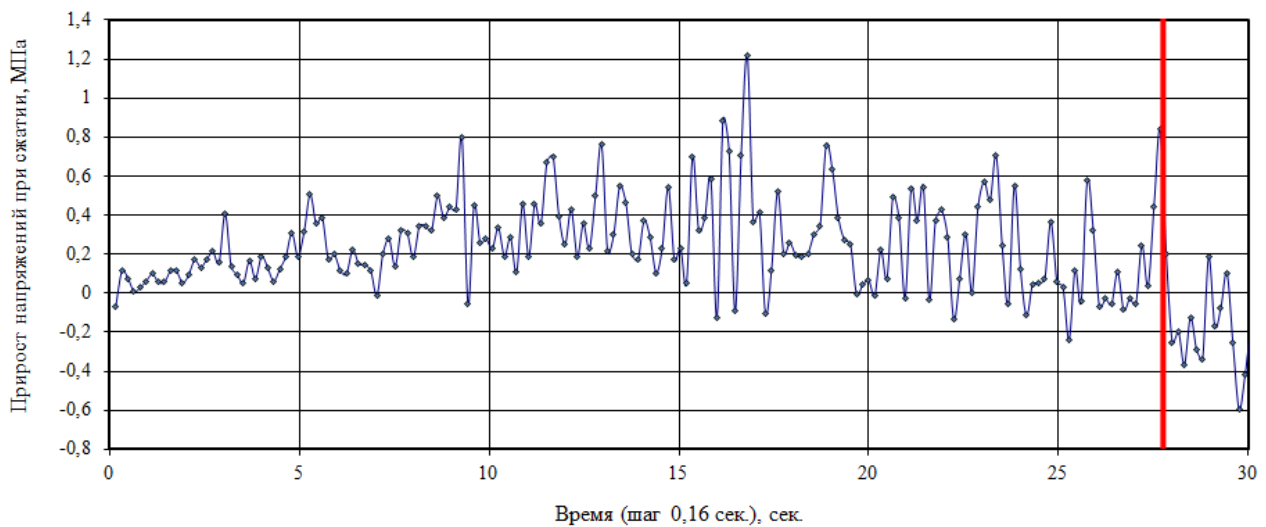


Рис. 2. Временные ряды прироста напряжений в зависимости от шага фиксации показаний: а – 0,01; б – 0,04; в – 0,16 сек. (вертикальной линией обозначен момент разрушения образца).

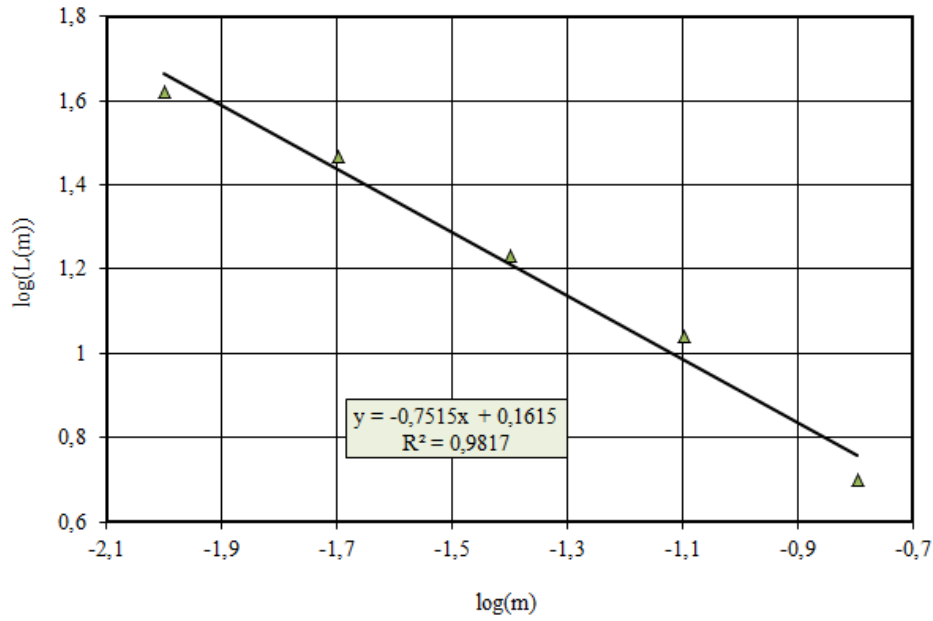


Рис. 3. Зависимость наклона длины временного ряда в зависимости от масштабного фактора (интервала между экспериментальными точками) в двойных логарифмических координатах.

