

**ГАЛКИН Д. В., ГОРБЕНКО О. Ю., ПОЗДЯЕВА Н. С.,
СИДОРЕНКОВА Т. О., ХАЛИКОВА К. К.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА
НА АДАПТИРУЕМЫХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕЛЬЧАЮЩИХСЯ СЕТКАХ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ CHOMBO**

Аннотация. Рассмотрена методика решения уравнений тепло- и массопереноса на ортогональных локально-адаптируемых сетках разрывным методом Галёркина с использованием библиотеки Chombo. Рассмотрены схемы для решения уравнений газовой динамики и уравнения теплопроводности, описаны схемы передачи значений сеточных функций между уровнями адаптации сетки. Рассмотрен алгоритм построения сетки вокруг тела заданной геометрии для задач внешней аэродинамики.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, структурированная сетка, библиотека Chombo, RKDG.

**GALKIN D. V., GORBENKO O. YU., POZDYAEVA N. S.,
SIDORENKOVA T. O., KHALIKOVA K. K.
USING CHOMBO LIBRARY FOR SOLVING PROBLEMS OF
HEAT AND MASS TRANSFER ON LOCALLY-ADAPTIVE REFINED GRIDS**

Abstract. The paper deals with the methodology of solving equations of heat and mass transfer on orthogonal local-adaptive grids by the discontinuous Galerkin method and Chombo library. Numerical schemes for solving the equations of gas dynamics and the equation of heat conduction are considered. The schemes of transmitting the values of grid functions from one level of adaptation to another are described. The algorithm of constructing the grid around the body of given geometry for external aerodynamics problems is included.

Keywords: discontinuous Galerkin method, structured grid, Chombo library, RKDG.

Введение. Задачи тепло- и массопереноса входят в число важнейших задач математической физики. Уравнения газовой динамики, описывающие процесс массопереноса, – одна из моделей механики сплошной среды. С их помощью поддается количественному и качественному описанию множество процессов, будь то обтекание тел жидкостью или газом, истечение газа из сопла. Теплоперенос и диффузия описываются уравнениями теплообмена.

Рассмотрим в данной статье решение таких уравнений с помощью разрывного метода Галёркина [1; 2]. На основе данного метода разработана методика для численного решения задач тепло- и массопереноса с использованием библиотеки Chombo [3]. Данная библиотека

содержит в себе набор инструментов для реализации методов конечных разностей и конечных элементов для решения дифференциальных уравнений в частных производных на блочно-структурированных адаптивных прямоугольных сетках. Выбор именно этого вида сетки обусловлен тем, что при помощи адаптивных сеток возможно эффективно использовать компьютерные ресурсы и в значительной степени сократить объем используемой машинной памяти при решении многомерных задач. Кроме того, реализация данного подхода гораздо проще по сравнению с другими методами и может достичь высокого порядка точности [4].

1. Решение задач газовой динамики разрывным методом Галёркина. Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера для идеального газа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} F(u) = 0, \quad (1)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}, F_x(u) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix}, F_y(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}$$

в области Ω с начальным условием

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y)$$

и граничным условием

$$u(x, y, t) = g(x, y, t)$$

При $(x, y) \in \gamma$, $0 < t \leq T$, где γ – границы области Ω .

Введем в области Ω структурированную прямоугольную сетку T_h , и в каждой ячейке T_i зададим базис $\{\varphi_k\}_{k=0}^p$. Приближенное решение системы (1) в ячейке T_i будем искать в виде:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^p u_k(t) \varphi_k(x). \quad (2)$$

Коэффициенты $u_k(t)$ в (2) найдем из условия ортогональности невязки всем базисным функциям, получаемой после подстановки (2) в (1):

$$\iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dx dy + \iint_{T_i} \operatorname{div} F(U_h) \varphi_k dx dy = 0, k = 0, \dots, p.$$

Далее получим

$$\begin{aligned} \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dx dy &= \iint_{T_i} \left(F(U_h) \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + F(U_h) \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right) dx dy - \\ &- \oint_{\partial T_i} \hat{F}(U_h) \varphi_k n_x + \hat{F}(U_h) \varphi_k n_y dl \\ &k = 0, \dots, p. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначив за M матрицу масс, составленную из значений скалярных произведений базисных функций, за $L(U_h)$ – правую часть (3), получим систему:

$$M \frac{\partial U_h}{\partial t} = L(U_h), \quad (4)$$

Запишем выражение для конкретной ячейки T_i . Пусть $p = 2$ и базис имеет вид:

$$\varphi_0 = 1, \varphi_1 = (x - x_c), \varphi_2 = (y - y_c) \quad (5)$$

где (x_c, y_c) – координаты центра ячейки.

