

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА

FUNDAMENTALS OF RELIABILITY AND QUALITY ISSUES

УДК 004.85;629.053

doi: 10.21685/2307-4205-2025-3-1

МАШИННОЕ ОБУЧЕНИЕ НА ОСНОВЕ СИМВОЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ ДЛЯ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО СИНТЕЗА УНИВЕРСАЛЬНЫХ СИСТЕМ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ

А. И. Дивеев¹, А. Д. Барабаш²

^{1, 2} Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, Москва, Россия

¹ Инженерная академия Российского университета дружбы народов, Москва, Россия
¹ aidiveev@mail.ru, ² artew44@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача оптимального управления в расширенной постановке, ориентированной на обеспечение реализуемости решения в реальных условиях эксплуатации. *Материалы и методы.* Для достижения высокой точности и устойчивости движения объекта управления предлагается синтезировать универсальную систему стабилизации, способную обеспечивать надежное следование по траекториям из широкого класса, даже при наличии внешних воздействий и неопределенностей модели. Представлена концепция расширенной модели объекта управления, включающей как сам объект с системой стабилизации, так и эталонную модель для генерации оптимальной траектории. Показано, что при использовании такой структуры возможно применение классических методов оптимального управления для получения управляющей функции как функции времени, при этом достигается высокая степень соответствия движения объекта запланированной траектории при сохранении устойчивости и точности управления. Для синтеза универсальной системы стабилизации применяется машинное обучение на основе символьной регрессии, что позволяет формализовать процесс построения управляющих функций и исключить субъективные ошибки, характерные для ручного проектирования. *Результаты и выводы.* Эффективность предложенного подхода подтверждается вычислительным примером управления пространственным движением группы квадрокоптеров – типичного представителя сложных инженерных систем с высокими требованиями к надежности, маневренности и безопасности.

Ключевые слова: машинное обучение, символьная регрессия, система стабилизации движения, управление, синтез, модель, оптимальная траектория, точность управления

Для цитирования: Дивеев А. И., Барабаш А. Д. Машинное обучение на основе символьной регрессии для автоматизированного синтеза универсальных систем стабилизации движения // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 3. С. 5–16. doi: 10.21685/2307-4205-2025-3-1

MACHINE LEARNING BASED ON SYMBOLIC REGRESSION FOR AUTOMATED SYNTHESIS OF UNIVERSAL MOTION STABILIZATION SYSTEMS

A.I. Diveev¹, A.D. Barabash²

^{1, 2} Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹ Engineering Academy of the People's Friendship University of Russia, Moscow, Russia

¹ aidiveev@mail.ru, ² artew44@gmail.com

Abstract. *Background.* This study considers an optimal control problem in an extended formulation, aimed at ensuring the feasibility of the solution under real-world operating conditions. *Materials and methods.* To achieve high accuracy and stability of the controlled plant's motion, it is proposed to synthesize a universal stabilization system capable of reliably following a wide range of trajectories, even in the presence of external influences and model uncertainties. The concept of an extended model of the controlled plant is presented, including both the plant itself with the stabilization system and a reference model for generating the optimal trajectory. It is shown that using such a structure, classical optimal control methods can be applied to obtain the control function as a function of time, achieving a high degree of conformity between the plant's motion and the planned trajectory while maintaining stability and control accuracy. To synthesize the universal stabilization system, machine learning based on symbolic regression is used, which allows for the formalization of the process of constructing control functions and eliminates the subjective errors typical of manual design. *Results and conclusions.* The effectiveness of the proposed approach is confirmed by a computational example of controlling the spatial motion of a group of quadcopters – a typical example of complex engineering systems with high requirements for reliability, maneuverability, and safety.

Keywords: machine learning, symbolic regression, motion stabilization system, control, synthesis, model, optimal trajectory, control accuracy

For citation: Diveev A.I., Barabash A.D. Machine learning based on symbolic regression for automated synthesis of universal motion stabilization systems. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2025;(3):5–16. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-3-1

Введение

Традиционный подход к решению задачи оптимального управления предполагает ее первоначальное решение в классической постановке, с последующим получением управляющей функции, зависящей исключительно от времени. Далее эта функция интегрируется в модель объекта управления для определения оптимальной траектории. Только после этого разрабатывается система стабилизации движения объекта вдоль найденной оптимальной траектории.

Однако подобный подход имеет существенные ограничения с точки зрения обеспечения надежности и качества функционирования сложных инженерных систем. Во-первых, система стабилизации движения неизбежно изменяет динамические свойства объекта, что приводит к несоответствию между моделью, использованной при расчете оптимального управления, и реальной системой, действующей с учетом стабилизации. В результате оптимальное управление, полученное без учета стабилизации, становится неэффективным, а в ряде случаев и нестабильным. Во-вторых, одной системе управления приходится одновременно обеспечивать как следование по оптимальной траектории, так и ее стабилизацию. При этом, например, при быстродействующих режимах компоненты вектора управления могут достигать граничных значений, не оставляя ресурса для корректировки траектории, что снижает устойчивость системы к внешним воздействиям и непредсказуемым отклонениям. В-третьих, хотя современные вычислительные средства позволяют решать задачу оптимального управления в реальном времени, задача синтеза стабилизирующего управления остается ресурсоемкой и практически не может быть решена оперативно в процессе функционирования системы, что критично для обеспечения надежности в динамических условиях [1, 2].

