

ЛАРЬКИН П. А., СЫРОМЯСОВ А. О.

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕТА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ
С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ СОПРОТИВЛЕНИЯ**

Аннотация. Изучается движение материальной точки под действием сил тяжести и аэродинамического сопротивления в атмосфере с постоянной и переменной плотностью. Коэффициент сопротивления точки зависит от ее скорости. Найдена зависимость максимальной дальности полета и угла запуска точки от ее начальной скорости.

Ключевые слова: материальная точка, полет, аэродинамическое сопротивление, коэффициент аэродинамического сопротивления, сглаживание данных.

LARKIN P. A., SYROMYASOV A. O.

**MODELING OF MATERIAL POINT FLIGHT
WITH VARIABLE COEFFICIENT OF AIR RESISTANCE**

Abstract. The paper deals with the movement of material point in the atmosphere of constant or variable density. The point is supposed to be under the action of gravity and air-resistance forces, and the resistance coefficient of the point depends on its velocity. The relation between the range, the launch angle and the initial velocity of the point is found.

Keywords: material point, flight, aerodynamic resistance, coefficient of air resistance, data smoothing.

1. Постановка задачи. В связи с разработкой высокоскоростных летательных аппаратов, а также в связи с проектированием стрелкового, артиллерийского и ракетного вооружения актуальным является моделирование движения тела в атмосфере. При этом размеры тела много меньше, чем преодолеваемое им расстояние, что во многих случаях позволяет считать его материальной точкой.

Ниже моделируется движение точки в земной атмосфере. Относительно характера этого движения делаются следующие допущения.

1. Максимальная высота подъема тел над поверхностью Земли много меньше земного радиуса. Это предположение позволяет считать Землю плоской.

2. Воздух в атмосфере неподвижен (ветер отсутствует).

3. Дальности полета сравнительно невелики, так что вращением Земли и возникающим из-за этого кориолисовым ускорением можно пренебречь. Вместе с предыдущим пунктом это позволяет считать траекторию тела плоской кривой.

4. На точку действуют лишь сила тяжести и сила аэродинамического сопротивления. Первая из них направлена вниз (перпендикулярно земной поверхности) и численно равна mg ,

где m – масса точки, $g = 9.80665 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения. Вторая направлена против движения точки (противоположно ее скорости) и численно равна

$$R = \frac{1}{2} \rho c_x S v^2, \quad (1)$$

где ρ – плотность атмосферы, c_x – коэффициент аэродинамического сопротивления, S – площадь поперечного сечения тела, v – его скорость [1].

Введем декартову прямоугольную систему координат с горизонтальной осью Ox и вертикальной осью Oy и будем задавать положение точки в произвольный момент времени t координатами $(x(t); y(t))$. Будем предполагать, что запуск тела происходит из начала координат с начальной скоростью v_0 под острым углом α к горизонту. Тогда с учетом (1) движение материальной точки описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{2} \rho c_x S v v_x, \\ m \frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{2} \rho c_x S v v_y - mg, \end{cases} \quad (2)$$

с начальными данными

$$x(0) = 0, y(0) = 0, v_x(0) = v_0 \cos \alpha, v_y(0) = v_0 \sin \alpha. \quad (3)$$

Здесь $\vec{v} = \{v_x, v_y\}$ – вектор скорости тела, v – длина этого вектора:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Для нахождения траектории тела требуется решить систему уравнений (2) и (3). Помимо самой траектории, нас будет интересовать дальность полета материальной точки, а также зависимость максимальной дальности от начальной скорости и сопротивления среды.

2. Метод решения. Система (2), (3) решалась численно, при этом применялся метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности [2]. Для реализации метода была написана программа на языке C# в среде Visual Studio. Созданная программа позволяет задавать параметры атмосферы (в т. ч. таблично описывать зависимость плотности воздуха от высоты над горизонтом), строить различного рода графики, искать дальность и максимальную высоту полета, сохранять результаты работы в форме PDF- и HTML-отчетов.

При поиске дальности полета X использовался весьма простой алгоритм. Именно, путем перебора всех вычисленных пар координат $(x; y)$ определялось такое значение $x > 0$, при котором величина y максимально близка к нулю. Аналогично, при поиске высоты полета H определялось максимальное вычисленное значение y .

