

СТЕНИН И. В., ШАМАНАЕВ П. А.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Аннотация. В статье описан подход к решению задачи идентификации параметров динамических систем второго порядка по экспериментальным данным. Поставленная задача решается путем сведения ее к задаче минимизации квадратичного функционала с ограничениями в виде нелинейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: идентификация параметров, обыкновенные дифференциальные уравнения, условная минимизация.

STENIN I. V., SHAMANAEV P. A.

IDENTIFICATION OF SECOND-ORDER DYNAMIC SYSTEM
PARAMETERS ON EXPERIMENTAL DATA

Abstract. The approach to solving the problem of identifying the parameters of second-order dynamical systems on experimental data is described by reducing it to the problem of minimizing a quadratic functional with constraints in the form of nonlinear algebraic equations.

Keywords: parameter identification, ordinary differential equations, constraint minimization.

Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \theta_3 x_1 + \theta_4 x_2 \end{cases} \quad (1)$$

где $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ – зависимые переменные, $t \in [0, b]$ – независимая переменная, $b > 0$, $\theta_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, 4$ – неизвестные параметры.

Обозначим через $x_j(t, \theta)$ j -компоненту решения системы (1), $j = 1, 2$, зависящую от векторного параметра $\theta = column(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Пусть при некоторых фиксированных значениях θ_k решение системы (1) удовлетворяет задаче Коши с начальными условиями:

$$x_1^{(1)} = x_1(0), x_2^{(1)} = x_2(0). \quad (2)$$

Пусть на равномерной сетке по переменной x с шагом $\tau = \frac{b}{N}$

$$t_1 = 0, \dots, t_{i+1} = t_i + \tau, \dots, t_N = b. \quad (3)$$

для экспериментальных данных справедливы соотношения

$$\tilde{x}^{(i)} = x^{(i)} + \varepsilon^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где $\tilde{x}^{(i)} = \text{column}(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)})$, $x^{(i)} = \text{column}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $x_j^{(i)} = x_j(t_i, \theta)$ – значение компоненты решения системы (1) в точке t_i при фиксированном значении векторного параметра θ , $\varepsilon^{(i)} = \text{column}(\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iN})$ – вектор, элементы которого являются случайными величинами, имеющими стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1, то есть $\varepsilon_{ij} \in N(0, 1)$, $i = \overline{1, N}$, $j = 1, 2$.

Ставится задача идентификации параметров системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1), заключающаяся в нахождении таких оценок параметров θ_k , $k = 1, \dots, 4$, при которых решение задачи (1)-(2) приближается к экспериментальным данным $\{\tilde{x}^{(i)}, i = \overline{1, N}\}$ в смысле метода наименьших квадратов.

Согласно [4], эта задача может быть сформулирована следующим образом

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^N [\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}]^T [\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}], \quad (5)$$

$$T_1 x^{(1)} = h,$$

при условии, что $x^{(i)} = x(t_i, \theta)$ – значение решения системы (1) в точке t_i . Здесь $T_1 = I_2$ – единичная (2×2) – матрица, $h = \text{column}(h_1, h_2)$, $h_1 = x_1^{(1)}$, $h_2 = x_2^{(1)}$.

Вводя обозначения [3]

$$z = \text{column}(x^{(N)}, \theta), \quad x^{(N)} = \text{column}(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}),$$

$$\tilde{z} = \text{column}(\tilde{x}^{(N)}, o_4), \quad \tilde{x}^{(N)} = \text{column}(\tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(N)}),$$

$$\theta = \text{column}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4),$$

$$o_4 – \text{нулевой вектор размерности } 4,$$

получим

$$x^{(N)} = H_1 z, \quad \tilde{x}^{(N)} = H_1 \tilde{z}, \quad (6)$$

где

$$H_1 = [I_{2N} : O_{2N \times 4}], \quad H_2 = \frac{1}{N} H_1^T H_1, \quad (7)$$

здесь I_{2N} – единичная $(2N \times 2N)$ -матрица, $O_{2N \times 4}$ – нулевая $(2N \times 4)$ -матрица.