В работе [3] представлены различные методы решения расширенной задачи оптимального управления. Метод синтезированного управления предполагает предварительное решение задачи синтеза стабилизирующей системы до поиска оптимального управления, что обеспечивает более согласованную и устойчивую работу всей системы в реальных условиях. Качество полученного решения напрямую зависит от степени устойчивости объекта в пространстве состояний. Альтернативный подход – синтез управления вдоль заранее найденной траектории – требует повторного анализа и построения стабилизирующей функции для каждой новой траектории, что затрудняет масштабируемость и снижает надежность при множественных сценариях.

В теории управления накоплен значительный научный опыт построения систем стабилизации движения по заданной траектории [4–11]. Однако основным недостатком большинства таких решений остается ручная настройка, опирающаяся на экспертные знания: исследователь анализирует модель, определяет каналы управления и вручную встраивает регуляторы. Подобный подход хотя и способен обеспечить высокое качество управления при точной настройке, не масштабируется и не обеспечивает требуемый уровень автоматизации и воспроизводимости в условиях современных инженерных требований.

Современные задачи управления в сложных системах требуют полной автоматизации процесса построения надежных управляющих воздействий. В данной работе эта цель достигается путем применения машинного обучения на основе символьной регрессии. Символьная регрессия позволяет автоматически находить аналитическое выражение для функции стабилизации, минимизирующей

отклонение от заданной траектории. В отличие от ряда предыдущих работ, где стабилизирующие системы строились отдельно для каждой траектории, здесь предлагается синтез универсальной системы стабилизации, способной работать с различными управляющими функциями и обеспечивать устойчивость и повторяемость поведения системы при широком классе сценариев.

Полученная универсальная стабилизация интегрируется в модель объекта, образуя расширенную математическую модель, в которой эталонная подсистема отвечает за генерацию оптимальной траектории, а стабилизирующая подсистема – за надежное движение вдоль этой траектории. Благодаря такому разбиению задача оптимального управления решается в классической форме, с получением управляющей функции от времени, а требования к устойчивости, надежности и реализуемости управления выполняются на этапе синтеза стабилизации. Это позволяет повысить общую надежность системы управления и обеспечить ее применимость в инженерных задачах, где устойчивость, предсказуемость и автоматизация критичны.

Расширенная динамическая модель управляемого объекта

Расширенная модель необходима для эффективной реализации решения задачи оптимального управления. В связи с этим, прежде всего, представим постановку задачи оптимального управления в ее классической форме.

Постановка задачи оптимального управления

Представление математической модели управляемого объекта:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \quad (1)$$

В контексте математической модели объекта управления определяются следующие ключевые элементы: \mathbf{x} – это вектор состояния объекта управления, где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Этот вектор описывает текущее состояние системы в n -мерном пространстве; \mathbf{u} – вектор управления, принадлежащий подмножеству U из \mathbb{R}^m , т.е. $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^m$.

U представляет собой компактное множество, которое, как правило, определяет ограничения на управляющие воздействия

$$\mathbf{u}^- \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^+. \quad (2)$$

В данном выражении \mathbf{u}^- и \mathbf{u}^+ обозначают, соответственно, векторы нижних и верхних ограничений, накладываемых на управляющие воздействия.

Определяется исходное (3) и терминальное (4) состояние системы:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = [x_1^0 \dots x_n^0]^T, \quad (3)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f = [x_1^f \dots x_n^f]^T. \quad (4)$$

В данной постановке задачи t_f обозначает момент достижения конечного состояния (4). Как правило, точное значение этого терминального времени заранее не задается, но оно ограничено сверху, т.е. $t_f \leq t_f^+$, где t_f^+ представляет собой заданное предельное время управляющего процесса.

Определен критерий качества:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \rightarrow \min. \quad (5)$$

Необходимо определить управляющую функцию, которая зависит от времени:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t) \in U, \quad t \in [0; t_f]. \quad (6)$$

После подстановки управляющей функции (6) в математическую модель объекта управления (1) формируется следующая система дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}(t)). \quad (7)$$

Полученная система будет обладать частным решением $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$, исходящим из заданного начального состояния (3). Это решение должно обеспечивать достижение конечного состояния (4) с оптимальным значением заданного критерия качества (5).

Расширенная модель

Множество начальных состояний объекта задается как совокупность точек, соответствующих этим состояниям. Частное решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^0)$ математической модели объекта управления (7), полученное при использовании найденной оптимальной управляющей функции в правой части, представляет собой оптимальную траекторию в пространстве состояний. Для обеспечения движения объекта управления по этой оптимальной траектории необходимо разработать систему стабилизации движения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \in U, \quad (8)$$

где \mathbf{x}^* – оптимальная траектория.

