ЗИНИНА С. Х., МЕДВЕДЕВА М. А.

ДВУЦВЕТНЫЙ ГРАФ КАК СРЕДСТВО КЛАССИФИКАЦИИ ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУБЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОКРУЖНОСТИ[1]

Аннотация. В работе описан алгоритм сопоставления каждому диффеоморфизму, представляющему собой декартово произведение двух грубых преобразований окружности, двуцветного графа. Найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов, представляющих собой декартово произведение двух грубых преобразований окружности, посредством двуцветного графа.

Ключевые слова: грубое преобразование окружности, декартово произведение отображений, диффеоморфизм, топологическая сопряженность, двуцветный граф.

ZININA S. KH., MEDVEDEVA M. A.

TWO-COLOR GRAPH AS MEANS OF CLASSIFICATION OF CARTESIAN PRODUCTS OF ROUGH CIRCLE TRANSFORMATIONS

Abstract. The paper describes an algorithm for matching each diffeomorphism, which is a Cartesian product of two rough transformations of a circle, a two-color graph. Necessary and sufficient conditions for topological conjugacy of diffeomorphisms of the class under consideration using a two-color graph are found.

Keywords: rough circle transformation, Cartesian product of maps, diffeomorphism, topological conjugacy, two-color graph.

Введение. Исследование грубых систем дифференциальных уравнений началось с работы [1] А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина. В 1939 году А. Г. Майер в работе [2] ввел понятие грубости для динамических систем с дискретным временем (каскадов) на окружности и классифицировал грубые диффеоморфизмы окружности, это была одна из первых работ по топологической классификации динамических систем.

В 1959 году М. Пейшото в статье [3] обобщил результаты А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина на произвольные ориентируемые замкнутые поверхности. В дальнейшем гиперболическая теория начала активно развиваться, С. Смейлом, Дж. Палисом, В. ди Мелу [4–6] была выстроена теория простейших структурно устойчивых систем, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа орбит, называемых системами Морса-Смейла (в книге [7] дано систематизированное изложение классификации систем Морса-Смейла).

В 1971 году М. М. Пейшото в работе [8] формализовал понятие схемы Леонтович-

[1] Авторы благодарят О. В. Починку за консультации и внимание к работе.

Майера (введенное в 1955 г. в работе [9]) и доказал, что для систем Морса-Смейла на произвольных поверхностях, полным топологическим инвариантом является класс изоморфности его различающего графа. Результат Пейшото был обобщен В. З. Гринесом и А. Н. Безденежных для градиентно-подобных каскадов на ориентируемых поверхностях [10]. В работе [11] А. А. Ошемков и В. В. Шарко предложили поставить в соответствие потоку Морса-Смейла без замкнутых траекторий на поверхности трехцветный граф, который также является полным топологическим инвариантом, но по сравнению с графом Пейкшото, описание и проверка изоморфности трехцветных графов является значительно более простой. В работе [12] были классифицированы градиентно-подобные диффеоморфизмы на поверхностях посредством трехцветного граф (T_f, P_f). В статье [13] получена полная топологическая классификация n-кратных регулярных гомеоморфизмов окружности.

В настоящей работе рассматривается более узкий, по сравнению с работами [12; 13], класс G^* диффеоморфизмов, представляющих собой декартово произведение двух грубых преобразований окружности. В качестве претендента на роль топологического инварианта систем класса G^* предъявляется двуцветный граф и доказывается теорема о полноте множества найденных инвариантов.

Теорема. Диффеоморфизмы $f, f' \in G^*$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда двуцветные графы (D_f, P_f) и ($D_{f'}$, $P_{f'}$) изоморфны.

Пусть $f: M^2 \to M^2$ - диффеоморфизм класса G^*, представляющий собой декартово произведение двух грубых преобразований окружности.

Неблуждающее множество Ω диффеоморфизма $f: M^2 \to M^2$ представляется в следующем виде объединения множества стоковых (Ω_0), седловых (Ω_1) и источниковых (Ω_2) точек диффеоморфизма f, то есть: $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$. Множество $\Omega_1 \neq \emptyset$ в силу того, что диффеоморфизмы класса G^* являются декартовым произведением двух грубых преобразований окружности и имеют по крайней мере две седловые точки, фазовый портрет простейшего представителя класса G^* представлен на Рис. 3.

