

СТЕНИН И. В., ШАМАНАЕВ П. А., ГОРШУНОВА Т. А.
АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ
ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Аннотация. Задача идентификации параметров линейных динамических систем второго порядка с малыми возмущениями по экспериментальным данным решается путем сведения ее к задаче минимизации квадратичного функционала с ограничениями в виде нелинейных алгебраических уравнений. Проведены вычисления на трех экспериментальных наборах данных, соответствующих трем типам особой точки линейной системы: седло, узел, центр.

Ключевые слова: идентификация параметров, обыкновенные дифференциальные уравнения, минимизация.

STENIN I. V., SHAMANAEV P. A., GORSHUNOVA T. A.
ALGORITHM OF PARAMETER IDENTIFICATION OF SECOND-ORDER
DYNAMICAL SYSTEM WITH SMALL PERTURBATIONS
ACCORDING TO EXPERIMENTAL DATA

Abstract. The problem of identifying the parameters of the second-order linear dynamical systems with small perturbations according to experimental data is solved by reducing it to the problem of minimizing a quadratic functional with constraints in the form of nonlinear algebraic equations. The calculations were carried out on three experimental data sets corresponding to the three types of singular points of a linear system: the saddle, the node, and the center.

Keywords: identification of parameters, ordinary differential equations, minimization.

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми возмущениями вида

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \varepsilon_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = \theta_3 x_1 + \theta_4 x_2 + \varepsilon_2 x_2 \end{cases} \quad (1)$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ – зависимые переменные, $t \in [0, b]$ – независимая переменная, $b > 0$, $\theta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, 4$ – неизвестные параметры, ε_j ($j = 1, 2$) – достаточно малые вещественные параметры.

Обозначим через $x_j(t, \theta)$ – j -компоненту решения системы (1), $j = 1, 2$, зависящую от векторного параметра $\theta = \text{column}(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$.

Пусть при некоторых фиксированных значениях $\theta_k, k = 1, \dots, 4$, решение системы (1) удовлетворяет задаче Коши с начальными условиями:

$$x_1^{(1)} = x_1(0), x_2^{(1)} = x_2(0). \quad (2)$$

Пусть так же по переменной x с шагом $\tau = \frac{b}{N}$ на равномерной сетке

$$t_1 = 0, \dots, t_{i+1} = t_i + \tau, \dots, t_N = b, \quad (3)$$

для экспериментальных данных справедливы соотношения

$$\tilde{x}^{(i)} = x^{(i)} + \varepsilon^{(i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где $\tilde{x}^{(i)} = \text{column}(\tilde{x}_1^{(i)}, \tilde{x}_2^{(i)})$, $x^{(i)} = \text{column}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$, $x_j^{(i)} = x_j(t_i, \theta)$ – значение компоненты решения системы (1) в точке t_i при фиксированном значении векторного параметра θ , $\varepsilon^{(i)} = \text{column}(\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iN})$ – вектор, элементы которого являются случайными величинами, имеющими стандартное нормальное распределение, то есть $\varepsilon_{ij} \in N(0, 1)$, $i = \overline{1, N}, j = 1, 2$.

Ставится задача идентификации параметров системы вида (1), заключающаяся в нахождении таких оценок $\hat{\theta}_k$ параметров $\theta_k, k = 1, \dots, 4$, при которых решение задачи (1) приближается экспериментальными данными $\{\tilde{x}^{(i)}, i = \overline{1, N}\}$ в смысле метода наименьших квадратов [1].

Заменим уравнение (1) симметричной разностной схемой [2] на сетке (3)

$$\begin{aligned} \frac{x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)}}{\tau} &= \frac{1}{2}(f_{i,1} + f_{i+1,1}), \\ \frac{x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)}}{\tau} &= \frac{1}{2}(f_{i,2} + f_{i+1,2}), \\ i &= \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} f_{i,1} &= f_1(x^{(i)}, \theta) \equiv \theta_1 x_1^{(i)} + \theta_2 x_2^{(i)} + \varepsilon_1 x_1^{(i)}, \\ f_{i,2} &= f_2(x^{(i)}, \theta) \equiv \theta_3 x_1^{(i)} + \theta_4 x_2^{(i)} + \varepsilon_2 x_2^{(i)}. \end{aligned}$$