Для разработки системы стабилизации (8) требуется решить задачу синтеза управления. Рассмотрим далее постановку этой задачи применительно к системе стабилизации движения объекта по заданной траектории.

Математическая модель объекта управления (1) является исходной. Также заданы ограничения на управление (2).

Множество начальных состояний представлено как совокупность исходных точек в пространстве состояний:

$$X_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,K}\}, \quad (9)$$

где K – совокупность исходных состояний в рамках определенного множества.

Терминальное состояние (4) определено. Заданная траектория удовлетворяет следующему условию:

$$\mathbf{x}^*(t^+) = \mathbf{x}^f. \quad (10)$$

Требуется разработать такую систему управления, которая способна стабилизировать движение объекта вдоль всех заданных программных траекторий, независимо от начальных условий. При этом синтезируемая система должна обеспечивать минимизацию определенного критерия качества:

$$J_1 = \sum_{i=0}^K \int_0^{t_{f,i}} \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i}) dt + p_1 \mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i}) \rightarrow \min_{\mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})}. \quad (11)$$

В данном выражении p_1 представляет собой весовой коэффициент. Величина $t_{f,i}$ обозначает время достижения конечного состояния (4) из начального состояния \mathbf{x} . Это время определяется следующим уравнением:

$$t_{f,i} = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ и } \mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i}) \leq \varepsilon, \\ t^+ & \text{в других случаях, } i \in \{1, \dots, K\}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь ε представляет собой заданное малое положительное значение. Решение задачи синтеза управления с использованием множества траекторий и критерия качества позволяет разработать универсальную систему стабилизации движения объекта управления, способную поддерживать движение вдоль любых траекторий, принадлежащих определенному классу.

Предположим, что оптимальная траектория заранее неизвестна. В таком случае становится возможным построить универсальную систему стабилизации движения, ориентированную на траектории из некоторого класса. Для этого необходимо сформировать набор разнообразных траекторий и затем синтезировать такую систему стабилизации, которая обеспечит устойчивое движение вдоль любой траектории из заданного набора.

Множество траекторий определяется следующим образом:

$$T = \{\mathbf{x}^{*,1}, \dots, \mathbf{x}^{*,S}\}. \quad (13)$$

Здесь S обозначает общее количество траекторий в заданном множестве.

Для разработки универсальной системы стабилизации движения необходимо модифицировать функционал (13). В этот функционал требуется интегрировать компонент, отвечающий за стабилизацию относительно всех заданных траекторий. Таким образом, новый критерий качества будет иметь следующую форму:

$$J_2 = \sum_{i=0}^K \sum_{j=1}^S \left(\int_0^{t_i} \dot{\mathbf{x}}^{*,j}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}^{0,i}) dt + p_1 \mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i}) \right) \rightarrow \min_{\mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})}. \quad (14)$$

Решение задачи синтеза с использованием заданного множества траекторий и критерия качества (14) позволяет получить систему стабилизации движения объекта управления, способную поддерживать движение вдоль любой траектории, принадлежащей определенному классу.

Расширенная математическая модель объекта управления состоит из двух отдельных математических моделей:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^* &= f(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}), \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})). \end{aligned} \quad (15)$$

Первая система является эталонной моделью, предназначенной для генерации целевых траекторий.

Вторая система представляет собой модель объекта управления, оснащенную системой стабилизации движения, которая обеспечивает следование по траекториям, сгенерированным эталонной моделью.

Задача оптимального управления, использующая расширенную модель объекта управления, включает в себя саму расширенную модель (15), начальное состояние (3), терминальное состояние (4) и критерий качества (5).

В рамках этой задачи необходимо определить управляющую функцию в форме (6) для эталонной модели, т.е. для первой подсистемы расширенной модели. При этом расчет значения критерия качества выполняется с использованием вектора состояния объекта управления, полученного из второй подсистемы расширенной модели.

Применение символьной регрессии в машинном обучении для задач управления

Для решения задачи синтеза управления в автоматическом режиме особенно перспективным является применение символьной регрессии. Этот метод позволяет формализовано и воспроизводимо находить математическое выражение требуемой функции на основе заданного критерия, что критично для обеспечения надежности при разработке управляющих воздействий в сложных инженерных системах. Символьная регрессия представляет собой универсальный подход к аппроксимации функций, позволяющий получать устойчивые решения, не зависящие от наличия обучающей выборки. В отличие от нейросетевых методов, символьная регрессия требует лишь четкой формулировки критерия качества, что повышает прозрачность, интерпретируемость и доверие к полученным результатам – важные аспекты при внедрении в ответственные технические системы.

Основная идея метода заключается в кодировании математического выражения – функции в специализированную кодовую структуру, после чего осуществляется поиск оптимального варианта в пространстве кодов с использованием специально адаптированного генетического алгоритма. Алгоритм использует модифицированную операцию пересечения (crossing-over), обеспечивающую корректность и структурную целостность получаемых выражений. Это гарантирует надежность работы метода при многократных итерациях и увеличивает устойчивость итоговых решений к стохастическим и численным эффектам.