Следующее утверждение устанавливает топологический тип многообразий, допускающих диффеоморфизмы из класса G^*.

Утверждение. Пусть $f \in G^*$. Тогда M^2 гомеоморфно либо тору T^2, либо бутылке Клейна K^2.

Двуцветный граф.

Определение. Граф D называется *двуцветным графом*, если:

1) множество всех ребер графа D является объединением двух подмножеств, каждое из которых состоит из ребер одного цвета (цвета ребер обозначим буквами s, u);

2) каждая вершина графа D инцидентна в точности четырем ребрам, причем из них два

ребра цвета u, два ребра цвета s;

3) граф не содержит петель.

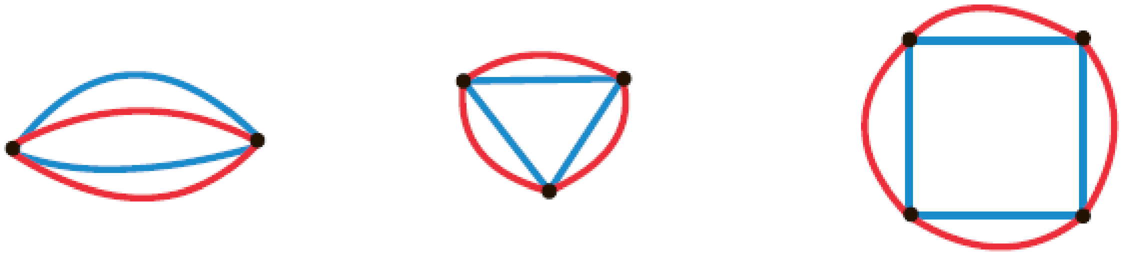

Рис. 1. Примеры двуцветных графов с двумя, тремя и четырьмя вершинами.

На рисунке 1 приведены примеры простейших двуцветных графов; в силу определения двуцветного графа (он не содержит петель) минимально возможный двуцветный граф состоит из *2* вершин и *4* соединяющих их ребер.

Взаимно-однозначное отображение P графа D на себя, переводящее вершины в вершины с сохранением отношений инцидентности и цветности, называется *автоморфизмом графа* D. В дальнейшем мы будем понимать под символом (D, P) граф D, оснащенный автоморфизмом P.

Два двуцветных графа (D, P) и (D', P') назовем *изоморфными*, если существует взаимно-однозначное соответствие χ между множествами их вершин, сохраняющее отношения инцидентности и цветности, при этом сопрягающее автоморфизмы P и P' , то есть $P'\chi = \chi P$.

Опишем процесс построения двуцветного графа для диффеоморфизмов класса G^*, для этого проведем предварительные разбиения поверхности.

Положим $\widetilde{M} = M^2 \backslash \left(W^u_{\Omega_0} \cup W^u_{\Omega_1} \cup W^s_{\Omega_1} \cup W^s_{\Omega_2}\right)$.

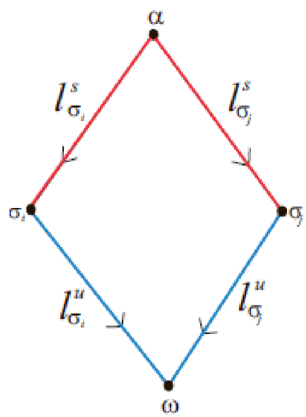

Рис. 2. Вид ячейки.

Множество $\widetilde{M}$ представляется в виде объединения областей (ячеек), гомеоморфных открытому двумерному диску, граница каждой из которых имеет вид, изображенный на Рис. 2.

