

ИГОНИН К. К., ЯРОСЛАВЦЕВ А. В.
О СТАБИЛИЗАЦИИ ПЛАСТИНЫ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ ШАРНИРАМИ
С ДВУХ СТОРОН, ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ

Аннотация. Рассматривается задача стабилизации динамики упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при одностороннем обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа. Получена область асимптотической устойчивости пластины. Для случая неустойчивости предложено стабилизирующее управление. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, упругий элемент, асимптотическая устойчивость, стабилизирующее управление, метод Галеркина.

IGONIN K. K., YAROSLAVTSEV A.V.
ON STABILIZATION OF PLATE FIXED BY HINGES
FROM TWO SIDES IN SUPERSONIC FLOW

Abstract. The problem of stabilizing the dynamics of an elastic element of construction in the shape of a plate-strip with its flowing by supersonic flow of ideal gas is considered. The domain of asymptotic stability of the plate is obtained. Stabilizing control is proposed for the case of instability. The results of the numerical simulation are presented.

Keywords: partial differential equation, elastic element, stability, stabilizing control, Galerkin method.

При проектировании конструкций с упругими элементами в случае, когда они могут подвергаться воздействию сверхзвукового потока газа, важное значение имеет поведение упругих элементов. Воздействие потока на составные части конструкций может приводить к возникновению неустойчивых колебаний и деформации упругих элементов, нарушению требуемых функциональных свойств и к их полному разрушению. В связи с этим возникает задача стабилизации конструкций с целью обеспечения надежности их эксплуатации и удовлетворения требуемых функциональных свойств даже во время экстремальных ситуаций.

Рассмотрим задачу управления динамикой упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при одностороннем обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа в случае ее шарнирного закрепления на обоих концах. В работе [1] были получены достаточные условия устойчивости упругого элемента конструкции при обтекании его сверхзвуковым потоком газа. В работе [2] в виде неравенств сформулированы достаточные

условия асимптотической устойчивости и показано, что в случае двустороннего обтекания можно добиться выполнения этих условий с помощью подходящего выбора сжимающего продольного усилия, приложенного к пластине.

Исследуем, при какой длине пластины, в случае одностороннего обтекания ее сверхзвуковым потоком идеального газа, будет наблюдаться ее асимптотическая устойчивость. А для случая неустойчивости построим стабилизирующее управление.

Механическая система, описывающая динамику упругой стенки (защитного экрана) резервуара, заполненного жидкостью, при взаимодействии стенки со сверхзвуковым потоком газа представляет собой краевую задачу для дифференциального уравнения с частными производными [2]

$$m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \alpha\ddot{w}''' - \beta\ddot{w}'' + \gamma(\dot{w} + Vw') + f(x, t, w, \dot{w}) = 0, \quad x \in (0; l), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь $w(x, t)$ – прогиб пластины; x – продольная координата, t – время, l – длина пластины; V – скорость потока; m – погонная масса пластины; D – изгибная жесткость пластины; N – сжимающее ($N > 0$) или растягивающее ($N < 0$) продольное усилие; α – коэффициент внутреннего демпфирования; β – коэффициент, учитывающий инерцию вращения сечений; $\gamma(\dot{w} + Vw')$ – аэродинамическая нагрузка, $\gamma = \alpha_0 \rho_0 a_0 = \text{const}$ ($\alpha_0 = 1$ при одностороннем обтекании, ρ_0 – плотность газа, a_0 – скорость звука); $f(x, t, w, \dot{w})$ – некоторое управляющее воздействие; штрих обозначает производную по координате x , точка – производную по времени t .

В качестве управляющего воздействия выберем

$$f(x, t, w, \dot{w}) = u_1(t) + u_2(t) \cos \frac{\pi x}{l}, \quad (2)$$

где $u_1(t)$, $u_2(t)$ – некоторые кусочно-непрерывные функции (управления).