Учитывая (6) и (7), целевая функция в соотношении (5) может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^N [\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}]^T [\tilde{x}^{(i)} - x^{(i)}] = \frac{1}{2} [(H_2 z, z) - 2(H_2 \tilde{z}, z) + (H_2 \tilde{z}, \tilde{z})]. \quad (8)$$

Заменим уравнение (1) симметричной разностной схемой [1] на сетке (3)

$$\frac{x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}}{\tau} = \frac{1}{2} (\theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)} + \theta_1 x_1^{(i+1)} + \theta_2 x_2^{(i+1)}),$$

$$\frac{x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}}{\tau} = \frac{1}{2} \left(\theta_3 x_1^{(i)} + \theta_4 x_2^{(i)} + \theta_3 x_1^{(i+1)} + \theta_4 x_2^{(i+1)} \right), \quad (9)$$

$$i = \overline{1, N}.$$

С учетом обозначений

$$g_{i1}(z) \equiv g_{i1}(x^{(N)}, \theta) = \left(1 + \frac{\tau}{2} \theta_1\right) x_1^{(i)} + \frac{\tau}{2} \theta_2 x_2^{(i)} - \left(1 - \frac{\tau}{2} \theta_1\right) x_1^{(i+1)} + \frac{\tau}{2} \theta_2 x_2^{(i+1)},$$

$$g_{i2}(z) \equiv g_{i2}(x^{(N)}, \theta) = \frac{\tau}{2} \theta_3 x_1^{(i)} + \left(1 + \frac{\tau}{2} \theta_4\right) x_2^{(i)} + \frac{\tau}{2} \theta_3 x_1^{(i+1)} - \left(1 - \frac{\tau}{2} \theta_4\right) x_2^{(i+1)},$$

$$g_i(z) = \text{column}(g_{i1}(z), g_{i2}(z)), i = \overline{1, N},$$

$$g(z) = \text{column}(g_1(z), \dots, g_N(z))$$

разностная схема (9) принимает вид

$$g(z) = 0. \quad (10)$$

Тогда задача (5) может быть сформулирована как задача минимизации квадратичного функционала с ограничениями в виде нелинейных алгебраических уравнений [3]

$$\min_z m(z), \quad m(z) = \frac{1}{2} (H_2 z, z) - (H_2 \tilde{z}, z),$$

$$T(z) = h,$$

$$g(z) = 0, \quad (11)$$

где $T = [T_1 \ T_2, \dots, T_N, T_\theta] - (2 \times (2N + 4))$ -матрица, $T_i, i = \overline{2, N} -$ нулевые (2×2) -матрицы, $T_\theta - (2 \times 4)$ -матрица.

Задачу (11) аппроксимируем последовательностью квадратичных задач минимизации с линейными ограничениями [3]. Алгоритм решения задачи (1) имеет вид:

1. Задаем точность вычислений $\delta > 0$.
2. Задаем h, b, N и τ .
3. Формируем экспериментальные данные $\tilde{x}^{(i)}, i = \overline{1, N}$.
4. Полагаем $r = 0$ и задаем начальные данные $z^{(0)} = \text{column}(x^{(N)}, \theta^{(0)}), \lambda^{(0)}, \mu^{(0)}$.
5. Вычисляем

$$M^{(r)} = \begin{pmatrix} H & T^T & A^T \\ T & O & O \\ A & O & O \end{pmatrix}, \quad d^{(r)} = \begin{pmatrix} -H_2(z^{(r)} - \tilde{z}) \\ h - Tz^{(r)} \\ -g(z^{(r)}) \end{pmatrix}.$$

6. Решаем систему линейных алгебраических уравнений

$$M^{(r)} y^{(r)} = d^{(r)}, \quad y^{(r)} = \text{column}(s^{(r)}, \mu^{(r)}, \lambda^{(r)}). \quad (12)$$

7. $z^{(r+1)} = z^{(r)} + s^{(r)}$.

8. Если $\|H_2(z^{(r)} - \tilde{z}) + A^T \lambda^{(r)} + T^T \mu^{(r)}\| \leq \delta$, то алгоритм завершен, иначе $r = r + 1$ и переход к пункту 5.

Замечание 1. Для решения системы вида (12) использовался подход, основанный на методе сопряженных градиентов и описанный в работе [2]. В этой же работе приведены структуры матриц A и H .

Вычисления проводились на трех наборах экспериментальных данных $\tilde{x}^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, $\varepsilon_{ij} \in N(0, 1)$, $j = 1, 2$, которые соответствовали трем типам положения равновесия системы (1): седло, узел и центр. Точность вычислений δ полагалась равной 0.001.

