ЖАЛНИН Р. В., ПАНЮШКИНА Е. Н.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ НЕВЯЗКОГО ГАЗА С ПЕРЕНОСОМ ЗАГРЯЗНЕНИЙ ПРИ ВЕТРОВОМ ПОДХВАТЕ

**Аннотация.** Описана модель течения невязкого газа на основе системы уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности для концентрации загрязняющего вещества с граничным условием ветрового подхвата с поверхности земли. Также показаны результаты работы численного алгоритма, основанного на дискретизации полученных уравнений на структурированной сетке методом конечных объемов.

**Ключевые слова:** газовая динамика, уравнения Навье-Стокса, ветровой подхват, метод конечного объема.

ZHALNIN R. V., PANYUSHKINA E. N.

# SIMULATION OF NON-VISCOUS GAS FLOW WITH POLLUTANT TRANSFER AT WIND GRAB

**Abstract.** The paper describes a model of non-viscous gas flow through the system of Navier-Stokes equations and the continuity equation for the concentration of the pollutant with the boundary condition of the wind grab from the ground. The study includes the calculation results of a numerical algorithm based on sampling of the obtained equations on structured grid by the finite volume method.

**Keywords:** gas dynamics, Navier-Stokes equations, wind grab, finite volume method.

**Введение.** Для оценки и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций важную роль играет исследование динамики распространения загрязняющих веществ в атмосфере. При значительном загрязнении в большинстве случаев имеет место вторичная миграция примеси в результате ветрового подхвата с поверхности земли. В данной статье описано решение уравнений газовой динамики совместно с уравнением переноса примеси с граничным условием ветрового подхвата.

**1. Математическая модель.** Для описания вязких течений воспользуемся системой уравнений Навье-Стокса [2], которые отражают основные законы сохранения массы, импульса и энергии. В консервативной форме, в декартовых координатах $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$ уравнения Навье-Стокса имеют вид:

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

уравнения сохранения импульсов

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u^2}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho vu}{\partial x}+\frac{\partial\rho v^2}{\partial y}+\frac{\partial\rho vw}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho wu}{\partial x}+\frac{\partial\rho wv}{\partial y}+\frac{\partial\rho w^2}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

уравнение сохранения энергии

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\frac{\partial\rho uE+up}{\partial x}+\frac{\partial\rho vE+vp}{\partial y}+\frac{\partial\rho wE+wp}{\partial z}=0 \qquad (3)$$

Здесь $\rho$, $p$, $E$ – плотность, давление и полная энергия; $u$, $v$, $w$ – компоненты вектора скорости. Полную энергию можно выразить через удельную внутреннюю энергию:

$$E=\varepsilon+\frac{u^2+v^2+w^2}{2} \qquad (4)$$

Система дополняется уравнением состояния:

$$p=(\gamma-1)\rho\varepsilon \qquad (5)$$

Предположим, что распространение примесей происходит только за счет ветрового переноса. Запишем уравнение неразрывности для концентрации загрязнений (смесь однокомпонентная) без учета физико-химических трансформаций [4]:

$$\frac{\partial\rho C}{\partial t}+\frac{\partial\rho uC}{\partial x}+\frac{\partial\rho vC}{\partial y}+\frac{\partial\rho wC}{\partial z}=0 \qquad (6)$$

При моделировании динамики распространения загрязнений рассмотрим ситуацию, когда примесь осела на землю, и ее дальнейшая миграция зависит от ветрового подхвата. Роль источника в этом случае будет выполнять сама поверхность, а ветровой подхват и дальнейший перенос будут в сильной степени зависеть от состояния этой поверхности. В общем случае решение задачи о вторичной миграции примеси невозможно. На практике вводятся такие эмпирические величины, как коэффициент ветрового подхвата, интенсивность ветрового подхвата и скорость сухого осаждения частиц [3].

К уравнению неразрывности для концентрации добавим краевое условие на подстилающей поверхности $z=0$, описывающее изменение поверхностной концентрации за счет осаждения примеси из атмосферы и ветрового подхвата:

$$\frac{\partial C_r}{\partial t}=V_g C|_{z=0}-\alpha C_r \qquad (7)$$

Здесь $C_r$ – поверхностная концентрация примеси, $\alpha$ – коэффициент ветрового подхвата, $V_g$ – скорость сухого осаждения частиц. Величины $V_g$ и $\alpha$ зависят от свойств примеси, характера подстилающей поверхности, состояния атмосферы и др. Поэтому их теоретическая и экспериментальная оценки достаточно трудоемки.

На остальных границах ставим условие вытекания. В начальный момент времени зададим поле скоростей $(u_0, v_0, w_0)$, давление $p_0$, плотность $\rho_0$ и концентрацию $C_0$.

**2. Численный метод и результаты расчетов.** Построение вычислительных алгоритмов основано на конечно-объемном методе. В этом методе исходные дифференциальные уравнения записываются в дивергентном виде в декартовых координатах и преобразуются с использованием формулы Остроградского-Гаусса к интегральному виду. Разностные формулы получаются в результате интегрирования исходных уравнений по контрольному объему. Аппроксимацию будем проводить на структурированной сетке с шагом $h$ по всем направлениям. Все искомые параметры определяются в центре ячейки.

Исходную систему уравнений представим в векторной форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0, \tag{8}$$

где вектора $Q$, $F_x$, $F_y$, $F_z$ имеют вид

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \\ \rho C \end{pmatrix}, F_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho uE + up \\ \rho uC \end{pmatrix}, F_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ \rho vE + vp \\ \rho vC \end{pmatrix}, F_z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ \rho wE + wp \\ \rho wC \end{pmatrix} \tag{9}$$

Будем считать, что на границе области известны либо потоки, либо значения этих величин.

