

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ / TECHNICAL SCIENCES



DOI: 10.15507/2311-2468.013.202501.064-070

eISSN 2311-2468

EDN: <https://elibrary.ru/bnrcli>

<https://ogarev-online.ru>

УДК / UDC 519.63

Оригинальная статья / Original article

ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Е. Е. Пескова, М. С. Мустайкин ✉

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет,
Саранск, Россия

✉ maksimmustajkin@mail.ru

Аннотация

Введение. Численные методы решения уравнений теплопроводности широко применяются в различных областях науки и техники. Разработка новых улучшенных численных алгоритмов для решения уравнений параболического типа позволяет повысить точность расчетов, снять ограничения на шаг интегрирования по времени, что позволит решать практические задачи за приемлемое время с высокой точностью. Цель исследования – изучить явные методы решения уравнений параболического типа на примере решения уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

Материалы и методы. Проведена программная реализация численных алгоритмов для решения уравнений параболического типа: широко известной явной схемы, метода локальных итераций и метода гиперболизации. Реализация алгоритмов проведена на языке C++. Проанализирован порядок аппроксимации алгоритмов и время, необходимое для их применения в процессе решения уравнения, которое имеет аналитическое решение.

Результаты исследования. Численное исследование схем показало, что каждая из них имеет второй порядок аппроксимации по пространству. Однако расчетное время решения задачи при использовании метода гиперболизации меньше.

Обсуждение и заключение. В случае решения систем уравнений параболического типа, когда требуется использование явных схем, метод гиперболизации даст значительное сокращение расчетного времени задачи при сохранении заявленного порядка аппроксимации. Материалы исследования могут быть полезны при выборе оптимального метода решения параболических уравнений для выполнения практических задач.

Ключевые слова: математическое моделирование, уравнение теплопроводности, явные схемы, метод гиперболизации, метод локальных итераций

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Пескова Е. Е., Мустайкин М. С. Исследование явных численных методов решения уравнений параболического типа // Огарёв-онлайн. 2025. Т. 13, № 1. С. 64–70. <https://doi.org/10.15507/2311-2468.013.202501.064-070>

© Пескова Е. Е., Мустайкин М. С., 2025



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License.
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

INVESTIGATION OF EXPLICIT NUMERICAL METHODS FOR SOLVING PARABOLIC EQUATIONS

E. E. Peskova, M. S. Mustaykin

National Research Mordovia State University,
Saransk, Russia

✉ maksimmustajkin@mail.ru

Abstract

Introduction. Numerical methods for solving heat conduction equations are widely used in various fields of science and technology. The development of new improved numerical algorithms for solving parabolic equations makes it possible to increase the accuracy of calculations, remove restrictions on the integration step in time, which will allow us to obtain solutions to practical problems in an acceptable time with high accuracy. The purpose of this work is to study the explicit methods for solving parabolic type equations using the example of solving the equation of thermal conductivity with variable coefficients.

Materials and Methods. The paper provides a software implementation of numerical algorithms for solving parabolic type equations: the well-known explicit scheme, the local iteration method, and the hyperbolization method. The algorithms were implemented in C++. The order of approximation of algorithms and their execution time for solving an equation with an analytical solution are analyzed.

Results. A numerical study of the schemes has shown that each of them has a second order of approximation in space. However, the estimated time to solve the problem using the hyperbolization method is less.

Discussion and Conclusion. In the case of solving systems of equations of the parabolic type, if it is necessary to use explicit schemes, the hyperbolization method will significantly reduce the estimated time of the problem while maintaining the stated order of accuracy.

Keywords: mathematical modeling, heat equation, explicit schemes, hyperbolization method, local iteration method

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

For citation: Peskova E.E., Mustaykin M.S. Investigation of Explicit Numerical Methods for Solving Parabolic Equations. *Ogarev-online*. 2025;13(1):64–70. <https://doi.org/10.15507/2311-2468.013.202501.064-070>

ВВЕДЕНИЕ

Разработка новых численных алгоритмов для решения задач теплопроводности имеет большое значение для развития науки и техники, а также для практического применения в различных отраслях промышленности и энергетики. Явные и неявные трехточечные численные алгоритмы¹ являются широко используемыми методами для решения таких уравнений. Однако явные схемы имеют серьезные ограничения на шаг интегрирования по времени, а неявные методы не всегда обеспечивают требуемую точность при больших значениях шага интегрирования.

Цель данной работы состоит в исследовании явных численных алгоритмов для решения нелинейных уравнений теплопроводности.