В границу каждой ячейки δ входят четыре периодические точки: источниковая точка α, седловые точки σ_i и σ_j, стоковая точка ω, а также устойчивые сепаратрисы $l^s_{\sigma_i}$ и $l^s_{\sigma_j}$ (s-кривые) с граничными точками α, σ_i и α, σ_j, неустойчивые сепаратрисы $l^u_{\sigma_i}$ и $l^u_{\sigma_j}$ (u-кривые) с граничными точками ω, σ_i и σ_j, ω (см. Рис. 2). Стороной ячейки назовем замыкание s- или u-кривой.

Периодом ячейки δ называется наименьшее натуральное число $k \in N$, такое что $f^k(\delta) = \delta$.

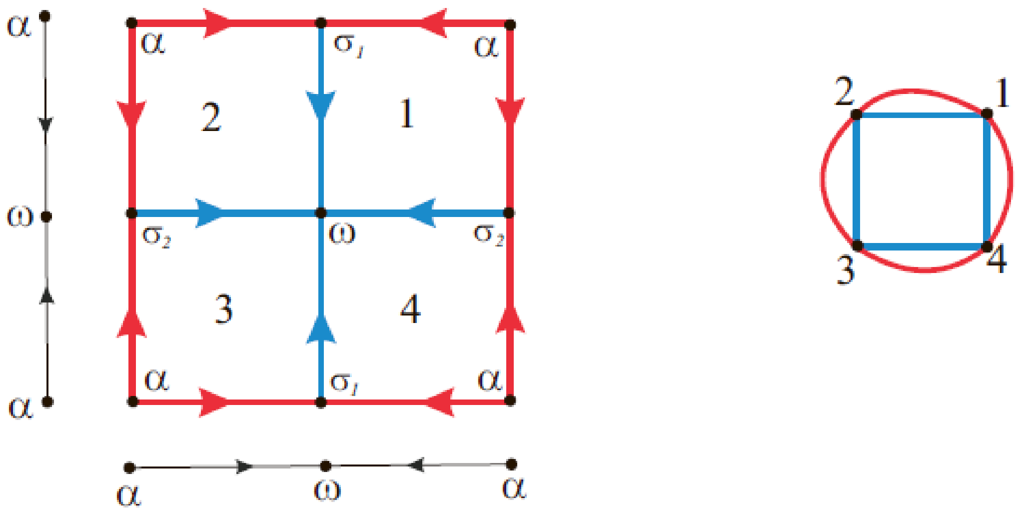

Рис. 3. Фазовый портрет диффеоморфизма класса
G* и соответствующий ему двуцветный граф.

Перейдем к непосредственному процессу построения двуцветного графа D_f, соответствующего диффеоморфизму $f \in G^*$ (см. Рис. 3-4).

1) Вершины графа D_f взаимно-однозначно соответствуют ячейкам множества Δ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s или u, если соответствующие этим вершинам ячейки имеют общую s или u кривую.

Обозначим через B_f множество вершин графа D_f. Так как каждая ячейка имеет 4 стороны и из них две имеют цвет u, оставшиеся две - цвет s, то в вершине, соответствующей ячейке, сходятся 4 ребра, причем из них два ребра цвета u, два ребра цвета s.

Цикл, все ребра которого имеют цвет u (s) назовем u (s)-циклом; su-циклом назовем цикл, цвета всех ребер которого чередуются. Так как две вершины графа могут быть инцидентны двум ребрам различного цвета, то для однозначности условимся, что при описании su-цикла первое ребро имеет цвет s.

Поскольку все стороны ячейки различны, то есть любая сторона ячейки примыкает к стороне другой ячейки, то граф D_f не имеет петель.

Таким образом, граф D_f удовлетворяет определению двуцветного графа. Положим π_f взаимно-однозначное отображение множества ячеек диффеоморфизма f на множество вершин графа D_f. Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин и ребер графа D_f автоморфизм $P_f = \pi_f f \pi_f^{-1}$.

Лемма. Двуцветный граф (D_f, P_f) обладает следующими свойствами:

1) граф D_f связен;

2) каждое ребро принадлежит единственному su-циклу длины 4; каждый s-цикл имеет

длину 4; каждый u-цикл имеет длину 4.

3) автоморфизм P_f является периодическим с периодом m_f.

