

РАССАДИН А. Э.

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Аннотация. В работе дана иллюстрация взаимного влияния эффектов нелинейности и нелокальности, а именно, найдено точное решение задачи Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, обладающего следующим свойством: изменение знака у ограниченного начального условия за конечное время приводит к неограниченному возрастанию по модулю соответствующего ему решения. Получено общее решение задачи Коши для рассматриваемого уравнения, а также продемонстрирован метод расширения таблиц преобразования Лапласа по двум переменным с помощью частных решений этого уравнения.

Ключевые слова: оригинал, изображение, свёртка, функция Бесселя первого рода, модифицированная функция Бесселя, комплексная плоскость.

RASSADIN A. E.

ON A NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. The paper illustrates the mutual influence of the effects of nonlinearity and nonlocality, namely, an exact solution of the Cauchy problem for a nonlinear integro-differential equation is found, which has the following property: a change in the sign of a bounded initial condition in finite time leads to an unbounded increase in the modulus of the corresponding solution. A general solution of the Cauchy problem for the equation under consideration is obtained, and a method for expanding the Laplace transform tables by two variables using partial solutions of this equation is demonstrated.

Keywords: pre-image, transform table, convolution, Bessel functions of the first kind, modified Bessel functions, complex plane.

Одним из способов повышения точности описания процессов различной природы является учёт при протекании этих последних нелокальности взаимодействий [1; 2]. Однако комбинация нелинейности математической модели с простейшей нелокальностью в виде пространственного сдвига уже приводит к резкому возрастанию математических трудностей (см., например, [3]), поэтому поиск точно решаемых модельных примеров, обладающих как нелинейностью, так и нелокальностью, приобретает важное значение.

Рассмотрим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + \int_0^x \int_0^y u(x - \xi, y - \eta, t) \cdot u(\xi, \eta, t) \cdot d\xi d\eta = 0, \quad (1)$$

в котором неизвестная функция $u(x, y, t)$ определена в I-м квадранте: $x \geq 0, y \geq 0$.

Снабдим уравнение (1) начальным условием:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad (2)$$

тогда для решения задачи Коши (1)-(2) справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть существуют такие константы $M_0 > 0, h_0 > 0$ и $k_0 > 0$, что в I-м квадранте функция (2) удовлетворяет неравенству:

$$|u_0(x, y)| \leq M_0 \cdot \exp(h_0 x + k_0 y), \quad (3)$$

тогда точное решение задачи Коши (1)-(2) имеет вид:

$$u(x, y, t) = \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{U_0(p, q)}{1+t \cdot U_0(p, q)} \cdot \exp(p \cdot x + q \cdot y) \cdot \frac{dpdq}{(2 \cdot \pi \cdot i)^2}, \quad (4)$$

где

$$U_0(p, q) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_0(x, y) \cdot \exp(-p \cdot x - q \cdot y) \cdot dx dy, \quad (5)$$

а в формуле (4) прямые $\operatorname{Re} p = a$ и $\operatorname{Re} q = b$ выбраны так, чтобы все особенности функции $U_0(p, q)/(1+t \cdot U_0(p, q))$ в комплексных плоскостях p и q соответственно оставались слева от них.

Доказательство. Нелинейный член в уравнении (1) представляет собой двойную свёртку лапласовского типа по обоим пространственным переменным, поэтому будем искать его решение с помощью двойного преобразования Лапласа — и по x , и по y .

В рамках этого формализма переход от оригинала $u(x, y, t)$ к изображению $U(p, q, t)$ имеет вид [4]:

$$U(p, q, t) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(x, y, t) \cdot \exp(-p \cdot x - q \cdot y) \cdot dx dy, \quad (6)$$

а исходное интегро-дифференциальное уравнение (1) для оригинала трансформируется в обыкновенное дифференциальное уравнение для изображения (6):

$$\frac{\partial U(p, q, t)}{\partial t} + U^2(p, q, t) = 0, \quad U(p, q, 0) = U_0(p, q). \quad (7)$$

Начальным условием для уравнения (7) является функция (5), причём условие (3) является достаточным условием её существования в области $\operatorname{Re} p > h_0$ и $\operatorname{Re} q > k_0$ [4].

Задача Коши (7) имеет следующее точное решение:

$$U(p, q, t) = \frac{U_0(p, q)}{1+t \cdot U_0(p, q)}, \quad (8)$$

а формула (4) представляет собой обращение двумерного преобразования Лапласа (6).