В качестве теста был рассмотрен известный из курса теоретической механики случай движения точки в среде без сопротивления, в котором значения X и H легко находятся аналитически. Относительная погрешность определения этих величин с помощью созданной

программы составила всего около 10^{-3} , что является удовлетворительным результатом с точки зрения практики.

3. Оптимальные параметры полета в атмосфере постоянной плотности. В отсутствие сопротивления среды максимальная дальность полета достигается при угле запуска $\alpha_{\max} = 45^\circ$ вне зависимости от начальной скорости и составляет

$$X_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (4)$$

Если движение происходит в среде с сопротивлением, то угол $\alpha_{\max}$ не является постоянной величиной, а зависит от ряда параметров, одним из которых служит начальная скорость v_0 . Если же плотность является постоянной, то вторым параметром, определяющим значения $\alpha_{\max}$ и $X_{\max}$, служит

$$k = \frac{\rho c_x S}{2m}, \quad (5)$$

поскольку уравнения (2) могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = -kvv_x, \\ \frac{dv_y}{dt} = -kvv_y - g. \end{cases}$$

С помощью созданного программного комплекса была изучена зависимость $\alpha_{\max}$ и $X_{\max}$ от v_0 и k . Приложением результатов моделирования служит определение оптимальных параметров полета для пуль, выпущенных из различных видов стрелкового оружия. Их движение осуществляется на небольших высотах, где плотность атмосферы можно считать равной $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$ [3]. В качестве конкретных примеров были рассмотрены пули пистолета Макарова ПМ (масса $m = 6 \text{ г}$, калибр $d = 9 \text{ мм}$, начальная скорость $v_0 = 315 \text{ м/с}$), автомата Калашникова АК-74 ($m = 3...4 \text{ г}$, $d = 5.45 \text{ мм}$, $v_0 = 735 \text{ м/с}$) и снайперской винтовки Драгунова ($m = 9...13.75 \text{ г}$, $d = 7.62 \text{ мм}$, $v_0 = 830 \text{ м/с}$), параметры которых доступны в открытых источниках. Соответственно, исследование проводилось при $300 \leq v_0 \leq 850 \text{ м/с}$.

Наконец, в качестве c_x использовался коэффициент сопротивления т.н. стандартной пули G1 [4]. Поскольку он зависит от изменяющейся с течением времени скорости движения пули, то (5) фактически задает начальное значение k . В выбранном диапазоне скоростей параметр c_x изменяется от 0.2 до 0.66, что для трех рассмотренных видов вооружения окончательно приводит к оценке $k \leq 0.0045 \text{ м}^{-1}$.

При исследовании значения v_0 в указанном диапазоне перебирались с шагом 50 м/с, а значения k – с шагом 0.0005 м^{-1} . Типичный график зависимости $\alpha_{\max}$ от v_0 при

фиксированном k , полученный с помощью численного моделирования в разработанной программе, выглядит следующим образом (рис. 1).

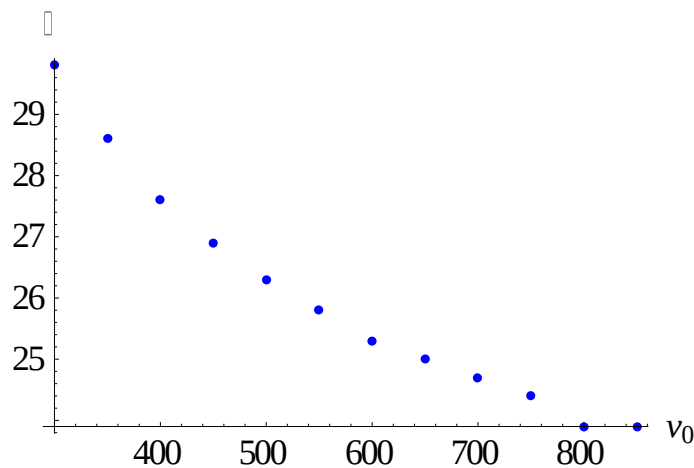


Рис. 1. Зависимость $\alpha_{\max}(v_0)$ при $k = 0.0025$.

