МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ МУЛЬТИРОТОРНОГО БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

В. В. Ильиных¹, С. В. Андреев², А. В. Ключников³, М. С. Чертков⁴

^{1, 2, 3, 4} Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е. И. Забабахина, Снежинск, Россия ^{1, 2, 3, 4} kb2@vniitf.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Беспилотные летательные аппараты (БЛА) активно используются в деятельности человека. При разработке новых БЛА необходимо решить как конструктивные, обликовые задачи, так и программно-алгоритмические, например, разработать алгоритмы управления и навигации. Материалы и методы. При разработке БЛА широко применяется математическое моделирование. Математическое моделирование позволяет исследовать функционирование БЛА как в предусмотренных режимах, так и в аварийных ситуациях, при этом создание физических образцов БЛА не требуется. Результаты и выводы. Предложена математическая модель мультироторного БЛА на примере квадрокоптера, изложены основные аспекты аэродинамики мультироторных БЛА, рассмотрены уравнения движения центра масс и уравнения движения вокруг центра масс квадрокоптера.

Ключевые слова: мультироторный беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, математическое моделирование

Для цитирования: Ильиных В. В., Андреев С. В., Ключников А. В., Чертков М. С. Математическая модель движения мультироторного беспилотного летательного аппарата // Надежность и качество сложных систем. 2025. № 2. С. 34–46. doi: 10.21685/2307-4205-2025-2-4

MATHEMATICAL MODEL OF MOTION OF A MULTIROTOR UNMANNED AERIAL VEHICLE

V.V. Ilyinykh¹, S.V. Andreev², A.V. Klyuchnikov³, M.S. Chertkov⁴

^{1, 2, 3, 4} Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics, Snezhinsk, Russia ^{1, 2, 3, 4} kb2@vniitf.ru

Abstract. *Background*. Unmanned aerial vehicles (UAV) are widely used in present-day reality. When developing UAV new models, solution of both design-and- appearance and program-algorithm problems such as, for example, control and navigation algorithms has to be found. *Materials and methods*. In development of the UAV a mathematical simulation is commonly used. Mathematical simulation enables studying of the UAV's operability both in routine mode and in emergency without producing UAV physical model. *Results and conclusions*. The article proposes a mathematical model of multirotor UAV using a quadcopter as an example, basic aspects of the multirotor UAV aerodynamics are set forth, equations of centroidal motion and motion around mass-center of a quadcopter are handled.

Keywords: multirotor unmanned aerial vehicle, quadcopter, mathematical simulation

For citation: Ilyinykh V.V., Andreev S.V., Klyuchnikov A.V., Chertkov M.S. Mathematical model of motion of a multirotor unmanned aerial vehicle. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2025;(2):34–46. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2025-2-4

Введение

К мультироторным относятся, как правило, беспилотные летательные аппараты (БЛА) вертолетной схемы, имеющие более трех несущих или толкающих винтов [1]. В настоящее время наибольшее распространение получили мультироторные БЛА, имеющие четыре несущих винта (НВ), т.е. квадрокоптеры. Такие характеристики, как легкость, малый размер, маневренность, простота управления, возможность модернизации и использования дополнительного оборудования, позволяют успешно использовать мультироторные БЛА для решения различных задач.

[©] Ильиных В. В., Андреев С. В., Ключников А. В., Чертков М. С., 2025. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

Квадрокоптеры в соответствии с рис. 1 могут иметь различные конструктивные конфигурации рамы: плюс «+», Н, правильный Х, модифицированный Х, мертвая (дохлая) кошка Х [2].



Рис. 1. Примеры схем компоновки квадрокоптеров (стрелкой на рамах БЛА указано направление оси *ОХ* связанной системы координат)

Формирование облика БЛА – отдельная научная задача [3]. Оптимальная конструкция рамы должна быть геометрически симметрична. Если рама симметрична, с точки зрения энегрозатратности и устойчивости для БЛА не будет разницы маневрировать по тангажу или крену. В определенных случаях модификации рамы БЛА могут привести к положительному изменению режимов полета БЛА. Например, квадрокоптер с удлиненной рамой по оси *X* может быть более стабильным при маневрировании с тангажом (по сравнению с БЛА с симметричной рамой). Это может быть полезно, когда рама БЛА разработана для полета на высоких скоростях с агрессивным углом тангажа.