Приведем графики компонент $x_1(t, \hat{\theta})$, $x_2(t, \hat{\theta})$ решения с начальными данными $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ системы (1), оценки параметров которой найдены согласно вышеизложенному алгоритму. Здесь $\hat{\theta} = column(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, \hat{\theta}_4)$ – оценка векторного параметра θ (см. рис.1 – 9).

Случай 1. Положение равновесия системы (1) – седло.

Получены следующие оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$:

$$\hat{\theta}_1 = 1.00007, \hat{\theta}_2 = -0.00028, \hat{\theta}_3 = 0.00039, \hat{\theta}_4 = -1.99924.$$

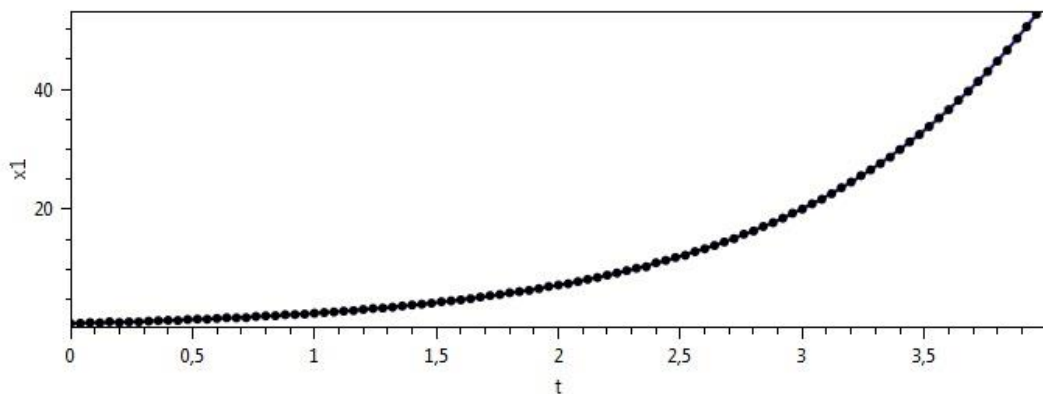


Рис. 1. Экспериментальные данные
и график компоненты $x_1(t, \hat{\theta})$ решения системы (1).

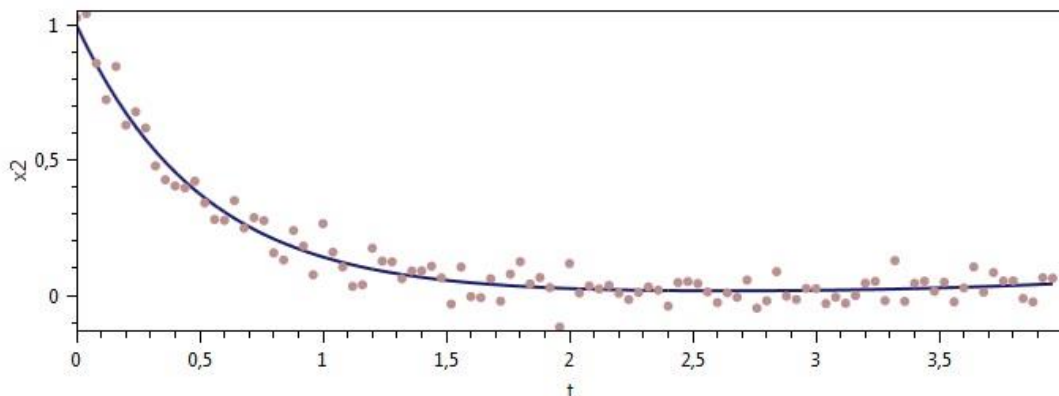


Рис. 2. Экспериментальные данные
и график компоненты $x_2(t, \hat{\theta})$ решения системы (1).