¹ Численное решение многомерных задач газовой динамики / С. К. Годунов [и др.]. М. : Наука, 1976. 400 с.; Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2003. 632 с.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В данной области проведено большое количество исследований. В настоящее время активно развиваются новые алгоритмы решения уравнений параболического типа. Так, рассмотрены принципы построения схем численного интегрирования по времени параболических уравнений [1]. Разработан подход к интегрированию по времени системы нестационарных уравнений динамики сжимаемого теплопроводного газа [2]. Создан метод численного решения нелинейного уравнения, описывающего диффузионный перенос энергии излучения [3]. Алгоритмы решения уравнений параболического типа являются явными с отсутствием диффузионного ограничения на шаг интегрирования по времени, что может значительно увеличить скорость получения результатов при решении практических задач [4–6]. Метод, основанный на использовании многочленов П. Л. Чебышева, позволяет уйти от ограничения шага интегрирования по времени, используя итерации внутри одного шага интегрирования [1]. Метод, основанный на гиперболизации исходного уравнения, заключается в введении в исходное уравнение второй производной по времени, умноженной на малый параметр [3]. В силу явности таких методов для них легко могут быть построены параллельные вычислительные алгоритмы.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Предполагается проведение программной реализация трех численных методов решения уравнений параболического типа: классической явной схемы, метода локальных итераций и метода гиперболизации. Алгоритмы реализованы на языке C++.

Анализ численных алгоритмов для решения уравнений теплопроводности будет проводиться для первой краевой задачи с переменными коэффициентами.

$$\rho(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + f(x, t), 0 < x < l, 0 < t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), u(0, t) = \phi_1(t), u(l, t) = \phi_2(t),$$

где функция $u(x, t)$ является искомой; $u(x, 0)$ – начальные условия; $u(0, t)$, $u(l, t)$ – граничные условия.

Рассмотрим пространственно-временную сетку:

$$\Omega_{h,\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau,$$

где $\Omega_\tau = \{t_n, n\tau, 0 \leq n \leq N_\tau\}$ – сетка по времени с шагом $\tau = T/N_\tau$, $\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N_h\}$; Ω_h – пространственная сетка, зависящая от шага сетки $h = L/N_h$, характеризующего размер ячеек; T – время, до которого ведется расчет; L – длина расчетной области.

Явная схема для уравнения (1) представлена в следующем виде:

$$\rho(x_i, t^n) \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a(x_{i+1}, t^n) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - a(x_i, t^n) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) + f(x_i, t^n),$$

$$i = \overline{1, N-1}, u_0^n = \phi_1(t_n), u_N^n = \phi_2(t_n), u_i^0 = \psi(x_i).$$



Коэффициенты $a(x_p, t)$ определяются из выражения $a(x_p, t) = 0,5 (k(x_p, t) + k(x_{i-1}, t))$.

Отсюда получаем явное выражение для нахождения u_i^{n+1} на следующем шаге по времени.

Алгоритм схемы локальных итераций ЛИ-М подробно описан в работах [3; 5]. Алгоритм перехода от слоя t^n к слою t^{n+1} явно-итерационный. В цикле по $l = \overline{1, 2p-1}$ вычисляется u^l :

$$u^l = \frac{1}{1 + \tau b_l} (u^n + \tau b_l u^{l-1} + \tau L_h u^{l-1} + \tau f^{n+0,5}).$$

Результат $(2p - 1)$ -ой итерации принимается в качестве функции на верхнем слое $u^{n+1} = u^l$. Здесь L_h – диффузионный оператор; $p = 0,25\pi\sqrt{\Delta t \lambda_{\max} + 1}$ – степень чебышевского многочлена; $\lambda_{\max}$ – значение верхней границы спектров дискретных операторов, отвечающих аппроксимациям процессов диссипативных членов. В соответствии с теоремой Гершгорина о кругах² величину $\lambda_{\max}$ можно рассчитать, вычисляя для каждого узла сетки сумму модулей коэффициентов разностных аппроксимаций диссипативных членов. b_l – итерационные параметры, составленные особым образом из упорядоченного множества нулей многочлена Чебышева [1; 7].

Метод гиперболизации [3] основан на введении в параболическое уравнение второй производной по времени с малым параметром ω :

$$\rho(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + \omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t).$$

Трехслойная разностная схема для этого уравнения строится следующим образом:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} + \omega \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{1}{\rho(x_i, t^n)h} \left(a(x_{i+1}, t^n) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} - a(x_i, t^n) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) + f(x_i, t^n),$$

где ω – малый параметр. Отсюда получаем явное выражение для нахождения u_i^{n+1} на следующем шаге по времени.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Проведено исследование трех вышеизложенных методов для решения следующего уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left((e^x + t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + (e^x - 2te^{2x} - tu), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = t, \quad u(1, t) = te^1.$$

Данное уравнение (2) имеет аналитическое решение:

$$u(x, t) = te^x.$$

Проводились расчеты на сетке с шагом $h = 10^{-3}$ м до времени $T = 0,2$ с.