Вводя обозначения [3]

$$\begin{aligned} z &= \text{column}(x^{(N)}, \theta), \quad x^{(N)} = \text{column}(x^{(1)}, \dots, x^{(N)}), \\ \tilde{z} &= \text{column}(\tilde{x}^{(N)}, o_4), \quad \tilde{x}^{(N)} = \text{column}(\tilde{x}^{(1)}, \dots, \tilde{x}^{(N)}), \\ o_4 &= \text{нулевой вектор размерности } 4, \end{aligned}$$

получим

$$x^{(N)} = H_1 z, \quad \tilde{x}^{(N)} = H_1 \tilde{z},$$

где

$$H_1 = [I_{2N} : O_{2N \times 4}], \quad H_2 = \frac{1}{N} H_1^T H_1,$$

здесь I_{2N} – единичная $(2N \times 2N)$ -матрица, $O_{2N \times 4}$ – нулевая $(2N \times 4)$ -матрица.

Тогда, согласно [3–5], задача идентификации параметров может быть сформулирована как задача минимизации квадратичного функционала с ограничениями в виде нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \min_z m(z), & m(z) = \frac{1}{2} (H_2 z, z) - (H_2 \tilde{z}, z) \\ T(z) = h \\ g(z) = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Здесь введены следующие обозначения: $T = [T_1 T_2, \dots, T_N, T_\theta]$ – $(2 \times (2N + 4))$ – матрица, T_i , $i = \overline{2, N}$ – нулевые (2×2) – матрицы, T_θ – (2×4) – матрица;

$$\begin{aligned} g(z) &= \text{column}(g_1(z), \dots, g_N(z)), \quad g_i(z) = \text{column}(g_{i1}(z), g_{i2}(z)), \quad i = \overline{1, N}, \\ g_{i1}(z) &= g_{i1}(x^{(N)}, \theta) \equiv \\ &\equiv \left(1 + \frac{\tau}{2}(\theta_1 + \varepsilon_1)\right) x_1^{(i)} + \frac{\tau}{2} \theta_2 x_2^{(i)} - \left(1 - \frac{\tau}{2}(\theta_1 + \varepsilon_1)\right) x_1^{(i+1)} + \frac{\tau}{2} \theta_2 x_2^{(i+1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} g_{i2}(z) &= g_{i2}(x^{(N)}, \theta) \equiv \\ &\equiv \frac{\tau}{2} \theta_3 x_1^{(i)} + \left(1 + \frac{\tau}{2}(\theta_4 + \varepsilon_2)\right) x_2^{(i)} + \frac{\tau}{2} \theta_3 x_1^{(i+1)} - \left(1 - \frac{\tau}{2}(\theta_4 + \varepsilon_2)\right) x_2^{(i+1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что разностная схема (5) с учетом обозначений (7)-(8) может быть записана в виде

$$g(z) = 0.$$

Для решения задачи (6) воспользуемся алгоритмом [3], основанным на аппроксимации исходной задачи последовательностью квадратичных задач минимизации с линейными ограничениями. На каждом шаге разреженная система линейных алгебраических уравнений большой размерности решалась с использованием метода сопряженных градиентов [4].

Вычисления проводились на трех наборах экспериментальных данных $\tilde{x}^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$, отличающихся от приближенных решений с начальными данными $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$ системы (1) на случайные величины $\varepsilon_{ij} \in N(0, 1)$ ($j = 1, 2$), имеющие стандартное нормальное распределение. Каждое приближенное решение системы (1) получено при фиксированном наборе параметров θ_k , $k = 1, \dots, 4$, соответствующих трем типам особой точки системы (1): седло, узел, центр. Точность вычислений δ полагалась равной 0.001.

В результате вычислений для трех различных наборов экспериментальных данных получены оценки $\hat{\theta}_k$ для параметров θ_k , $k = 1, \dots, 4$, а также компоненты $x_1(t, \hat{\theta})$, $x_2(t, \hat{\theta})$ приближенных решений системы (1).

Приведем графики компонент $x_1(t, \hat{\theta})$, $x_2(t, \hat{\theta})$ приближенных решений системы (1) и соответствующие им экспериментальные данные.

Случай 1. Нулевое положение равновесия системы (1) – седло.