Первым и наиболее известным методом символьной регрессии является генетическое программирование [12], в котором функция представляется в виде вычислительного графа. В настоящее время разработан широкий спектр подходов, насчитывающий более двадцати различных алгоритмов. В данной работе применяется метод сетевого оператора, использующий ориентированный граф и принцип малых вариаций базового решения. Такой подход позволяет эффективно исследовать окрестность базовой функции и найти устойчивое решение, минимизирующее заданный функционал, при этом значительно сокращая вычислительные затраты.

Машинное обучение управлению с использованием символьной регрессии выполняется в полностью автоматическом режиме, что принципиально повышает надежность процесса проектирования и снижает зависимость от человеческого фактора. Исследователю не требуется анализировать модель объекта управления или вручную формировать каналы воздействия. Достаточно указать участок математической модели, где требуется управляющая функция, и алгоритм находит ее аналитическую форму, удовлетворяющую заданным требованиям. Это обеспечивает воспроизводимость и масштабируемость решений в инженерной практике, особенно при работе с системами, предъявляющими повышенные требования к надежности и качеству управления.

Более подробное описание решения задачи синтеза управления методом символьной регрессии представлено в работе [13].

Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу оптимального управления пространственным движением группы, состоящей из четырех идентичных квадрокоптеров. Математическая модель каждого объекта управления описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^j &= x_4, \\ \dot{x}_2^j &= x_5^j, \\ \dot{x}_3^j &= x_6^j, \\ \dot{x}_4^j &= u_4^j \left(\sin(u_3^j) \cos(u_2^j) \cos(u_1^j) + \sin(u_1^j) \sin(u_2^j) \right), \\ \dot{x}_5^j &= u_4^j \cos(u_3^j) \cos(u_1^j) - g, \\ \dot{x}_6^j &= u_4^j \left(\cos(u_2^j) \sin(u_1^j) - \cos(u_1^j) \sin(u_2^j) \sin(u_3^j) \right),\end{aligned}\tag{16}$$

где g – ускорение свободного падения, $g = 9,80665$, $j = 1, \dots, N$; N – число квадрокоптеров в системе, $N = 4$.

На значения вектора управления каждого квадрокоптера наложены следующие ограничения:

$$\mathbf{u}^- \leq \mathbf{u}^j \leq \mathbf{u}^+ = 10, \quad j = 1, \dots, N,\tag{17}$$

где

$$\mathbf{u}^- = [-\pi/12 \ -\pi \ -\pi/12 \ 0]^T,\tag{18}$$

$$\mathbf{u}^+ = [\pi/12 \ \pi \ \pi/12 \ 12]^T.\tag{19}$$

Заданы начальные состояния:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1(0) &= [050000]^T, \\ \mathbf{x}^2(0) &= [1050000]^T, \\ \mathbf{x}^3(0) &= [0510000]^T, \\ \mathbf{x}^4(0) &= [10510000]^T.\end{aligned}\tag{20}$$

Заданы терминальные состояния:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^1(t_f) &= [10510000]^T, \\ \mathbf{x}^2(t_f) &= [0510000]^T,\end{aligned}\tag{21}$$

$$\mathbf{x}^3(t_f) = [1050000]^T,$$

$$\mathbf{x}^4(t_f) = [050000]^T.$$

Также заданы фазовые ограничения:

$$\Phi_i(\mathbf{x}^j) = r_i - \sqrt{(x_{1,i} - x_1^j)^2 + (x_{3,i} - x_3^j)^2} \leq 0, \quad (22)$$

где $i = 1, \dots, M$, M – количество фазовых ограничений, $M = 4$, $j = 1, \dots, N$, $N = 4$, $x_{1,1} = 2$, $x_{2,1} = 2$, $x_{3,1} = 2$, $x_{1,2} = 2$, $x_{2,2} = 2$, $x_{3,2} = 2$, $x_{1,3} = 8$, $x_{2,3} = 2$, $x_{3,3} = 2$, $x_{1,4} = 2$, $x_{2,4} = 2$, $x_{3,4} = 8$, $r_1 = 1,5$, $r_2 = 1,5$, $r_3 = 1,5$, $r_4 = 1,5$.

Динамические фазовые ограничения определяются как условия предотвращения столкновений между квадрокоптерами:

$$\chi(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j) = r_0 - \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k^i - x_k^j)^2} \leq 0, \quad (23)$$

где $i = 1, \dots, N$, $N - 1$, $j = i + 1, \dots, N$, $r_0 = 1,5$.

Задан критерий качества управления:

$$J_3 = t_f + p_1 \int_0^{t_f} \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^N \rho_5(\chi(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^j)) dt \rightarrow \min_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N}, \quad (24)$$

где p_1, p_2 – весовые коэффициенты, $p_1 = 3$, $p_2 = 3$; t_f – величина, рассчитываемая из уравнения (12), с $\varepsilon = 0,05$, $t^+ = 6,4$; $\rho_5(z)$ – функция Хевисайда:

$$\rho_5(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (25)$$

Изначально задача оптимального управления была решена для одного квадрокоптера, начиная с заданного начального состояния и с учетом дополнительных фазовых ограничений. При этом модель квадрокоптера рассматривалась в форме (16), а начальные условия задавались в уравнениях (20).