Сравним алгоритм определения индекса длины с алгоритмом определения показателя Херста для дискретного временного ряда (7). Введем обозначения:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{j} \times \sum_{i=1}^j y_i;$$

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^i (y_k - \bar{y}_j);$$

$$R_j = \max_{i=1, \dots, j} y_{ij} - \min_{i=1, \dots, j} y_{ij};$$

$$S_j^2 = \frac{1}{j} \times \sum_{i=1}^j (y_i - \bar{y}_j)^2, j = 2, \dots, n.$$

Зададим k целых чисел $2 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k = n$. Тогда угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей совокупность точек в координатах $\ln\left(\frac{R_j}{S_j}\right) - \ln\left(\frac{n_j}{2}\right)$, $j = 1, \dots, k$, позволит определить показатель Херста временного ряда.

Вычисление показателя Херста является на сегодняшний день одним из основных методов определения фрактальной размерности временных рядов. Однако, исходный метод вычисления H через R/S достаточно трудоемок, поэтому для его определения в достаточно часто используют степенную зависимость [11]:

$$\langle (X_{i+\delta} - X_i) \rangle \sim \delta^H. \quad (8)$$

При этом величину показателя Херста определяют как коэффициент наклона графика функции $y = f(\delta) = \langle (X_{i+\delta} - X_i) \rangle$, построенного в двойном логарифмическом масштабе. Однако, основным недостатком данного метода является необходимость большого количества данных, а также достаточно медленный выход на асимптотику при анализе реальных фрактальных структур [10, 12].

Как отмечается в работе [10], при определении фрактальной размерности через показатель Херста «часто особую роль играет «искусство» правильного выбора системы аппроксимаций», а для естественных фрактальных структур все известные методы позволяют определять размерность с некоторой ошибкой, которая во много зависит от выбранной системы аппроксимации. Действительно, при рассмотрении модельных множеств (множества Кантора, кривой Коха и т.д.) используются специфические последовательности аппроксимации – выбранные системы покрытий являются минимальными для данных множеств и $S(\delta)$ выходит на асимптотический режим, начиная с максимально возможного δ . Однако, если построить аналогичный график для систем покрытий, отличных от использованных, то соответствующие точки уже не будут идеально ложиться на одну прямую.

Предлагаемый алгоритм определения фрактальной размерности кривых деформирования на основе индекса длины позволяет получить интегральную количественную оценку процесса разрушения строительных композитов при сжатии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Селяев В. П., Куприяшкина Л. И., Неверов В. А., Селяев П. В. Фрактальные модели разрушения бетонов // Региональная архитектура и строительство. – 2015. – № 1. – С. 11–22.
2. Фролкин О. А. Компьютерное моделирование и анализ структуры композиционных материалов: дис. ... канд. техн. наук. – Саранск, 2000. – 223 с.
3. Селяев В. П., Низина Т. А., Ланкина Ю. А., Цыганов В. В. Определение фрактальной размерности как структурного параметра при анализе полимерных композитов // Достижения, проблемы и перспективные направления развития теории и практики строительного материаловедения: Десятые Академические чтения РААСН. – Казань: Изд-во КГАСУ, 2006. – С. 73–76.
4. Низина Т. А., Селяев В. П., Зимин А. Н. Анализ поровой структуры цементных композитов на основе методов фрактальной геометрии // Актуальные вопросы строительства: материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2007. – С. 212–217.
5. Селяев В. П., Низина Т. А., Ланкина Ю. А., Цыганов В. В. Фрактальный анализ структуры наполненных эпоксидных композитов // Известия ТулГУ. Серия: Строительные материалы, конструкции и сооружения. – Вып. 10. – Тула, 2006. – С. 123–128.

6. Селяев В. П., Низина Т. А., Ланкина Ю. А. Фрактальный анализ структуры наполненных полимерных композитов // Известия ВУЗов. Строительство. – № 4, – 2007. – С. 43–48.
7. Низина Т. А. Экспериментально-теоретические основы прогнозирования и повышения долговечности защитно-декоративных покрытий: дис. ... докт. техн. наук. – Саранск, 2007. – 408 с.
8. Низина Т. А. Защитно-декоративные покрытия на основе эпоксидных и акриловых связующих. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2007. – 258 с.
9. Низина Т. А., Селяев В. П. Материальная база вуза как инновационный ресурс развития национального исследовательского университета // Долговечность строительных материалов, изделий и конструкций факторов: материалы Всеросс. науч.-техн. конф. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2014. – С. 115–121.
10. Старченко Н. В. Индекс фрактальности и локальный анализ хаотических временных рядов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Москва, 2005. – 122 с.
11. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. – N.Y.: Freeman, 1983. – 480 p.
12. Федер Е. Фракталы / пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.