Получены следующие оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$:

$$\hat{\theta}_1 = 2.02298, \hat{\theta}_2 = 0.0001, \hat{\theta}_3 = 0.00002, \hat{\theta}_4 = -2.90002..$$

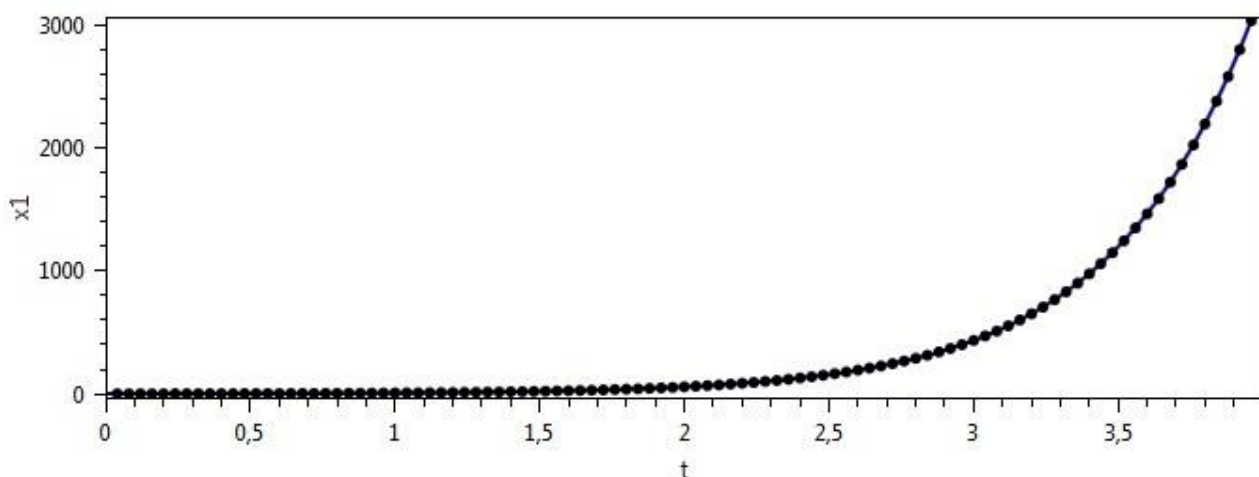


Рис. 1. Экспериментальные данные и график компоненты $x_1(t, \hat{\theta})$ приближенного решения системы (1).

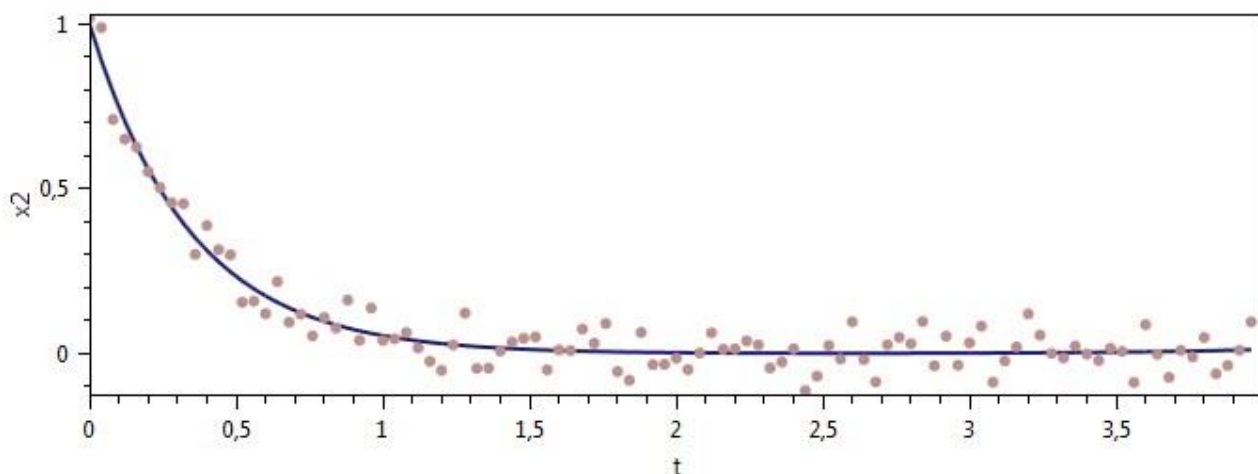


Рис. 2. Экспериментальные данные и график компоненты $x_2(t, \hat{\theta})$ приближенного решения системы (1).