Оптимальное управление аппроксимировалось в форме кусочно-линейной функции, зависящей от времени:

$$u_i = \begin{cases} u_i^+, & \text{если } v_i > u_i^+, \\ u_i^-, & \text{если } v_i < u_i^-, \\ v_i & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (26)$$

где $i = 1, \dots, m = 4$,

$$v_i(t) = d_{i+(j-1)m} + (d_{i+jm} - d_{i+(j-1)m}) \frac{t - j\Delta t}{\Delta t}, \quad (27)$$

$\Delta t = 0,4$, $i = 1, \dots, m = 4$, $j = 1, \dots, D$, D – количество интервалов,

$$D = t^+ / \Delta t = 6,4 / 0,4 = 16. \quad (28)$$

В задаче оптимального управления необходимо найти $D + 1 = 17$ значения для каждого управления $i = 1, \dots, m = 4$, которое в совокупности определяется $(D + 1)m = 17 \cdot 4 = 68$ параметрами

$$\mathbf{d} = [d_1 \dots d_{68}]^T. \quad (29)$$

Для решения задачи оптимального управления был применен гибридный эволюционный алгоритм [14], в результате чего было получено два оптимальных решения. В дальнейшем была решена

задача синтеза управления и найдена управляющая функция в форме (8). Для решения этой задачи синтеза использовался метод сетевого оператора. В результате его работы было получено следующее математическое выражение для системы стабилизации:

$$h_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = \begin{cases} u_i^+, & \text{если } \tilde{h}_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \geq u_i^+, \\ u_i^-, & \text{если } \tilde{h}_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \leq u_i^-, \\ \tilde{h}_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (30)$$

где $i = 1, \dots, m = 4$,

$$\tilde{h}_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = \rho_1(F + \rho_1(q_3)), \quad (31)$$

$$\tilde{h}_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = \tilde{h}_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) - \tilde{h}_1^3(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}), \quad (32)$$

$$\tilde{h}_3(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = \rho_4(A + \rho_1(F + \rho_2(q_3))) + A^{-1} + \cos(G) + \rho_2(H), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_4(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = & \exp(\tilde{h}_3(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})) + \ln(|\tilde{h}_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})|) + \\ & + \operatorname{sgn}(A + \rho_1(F + \rho_2(q_3)))\sqrt{A + \mu(F + \rho_2(q_3))} + \rho_4(A) + \operatorname{sgn}(C) + \\ & + \arctan(W + \tanh(C)) + \arctan(D) + \rho_3(q_5(x_5^* - x_5)) + \exp(q_2(x_2^* - x_2)), \end{aligned} \quad (34)$$

$$A = B + \tanh(W) + \exp(E) + q_6 - q_6^3,$$

$$B = V + \operatorname{sgn}(W)\sqrt{|W|} + q_2^3,$$

$$V = \exp(W + \tanh(C)) + \cos(q_6(x_6^* - x_6)),$$

$$W = C + D + \sin(H),$$

$$C = D(F + \rho_2(q_3))\arctan(E) - G,$$

$$D = E + \sqrt[3]{G} + \operatorname{sgn}(x_5^* - x_5) + (x_2^* - x_2)^3,$$

$$E = \rho_2(F) + G^3 + H + \rho_5(q_5(x_5^* - x_5)) + (x_5^* - x_5)^2,$$

$$F = q_6(x_6^* - x_6) + q_3(x_3^* - x_3),$$

$$G = \sin(q_6(x_6^* - x_6)) + q_5(x_5^* - x_5) + \sqrt[3]{q_2(x_2^* - x_2)} + \cos(q_1) + \rho_6(x_2^* - x_2),$$

$$H = q_4(x_4^* - x_4) + q_1(x_1^* - x_1) + \sin(q_5),$$

$$\rho_1(z) = \begin{cases} z, & \text{если } |z| < 1, \\ \operatorname{sgn}(z) & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

$$\rho_2(z) = \operatorname{sgn}(z)\ln(|z| + 1),$$

$$\rho_3(z) = \operatorname{sgn}(z)\exp(|z| - 1),$$

$$\rho_4(z) = \operatorname{sgn}(z)\exp(-|z|),$$

$$q_1 = 12,26636, \quad q_2 = 3,85864, \quad q_3 = 6,48047, \quad q_4 = 14,10620, \quad q_5 = 11,74170, \quad q_6 = 2,140639.$$

На прилагаемых рисунках (рис. 1–4) представлены проекции оптимальных траекторий (29). Также показаны реальные пути квадрокоптеров в горизонтальной плоскости, полученные при работе системы стабилизации [15].