Другая причина для использования несимметричной рамы может заключаться в необходимости подвески к БЛА особой полезной нагрузки. Например, схема «дохлая кошка Х» может использоваться, чтобы вынести НВ из поля видимости фронтальной камеры. В любом случае полезная нагрузка на раме не должна нарушать центровку, чтобы нагрузка на электродвигатели при зависании была равномерная. Кроме того, равномерное распределение веса по раме необходимо, чтобы сохранить размещение полетного контроллера в центре масс, относительно которого вращается БЛА.

Силовая установка квадрокоптера состоит из: аккумуляторной батареи, ESC-контроллеров, управляющих оборотами двигателей, бесщеточных электродвигателей и воздушных HB. Полетный контроллер посредством широтно-импульсной модуляции выдает команды ESC-контроллеру, управляющему оборотами двигателя, на увеличение или уменьшение скорости вращения вала, что приводит к изменению тяги двигателя, в результате чего БЛА маневрирует.

В данной работе рассматривается квадрокоптер, выполненный по схеме «+».

Системы координат

При рассмотрении задач ориентации и навигации объекта используются следующие правые системы координат (трехгранники)¹ [4]:

ONHE, (g) – нормальная географическая система координат (НГСК), начало O которой совпадает с одной из точек объекта (точкой местоположения чувствительных масс БЧЭ). Ось H направлена по географической вертикали вверх, ось N – вдоль касательной к меридиану h-эллипсоида на север, ось E – вдоль касательной к параллели на восток;

OXYZ, (b) – связанная с объектом система координат (СвСК). Ось X направлена по продольной оси объекта, ось Y – по нормальной, а ось Z – по поперечной;

 $OX_{a}Y_{a}Z_{a}$, (a) – скоростная система координат (СкСК). Ось X совпадает с вектором воздушной скорости объекта, ось Y – расположена в плоскости симметрии и направлена к верхней части БЛА, а ось Z – дополняет систему координат до правой.

Переход из одной системы координат в другую осуществляется с помощью матриц перехода. Так, для перехода от СвСК к НГСК используется матрица перехода C, для перехода от СвСК к СкСК – матрица C_a (рис. 2):

¹ Государственный стандарт Союза ССР ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & \sin\gamma\sin\psi - \cos\gamma\cos\psi\sin\vartheta & \cos\gamma\sin\psi + \sin\gamma\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\gamma\cos\vartheta & -\sin\gamma\cos\vartheta \\ -\sin\psi\cos\vartheta & \sin\gamma\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi\sin\vartheta & \cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\psi\sin\vartheta \end{bmatrix};$$
(1)
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{a} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ -\cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix},$$
(2)

где Ψ – угол рысканья, рад; ϑ – угол тангажа, рад; γ – угол крена, рад; α – угол атаки; β – угол скольжения, рад.



Рис. 2. Системы координат

Матрица перехода является ортогональной, обращение матрицы перехода эквивалентно транспонированию (для обратного перехода необходимо воспользоваться транспонированной матрицей $\mathbf{C}^{T} = \mathbf{C}^{-1}$).