Для явной схемы шаг по времени $\tau = 10^{-7}$ с определен из условия устойчивости. Для схемы локальных итераций примем шаг интегрирования $\tau = 10^{-3}$, для метода гиперболизации – $\tau = 10^{-5}$ с.

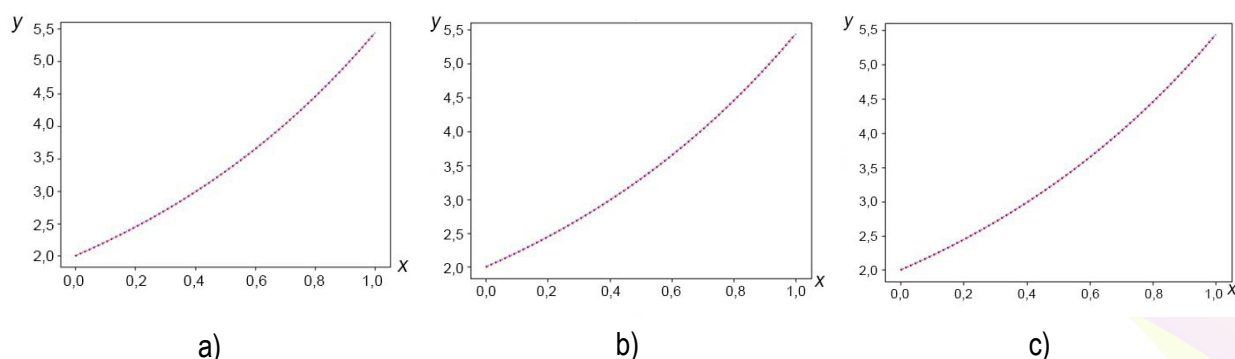
² Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.

На рисунке представлены результаты расчетов по этим схемам и точное решение. Очевидно, все рассмотренные методы демонстрируют хорошую сходимость к точному решению. Для более детальной оценки порядка аппроксимации каждого метода вычислена средняя ошибка как норма разности между точным и приближенным решением.

Для оценки экспериментального порядка точности [8] по пространству были проведены расчеты на последовательности сгущающихся сеток $h = 10^{-3}$ м, $h = 10^{-3}/2$ м с сохранением числа Куранта. В результате для всех методов был получен порядок аппроксимации, равный 2, что соответствует теоретическому порядку аппроксимации каждой схемы.

Также были проведены замеры расчетного времени с заданными τ и h для каждого алгоритма (таблица).

В результате установлено, что схема гиперболизации показала наименьшее время расчета по сравнению с другими явными схемами.



Р и с у н о к. Сравнение численных и аналитических решений:
а) явная схема; б) метод локальных итераций; в) метод гиперболизации
F i g u r e. Comparison of numerical and analytical solutions:
а) explicit scheme; б) local iteration method; в) hyperbolization method

Источник: составлено авторами.
Sources: compiled by the authors.

Т а б л и ц а. Анализ алгоритмов
T a b l e. Analysis of algorithms

Метод / Method	Явный / Explicit	ЛИ / LI	Гиперболизация / Hyperbolization
Отклонение между точным и приближенным решением / Deviation between the exact and approximate solution			
Ошибка / Error	5,42846e-07	0,00155567	3,70791e-06
Порядок аппроксимации по пространству / The order of approximation			
k	2,01954	1,90624	2,3244
Время выполнения алгоритмов, $h = 10^{-3}$ м / The execution time of algorithms, $h = 10^{-3}m$			
τ , с	10^{-7}	$10^{-3}+173$ итерации	10^{-5}
Время, мс / Time, ms	65428	6654	1336

Источник: таблица составлена авторами на основе данных вычислительных экспериментов.
Sources: the table was compiled by the authors based on the data from computational experiments.

ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе реализованы численные схемы для решения уравнений параболического типа: широко известная явная схема, метод локальных итераций и метод гиперболизации. Численное исследование этих схем показало, что каждая из них имеет второй порядок аппроксимации по пространству. Однако расчетное время рассмотренной задачи у метода гиперболизации меньше. При решении систем уравнений параболического типа с применением явных схем метод гиперболизации позволяет существенно сократить время вычислений при сохранении требуемой точности.