Тогда приближенное решение принимает вид:

$$U_h = u_0 + u_1(x - x_c) + u_2(y - y_c) \quad (6)$$

Подставив данный вид решения в формулы (3) и (4), получим систему (4) в виде:

$$M \frac{dU_h}{dt} = - \begin{pmatrix} \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_x + \hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_y) dl \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(x - x_c)n_x + \hat{F}(U_h)(x - x_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(x - x_c)}{\partial x} dx dy \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(y - y_c)n_x + \hat{F}(U_h)(y - y_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(y - y_c)}{\partial y} dx dy \end{pmatrix}$$

Дискретизация по времени осуществляется методом Эйлера, что приводит к схеме:

$$M \frac{U_h^{new} - U_h}{\Delta t} = - \begin{pmatrix} \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_x + \hat{F}(U_h) \cdot 1 \cdot n_y) dl \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(x - x_c)n_x + \hat{F}(U_h)(x - x_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(x - x_c)}{\partial x} dx dy \\ \oint_{\partial T_i} (\hat{F}(U_h)(y - y_c)n_x + \hat{F}(U_h)(y - y_c)n_y) dl - \iint_{T_i} U_h \frac{\partial(y - y_c)}{\partial y} dx dy \end{pmatrix} \quad (7)$$

Решив систему (7) получим значение приближенного решения на новом временном слое.

2. Решение задач теплопроводности разрывным методом Галёркина. В случае двумерного уравнения теплопроводности имеем:

$$\rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \cdot \text{grad } u) + f, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \quad (8)$$

с начальным условием $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

и граничным условием $u(x, y, t) = g(x, y, t)$

при $(x, y) \in \gamma, 0 < t \leq T$.

Тогда уравнение (8) можно переписать в виде [5]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C_v \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k q_x + \frac{\partial}{\partial y} k q_y + f, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \\ q_x = \frac{\partial u}{\partial x}, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \\ q_y = \frac{\partial u}{\partial y}, (x, y) \in G, 0 < t \leq T \end{array} \right.$$

Введем в области Ω структурированную прямоугольную сетку T_h , и в каждой ячейке T_i зададим базис $\{\varphi_k\}_{k=0}^p$ из пространства полиномов степени не выше K . Приближенное решение системы (1) в ячейке T_i будем искать в виде:

$$U_h(x, t) = \sum_{k=0}^p u_k(t) \varphi_k(x).$$

Совершая аналогичные преобразования, как и для случая уравнения газовой динамики, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho C_v \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial t} \varphi_k dx dy = \iint_{T_i} \text{div}(k(q_x + q_y)) \varphi_k dx dy + \iint_{T_i} f_h \varphi_k dx dy \\ q_x = \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial x} \varphi_k dx dy \\ q_y = \iint_{T_i} \frac{\partial U_h}{\partial y} \varphi_k dx dy \end{array} \right. ,$$

$$k = 0, \dots, p$$

3. Передачи сеточных данных между уровнями на локально-адаптивных прямоугольных сетках. Локально-адаптивные сетки, которые измельчаются только в тех областях, где решение обладает большим градиентом, в большинстве случаев экономят вычислительные ресурсы и повышают скорость сходимости приближенного решения.

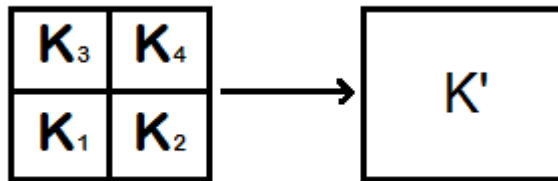


Рис. 1. Огрубление ячеек.