Для диффеоморфизмов класса G^*, представляющих собой декартово произведение двух грубых преобразований окружности, найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов посредством двуцветного графа, которые сформулированы в следующей теореме.

Теорема. Диффеоморфизмы f, f' из класса G^* топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы (D_f; P_f), ($D_{f'}$; $P_{f'}$) изоморфны.

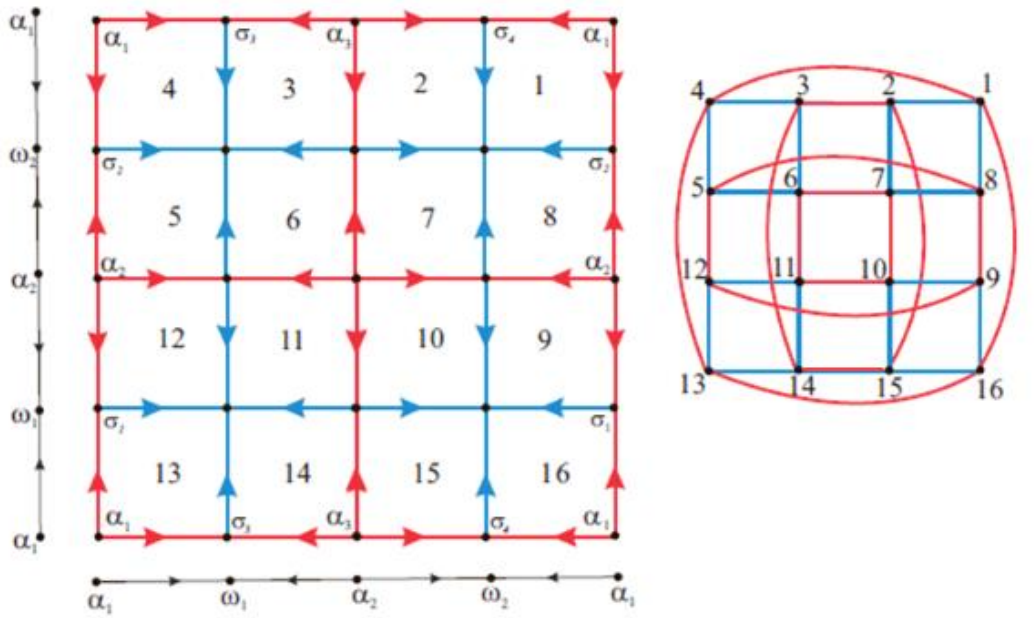

Рис. 4. Фазовый портрет диффеоморфизма класса G*
и соответствующий ему двуцветный граф.

Заключение. В статье описан алгоритм сопоставления каждому диффеоморфизму, представляющему собой декартово произведение двух грубых преобразований окружности, двуцветного графа. Найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов, представляющих собой декартово произведение двух грубых преобразований окружности, посредством двуцветного графа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады академии наук СССР. – 1937. – Т. 14, № 5. – С. 247–250.

2. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. ун-та. – 1939. – Т. 12. – С. 215–229.
3. Peixoto M. M. On structural stability // Ann. Math. – 1959. – Vol. 69. – P. 199–222.
4. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – С. 113–185.
5. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems // Topology. – 1969. – Vol. 8, №4. – P. 385–404.
6. Palis J., Smale S. Structural stability theorems // Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. – 1970. – Vol. 14. – P. 223–231.
7. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. – Switzerland: Springer, 2016. – 313 p.
8. Peixoto M. M. On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical systems. – 1973. – Acad. press N.Y. London. – P. 389–419.
9. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях // Часть 1. Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. – Горький, 1985. – С. 22–38.
10. Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. – 1998. – Т. 189, № 8. – С. 93–140.
11. Гринес В. З., Капкаева С. Х., Починка О. В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. – 2014. – Т. 205, № 10. – С. 19–46.
12. Голикова И. В., Зинина С. Х. Топологическая сопряжённость n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2021. – Т. 29, № 6. – С. 851–862.
13. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Доклады академии наук СССР. – 1955. – Т. 103, № 4. – С. 557–560.