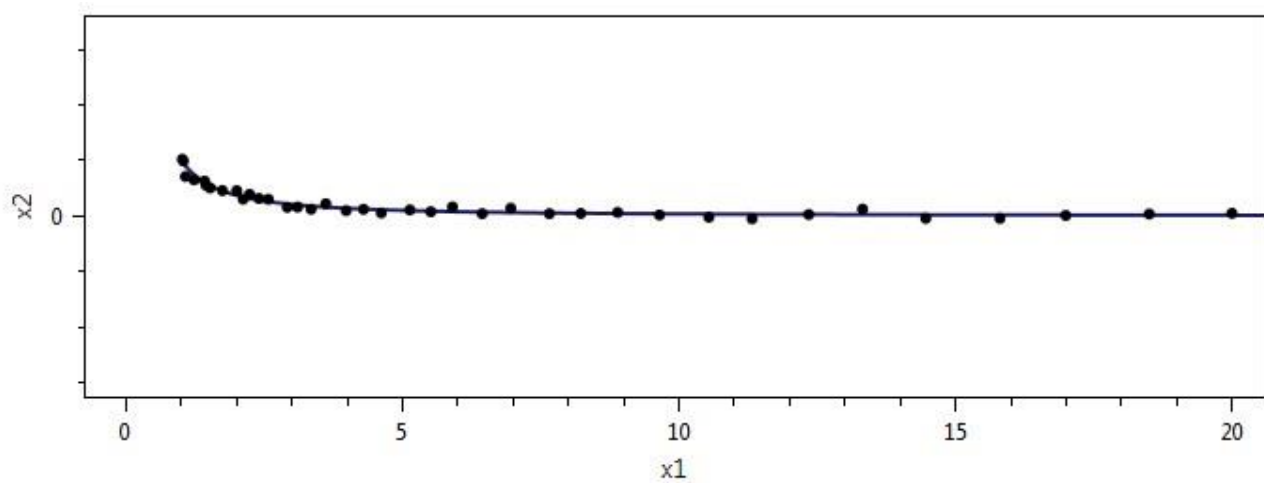


Рис. 3. Экспериментальные данные и приближение фазовой траектории системы (1) с начальными данными $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Случай 2. Нулевое положение равновесия системы (1) – узел.

Получены следующие оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$:

$$\hat{\theta}_1 = -3.14132, \hat{\theta}_2 = 0.01895, \hat{\theta}_3 = 1.03559, \hat{\theta}_4 = 0.02129.$$

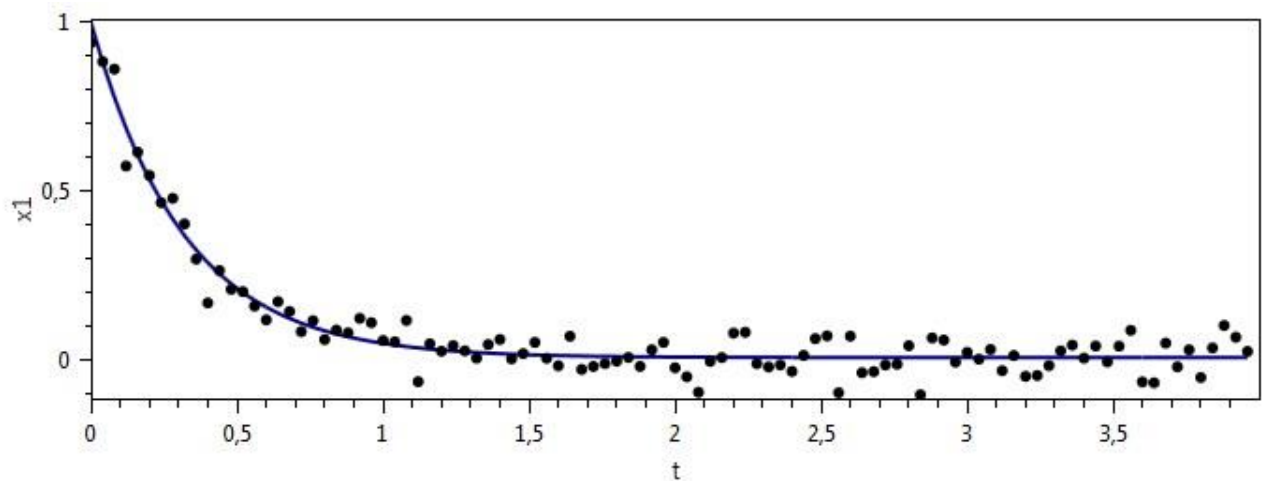


Рис. 4. Экспериментальные данные и график компоненты $x_1(t, \hat{\theta})$ приближенного решения системы (1).

