

БОБРЕНЁВА Ю. О., ГУБАЙДУЛЛИН И. М., ЖАЛНИН Р. В.

**НЕЯВНАЯ СХЕМА НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В НЕФТЯНОМ ПЛАСТЕ¹**

Аннотация. В работе для моделирования температурного поля в системе «скважина-трещина-пласт» предложена неявная схема, основанная на разрывном методе Галёркина. Рассматривается двумерное уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами, равными единице. Получены выражения для определения элементов матрицы системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: разрывный метода Галёркина, неявная схема, термометрия, DG.

BOBRENEVA YU. O., GUBAYDULLIN I. M., ZHALNIN R. V.

**IMPLICIT SCHEME BASED ON DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD
FOR MODELING TEMPERATURE IN OIL RESERVOIR**

Abstract. The implicit scheme is developed to simulate the temperature in the "well-fracture-layer" system. The scheme is based on the discontinuous Galerkin method. The two-dimensional heat conduction equation with constant coefficients equal to unity is considered. The expressions to determine matrix elements of the system of linear equations are obtained.

Keywords: discontinuous Galerkin method, implicit scheme, thermometry, DG.

При гидродинамических исследованиях скважин, особенно для скважин с гидравлическим разрывом пласта [1], необходимо совместное рассмотрение гидродинамического состояния системы «скважина-пласт» с температурным полем, или термометрией. Термометрия исторически является первым методом исследования скважин. Основным параметром, который несет информационную нагрузку в данном методе, является температура. Профиль температуры зависит от скорости фильтрации, градиента давления, а также свойств жидкости и породы [2; 3]. Для детального изучения термогидродинамических процессов в пласте со скважиной необходима разработка эффективного вычислительного алгоритма для численного моделирования совместной работы системы «скважина-трещина-пласт» [4]. Как известно, процессы теплопередачи описываются уравнениями параболического типа. При этом для использования алгоритмов сквозного счета необходимо строить сетки, имеющие достаточно мелкие ячейки в области, соответствующей трещине. Это накладывает существенные ограничения на шаг дискретизации по времени и, тем

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-31-50018 мол_нр).

самым, требует большого числа итераций. Поэтому возникает необходимость построения неявных схем, для которых такое ограничение отсутствует.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x, y) \in G, t > 0, u = u(t, x, y); \quad (1)$$

$$u = \varphi(x, y), (x, y) \in \partial G, t > 0; u|_{t=0} = \psi(x, y). \quad (2)$$

Для дискретизации разрывным методом Галеркина запишем (1) в виде системы уравнений [5]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} &= 0, \\ q_x + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ q_y + \frac{\partial u}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Покроем рассматриваемую область треугольной сеткой и введем в каждом треугольнике Δ_i систему базисных функций

$$\{\varphi_m^i\} \subset P^K(x, y), \quad (4)$$

$m = 0, \dots, N-1, N = \frac{(K+2)(K+1)}{2}, P^K(x, y)$ – пространство полиномов степени не выше K .

Решение системы (3) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} u^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i(t) \varphi_l^i(x, y), \\ q_x^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i(t) \varphi_l^i(x, y), \\ q_y^i(x, y, t) &= \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i(t) \varphi_l^i(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Найдем проекцию уравнений (3) на пространство кусочно-непрерывных полиномов с базисом (4). Для этого подставим (5) в (3) и умножим скалярно каждое уравнение на базисную функцию:

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \varphi_m^i dx dy + \int_{\Delta_i} \left(\frac{\partial q_x^i}{\partial x} + \frac{\partial q_y^i}{\partial y} \right) \varphi_m^i dx dy &= 0 \\
\int_{\Delta_i} q_x^i \varphi_m^i dx dy + \int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \varphi_m^i dx dy &= 0, \\
\int_{\Delta_i} q_y^i \varphi_m^i dx dy + \int_{\Delta_i} \frac{\partial u^i}{\partial y} \varphi_m^i dx dy &= 0.
\end{aligned}$$

После преобразований получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial u_l^i}{\partial t} \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{q}_x^i \cdot n_x + \widehat{q}_y^i \cdot n_y) \varphi_m^i d\gamma - \\
&- \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dx dy - \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dx dy = 0, \\
&\sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{u}^i \cdot n_x \varphi_m^i d\gamma - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dx dy = 0, \\
&\sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \oint_{\partial \Delta_i} (\widehat{u}^i \cdot n_y \varphi_m^i d\gamma - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Дискретизацию по времени выполним по неявной схеме. Значения на границе ячеек положим равным полусумме значений из ячеек, которые разделяет данное ребро.