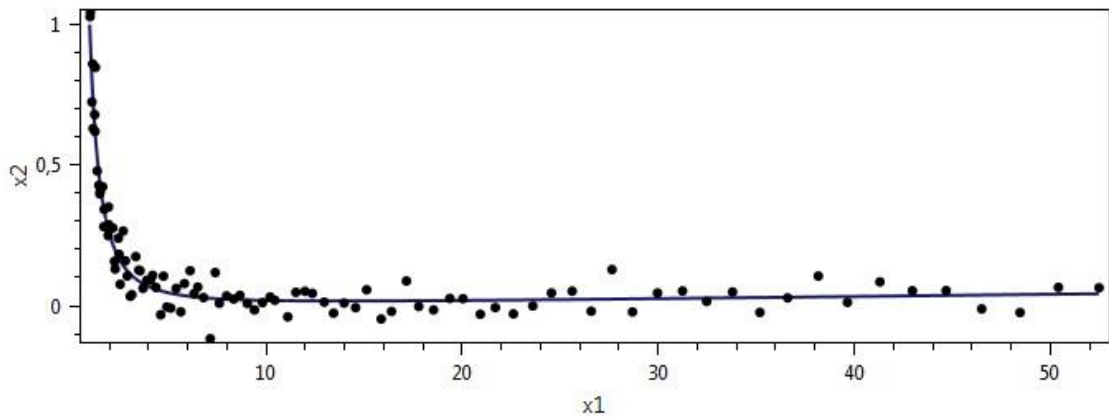


Рис. 3. Экспериментальные данные и фазовая траектория системы (1) с начальными данными $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Случай 2. Положение равновесия системы (1) – узел.

Получены следующие оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$:

$$\hat{\theta}_1 = -1.00015, \quad \hat{\theta}_2 = -0.00081, \quad \hat{\theta}_3 = 2.00096, \quad \hat{\theta}_4 = 0.00058.$$

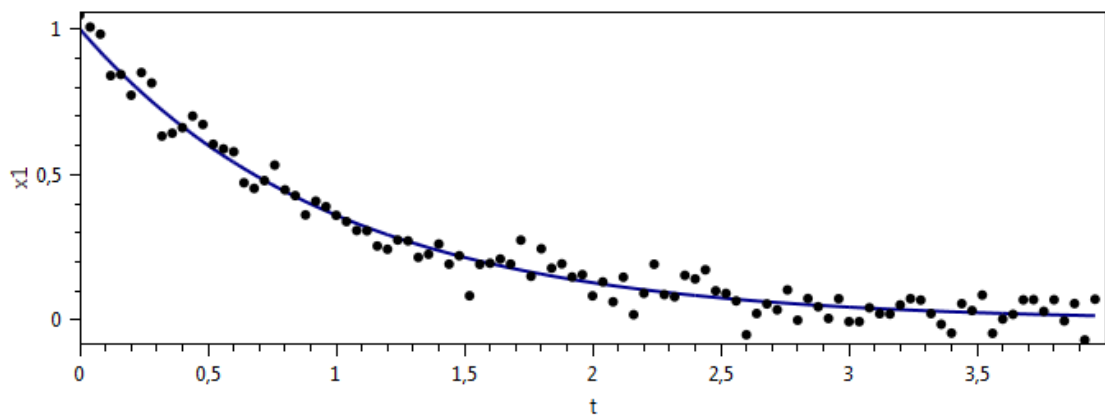


Рис. 4. Экспериментальные данные и график компоненты $x_1(t, \hat{\theta})$ решения системы (1).

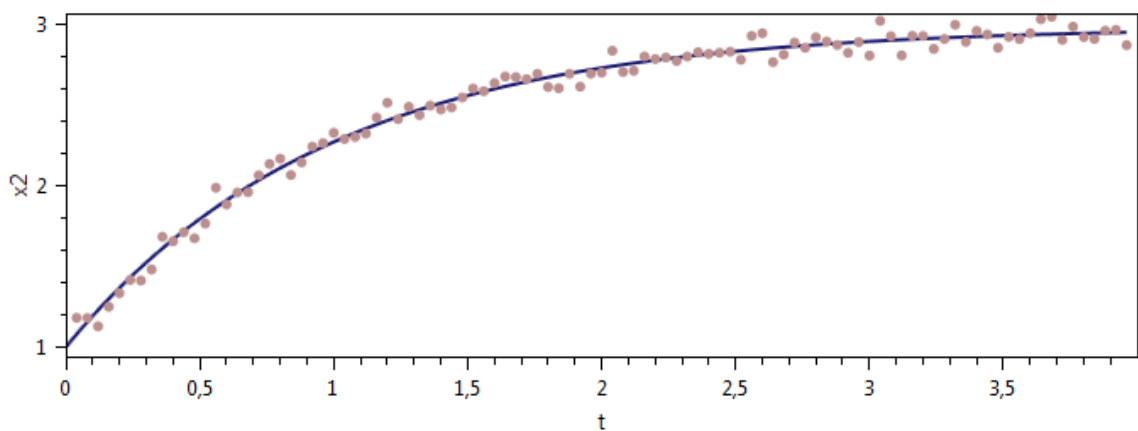


Рис. 5. Экспериментальные данные и график компоненты $x_2(t, \hat{\theta})$ решения системы (1).