Силы и моменты, действующие на БЛА в полете

На квардрокоптер в полете в соответствии с рис. 3 действуют [5]:

– результирующая аэродинамическая сила несущих винтов \mathbf{R}_{Bi} . Приложена в центре втулок НВ и направлена по оси валов винтов. Для инженерных расчетов принимают, что аэродинамическая сила НВ \mathbf{R}_{Bi} по величине равна силе тяги НВ \mathbf{P}_{Bi} (на рис. 3 показана сила тяги НВ \mathbf{P}_{Bi});

– результирующая аэродинамическая сила рамы и подвесного оборудования. Так как БЛА не оснащен плоскостями (крылом, оперением), то предполагается, что подъемная и боковая силы его рамы равны нулю. В этом случае основной аэродинамической силой рамы, возникающей при поступательном движении БЛА, является сила сопротивления воздуха $X_{\rm sp}$, приложенная в центре давления рамы. Для инженерных расчетов принимают, что линия действия силы $X_{\rm sp}$ проходит через центр масс. Сила $X_{\rm sp}$ направлена противоположно вектору воздушной скорости V;

– сила тяжести G, приложенная в центре масс БЛА и направленная по местной вертикали вниз.

– моменты аэродинамических сил и силы тяжести, равные произведению величины силы на расстояние («плечо») от центра масс до линии действия силы;

– реактивные моменты несущих винтов $\mathbf{M}_{\mathbf{p}_i}$, действующие на раму БЛА и направленные в сторону, противоположную вращению HB.



Рис. 3. Силы и моменты, действующие на квадрокоптер

Электродвигатель создает крутящий момент ($M_{\kappa p1}$, $M_{\kappa p2}$, $M_{\kappa p3}$, $M_{\kappa p4}$), приводящий в движение HB. При вращении HB отбрасывает воздух, проходящий через него, возникает сила тяги ($P_{в1}$, $P_{в2}$, $P_{в3}$, $P_{в4}$). Вращающийся HB испытывает сопротивление воздуха. Сила сопротивления воздуха ($X_{л1}$, $X_{л2}$, $X_{л3}$, $X_{л4}$) создает момент сопротивления (реактивный момент M_{P1} , M_{P2} , M_{P3} , M_{P4}) в направлении, противоположном вращению HB. Для того, чтобы квадрокоптер не вращался под действием реактивных моментов, эти моменты уравновешиваются за счет противовращения: для этого у квадрокоптера в соответствии с рис. 3 HB 2 и 4 вращаются по часовой стрелке, а HB 1 и 3 – против часовой стрелки. В итоге реактивные моменты HB, вращающихся по часовой стрелке, уравновешиваются моментами HB, вращающихся против часовой стрелки [6].

Аэродинамическая сила НВ

Тяга НВ получается за счет того, что его лопасти отбрасывают воздух, при этом элементы лопасти рассекают воздух с различными скоростями, пропорциональными их расстоянию от оси вращения. Сила реакции воздуха, отбрасываемого вдоль оси винта, и является его тягой. На место отброшенного воздуха поступает новый, поэтому перед НВ образуется движение воздуха навстречу винту – подсасывание, а позади – отбрасывание от винта. Воздух подсасывается к винту со всех сторон, ускоряя свое движение по мере приближения к ометаемой лопастями поверхности. Винт придает воздуху дополнительную (индуктивную) скорость – отбрасывает его вниз и закручивает струю.

Картина осевого обтекания HB (для движения БЛА в вертикальной плоскости (висение, подъем, снижение) при отсутствии ветра) является осесимметричной. Поэтому равнодействующая всех аэродинамических сил, возникающих на лопастях, т.е. равнодействующая аэродинамическая сила HB $\mathbf{R}_{_{B}}$, направлена по оси HB и является его тягой $\mathbf{P}_{_{B}}$. При косом обтекании (вектор воздушной скорости не перпендикулярен плоскости вращения HB) картина обтекания уже не является осесимметричной. При наличии скорости БЛА возникает продольная сила несущего винта $\mathbf{H}_{_{B}}$ (аналогичная силе сопротивления). Кроме того, вследствие бокового отклонения струи воздуха, возникающего при закручивании, появляется и боковая сила $\mathbf{S}_{_{HB}}$. Таким образом, в общем случае результирующая аэродинамическая сила HB отклоняется назад и вбок от оси вала винта. Угол отклонения невелик – всего несколько градусов, поэтому для инженерных расчетов принимают, что аэродинамическая сила HB $\mathbf{R}_{_{B}}$ по величине практически равна тяге HB $\mathbf{P}_{_{B}}$

$$\mathbf{R}_{\mathrm{B}} = \begin{bmatrix} H_{\mathrm{B}} \\ P_{\mathrm{B}} \\ S_{\mathrm{HB}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ P_{\mathrm{B}} \\ 0 \end{bmatrix}.$$
(3)

Сила тяги

Сила тяги НВ – сумма тяг всех его лопастей. Сила тяги направлена вдоль оси вала НВ.