Когда имеется более мелкое разбиение сетки и необходимо перейти на более грубый уровень (см. рис. 1), то для получения решения в новой ячейке К' используются уравнения:

$$\begin{aligned}
 U_{K'}^{(0)} &= \frac{1}{4} \left(U_{K1}^{(0)} + U_{K2}^{(0)} + U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(1)} &= \frac{1}{8} \left(U_{K1}^{(1)} + U_{K2}^{(1)} + U_{K3}^{(1)} + U_{K4}^{(1)} \right) + \frac{3}{8} \left(-U_{K1}^{(0)} + U_{K2}^{(0)} - U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(2)} &= \frac{1}{8} \left(U_{K1}^{(2)} + U_{K2}^{(2)} + U_{K3}^{(2)} + U_{K4}^{(2)} \right) + \frac{3}{8} \left(-U_{K1}^{(0)} - U_{K2}^{(0)} + U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(3)} &= \frac{1}{16} \left(U_{K1}^{(3)} + U_{K2}^{(3)} + U_{K3}^{(3)} + U_{K4}^{(3)} \right) + \frac{3}{16} \left(-U_{K1}^{(2)} + U_{K2}^{(2)} - U_{K3}^{(2)} + U_{K4}^{(2)} \right) \\
 &\quad + \frac{3}{168} \left(-U_{K1}^{(1)} - U_{K2}^{(1)} + U_{K3}^{(1)} + U_{K4}^{(1)} \right) + \frac{9}{16} \left(U_{K1}^{(0)} - U_{K2}^{(0)} - U_{K3}^{(0)} + U_{K4}^{(0)} \right), \\
 U_{K'}^{(4)} &= \frac{1}{16} \left(U_{K1}^{(4)} + U_{K2}^{(4)} + U_{K3}^{(4)} + U_{K4}^{(4)} \right) + \frac{15}{32} \left(-U_{K1}^{(1)} + U_{K2}^{(1)} - U_{K3}^{(1)} + U_{K4}^{(1)} \right), \\
 U_{K'}^{(5)} &= \frac{1}{16} \left(U_{K1}^{(5)} + U_{K2}^{(5)} + U_{K3}^{(5)} + U_{K4}^{(5)} \right) + \frac{15}{32} \left(-U_{K1}^{(2)} - U_{K2}^{(2)} + U_{K3}^{(2)} + U_{K4}^{(2)} \right).
 \end{aligned}$$

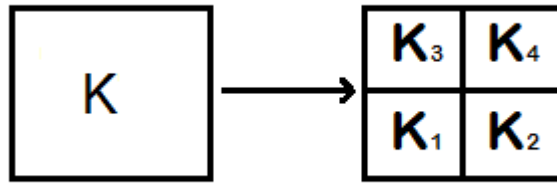


Рис. 2. Интерполяция ячейки.

Если нужно получить более точное решение, то, раздробив сетку (см. рис. 2), получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 U_{K_i'}^{(0)} &= U_K^{(0)} + a_i U_K^{(1)} + b_i U_K^{(2)} + a_i b_i U_K^{(3)}, \\
 U_{K_i'}^{(1)} &= \frac{1}{2} U_K^{(1)} + (-1)^i a_i b_i U_K^{(3)} + a_i U_K^{(4)}, \\
 U_{K_i'}^{(2)} &= \frac{1}{2} U_K^{(1)} + (-1)^i |a_i b_i| U_K^{(3)} + b_i U_K^{(5)}, \\
 U_{K_i'}^{(3)} &= \frac{1}{4} U_K^{(3)}, \\
 U_{K_i'}^{(4)} &= \frac{1}{4} U_K^{(4)},
 \end{aligned}$$

$$U_{K'_i}^{(5)} = \frac{1}{4} U_K^{(5)},$$

где $a_i = (-1)^i \frac{1}{2}$, $b_1 = b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_3 = b_4 = \frac{1}{2}$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

4. Алгоритм заполнения полигонов. Одним из наиболее простых объектов для моделирования задач внешней аэродинамики является профиль крыла, представляющий собой сечение крыла плоскостью, параллельной плоскости симметрии самолета. В ходе реализации метода Галёркина на локально-адаптируемых сетках возникает задача задания и загрузки геометрии области. При использовании прямоугольных двумерных сеток для задания областей можно воспользоваться алгоритмом заполнения полигонов.

Контур полигона задается вершинами, соединенными отрезками прямых – ребрами. Часто для заполнения полигона применяют алгоритм, идея которого - закрашивание фигуры отрезками прямых линий. Рассмотрим заполнение по горизонтали. Алгоритм представляет собой цикл вдоль оси y , в ходе которого происходит поиск точек пересечения горизонталей с линиями контура.

Обоснование этого алгоритма следует из топологического свойства контура фигуры. Оно заключается в следующем: любая прямая линия пересекает любой замкнутый контур четное количество раз. Если фигура выпуклая, то точек пересечения с любой прямой всегда две.