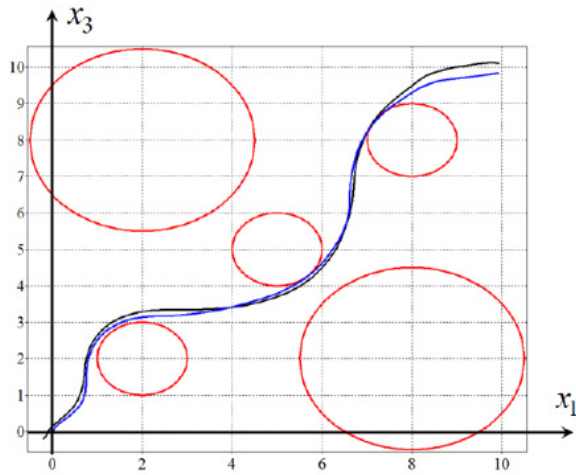


Рис. 1. Проекция первой оптимальной траектории (синяя линия) и реальной траектории движения объекта (черная линия) на горизонтальной плоскости

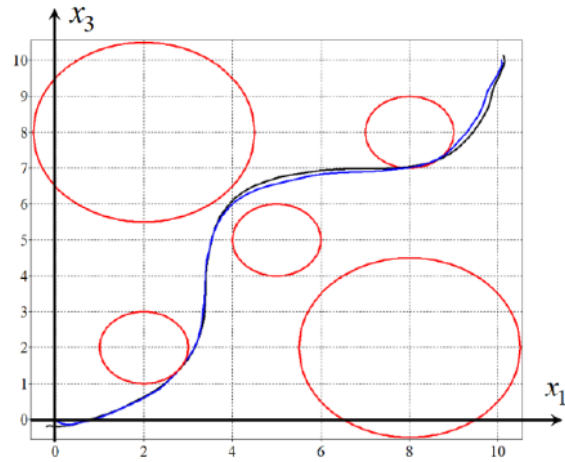


Рис. 2. Проекция второй оптимальной траектории (синий) и соответствующей ей реальной траектории движения (черный) на горизонтальную плоскость

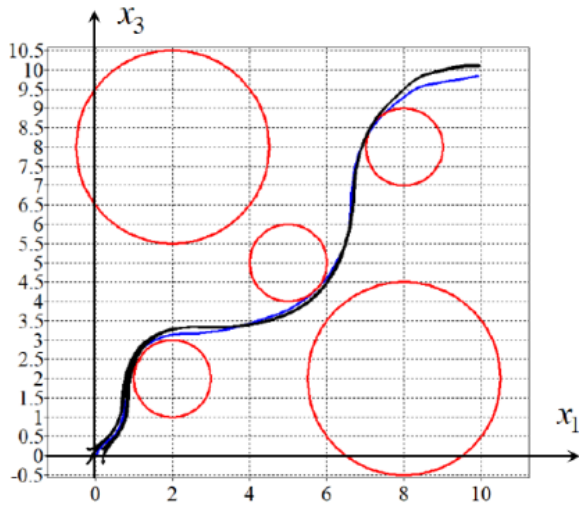


Рис. 3. Проекция первой оптимальной траектории (синий) и реальных траекторий движения (черный) на горизонтальной плоскости из восьми начальных состояний

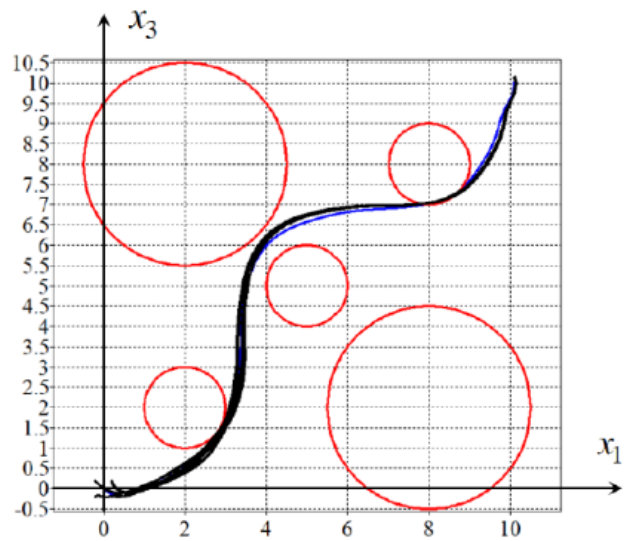


Рис. 4. Проекция второй оптимальной траектории (синий) и фактических траекторий (черный) на горизонтальную плоскость из восьми начальных состояний

Для оценки эффективности разработанной системы стабилизации (30) были выполнены симуляции управляющей системы с введением возмущений начальных состояний для двух оптимальных траекторий. Результаты моделирования представлены на рис. 3 и 4.