Способность винта создавать тягу путем отбрасывания с определенной скоростью некоторой массы воздуха зависит от размера винта, скоростного напора воздуха и несущих свойств винта (его лопастей). Поэтому при расчете аэродинамических характеристик винта широко используют способ записи аэродинамических сил с помощью безразмерных коэффициентов, относя силы к характерной площади и скоростному напору, рассчитываемому исходя из скорости движения по окружности концевого сечения лопасти, а не из скорости полета БЛА. Тогда тягу НВ можно выразить как

$$P_{\rm\scriptscriptstyle B} = C_{\rm\scriptscriptstyle T} S_{\rm\scriptscriptstyle B} \rho \frac{r_{\rm\scriptscriptstyle B}^2 \omega_{\rm\scriptscriptstyle B}^2}{2}, \qquad (4)$$

где $P_{\rm B}$ – тяга винта, H; $C_{\rm T}$ – коэффициент тяги, зависящий от линейной скорости БЛА, угловой скорости вращения винта, а также угла общего шага винта [7]; $S_{\rm B}$, $r_{\rm B}$ – площадь и радиус окружности, которую описывает винт, соответственно, м², м; ρ – плотность воздуха, кг/м³, зависящая от высоты полета и устанавливаемая для стандартной атмосферы по ГОСТ 4401-81¹; $\omega_{\rm B}$ – угловая скорость вращения винта, рад/с.

Вектор силы тяги квадрокоптера определяется в СвСК как

$$\mathbf{P}_{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

где Р – суммарная тяга, Н, результат действия четырех двигателей квадрокоптера:

$$P = \sum_{i=1}^{4} P_{\scriptscriptstyle Bi} = \sum_{i=1}^{4} c_{\scriptscriptstyle pi} \omega_{\scriptscriptstyle Bi}^{2} , \qquad (6)$$

где c_p – интегральный коэффициент силы тяги, определяемый по формуле

$$c_{\rm pi} = \frac{1}{2} \rho C_T S_{\rm Bi} r_{\rm Bi}^2.$$
 (7)

При этом непосредственными управляющими воздействиями являются изменение числа оборотов (угловой скорости вращения) НВ.

Аэродинамическая сила рамы

Аэродинамическую силу, создаваемую рамой БЛА, в СкСК можно определить как

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}\mathbf{n}_{a}} = \begin{bmatrix} -X_{\mathbf{p}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
(8)

На раму, подвес и другие находящиеся в потоке части БЛА действуют силы сопротивления воздуха вследствие обдувки этих частей индуктивной струей от НВ и потоком из-за поступательного движения БЛА. Это сопротивление является вредным, так как создается ненесущими частями БЛА и требует излишней затраты энергии.

Для каждого ј-го элемента рамы и подвеса БЛА сила лобового сопротивления запишется

$$X_{{}_{\mathrm{B}\mathrm{p}_{j}}} = C_{x_{j}} S_{j} \frac{\rho V_{j}^{2}}{2}, \tag{9}$$

где C_{x_k} – безразмерный коэффициент аэродинамического (лобового) сопротивления *j*-го элемента рамы и подвеса; S_j – характерная площадь элемента; V_j – скорость потока, обтекающего данный элемент.

¹ ГОСТ 4401–81. Атмосфера стандартная. Параметры.

Сила вредного лобового сопротивления БЛА

$$X_{\rm BP} = \sum_{j=1}^{j=n} X_{\rm BP_j} , \qquad (10)$$

где *n* – количество элементов, находящихся в потоке.

