

**КАПУСТИНА Е. С., АЛЬБИКОВ Р. Р.,
КУЛЯГИН А. И., ФРОЛОВ Т. Е., ЧАЛДАЕВ А. И.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ РАЗРЫВНЫМ
МЕТОДОМ ГАЛЁРКИНА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ¹**

Аннотация. Рассматривается разработка методики для решения одномерного уравнения газовой динамики разрывным методом Галёркина. Выполнены тестовые расчеты для задачи о сильном точечном взрыве.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, газовая динамика, задача Седова.

**KAPUSTINA E. S., ALBIKOV R. R.,
KULYAGIN A. I., FROLOV T. E., CHALDAEV A. I.
SOLUTION FOR THE FLUID DYNAMICS PROBLEMS
BY THE DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD
IN THE CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM**

Abstract. The development of a method for solving the one-dimensional fluid dynamics equation by the discontinuous Galerkin method is considered. Test calculations have been done for the problem of a strong point explosion.

Keywords: discontinuous Galerkin method, fluid dynamics, Sedov problem.

Введение. Численные методы повышенного порядка точности для решения задач механики сплошной среды на сегодняшний день развиваются многими научными коллективами [1–4]. Наиболее перспективным методом является метод Галёркина с разрывными базисными функциями [5]. Он сочетает в себе качества конечно-объемных и конечно-элементных методов, что позволяет получать с достаточной точностью решать задачи, решения которых характеризуются высокими значениями градиентов. В данной работе построена методика решения одномерных задач газовой динамики, обладающих сферической симметрией. Выполнены тестовые расчеты для задачи о сильном точечном взрыве [6; 7].

Разрывный метод Галёркина. Определим разрывный метод Галёркина [5] для одномерной неоднородной системы уравнений Эйлера.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial(r^n f)}{\partial r} + h = 0, \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Мордовия (проект № 18-41-130001 p_a).

где

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{pmatrix}; \quad (3)$$

$$h = \frac{n}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В приведенных выше уравнениях ρ – плотность жидкости, u – скорость жидкости, p – статическое давление, E и H – полная энергия и полная энтальпия на единицу массы.

$$E = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} + \frac{u^2}{2}, \quad (5)$$

$$H = E + \frac{p}{\rho}. \quad (6)$$

Для нахождения давления используем уравнение состояния идеального газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (7)$$

где γ – показатель адиабаты.

В уравнениях (1) – (4) $n = 0$ для декартовых координат, $n = 1$ для цилиндрических координат и $n = 2$ для сферических координат.

Для применения разрывного метода Галеркина введем равномерную сетку

$$0 < r_{\frac{1}{2}} < \dots < r_{i-\frac{1}{2}} < r_{i+\frac{1}{2}} < \dots < r_{N-\frac{1}{2}} < 1. \quad (8)$$

На каждом отрезке определим базис

$$\varphi_{0k}(t) = 1, \quad (9)$$

$$\varphi_{1k}(t) = \frac{r - r_c}{\Delta r}, \quad (10)$$

$$\varphi_{2k}(t) = \left(\frac{r - r_c}{\Delta r}\right)^2, \quad (11)$$

$$\Delta r = r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Приближенное решение q_h в каждой ячейке $[r_{i-\frac{1}{2}}, r_{i+\frac{1}{2}}]$ представляется в виде разложения по базисным функциям (9) – (12).

$$q_h(r, t) = \sum_{i=0}^2 q_{ik}(t)\varphi_{ik}(r), \quad (13)$$

Разрывный метод Галеркина получается путем умножения уравнения Эйлера (1) на базисную функцию φ_k и интегрирование по некоторому объему (K).

$$\int_K \frac{\partial q}{\partial t} \varphi_k(r) dK + \int_K \frac{1}{r^n} \frac{\partial(r^n f)}{\partial r} \varphi_k(r) dK + \int_K h \varphi_k(r) dK = 0, \quad (14)$$

где $dK = r^n dr$ – для одномерного потока.

Для одного пространственного измерения уравнение (14) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial q}{\partial t} \varphi_k(r) r^n dr + [f r^n \varphi_k(r)]_{\frac{i+1}{2}} - [f r^n \varphi_k(r)]_{\frac{i-1}{2}} - \\ & - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} f \frac{d\varphi_k(r)}{dr} r^n dr + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} h \varphi_k(r) r^n dr = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция f не определена в точках $r_{i-\frac{1}{2}}$ и $r_{i+\frac{1}{2}}$ – решение может быть разрывным на гранях элементов, что приведет к неоднозначности. Эта проблема преодолевается с помощью соответствующего выбора численных потоков на гранях, зависящих от предельных значений функции q_h слева и справа от точек $r_{i-\frac{1}{2}}$ и $r_{i+\frac{1}{2}}$.

Будем использовать дискретные потоки Русанова-Лакса-Фридрикса.

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{f}(q_{i+\frac{1}{2}}^L, q_{i+\frac{1}{2}}^R) = \frac{1}{2} \left(f(q_{i+\frac{1}{2}}^R) + f(q_{i+\frac{1}{2}}^L) - \alpha (q_{i+\frac{1}{2}}^R - q_{i+\frac{1}{2}}^L) \right), \quad (16)$$

$$\alpha = \max \left\{ |q_{i+\frac{1}{2}}^L| + c^L, |q_{i+\frac{1}{2}}^R| + c^R \right\}, \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \quad (17)$$

Используя приближение для функции q_h , получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dq}{dt} = -M^{-1} \left[\left(\hat{f} r^n \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right) \Big|_{r_{i+\frac{1}{2}}}^{r_{i-\frac{1}{2}}} - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} f r^n \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} dr + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} h r^n \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} dr \right]. \quad (18)$$

Ограничители наклона. Для многих конечно-разностных или конечно-объемных вычислений характерны разрывные решения и возникновение осцилляции. Так же и в нашем случае, вблизи разрывов потока могут возникать ложные колебания, поэтому необходимо использование лимитеров. Одним из общих подходов к решению данной проблемы служат специальные ограничители.