Окончательно получим:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \\
&+ \sum_{k \in \text{neigh}(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^k n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i d\gamma + \right. \\
&+ \left. \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^k n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
&- \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dx dy - \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dx dy = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{N-1} q_{xl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \\
& + \sum_{k \in \text{neigh}(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} u_l^i n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} u_l^k n_x \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
& - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial x} dx dy = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{N-1} q_{yl}^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_m^i dx dy + \\
& + \sum_{k \in \text{neigh}(\Delta_i)} \frac{1}{2} \left(\sum_{l=0}^{N-1} u_l^i n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^i \varphi_m^i d\gamma + \sum_{l=0}^{N-1} u_l^k n_y \int_{\gamma_{ik}} \varphi_l^k \varphi_m^i d\gamma \right) - \\
& - \sum_{l=0}^{N-1} u_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \frac{\partial \varphi_m^i}{\partial y} dx dy = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\text{neigh}(\Delta_i)$ – множество номеров соседних ячеек ячейки Δ_i ; γ_{ik} – ребро между ячейками с номерами i и k ; $\tilde{u}^l$ – значение на предыдущем слое по времени.

Таким образом, получили систему линейных алгебраических уравнений:

$$Ay = b, \tag{9}$$

где матрица A – состоит из блоков размера $3N \times 3N$, столбец y состоит из блоков y^i , а столбец b – из блоков b^i , соответствующих i -ой ячейке сетки:

$$y = \begin{pmatrix} u_0^i \\ \vdots \\ u_{N-1}^i \\ q_{x0}^i \\ \vdots \\ q_{xN-1}^i \\ q_{y0}^i \\ \vdots \\ q_{yN-1}^i \end{pmatrix}, \quad b^i = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_0^i dx dy \\ \vdots \\ \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{u}_l^i \int_{\Delta_i} \varphi_l^i \varphi_{N-1}^i dx dy \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $i = 0, \dots, M-1$, M – количество ячеек расчетной сетки.

Для решения системы (9) можно воспользоваться библиотекой HYPRE [6,7].

Таким образом, предложен вычислительный алгоритм, основанный на неявной схеме для разрывного метода Галёркина, предназначенный для моделирования температурных

полей в системе «скважина-трещина-пласт». Неявная схема позволяет проводить расчеты с временным шагом, ограниченным только условием требуемой точности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малышев А. Г. и др. Анализ влияния технологических факторов и механических свойств горных пород на эффективность ГРП // Нефть Сургута. – М.: Нефтяное хозяйство, 1997. – С. 224-237.
2. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта. – М.: Недра, 1965. – 238 с.
3. Рамазанов А. Ш., Нагимов В. М. Аналитическая модель для расчета температурного поля в нефтяном пласте при нестационарном притоке жидкости // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2007. – № 1. – С. 1–9.
4. Губайдуллин И. М., Линд Ю. Б., Коледина К. Ф. Методология распараллеливания при решении многопараметрических обратных задач химической кинетики // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2012. – Т. 13, № 2 (26). – С. 28–36.
5. Жалнин Р. В., Масягин В. Ф., Панюшкина Е. Н. О применении разрывного метода Галеркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6. – С. 874.
6. Falgout K. B., Yang U. M. Hypre: a Library of High Performance Preconditioners // Computational Science / P.M.A. Sloot, C.J.K. Tan, JJ Dongarra, A.G. Hoekstra (Eds.). – Springer-Verlag, 2002. – Vol. 2331. – P. 632–641.
7. Falgout R. D., Jones J. E., Yang U. M. The Design and Implementation of hypre, a Library of Parallel High Performance Preconditioners // Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers / A.M. Bruaset, A. Tveito (Eds.). – Springer-Verlag, 2006. – Vol. 51. – P. 267–294.