Скорости V_i обычно осредняются и считаются одинаковыми для всех элементов. С достаточ-

ной для моделирования точностью можно считать, что средняя скорость обдувки БЛА, равна [6]:

 при осевом обтекании сумме вертикальной скорости БЛА и удвоенной индуктивной скорости подсасывания воздуха;

– при косом обтекании скорости полета БЛА.

Формулу (9) можно записать в виде

$$X_{\rm BP} = \frac{\rho V_{\rm cp}^2}{2} \sum_{j=1}^{j=n} C_{x_j} S_j , \qquad (11)$$

где V_{cp} – модуль средней воздушной скорости, м/с.

Сила тяжести

Вектор нормальной составляющей силы тяжести (не учитывающий гравитационные аномалии) направлен вдоль местной геодезической вертикали, т.е. вдоль нормали к земному эллипсоиду. Следовательно, в НГСК горизонтальные составляющие вектора ускорения силы тяжести **g** будут равны нулю, а силу тяжести в проекциях на оси НГСК можно определить как

$$\mathbf{G}_{g} = \begin{bmatrix} 0\\ -mg\\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где *т* – масса БЛА, кг.

В 1971 г. на ассамблее Международного союза геофизики и геодезии в Москве была рекомендована формула нормального значения ускорения силы тяжести, получившая название системы 1967 г.:

$$g_0 = 9,780318 \cdot (1+0,0053024 \cdot \sin^2(\varphi) - 0,0000059 \cdot \sin^2(2\varphi)),$$
(13)

где g_0 – ускорение силы тяжести на референц-эллипсоиде, наилучшим образом совпадающим с поверхностью геоида (на уровне моря), м/c²; φ – географическая широта места, рад.

Высота в формуле (13) может быть учтена в виде

$$g = g_0 - 0,000003086 \cdot h \,, \tag{14}$$

где *h* – высота над эллипсоидом, м [8].

Реактивный момент

От силовой установки на вал HB передается крутящий момент $\mathbf{M}_{\text{кp}}$. При этом рама квадрокоптера, на которой закреплена силовая установка, испытывает согласно третьему закону механики действие равного по величине, но противоположно направленного реактивного момента \mathbf{M}_{p} , стремящегося развернуть квадрокоптер в сторону, противоположную направлению вращения HB (см. рис. 3). Этот момент \mathbf{M}_{p} называется реактивным, так как возникает вследствие реакции воздуха (сил сопротивления воздуха) при вращении HB.

При постоянных оборотах HB реактивный момент представляет собой момент от сил сопротивления воздуха вращению HB. При изменении оборотов HB к реактивному моменту от сил сопротивления воздуха добавляется момент от тангенциальных сил инерции, возникающих при наличии углового ускорения, и реактивный момент HB складывается из двух частей:

$$\mathbf{M}_{\mathrm{p}} = \mathbf{M}_{\mathrm{comp}} + \mathbf{M}_{\mathrm{HH}}, \tag{15}$$

где $\mathbf{M}_{\rm p}$ – реактивный момент HB, Hм; $\mathbf{M}_{\rm conp}$ – момент сил сопротивления вращению, Hм; $\mathbf{M}_{\rm _{HH}}$ – момент от тангенциальных сил инерции, Hм.

Обычно для инженерных расчетов принимают, что

$$\mathbf{M}_{\mathrm{p}} = \mathbf{M}_{\mathrm{comp}} = \left| \mathbf{M}_{\mathrm{kp}} \right|. \tag{16}$$

где M_{кр} – крутящий момент силовой установки, Нм.