На основе этой системы стабилизации была построена расширенная математическая модель объекта управления для исходной задачи оптимального управления:

$$\dot{x}_1^{j,*} = \dot{x}_4^{j,*},$$

$$\dot{x}_2^{j,*} = \dot{x}_5^{j,*},$$

$$\dot{x}_3^{j,*} = \dot{x}_6^{j,*},$$

$$\dot{x}_4^{j,*} = u_4^j \left(\sin(u_3^j) \cos(u_2^j) \cos(u_1^j) + \sin(u_1^j) \sin(u_2^j) \right), \quad (35)$$

$$\dot{x}_5^{j,*} = u_4^j \cos(u_3^j) \cos(u_1^j) \cos(u_1^j) - g,$$

$$\dot{x}_6^{j,*} = u_4^j \left(\cos(u_2^j) \sin(u_1^j) - \cos(u_1^j) \sin(u_2^j) \sin(u_3^j) \right),$$

$$\dot{x}_1^j = \dot{x}_4^j,$$

$$\dot{x}_2^j = \dot{x}_5^j,$$

$$\dot{x}_3^j = \dot{x}_6^j,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4^j = h_4 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) & \left(\sin \left(h_3 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \cos \left(h_2 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \cos \left(h_1 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) + \right. \\ & \left. + \sin \left(h_1 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \sin \left(h_2 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \right), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\dot{x}_5^j = h_4 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \cos \left(h_3 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \cos \left(h_1 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) - g,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6^j = h_4 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) & \left(\cos \left(h_2 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \sin \left(h_1 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) - \cos \left(h_1 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \times \right. \\ & \left. \times \sin \left(h_2 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \sin \left(h_3 \left(\mathbf{x}^{j,*} - \mathbf{x}^j \right) \right) \right), \end{aligned}$$

Как показывают результаты моделирования, решение задачи оптимального управления с использованием расширенной модели объекта управления позволяет получить реализуемую и надежную управляющую функцию, которая может быть непосредственно внедрена в реальный объект [16]. Такой подход обеспечивает не только соответствие расчетной и физической моделей, но и повышает устойчивость и качество функционирования системы управления в условиях реальной эксплуатации, включая возможные внешние возмущения и модельные неопределенности.

Заключение

В статье представлено решение задачи оптимального управления в классе реализуемых управляющих функций, что особенно важно для повышения надежности и функциональной устойчивости инженерных систем. Для получения такого решения в постановку задачи оптимального управления была интегрирована расширенная модель объекта, включающая эталонную подсистему генерации траектории и модель объекта управления с универсальной системой стабилизации, обеспечивающей точное и устойчивое движение по оптимальной траектории. Такое структурное разбиение позволяет гарантировать воспроизводимость поведения системы и соответствие управляющих воздействий реальным условиям эксплуатации.

Для синтеза системы стабилизации предложено использовать машинное обучение управлению на основе символьной регрессии, что обеспечивает автоматизацию процесса проектирования и высокое качество получаемых решений без привлечения ручной настройки. Это особенно ценно для критичных к надежности систем, работающих в условиях неопределенности и ограниченного ресурса вычислений.

Список литературы

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. Нью-Йорк ; Лондон ; Париж ; Монтре ; Токио : Gordon and Breach Science Publishers, 1985. Т. 4. 360 с.
2. Годунов А. И., Ерофеев М. В., Мельничук А. И. [и др.]. Информационное поле обнаружения малогабаритных беспилотных летательных аппаратов в пространстве на основе нейронных сетей // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 4. С. 5–14.
3. Воронин Е. А. Применение технологий машинного обучения в задачах оценки и обеспечения надежности технических систем с учетом безопасности их работы // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 4. С. 75–84.

4. Diveev A. Refined Optimal Control Problem and Its Solution Using Symbolic Regression // Lecture Notes in Networks and Systems. 2022. T. 507. P. 294–305.
5. Diveev A., Barabash A. The Extended Optimal Control Problem and Numerical Techniques of its Solving // Proceedings of 2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). Rome, Italy, 2023.
6. Samir A., Hammad A., Hafez A., Mansour H. Quadcopter Trajectory Tracking Control using State-Feedback Control with Integral Action // International Journal of Computer Applications. 2017. Vol. 168. P. 1–7.
7. Walsh G., Tilbury D., Sastry S., [et al.]. Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39. P. 216–222.
8. Uddin N. A Robot Trajectory Tracking Control System Design Using Pole Domination Approach // Proceedings of IEEE 9th Annual Information Technology, Electronics and Mobile Communication Conference (IEMCON). Vancouver, Canada, 2018. P. 506–512.
9. Pamosoaji A. K. Trajectory Tracking Control Strategy using Co-Reference for Rear-Steered Vehicle // Proceedings of 3rd International Conference on Control and Robotics Engineering (ICCRE). Nagoya, Japan, 2018. P. 74–78.
10. Andreev A., Peregodova O., Sutykina K., Filatkina E. On Global Output Feedback Trajectory Tracking Control of a Wheeled Mobile Robot // Proceedings of 23rd International Conference on Mechatronics Technology (ICMT). Salerno, Italy, 2019. P. 1–5.
11. Yu X., Zhu W., Xu L. Real-time Motion Planning and Trajectory Tracking in Complex Environments based on Bezier Curves and Nonlinear MPC Controller // Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Hefei, China, 2020. P. 1540–1546.
12. Zhao H., Su G., Yang. Anti-collision Trajectory Planning and Tracking Control based on MPC and Fuzzy PID Algorithm // Proceedings of the 2020 4th CAA International Conference on Vehicular Control and Intelligence (CVCII). Hangzhou, China, 2020. P. 613–618.
13. Su T., Liang X., He G. [et al.]. Robust Trajectory Tracking of Delta Parallel Robot Using Sliding Mode Control // Proceedings of the IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI). Xiamen, China, 2019. P. 508–512.
14. Koza J. R. Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection. MIT Press, 1992. 819 p.
15. Diveev A. I., Shmalko E. Yu. Machine Learning Control by Symbolic Regression. Springer, Cham, Switzerland, 2021. 156 p.
16. Diveev A. I. Hybrid Evolutionary Algorithm for Optimal Control Problem // Lecture Notes in Networks and Systems. 2023. T. 543 LNNS. P. 726–738.