Шарнирное закрепление на обоих концах пластины описывается краевыми условиями:

$$w(0, t) = w(l, t) = w''(0, t) = w''(l, t) = 0. \quad (3)$$

Будем искать решение задачи (1), (2), (3) методом Галеркина в виде [3]

$$w(x, t) = v_1(t) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + v_2(t) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right).$$

В результате, после замены $y_1 = v_1(t)$, $y_2 = v_2(t)$, $y_3 = \dot{v}_1(t)$, $y_4 = \dot{v}_2(t)$ получим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и приведем ее к нормальному виду:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{y}_2 = y_4 \\ \dot{y}_3 = \frac{1}{(\pi^2 \beta + l^2 m)} \left(\frac{\pi^2 (Nl^2 - \pi^2 D)}{l^2} y_1 + \frac{8l\gamma V}{3} y_2 - \frac{\pi^2 \alpha + l^4 \gamma}{l^2} y_3 - \frac{4l^2}{\pi} u_1(t) \right) \\ \dot{y}_4 = \frac{1}{(4\pi^2 \beta + l^2 m)} \left(-\frac{8l\gamma V}{3} y_1 + \frac{4\pi^2 (Nl^2 - 4\pi^2 D)}{l^2} y_2 - \frac{16\pi^2 \alpha + l^4 \gamma}{l^2} y_4 - \frac{8l^2}{3\pi} u_2(t) \right) \end{cases} \quad (4)$$

Найдем область асимптотической устойчивости системы (4) в зависимости от длины пластины l при нулевых управляющих воздействиях $u_1(t)=0$, $u_2(t)=0$ путем пошагового просчета. Для этого, выбирая длину пластины от 1 до 30 метров с шагом 0.125 метра, находим собственные числа матрицы, составленной из коэффициентов системы (4), ищем решение уравнения (1) при краевых условиях (3) методом Галеркина – функцию прогиба $w(x,t)$ и строим ее график. При этом в одних случаях мы получаем, что вещественные части собственных чисел матрицы системы отрицательны, а значит решение системы асимптотически устойчиво. На графике функции прогиба мы можем наблюдать затухающие колебания пластины (рис. 1). В других случаях среди собственных чисел матрицы системы имеются собственные числа с положительными вещественными частями и, следовательно, решение неустойчиво. Тогда амплитуда колебаний на графике функции прогиба с течением времени неограниченно возрастает (рис. 2). В результате вычислений получена область асимптотической устойчивости $l \in [1; 5.125]$.

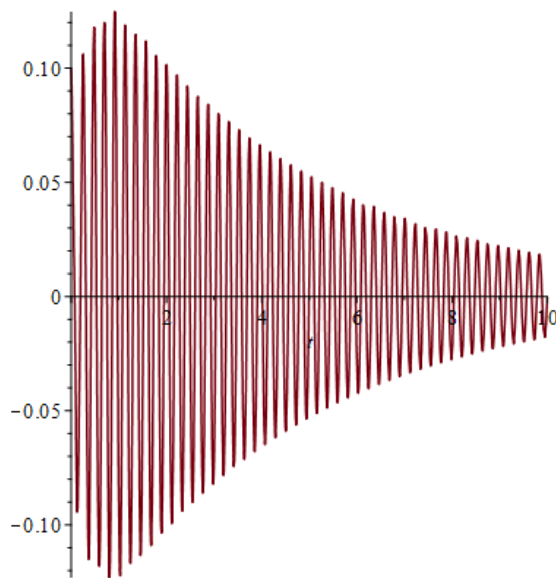


Рис. 1. Функция $w\left(\frac{l}{2}, t\right)$ при $l = 5.125$.

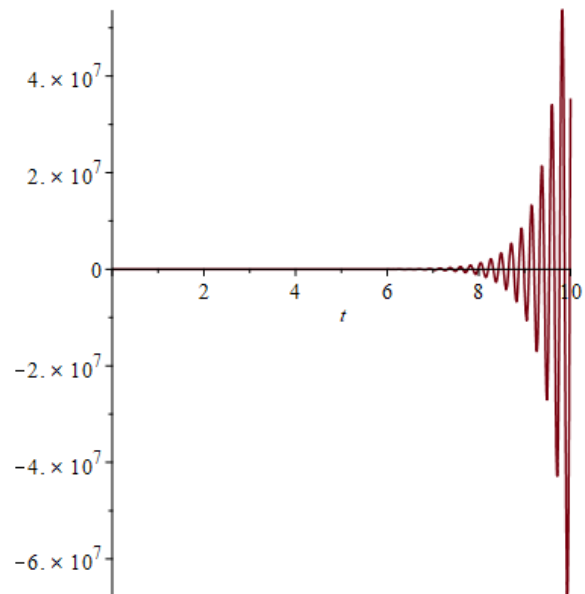


Рис. 2. Функция $w\left(\frac{l}{2}, t\right)$ при $l = 5.25$.

В случае, когда система (4) неустойчива, найдем управляющие воздействия, обеспечивающие ее стабилизацию [4]. По теореме об устойчивости решений линейной системы уравнений с постоянными коэффициентами [5], решения системы

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2(t) \\ \dot{z}_2 = p z_1(t) - z_2(t) \end{cases} \quad (5)$$

устойчивы при $p = 0$, асимптотически устойчивы при $p < 0$, неустойчивы при $p > 0$.