Реактивный момент, равный моменту сопротивления (крутящему моменту), может быть выражен с помощью аэродинамического коэффициента. В качестве плеча силы сопротивления принимается величина радиуса HB, момент сил сопротивления выражается формулой

$$\left|\mathbf{M}_{\mathrm{P}}\right| = \left|\mathbf{M}_{\mathrm{comp}}\right| = \left|\mathbf{M}_{\mathrm{kp}}\right| = m_{\mathrm{kp}} S_{\mathrm{B}} \rho \frac{r_{\mathrm{B}}^{2} \omega_{\mathrm{B}}^{2}}{2} r_{\mathrm{B}}, \qquad (17)$$

где *m*_{кр} – аэродинамический коэффициент момента сопротивления воздуха, или

$$\left|\mathbf{M}_{\mathrm{P}}\right| = \left|\mathbf{M}_{\mathrm{comp}}\right| = \left|\mathbf{M}_{\mathrm{kp}}\right| = m_{\mathrm{P}}\omega_{\mathrm{B}}^{2},\tag{18}$$

где *m*_р – интегральный коэффициент момента сопротивления воздуха, равный

$$m_{\rm P} = \frac{1}{2} m_{\rm kp} S_{\rm B} \rho r_{\rm B}^3.$$
 (19)

В случае квадрокоптера, изображенного на рис. 3, реактивный момент БЛА, создаваемый вращающимися НВ в СвСК, можно определить как

$$\mathbf{M}_{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{P2} + M_{P4} - M_{P1} - M_{P3} \\ 0 \end{bmatrix},$$
(20)

где \mathbf{M}_{p} – реактивный момент БЛА, создаваемый вращающимися HB, Hм; $\mathbf{M}_{p_1}, \mathbf{M}_{p_2}, \mathbf{M}_{p_3}, \mathbf{M}_{p_4}$ – реактивные моменты, создаваемые вращающимися HB и направленные в сторону противоположную от вращения соответствующего винта, Hм.

Момент аэродинамической силы НВ

Момент аэродинамической силы HB, согласно определению момента силы, равен произведению силы на плечо (расстояние от точки приложения силы до точки (оси), относительно которой момент рассчитывается).

Если рассматривать квадрокоптер, сконструированный по «+»-образной схеме, приведенной на рис. 3, то момент, создаваемый аэродинамической силой НВ, в СвСК можно определить как

$$\mathbf{M}_{R_{\rm B}} = \begin{bmatrix} (P_{\rm B3} - P_{\rm B1})l\\ 0\\ (P_{\rm B2} - P_{\rm B4})l \end{bmatrix},$$
(21)

где $\mathbf{M}_{R_{n}}$ – момент аэродинамической силы HB, Hм; l – расстояние от оси вращения вала двигателя до центра масс квадрокоптера, м.

Момент аэродинамической силы рамы

Момент, создаваемый аэродинамической силой рамы равен нулю, так как линия действия силы походит через центр масс и плечо силы равно нулю

$$\mathbf{M}_{R} = \mathbf{0}, \tag{22}$$

где **М**_{*R*₋₋} – момент аэродинамической силы рамы и подвеса, Нм.

Момент гравитационной силы (силы тяжести)

Если принять гипотезу об однородности поля тяготения, то гравитационная сила (сила тяжести) не создает момента, поскольку приложена в центре масс:

$$\mathbf{M}_{G} = \mathbf{0} \,, \tag{23}$$

где **М**_{*G*} – момент сил гравитации, Нм.

Главный вектор внешних моментов

Главный вектор внешних моментов в проекциях на оси СвСК b можно представить в виде

$$\mathbf{M}_{b} = \mathbf{M}_{R_{b}} + \mathbf{M}_{P} + \mathbf{M}_{R_{m}} + \mathbf{M}_{G}, \qquad (24)$$

где **М**_{*b*} – главный вектор внешних моментов в проекциях на оси СвСК, Нм.