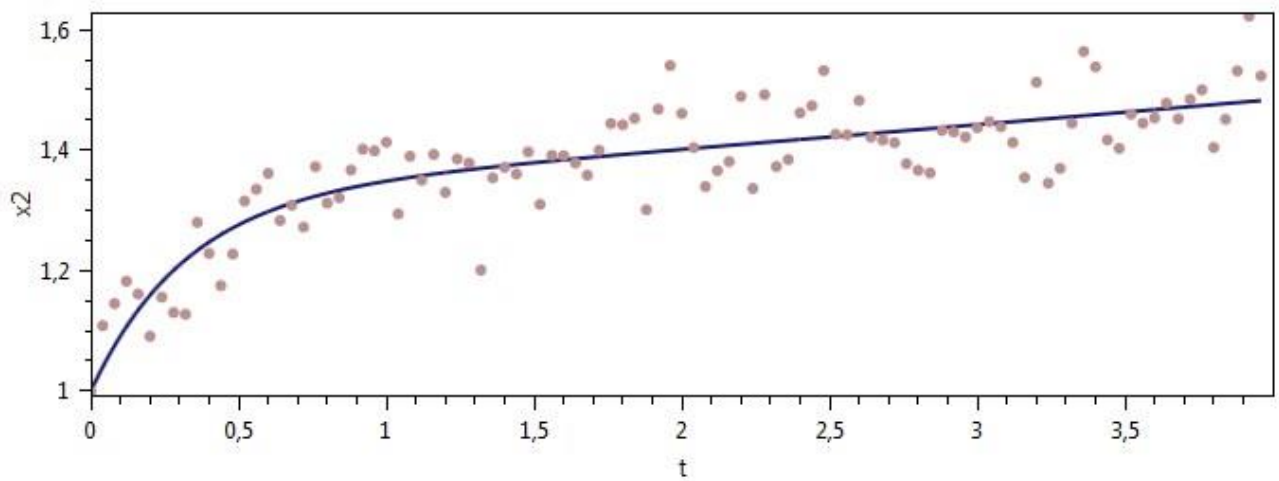


Рис. 5. Экспериментальные данные и график компоненты $x_2(t, \hat{\theta})$ приближенного решения системы (1).

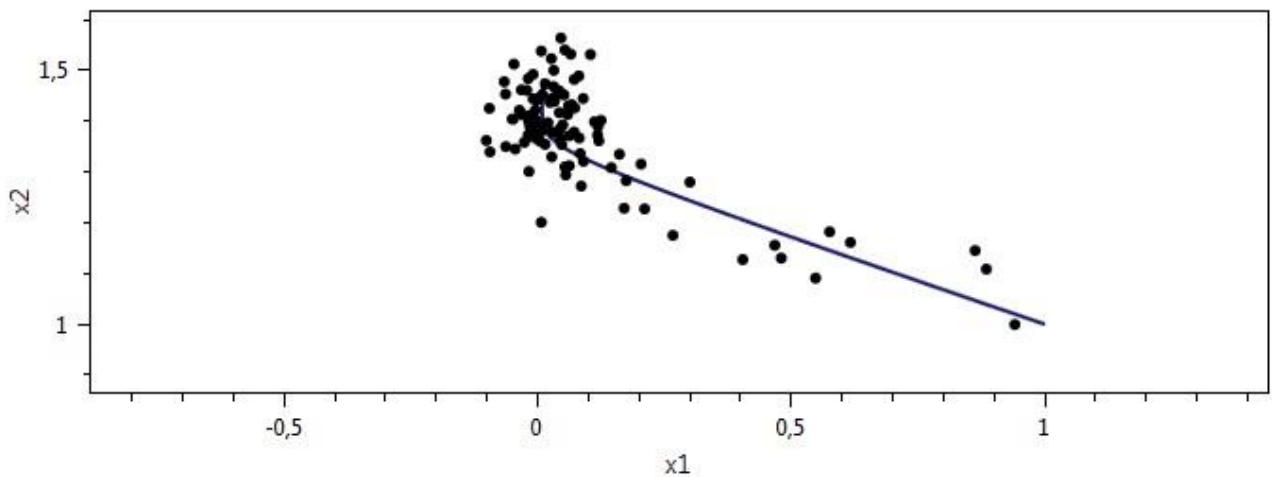


Рис. 6. Экспериментальные данные и приближение фазовой траектория системы (1) с начальными данными $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 1$.