Приведем систему уравнений (4) к виду (5) дважды путем такого выбора управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, что при подстановке их в систему (4) эта система распадается на две системы, каждая из которых принимает вид (5). Для этого выберем управления в виде:

$$u_1(t) = \frac{\pi}{2l} \left(\left(\frac{\pi^2 N}{2l} - \frac{\pi^4 D}{2l^3} - p \right) y_1 + \frac{4}{3} \mathcal{W} y_2 \right), \quad u_2(t) = \frac{3\pi}{4l} \left(-\frac{4}{3} \mathcal{W} y_1 + \left(\frac{2\pi^2 N}{l} - \frac{8\pi^4 D}{l^3} - p \right) y_2 \right).$$

Выбирая величину параметра p по модулю больше или меньше, можем получить более быструю или более медленную стабилизацию решения краевой задачи (1), (2), (3). На рисунках 3 и 4 показаны графики функции прогиба для значений $p = -10$ и $p = -10000$ соответственно.

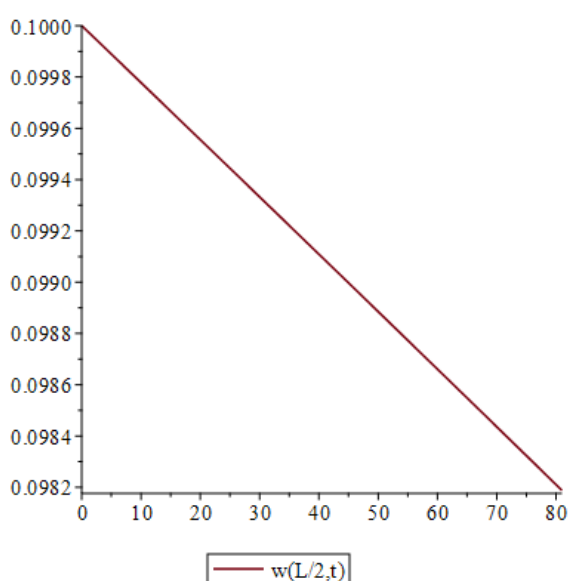


Рис. 3. Стабилизация при $p = -10$.

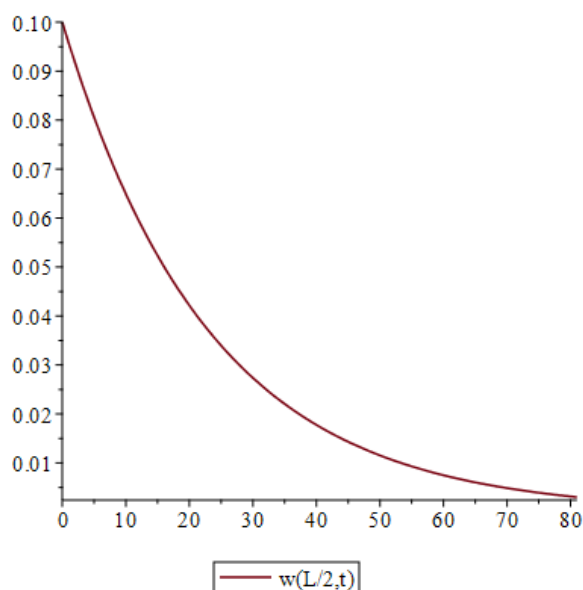


Рис. 4. Стабилизация при $p = -10000$.

При решении краевой задачи методом Галеркина с помощью математического пакета были выбраны следующие параметры системы:

$$m = 117.75 \text{ кг}; \quad \gamma = 420.175 \frac{\text{кг} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}; \quad \alpha = 0.2; \quad \beta = 0.1; \quad D = 64086.9141 \text{ Па}; \quad N = 1000 \text{ Н}; \quad V = 400 \text{ м/с}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Судаков В. А. Об устойчивости решений начально-краевой задачи о динамике защитного экрана при взаимодействии со сверхзвуковым потоком газа. // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2013. – № 3(63). – С. 45–52.
2. Анкилов А. В., Вельмисов П. А. Исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании. // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2011. – № 3(57), Вып. 1. – С. 59–67.
3. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. – М.: Мир, 1988. – 352 с.
4. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 89–97.
5. Еругин Н. П., Штокайло И. З. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. – Киев: Вища школа, 1974. – 472 с.