Зависимость угловых скоростей НВ от управляющих воздействий

Управление квадрокоптером осуществляется путем изменения силы тяги и моментов по углам крена, рыскания и тангажа (составляющих главного вектора внешних моментов), что реализуется изменением угловой скорости вращения НВ. Связь угловой скорости вращения НВ с силой тяги и управляющими моментами в соответствии с уравнениями (6), (20) и (21) можно определить как

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{\gamma} \\ M_{\psi} \\ M_{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{p} \left(\omega_{B1}^{2} + \omega_{B2}^{2} + \omega_{B3}^{2} + \omega_{B4}^{2} \right) \\ lc_{p} \left(-\omega_{B1}^{2} + \omega_{B3}^{2} \right) \\ m_{p} \left(-\omega_{B1}^{2} + \omega_{B2}^{2} - \omega_{B3}^{2} + \omega_{B4}^{2} \right) \\ lc_{p} \left(\omega_{B2}^{2} - \omega_{B4}^{2} \right) \end{bmatrix},$$
(25)

или в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{\gamma} \\ M_{\psi} \\ M_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{p} & c_{p} & c_{p} & c_{p} \\ -lc_{p} & 0 & lc_{p} & 0 \\ -m_{p} & m_{p} & -m_{p} & m_{p} \\ 0 & lc_{p} & 0 & -lc_{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{B1}^{2} \\ \omega_{B2}^{2} \\ \omega_{B3}^{2} \\ \omega_{B4}^{2} \end{bmatrix}.$$
(26)

Пусть U_1, U_2, U_3, U_4 – значения потребных силы тяги и управляющих моментов по крену, рысканью и тангажу. Из формулы (26) можно определить угловые скорости вращения HB, необходимые для создания потребных силы тяги и управляющих моментов:

$$\begin{bmatrix} \omega_{B1}^{2} \\ \omega_{B2}^{2} \\ \omega_{B3}^{2} \\ \omega_{B4}^{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4c_{p}} & -\frac{1}{2lc_{p}} & -\frac{1}{4m_{p}} & 0 \\ \frac{1}{4c_{p}} & 0 & \frac{1}{4m_{p}} & \frac{1}{2lc_{p}} \\ \frac{1}{4c_{p}} & \frac{1}{2lc_{p}} & -\frac{1}{4m_{p}} & 0 \\ \frac{1}{4c_{p}} & 0 & \frac{1}{4m_{p}} & -\frac{1}{2lc_{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1} \\ U_{2} \\ U_{3} \\ U_{4} \end{bmatrix}.$$
(27)

Потребные значения силы тяги и управляющих моментов могут быть сформированы алгоритмами управления, реализующими, например, ПИД-регулятор, регулятор на основе линеаризации обратной связью, адаптивный регулятор и др.

Математическая модель квадрокоптера

Движение БЛА как твердого тела постоянной массы состоит из поступательного движения центра масс и вращательного движения относительно центра масс.

При моделировании БЛА приняты следующие допущения: БЛА – твердое тело постоянной массы; БЛА имеет симметричную компоновку; центр масс БЛА расположен в начале СвСК; оси вращения НВ параллельны друг другу, относительно рамы угловое положение осей неизменно; применяются НВ с жестким креплением лопастей; аэроупругие свойства НВ не учитываются (рассматривается «жесткий» винт, упругими деформациями конструкции НВ пренебрегаем); динамика маховых движений лопастей НВ не рассматривается; коэффициенты силы тяги и моментов, создаваемых НВ, равны; перекрестные связи представлены гироскопическими моментами, возникающими при вращении БЛА, двигателей, НВ; влияние близости поверхности земли (воздушной подушки) не учитывается; атмосфера является спокойной, ветер и турбулентность отсутствуют; распределение гравитационных сил не зависит от высоты полета и географических координат.

Уравнения движения центра масс согласно второму закону Ньютона в ИСК околоземного навигационного пространства можно записать в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{G}',\tag{28}$$

где **a** – вектор абсолютного ускорения БЛА, M/c^2 ; **F** – равнодействующий или главный вектор всех негравитационных сил, H; **G**' – гравитационная сила тяготения Земли, H.

Выражение (28) показывает, что ускорение возникает при действии на БЛА какой-либо неуравновешенной силы $\mathbf{F} + \mathbf{G'} \neq 0$. При известных массе и силе тяжести БЛА (гравитационной силе) величина и направление ускорения определяются величиной и направлением силы \mathbf{F} .