С одной стороны, график иллюстрирует убывание функции $\alpha_{\max}(v_0)$. С другой стороны, нельзя утверждать, что при $v_0 \rightarrow \infty$ угол $\alpha_{\max}$ стремится к нулю, ибо при нулевом угле запуска дальность полета заведомо нулевая. Поэтому были рассмотрены две конкурирующие гипотезы касательно зависимости $\alpha_{\max}(v_0)$:

$$\alpha_{\max} = \frac{A}{v_0^m} + B \text{ или } \alpha_{\max} = A m^{-v_0} + B. \quad (6)$$

Параметры A , B , m положительны и зависят от k , причем во втором случае $m < 1$. Для каждого конкретного k , включенного в рассмотрение, они были найдены с использованием стандартной функции FindFit системы Wolfram Mathematica.

Критерием качества согласования сглаженных данных с табличными служила исправленная выборочная дисперсия S^2 , рассчитанная по формуле [5]

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\alpha_{\max}(v_{0,i}) - \alpha_i)^2,$$

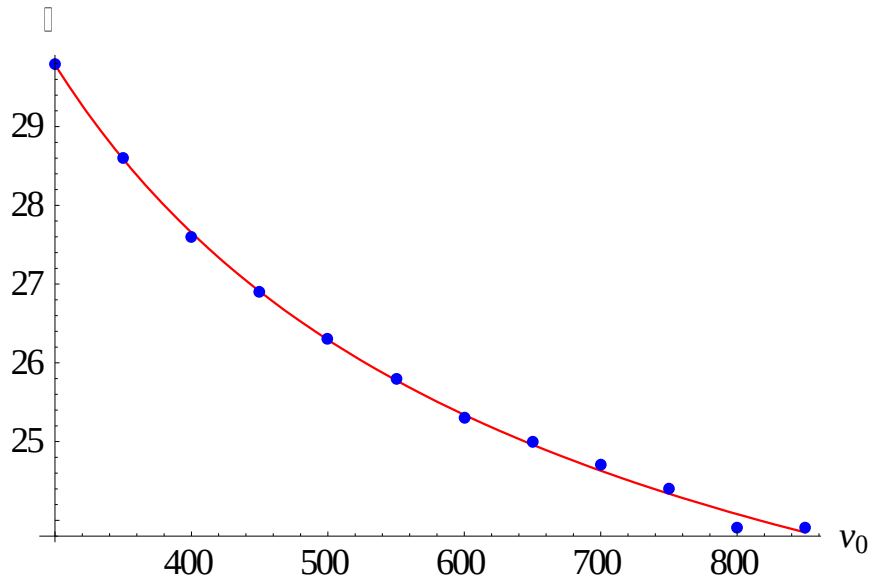
где α_i – табличные значения угла, соответствующие i -му значению скорости $v_{0,i}$, $\alpha_{\max}(v_{0,i})$ – сглаженные значения.

Выяснилось, что первая из гипотез (6) приводит к меньшим значениям S^2 , а значит, является более адекватной. Значения A , B , m при различных значениях k приведены в табл. 1.

Значения A, B, m в формуле (6)

k	0	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045
A	0	131.67	199.31	158.69	158.85	821.89	152.77	211.17	277.39	97.544
B	45	0	11.236	11.032	10.279	18.907	9.3228	13.880	15.318	1.6698
m	–	0.2294	0.3867	0.3612	0.3623	0.7582	0.3571	0.4674	0.5386	0.2313

Сглаживание данных с использованием принятой гипотезы проиллюстрировано на рисунке 2.

Рис. 2. Сглаживание данных с помощью гипотезы (6) при $k = 0.0025$.

Далее выясним, как $X_{\max}$ зависит от v_0 при различных k . Аналогично (4), будем искать эту зависимость в виде

$$X_{\max} = \frac{v_0^2}{g} F(v_0, k).$$

Результаты численного эксперимента подтверждают, что множитель F должен стремиться к нулю при $v_0 \rightarrow \infty$. Поэтому для данной функции при фиксированном k рассмотрены следующие две конкурирующие гипотезы:

$$F = \frac{A}{v_0^m} \text{ или } F = A m^{-v_0}. \quad (7)$$

Как и в формуле (6), величины A и m больше нуля, а при использовании второй из гипотез (7) дополнительно $m < 1$.

Критерием согласования данных вновь служила величина S^2 ; оказалось, что первая из гипотез (7) – «степенная» вновь приводит к меньшим значениям выборочной дисперсии. Табл. 2 содержит значения параметров A , m при различных k .