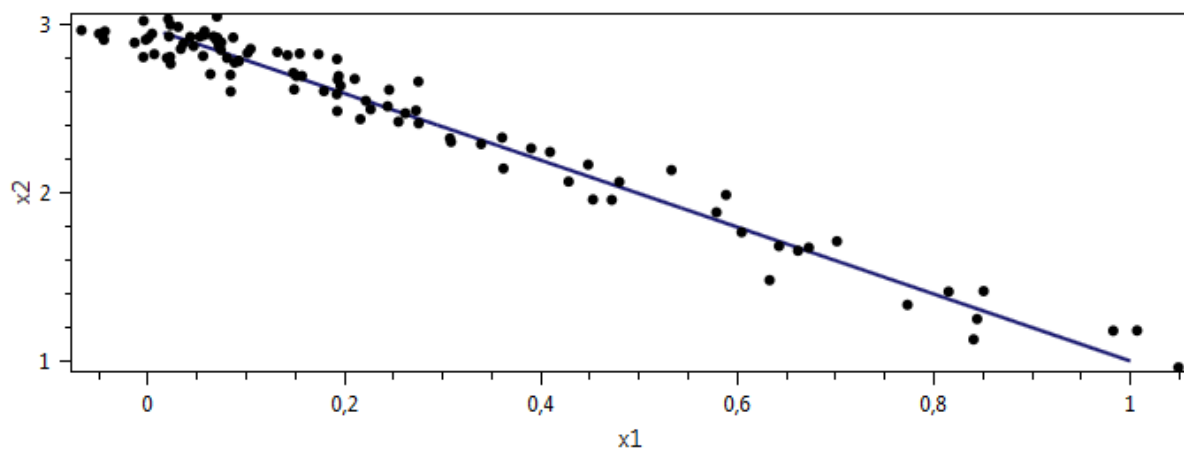


Рис. 6. Экспериментальные данные и фазовая траектория системы (1)
с начальными данными $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Случай 3. Положение равновесия системы (1) – центр.

Получены следующие оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$:

$$\hat{\theta}_1 = 0.00088, \quad \hat{\theta}_2 = 2.99919, \quad \hat{\theta}_3 = -2.99914, \quad \hat{\theta}_4 = -0.00058.$$

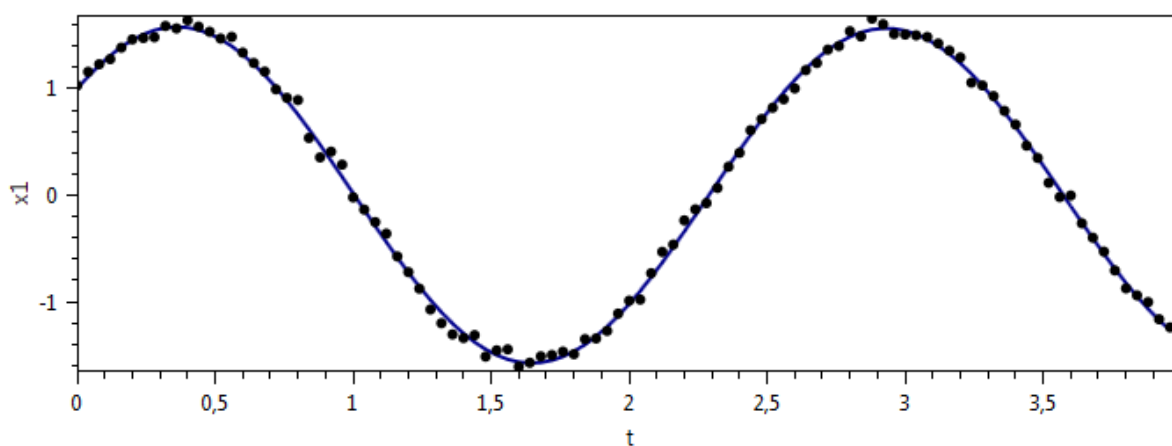


Рис. 7. Экспериментальные данные
и график компоненты $x_1(t, \hat{\theta})$ решения системы (1).