References

1. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov = Mathematical theory of optimal processes*. New York; London; Parizh; Montre; Tokio: Gordon and Breach Science Publishers, 1985;4:360. (In Russ.)
2. Godunov A.I., Yerofeyev M.V., Mel'nichuk A.I. et al. Information field of detection of small-sized unmanned aerial vehicles in space based on neural networks. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2024;(4):5–14. (In Russ.)
3. Voronin E.A. Application of machine learning technologies in the tasks of assessing and ensuring the reliability of technical systems, taking into account the safety of their operation. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2024;(4):75–84. (In Russ.)
4. Diveev A. Refined Optimal Control Problem and Its Solution Using Symbolic Regression. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2022;507:294–305.
5. Diveev A., Barabash A. The Extended Optimal Control Problem and Numerical Techniques of its Solving. *Proceedings of 2023 9th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*. Rome, Italy, 2023.
6. Samir A., Hammad A., Hafez A., Mansour H. Quadcopter Trajectory Tracking Control using State-Feedback Control with Integral Action. *International Journal of Computer Applications*. 2017;168:1–7.
7. Walsh G., Tilbury D., Sastry S. et al. Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1994;39:216–222.
8. Uddin N. A Robot Trajectory Tracking Control System Design Using Pole Domination Approach. *Proceedings of IEEE 9th Annual Information Technology, Electronics and Mobile Communication Conference (IEMCON)*. Vancouver, Canada, 2018:506–512.
9. Pamosoaji A.K. Trajectory Tracking Control Strategy using Co-Reference for Rear-Steered Vehicle. *Proceedings of 3rd International Conference on Control and Robotics Engineering (ICCRE)*. Nagoya, Japan, 2018:74–78.
10. Andreev A., Peregodova O., Sutykina K., Filatkina E. On Global Output Feedback Trajectory Tracking Control of a Wheeled Mobile Robot. *Proceedings of 23rd International Conference on Mechatronics Technology (ICMT)*. Salerno, Italy, 2019:1–5.

11. Yu X., Zhu W., Xu L. Real-time Motion Planning and Trajectory Tracking in Complex Environments based on Bezier Curves and Nonlinear MPC Controller. *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*. Hefei, China, 2020:1540–1546.
12. Zhao H., Su G., Yang. Anti-collision Trajectory Planning and Tracking Control based on MPC and Fuzzy PID Algorithm. *Proceedings of the 2020 4th CAA International Conference on Vehicular Control and Intelligence (CVCI)*. Hangzhou, China, 2020:613–618.
13. Su T., Liang X., He G. et al. Robust Trajectory Tracking of Delta Parallel Robot Using Sliding Mode Control. *Proceedings of the IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. Xiamen, China, 2019:508–512.
14. Koza J.R. *Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection*. MIT Press, 1992:819.
15. Diveev A.I., Shmalko E.Yu. *Machine Learning Control by Symbolic Regression*. Springer, Cham, Switzerland, 2021:156.
16. Diveev A.I. Hybrid Evolutionary Algorithm for Optimal Control Problem. *Lecture Notes in Networks and Systems*. 2023;543 LNNS:726–738.

Информация об авторах / Information about the authors

Асхат Ибрагимович Дивеев

доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук;
руководитель отдела 55,
Управление робототехническими устройствами;
директор робототехнического центра ФИЦ ИУ РАН,
Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 40);
профессор департамента механики и мехатроники,
Инженерная академия
Российского университета дружбы народов
(Россия, г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3)
E-mail: aidiveev@mail.ru

Артём Дмитриевич Барабаш

аспирант,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 40)
E-mail: artew44@gmail.com

Askhat I. Diveev

Doctor of technical sciences, professor, chief researcher,
Federal Research Center "Computer Science
and Control" of the Russian Academy of Sciences,
head of department 55,
Control of Robotic Devices;
Director of the Robot Center of the FRC IU RAS,
Computing Center named after A.A. Dorodnitsyn RAS
(40 Vavilov street, Moscow, Russia);
professor of the department of mechanics
and mechatronics,
Engineering Academy of the People's
Friendship University of Russia
(3 Ordzhonikidze street, Moscow, Russia)

Artem D. Barabash

Postgraduate student,
Federal Research Center "Computer Science
and Control" of the Russian Academy of Sciences
(40 Vavilov street, Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /

The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 15.08.2025

Поступила после рецензирования/Revised 15.09.2025

Принята к публикации/Accepted 30.09.2025