Случай 3. Нулевое положение равновесия системы (1) – центр.

Получены следующие оценки параметров $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$:

$$\hat{\theta}_1 = 0.07274, \hat{\theta}_2 = 4.01077, \hat{\theta}_3 = -3.98702, \hat{\theta}_4 = -0.02925.$$

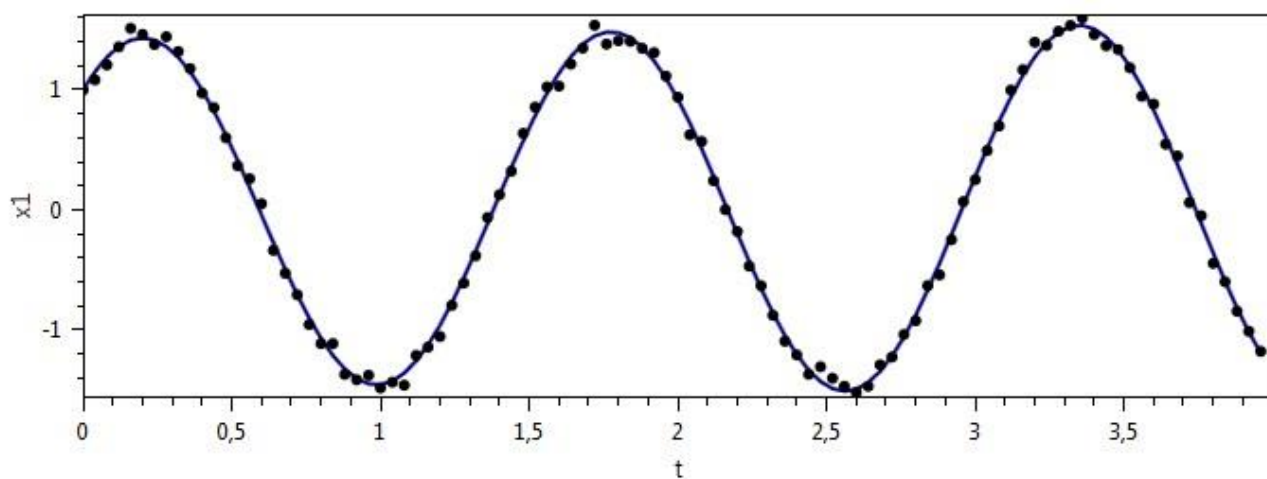


Рис. 7. Экспериментальные данные и график компоненты $x_1(t, \hat{\theta})$ приближенного решения системы (1).