Однако формула (4), выражающая общее решение задачи Коши (1)-(2), неудобна для практического применения, поскольку для её использования надо проводить интегрирование в комплексном пространстве C^2 . Гораздо проще находить точные решения задачи Коши (1)-(2) в явном виде следующим образом: вычислить по формуле (5) изображение начального условия (2), а затем проверить по таблице двумерных преобразований Лапласа, приведённой в книге [4], соответствует ли изображение, найденное по формуле (8), какой-либо функции из этой таблицы.

Продemonстрируем применение этого приёма на примере.

Пусть начальное условие для уравнения (1) имеет вид:

$$u_0(x, y) = A_0 \cdot J_0(2\sqrt{a_0 xy}), \quad x \geq 0, y \geq 0, \quad a_0 > 0, \quad (9)$$

где $J_0(z)$ — это функция Бесселя, тогда интеграл (5) от функции (9) легко вычисляется с помощью известного разложения функции $J_0(z)$ в степенной ряд:

$$U_0(p, q) = \frac{A_0}{pq + a_0}. \quad (10)$$

Подставляя выражение (10) в формулу (8), получим для изображения решения:

$$U(p, q, t) = \frac{A_0}{pq + a_0 + A_0 t}. \quad (11)$$

Функция (11) получается из функции (10) заменой $a_0 \rightarrow a_0 + A_0 t$, поэтому вследствие единственности обратного преобразования Лапласа по переменным p и q [4] оригинал для изображения (11) получается из функции (9) той же заменой:

$$u(x, y, t) = A_0 \cdot J_0(2\sqrt{(a_0 + A_0 t)xy}). \quad (12)$$

При $A_0 > 0$ функция (12) обладает колебательным характером. На рисунке 1 приведён график функции (9) при $A_0 = 1$ и $a_0 = 1$. С течением времени характерная «длина волны» уменьшается — для этого достаточно сравнить рис. 1 с рис. 2, на котором представлен график функции (12) при тех же параметрах $A_0 = 1$ и $a_0 = 1$, но в момент времени $t = 3$. Если же $A_0 < 0$, то при $t_c = a_0 / |A_0|$ в решении (12) происходит переход от колебательного режима к режиму с неограниченно возрастающей по модулю функцией $u(x, y, t)$. С формальной точки зрения этот переход выражается в замене функции Бесселя $J_0(z)$ на модифицированную функцию Бесселя $I_0(z)$ при $t > t_c$. Рисунки 3 и 4 иллюстрируют этот эффект. В этом случае при $t \rightarrow t_c - 0$ характерная «длина волны» увеличивается, что

приводит к уплощению графика функции (12) до тех пор, пока при $t = t_c$ он не становится плоскостью $u(x, y, t_c) = -|A_0|$.

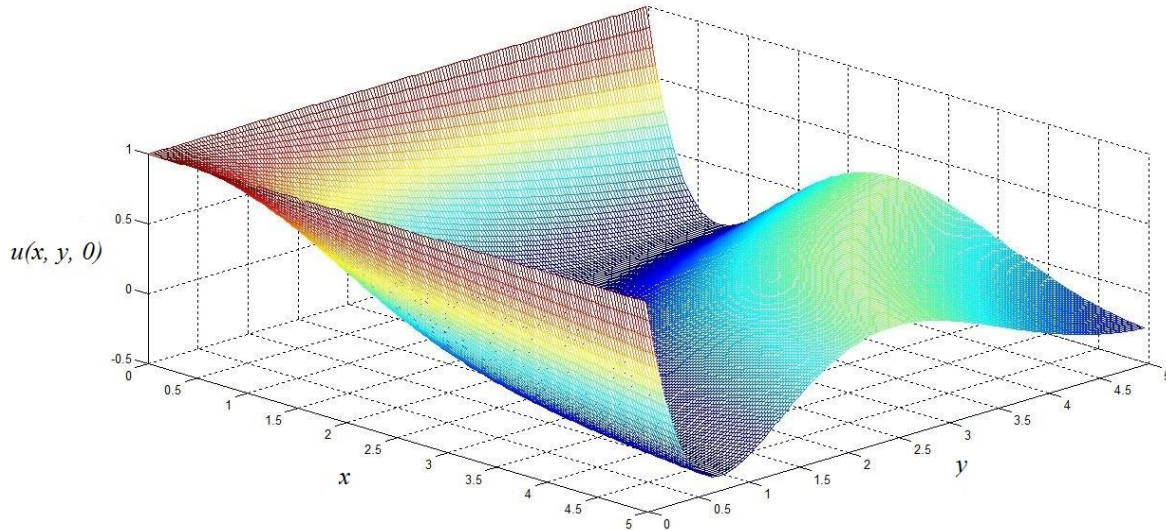


Рис. 1. График начального условия $u(x, y, 0)$ уравнения (1) при $A_0 = 1$ и $a_0 = 1$.