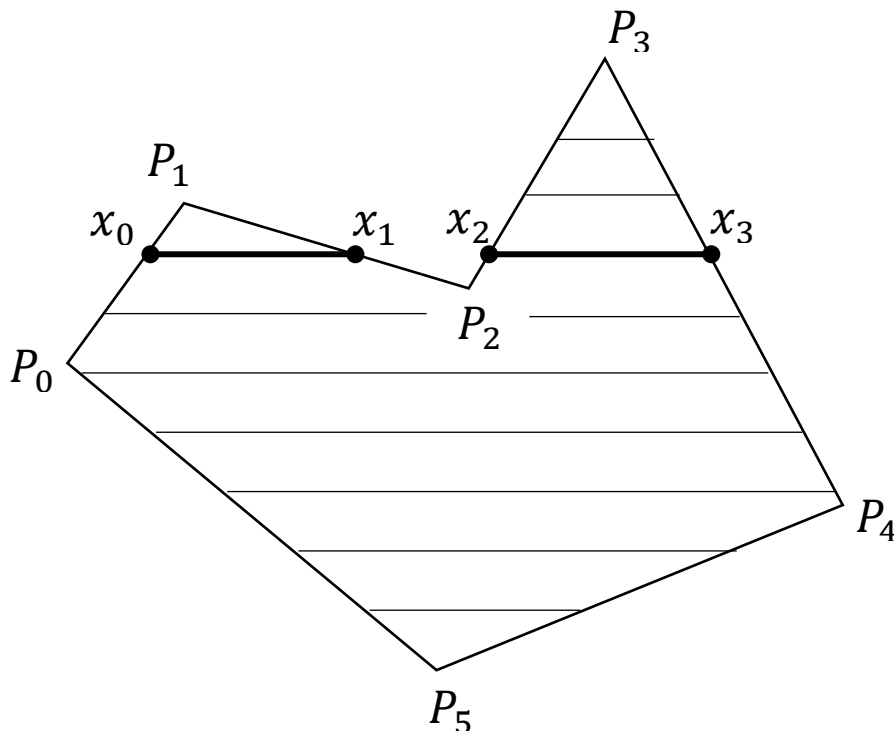


Рис. 3. Точки пересечения прямых с контуром полигона.

Во время поиска точек пересечения прямых с контуром полигона нужно обратить внимание на особые точки. Если горизонталь имеет координату (y), которая совпадает с координатой y_i вершины P_i , тогда необходимо рассмотреть то, как горизонталь проходит через вершину. Когда горизонталь пересекает контур, как в точках P_0 или P_4 , то в массив попадает только одна точка пересечения. В случае, если горизонталь касается вершины контура (т.е. вершина является локальным минимумом или максимумом, как в вершинах P_1 , P_2 , P_3 или P_5), то координата точки касания или не сохраняется, или сохраняется в массив дважды. Вследствие выполнения этого условия, в массиве хранится четное количество точек пересечения.

Заключение. С увеличением числа различных задач прикладного характера повышаются требования к эффективности и точности численных методов, применяемых для решения уравнений. Благодаря тому, что рассмотренный в статье разрывный метод Галёркина имеет конечно элементную структуру, следует отметить ряд его преимуществ перед другими численными методами, применяемыми в данной области: 1) разрывный метод Галёркина обладает гибкостью и хорошей приспособленностью в условиях локальных сгущений сетки и при локальном повышении порядков базисных функций; 2) метод позволяет работать со сложными и геометрически разнородными областями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection // Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics). – 1998. – Vol. 1697. – P. 151–268.
2. Jianming Liu, Jianxian Qiu, Ou Hu, Ning Zhao, Mikhail Goman, Xinkai Li Adaptive Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for complex geometry problems on Cartesian grid // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2013. – No.73. – P. 847–868.
3. Adams M., Colella P., Graves D. T., etc., Chombo Software Package for AMR Applications - Design Document / Lawrence Berkeley National Laboratory Technical Report LBNL-6616E, 2015. – 204 p.
4. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма для прямого численного моделирования сложных газодинамических течений // Журнал Средневолжского математического общества. – 2008. – Т.10, № 1. – С. 137–146.
5. Масягин В. Ф., Жалнин Р. В., Тишкин В. Ф. О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках // Журнал Средневолжского математического общества. – 2013. – Т. 15, № 2. – С. 59–65.