Проинтегрируем уравнение по объему $\Delta V_p$ ячейки $p$, которая ограничена поверхностью $\sum_p = \bigcup_{f=1}^{E} \Delta S_f$ ($\Delta S_f$ – площадь грани $f$). Используя формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\int\limits_{\Delta V_p} \frac{\partial Q}{\partial t} dV + \oint\limits_{\Sigma_p} \left(F_x n_x + F_y n_y + F_z n_z\right) dS = 0 \tag{10}$$

или

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{\Delta V_p} Q dV + \oint\limits_{\Sigma_p} \Phi dS = 0 \tag{11}$$

Используя квадратурные формулы, заменим интегральные выражения разностными. При интегрировании будем использовать теорему о среднем [1]. В качестве среднего значения функции по объему примем значение ее в центре ячейки, а в качестве среднего значения функции на грани – значение ее в центре грани. Дискретный аналог уравнения следующий:

$$\frac{d}{dt}(Q\Delta V)_p + \sum_{f=1}^{E} \Phi \Delta S_f = 0 \tag{12}$$

Для нумерации ячеек будем использовать индексы $i, j, k$, грани ячейки обозначим $i \pm {}^1/_2$, $j \pm {}^1/_2$, $k \pm {}^1/_2$ шаги по пространству и по времени обозначим $h$ и $\tau$. При аппроксимации производной разностью вперед получим следующую запись схемы:

$$\frac{Q_{ijk}^{n+1} - Q_{ijk}^{n}}{\tau} + \frac{1}{V_{ijk}}\left(\Phi_{i+1/2}S - \Phi_{i-1/2}S + \Phi_{j+1/2}S - \Phi_{j-1/2}S + \Phi_{k+1/2}S - \Phi_{k-1/2}S\right) = 0 \tag{13}$$

Численные потоки через грань $f$ вычисляются по схеме Лакса-Фридрихса-Русанова:

$$\Phi_f = \frac{1}{2}\left(\Phi_f^- + \Phi_f^+ - \mathrm{K}\left(Q_f^+ - Q_f^-\right)\right),$$

где $\mathrm{K} = \max\left(\sqrt{(u^-)^2 + (v^-)^2 + (w^-)^2} + \sqrt{p^-\gamma/\rho^-},\ \sqrt{(u^+)^2 + (v^+)^2 + (w^+)^2} + \sqrt{p^+\gamma/\rho^+}\right)$.

Аппроксимация граничного условия, учитывающего ветровой подхват будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{C_{ij0}^{n+1} - C_{ij0}^{n}}{\tau} = V_g C_{ijk}^{n} - \alpha C_{ij0}^{n} \tag{14}$$

В качестве тестовой рассмотрим задачу в области $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ со следующими начальными данными (в безразмерных величинах):

$(u_0, v_0, w_0) = (1.0, 0.0, -0.7)$, $p_0 = 1.0$, $\rho_0 = 1.0$, $\gamma = 1.4$, $\alpha = 0.2e + 1$, $V_g = 0.7$, $h = 0.01$, $\tau = 1.e - 4$.

Примесь находится на поверхности $z = 0$, причем $C_0 = \begin{cases} 1, x < 0.5 \\ 0, x \geq 0.5 \end{cases}$

На рисунках 1 и 2 показано изменение концентрации с течением времени.

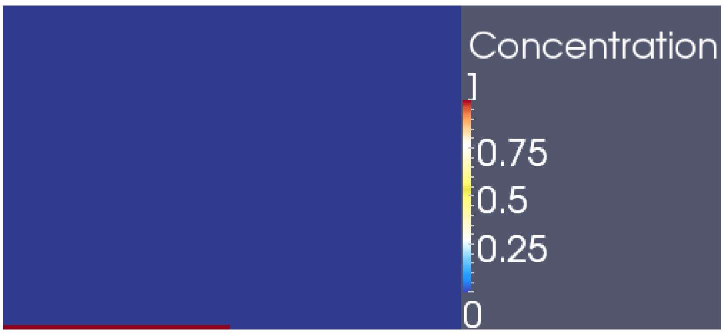


Рис.1. Концентрация примеси при t=0.

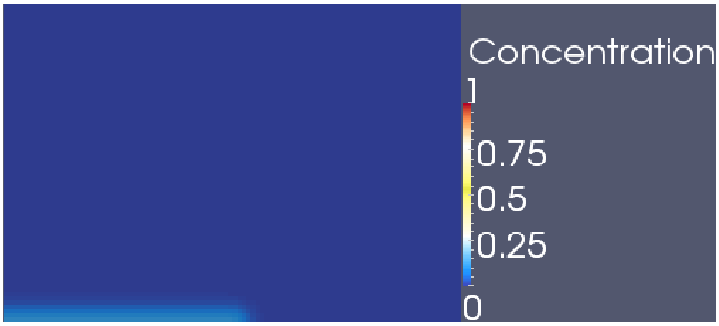

Рис.2. Концентрация примеси при t=0.1.

**Заключение.** В статье приведен численный расчет задачи распространения примеси с учетом ветрового подхвата на структурированной сетке совместно с решением уравнений Навье-Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

2. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.

3. Нестеров А. В., Прус Ю. В. Моделирование вторичной миграции загрязнений в атмосфере при ветровом подхвате [Электронный ресурс] // Технологии техносферной безопасности. – 2009. – № 3. – Режим доступа: http://agps-2006.narod.ru/ttb/2009-3/06-03-09.ttb.pdf.

4. Панюшкина Е. Н. Описание математической модели переноса радиоактивных примесей по воздуху и подземными водами // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 116–118.