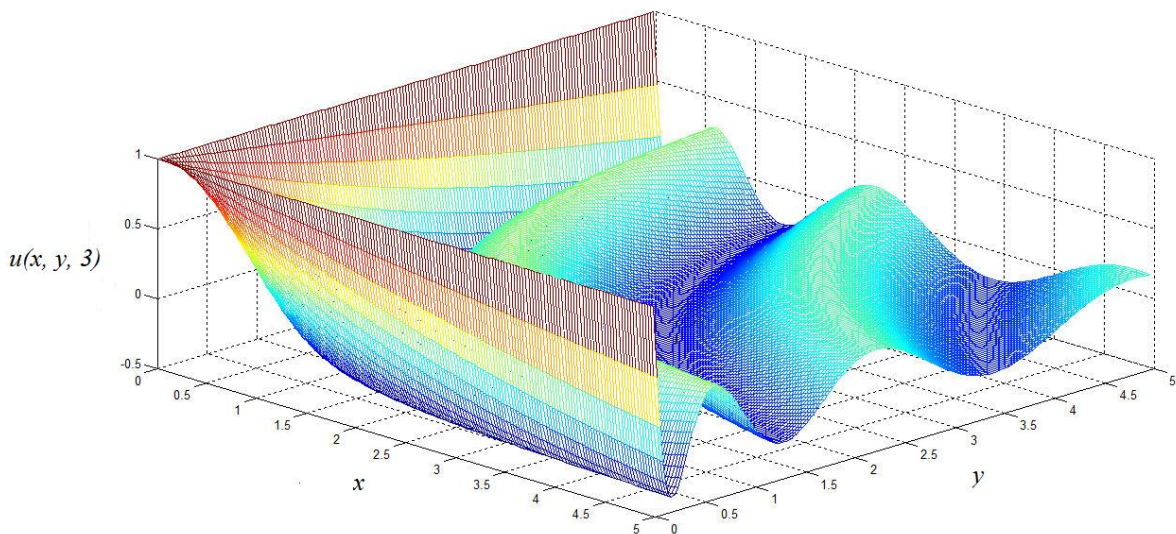


Рис. 2. График решения задачи Коши (1)-(2) при $t = 3$, $A_0 = 1$ и $a_0 = 1$.

Таким образом, при переходе в решении (12) параметром A_0 нулевого значения из ограниченного начального условия (9) за конечное время развивается неограниченное решение, то есть система (1) в своём поведении демонстрирует некоторое сходство с фазовым переходом второго рода [5] или с бифуркацией Андронова-Хопфа [6].

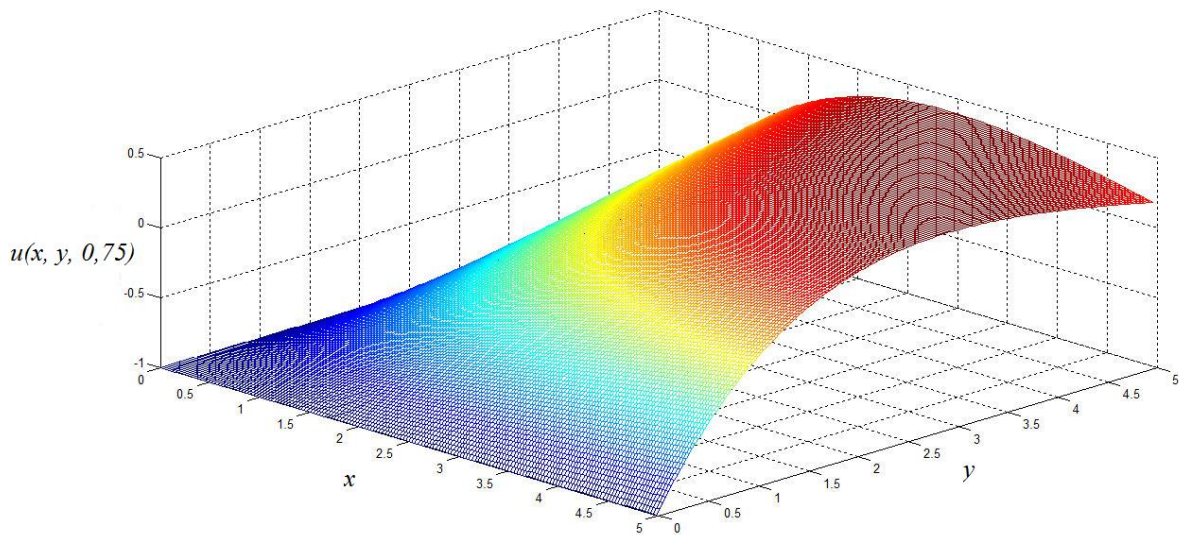


Рис. 3. График решения задачи Коши (1)-(2) при $t = 0,75$ и $A_0 = -1$ и $a_0 = 1$.