Таблица 2

Значения A , m в формуле (7)

k	0	0.0005	0.001	0.0015	0.002	0.0025	0.003	0.0035	0.004	0.0045
A	1	746.47	857.73	848.26	813.76	774.86	737.64	703.08	671.61	618.96
m	0	1.3807	1.4843	1.5324	1.5619	1.5826	1.5982	1.6106	1.6207	1.6229

На рисунке 3 приведен пример сглаживания данных по дальности полета.

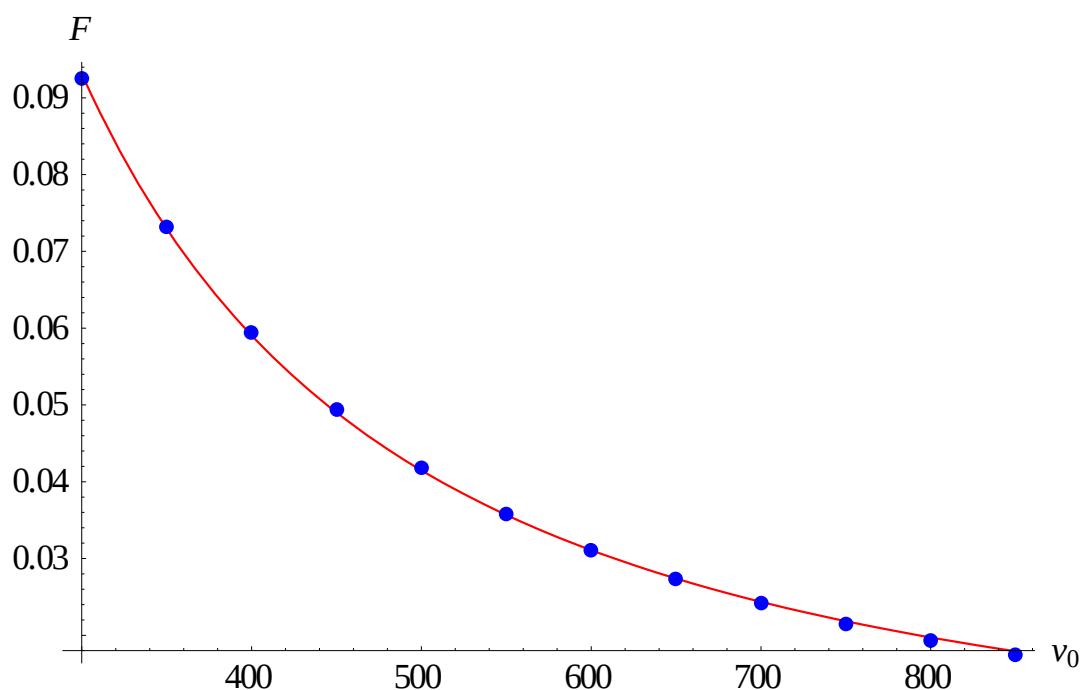


Рис. 3. Сглаживание данных с помощью гипотезы (7) при $k = 0.0025$.

Как видно, применяемые формулы (6) и (7) весьма просты, а найденные значения параметров A , B , m обеспечивают хорошее согласование формул с результатами численного эксперимента.

4. Полет в стратифицированной атмосфере. При изучении полета снаряда в стандартной атмосфере, плотность которой меняется с высотой [3], было получено, что при больших начальных скоростях угол запуска, при котором достигается максимальная дальность, превышает 45° (в отличие от полета в среде с постоянными свойствами). Это можно объяснить так. При больших v_0 материальная точка достигает верхних слоев атмосферы, где плотность воздуха близка к нулю, а сопротивление практически отсутствует.

Однако в среде без сопротивления максимальная дальность полета достигается при угле запуска, равном 45° . Это означает, что достичь верхних слоев атмосферы снаряд должен, двигаясь именно под этим углом к горизонту. Однако угол, образуемый вектором $\vec{v}$ и плоскостью горизонта, на восходящем участке траектории со временем уменьшается. Поэтому начальный угол запуска должен превышать 45° .

ЛИТЕРАТУРА

1. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов. – 17-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2007. – 416 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2008. – 640 с.
3. ГОСТ 4401–81. Атмосфера стандартная. Параметры. – Взамен ГОСТ 4401–73. – Введ. 1981/02/27. – М.: Изд-во стандартов, 2004. – 180 с.
4. Tabulated values of CD vs Mach number [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.jbmballistics.com/ballistics/downloads/text/mcg1.txt>.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Юрайт, 2010. – 479 с.