Согласно [5] будем обозначать действие оператора лимитирования на функцию q следующим образом: $\Lambda \Pi_h q$. Одним из простых подходов ограничения служит лимитер Кокбурна.

Запишем разложение решения по линейному базису в ячейке:

$$q = q_0 + q_1 \frac{r - r_c}{\Delta r}, \quad \Delta r = r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Для функции (19) действие оператора $\Lambda \Pi_h q$ запишем как

$$\Lambda \Pi_h q(r, t) = q_0 + \widetilde{q}_1 \frac{r - r_c}{\Delta r}, \quad \Delta r = r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Значение функции \widetilde{q}_1 вычисляется как

$$\widetilde{q}_1 = 2 * \min \text{mod} \left[q \left(r_{i+\frac{1}{2}} \right) - q_{0i}, \alpha \left(\bar{q}_{i+\frac{1}{2}} - q_{0i} \right), \alpha \left(q_{0i} - \bar{q}_{i-\frac{1}{2}} \right) \right], \quad (21)$$

где q_{0i} - среднее значение на интервале $r_{i-\frac{1}{2}}, r_{i+\frac{1}{2}}$, а $\bar{q}_{i+\frac{1}{2}}$ и $\bar{q}_{i-\frac{1}{2}}$ равны

$$\bar{q}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{q_{0i+1} + q_{0i}}{2}, \quad \bar{q}_{i-\frac{1}{2}} = \frac{q_{0i-1} + q_{0i}}{2}. \quad (22)$$

Если порядок полинома больше 1, то

$$q^l(r, t) = q_0^l + q_1^l \frac{r - r_c}{\Delta r}, \quad \Delta r = r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}, \quad (23)$$

где $q_0^l = q_0 + \frac{q_2}{12}$ - среднее интегральное значение на интервале $r_{i-\frac{1}{2}}, r_{i+\frac{1}{2}}$ для полинома степени равной 2.

После применения лимитера

$$\Lambda \Pi_h q^l(r, t) = \widetilde{q}_0^l + \widetilde{q}_1^l \frac{r - r_c}{\Delta r}, \quad \Delta r = r_{i+\frac{1}{2}} - r_{i-\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Постановка задачи Седова о сильном точечном взрыве [6]. Поместим небольшое количество безразмерной энергии $\varepsilon = 1$ в небольшую область радиуса dr в центре сетки, заполненной неподвижной средой плотности ρ_0 , с давлением p_0 . Безразмерное давление внутри этого объема определяется:

$$p_0 = \frac{3(\gamma - 1)\varepsilon}{(\nu + 1)\pi dr^\nu}, \quad x < x_c, \quad (25)$$

$$p_0 = 10^{-5}, \quad x > x_c, \quad (26)$$

где $\nu = 2$ для цилиндрических координат, $\nu = 3$ для сферических координат.

Выбираем dr в 3,5 раза больше, чем шаг сетки. Плотность устанавливается равной $\rho_0 = 1$ по всей сетке, скорость изначально в покое $u_0 = 0$.

На рисунке 1 представлены результаты расчетов, масштабированные относительно значений на фронте ударной волны. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными из классических источников [6; 7].

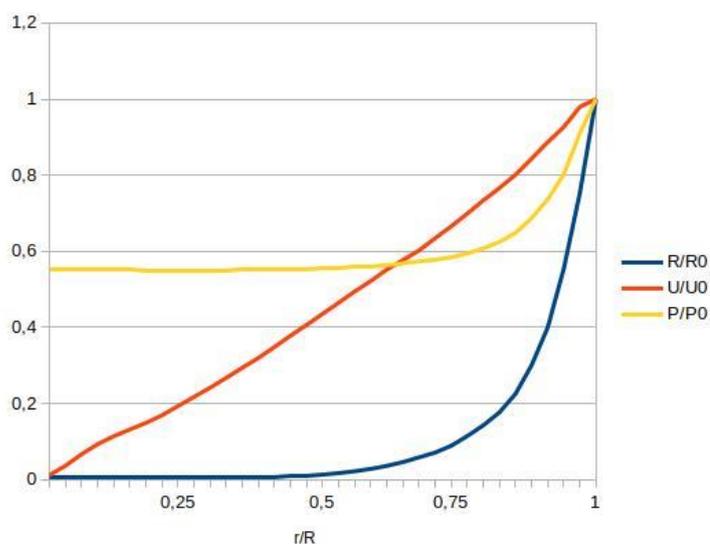


Рис. 1. Распределения плотности, скорости и давления, нормированные относительно значений на фронте ударной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вязников К. В., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1. № 5. – С. 95–120.
2. Jiang G.-S., Shu C.-W. Efficient implementation of weighted ENO schemes // Journal of computational physics. – 1996. – Vol. 126. – P. 202–228.
3. Shu C.-W. Essentially Non-Oscillatory and Weighted Essentially Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. ICASE Report No. 97-65. – Institute for Computer Applications in Science and Engineering (ICASE), 1997. – 78 p.
4. Жалнин Р. В. О построении параллельного вычислительного алгоритма высокого порядка точности для гиперболических систем уравнений // Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9. № 1. – С. 145–153.
5. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems // Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics). – 1998. – Vol. 1697. – P. 151–268.
6. Седов Л. И. Механика сплошной среды: в 2 т. – Т. 1. – М.: Наука, 1970. – 492 с.
7. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 656 с.