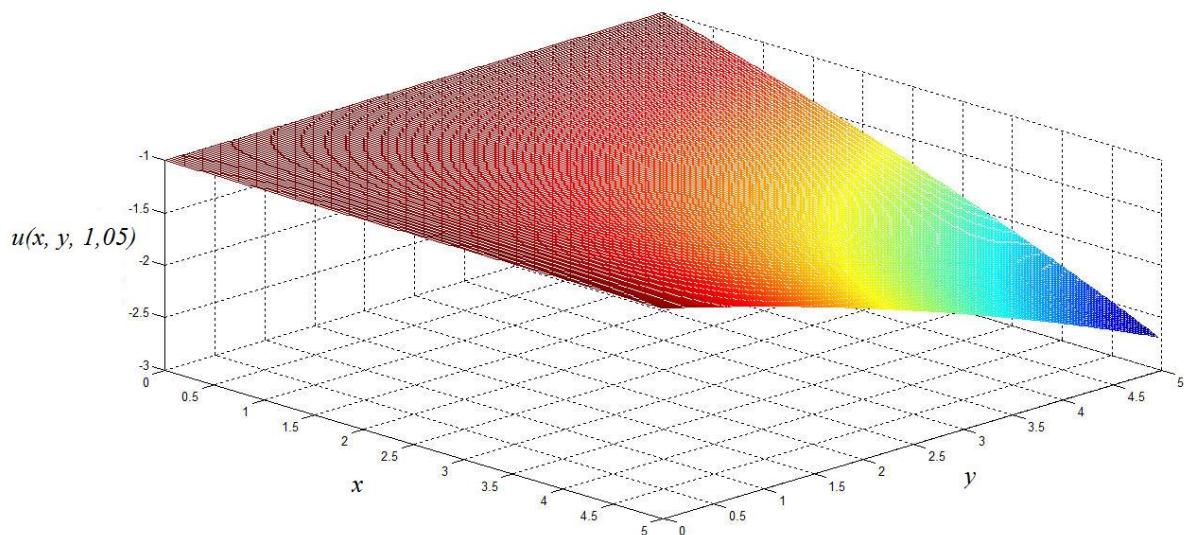


Рис. 4. График решения задачи Коши (1)-(2) при $t = 1,05$ и $A_0 = -1$, $a_0 = 1$.

В заключение необходимо отметить, что если точное решение $u(x, y, t)$ задачи Коши (1)-(2) из каких-либо соображений известно, то двойная свёртка лапласовского типа начального условия (2) самого с собой может быть вычислена по формуле:

$$\int_0^x \int_0^y u_0(x - \xi, y - \eta) u_0(\xi, \eta) \cdot d\xi d\eta = - \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad (13)$$

а при известной функции (5) применение двойного преобразования Лапласа по переменным x и y к левой части формулы (13) может привести к пополнению таблиц преобразований Лапласа по двум переменным.

В частности, подставляя в соотношение (13) функции (9) и (12), найдём:

$$\int_0^x \int_0^y J_0(2\sqrt{a_0(x-\xi)(y-\eta)}) \cdot J_0(2\sqrt{a_0\xi\eta}) \cdot d\xi d\eta = \sqrt{\frac{xy}{a_0}} J_1(2\sqrt{a_0xy}). \quad (14)$$

Наконец, с помощью выражения (10), взятого при $A_0=1$, из формулы (14) без вычислений можно получить, что:

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{xy}{a_0}} \cdot J_1(2\sqrt{a_0xy}) \cdot \exp(-p \cdot x - q \cdot y) \cdot dx dy = \frac{1}{(pq + a_0)^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ефимов Г. В. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. – М.: Наука, 1977. – 367 с.
2. Учайкин В. В. Метод дробных производных. – Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
3. Алёшин С. В., Глызин С. Д., Кащенко С. А. Особенности динамики уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова с отклонением по пространственной переменной // Моделирование и анализ информационных систем. – 2015. – Т. 22, № 5. – С. 609–628.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 179 с.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Часть 1. – М.: Наука, 1976. – 584 с.
6. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 / пер. с англ. В. А. Осотовой. — М.; Ижевск: НИЦ «РХД», ИКИ, 2009. – 548 с.