Таким образом, исследование численных методов решения уравнений параболического типа является актуальной и важной задачей в области математики и информатики. Полученные результаты помогут сделать выбор наиболее подходящего алгоритма решения параболических уравнений при решении практических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуков В. Т. О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 10. С. 127–158. EDN: RXPJZF
2. Жуков В. Т., Новикова Н. Д., Феодоритова О. Б. Об одном подходе к интегрированию по времени системы уравнений Навье-Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 2. С. 267–280. <https://doi.org/10.31857/S0044466920020131>
3. Четверушкин Б. Н., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. О стабилизации явной схемы решения нелинейного уравнения параболического типа // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506, № 1. С. 30–36. <https://doi.org/10.31857/S268695432205006X>
4. Peskova E. E., Yazovtseva O. S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2024. Vol. 64, Pp. 326–339. <https://doi.org/10.1134/S0965542524020106>
5. Язовцева О. С. Применение гиперболизации в диффузионной модели гетерогенного процесса на сферическом зерне катализатора // Сибирский журнал вычислительной математики. 2024. Т. 27, № 4. С. 457–471. <https://doi.org/10.15372/SJNM20240407>
6. Язовцева О. С., Губайдуллин И. М., Лапшин И. Г. Осреднение модели химического процесса в слое катализатора со сферической формой зерна // Вычислительные методы и программирование. 2024. 25, № 4. 413–426. <https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r431>
7. Лебедев В. И., Финогенов С. А. О порядке выбора итерационных параметров в чебышевском циклическом методе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1971. Т. 11, № 2. С. 425–438. URL: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=6870&option_lang=rus (дата обращения: 28.01.2025).
8. Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Тишкин В. Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 34. С. 1–31. EDN: PATZEL

REFERENCES

1. Zhukov V.T. On Explicit Methods for the Time Integration of Parabolic Equations. *Matematicheskoe Modelirovanie*. 2010;22(10):127–158. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: RXPJZF
2. Zhukov V.T., Novikova N.D., Feodoritova O.B. An Approach to Time Integration of the Navier-Stokes Equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(2):267–280. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.31857/S0044466920020131>
3. Chetverushkin B.N., Olkhovskaya O.G., Gasilov V.A. About Regulation of an Explicit Difference Scheme for Non-Linear Parabolic-Type Equation. *Doklady Rossijskoj akademii nauk. Matematika, informatika, processy upravleniya*. 2022;506(1):30–36. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.31857/S268695432205006X>

4. Peskova E.E., Yazovtseva O.S. Application of the Explicitly Iterative Scheme to Simulating Subsonic Reacting Gas Flows. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2024;64:326–339. <https://doi.org/10.1134/S0965542524020106>
5. Yazovtseva O.S. Application of Hyperbolization in the Diffusion Model of a Heterogeneous Process on a Spherical Catalyst Grain. *Sibirskii Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki*. 2024;27(4):457–471. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.15372/SJNM20240407>
6. Yazovtseva O.S., Gubaydullin I.M., Lapshin I.G. Averaging of the Model of a Chemical Process in a Catalyst Layer with a Spherical Grain. *Numerical Methods and Programming*. 2024;25(4):413–426. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.26089/NumMet.v25r431>
7. Lebedev V.I., Finogenov S.A. Ordering of the Iterative Parameters in the Cyclical Chebyshev Iterative Method. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1971;11(2):155–170. (In Russ., abstract in Eng.) Available at: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=zvmmf&paperid=6870&option_lang=rus (accessed 28.01.2025).
8. Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Tishkin V.F. Research of the Impact of Different Limiting Functions on the Order of Solution Obtained by RKDG. *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*. 2012;(34):1–31. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PATZEL

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Пескова Елизавета Евгеньевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики Национального исследовательского Мордовского государственного университета (430005, Российская Федерация, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, Researcher ID: U-7971-2019, Scopus ID: 57192978349, SPIN-код: 4115-3762, e.e.peskova@math.mrsu.ru

Мустайкин Максим Сергеевич, студент факультета математики и информационных технологий Национального исследовательского Мордовского государственного университета (430005, Российская Федерация, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8690-0787>, maksimmustajkin@mail.ru

ВКЛАД СОАВТОРОВ

Е. Е. Пескова – разработка концепции; научное руководство; валидация результатов; написание рукописи – рецензирование и редактирование.

М. С. Мустайкин – проведение исследования; разработка программного обеспечения; визуализация; написание черновика рукописи.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Поступила 03.03.2025; одобрена после рецензирования 11.03.2025; принята к публикации 18.03.2025.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Elizaveta E. Peskova, Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, Researcher ID: U-7971-2019, Scopus ID: 57192978349, SPIN-code: 4115-3762, e.e.peskova@math.mrsu.ru

Maksim S. Mustaykin, Student in the Mathematics and IT Department, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-8690-0787>, maksimmustajkin@mail.ru

CONTRIBUTION OF THE AUTHORS

E. E. Peskova – conceptualization; supervision; validation; writing – review and editing.

M. S. Mustaykin – investigation; software, visualization; writing – original draft preparation.

The authors have read and approved the final manuscript.

Submitted 03.03.2025; revised 11.03.2025; accepted 18.03.2025.