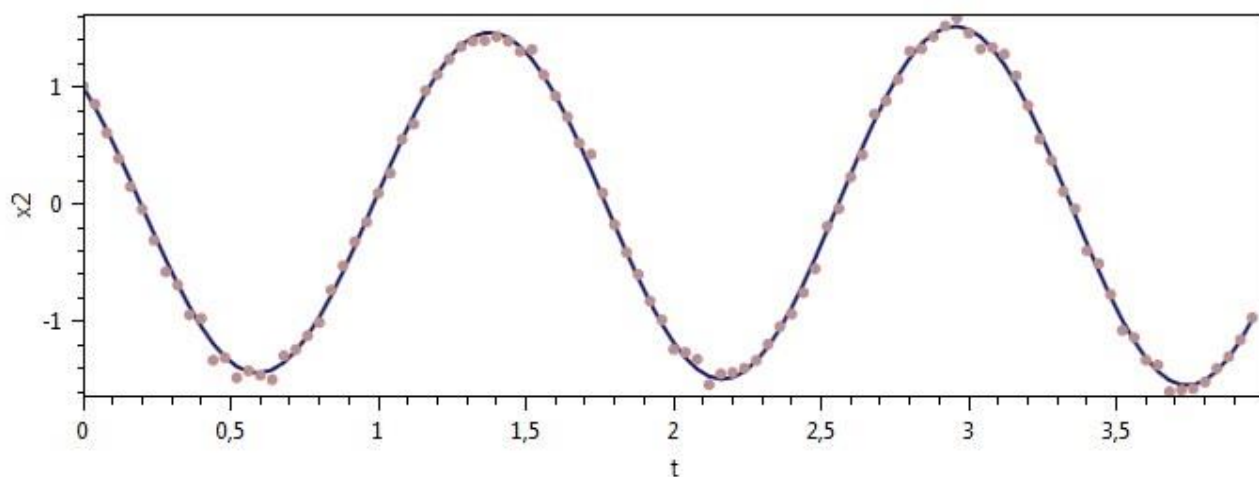


Рис. 8. Экспериментальные данные и график компоненты $x_2(t, \hat{\theta})$ приближенного решения системы (1).

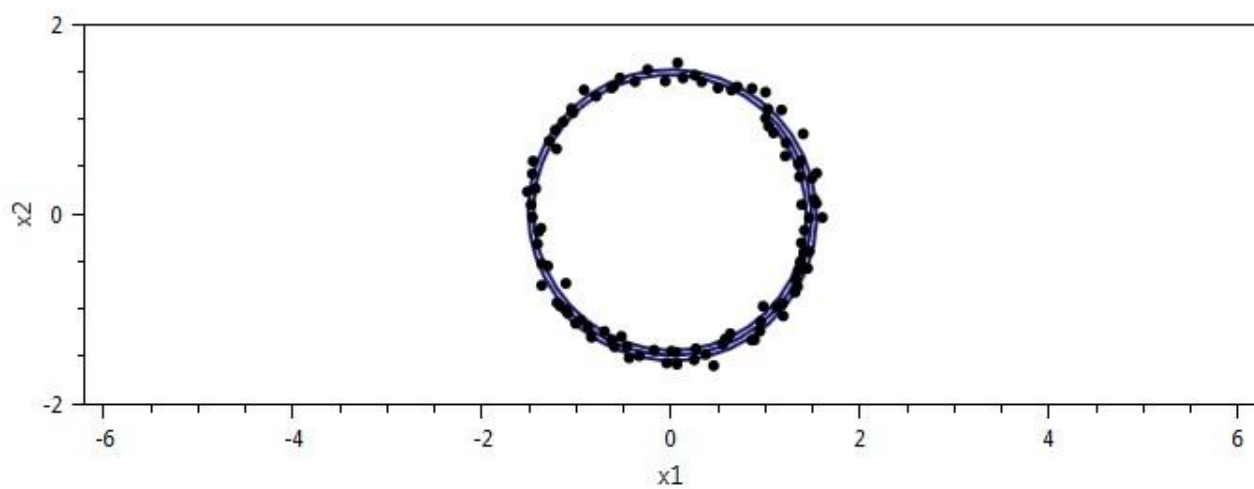


Рис. 9. Экспериментальные данные и приближение фазовой траектории системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zhengfeng Li, Michael R. Osborne, Tania Prvan. Parameter estimation of ordinary differential equations // IMA Journal of Numerical Analysis. – 2005. – No. 25. – P. 264–285.
2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
3. Челышов М. С., Шаманаев П. А. Решение задачи идентификации параметров динамических систем с использованием метода ортогональной циклической редукции // Прикладная математика и механика: сб. научных трудов. – № 11. – Ульяновск: УлГТУ, 2017. – С. 264–271.
4. Стенин И. В., Шаманаев П. А. Алгоритм решения разреженной системы линейных алгебраических уравнений большой размерности с использованием метода сопряженных градиентов // Огарев-online. – 2017. – № 13 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-razrezhennoj-sistemy-linejnyx-algebraicheskix-uravnenij-bolshoj-razmernosti-s-ispolzovaniem-metoda-sopryazhennyx-gradientov> (дата обращения 27.06.2019).
5. Стенин И. В., Шаманаев П. А. Идентификация параметров динамической системы второго порядка по экспериментальным данным [Электронный ресурс] // Огарев-online. – 2018. – № 14. – Режим доступа: <http://journal.mrsu.ru/arts/identifikaciya-parametrov-dinamicheskoy-sistemy-vtorogo-poryadka-po-eksperimentalnym-dannym> (дата обращения 27.06.2019).