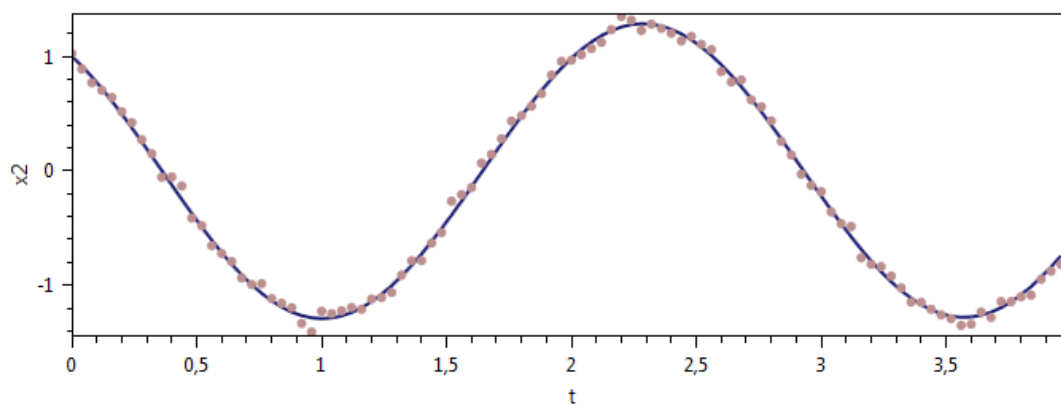


Рис. 8. Экспериментальные данные
и график компоненты $x_2(t, \hat{\theta})$ решения системы (1).

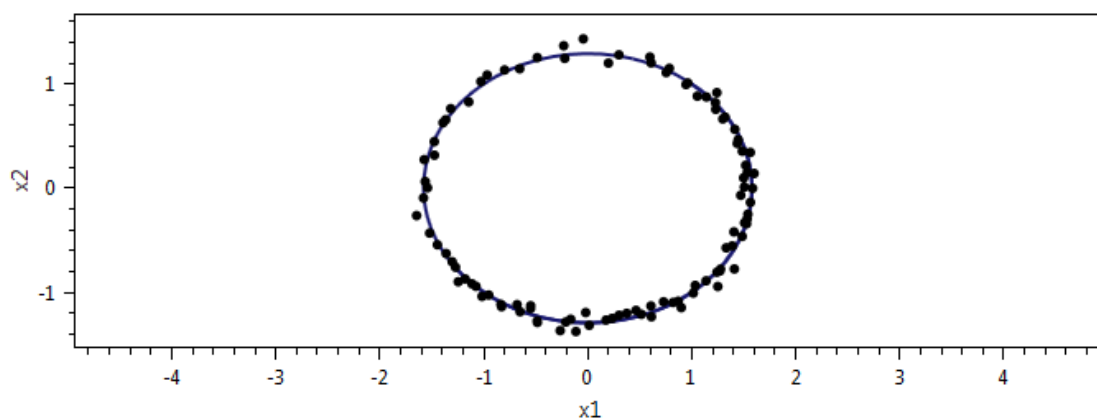


Рис. 9. Экспериментальные данные и фазовая траектория системы (1)
с начальными данными $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
2. Стенин И. В., Шаманаев П. А. Алгоритм решения разреженной системы линейных алгебраических уравнений большой размерности с использованием метода сопряженных градиентов [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2017. – № 13. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-razrezhennoj-sistemy-linejnyx-algebraicheskix-uravnenij-bolshoj-razmernosti-s-ispolzovaniem-metoda-sopryazhennyx-gradientov>.
3. Челышов М. С., Шаманаев П. А. Решение задачи идентификации параметров динамических систем с использованием метода ортогональной циклической редукции // Прикладная математика и механика: сб. научных трудов. – № 11. – Ульяновск: УлГТУ, 2017. – С. 264–271.
4. Zhengfeng Li, Michael R. Osborne, Tania Prvan. Parameter estimation of ordinary differential equations // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2005. – No. 25. – pp. 264–285.