В задачах динамики управляемого движения мультироторного БЛА должны учитываться аэродинамические силы, формируемые как винтами, так и его рамой. Тогда равнодействующий вектор негравитационных сил, действующих на квадрокоптер, равен

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}_{\rm B} + \mathbf{R}_{\rm m} \,. \tag{29}$$

Разделив (28) на *т*, получим

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\mathbf{G}'}{m} = \mathbf{n} + \mathbf{g}',\tag{30}$$

где \mathbf{n} – вектор кажущегося ускорения (показания акселерометров), м/с², т.е. ускорения, которое имела бы точка массой *m* под воздействием негравитационных сил, если бы могла двигаться в пространстве, свободном от действия силы тяготения.

Для позиционирования в околоземном навигационном пространстве из выражения (30) необходимо определить ускорение относительного движения, например, относительно НГСК:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\right)_g = \frac{1}{m} \left(\mathbf{R}_{sg} + \mathbf{R}_{nng}\right) + \mathbf{g}_g - \left(\boldsymbol{\omega}_g^a + \boldsymbol{\Omega}\right) \times \mathbf{v}_{kg}, \qquad (31)$$

или если выразить ускорение относительно земли через кажущееся ускорение:

$$\left(\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\right)_g = \mathbf{n} + \mathbf{g} - \left(\mathbf{\omega}_g^a + \mathbf{\Omega}\right) \times \mathbf{v}_k , \qquad (32)$$

где $\left(\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}\right)_g = \left(\dot{v}_N, \dot{v}_H, \dot{v}_E\right)^T$ – локальная производная земной скорости \mathbf{v}_k в системе координат g, м/c²;

 ω_g^a – абсолютная угловая скорость вращения НГСК g, рад/с; Ω – вектор угловой скорости вращения Земли, рад/с; v_k – вектор земной относительной скорости, м/с.

Проекция абсолютной угловой скорости НГСК g на собственные оси:

$$\boldsymbol{\omega}_{g}^{a} = \begin{bmatrix} \Omega \cos \varphi + \frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h} \\ \Omega \sin \varphi + \frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h} tg \varphi \\ -\frac{v_{N}}{R_{\varphi} + h} \end{bmatrix},$$
(33)

где $\Omega = 7,2921158553 \cdot 10^{-5}$ – модуль угловой скорости вращения Земли, рад/с; $R_{\lambda} = \frac{R_e}{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)^{1/2}}$ –

радиус кривизны первого вертикала, м; $R_{\varphi} = \frac{R_e (1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$ – радиус кривизны меридианного сече-

ния, м; $e^2 = 2\alpha_e - \alpha_e^2$ – квадрат эксцентриситета эллипсоида; R_e – большая полуось эллипсоида, м; α_e – сжатие эллипсоида.

Вращение БЛА относительно центра масс определяется уравнением, описывающим изменение главного кинетического момента твердого тела в результате действия главного вектора внешних мо-ментов:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} , \qquad (34)$$

где L – главный кинетический момент твердого тела (момент импульса), м²кг/с; М – главный вектор внешних моментов, Нм.

При моделировании вращательного движения БЛА удобно использовать уравнения движения в проекции на СвСК, поскольку в них задаются массоинерционные и геометрические характеристики аппарата.

Для системы с относительно тяжелыми вращающимися частями (роторы двигателя и HB) в проекциях на оси СвСК *b* можно получить

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b}^{a} + \mathbf{J}_{\mathrm{BP}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{BP}} + \boldsymbol{\omega}_{b}^{a} \times \left(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{b}^{a} + \mathbf{J}_{\mathrm{BP}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{BP}}\right) = \mathbf{M}_{b}, \qquad (35)$$

где **J** = const – матрица моментов инерции БЛА, кг·м², по главной диагонали которой расположены моменты инерции БЛА относительно СвСК J_x, J_y, J_z , а остальные элементы представляют собой центробежные моменты инерции; ω_b^a – абсолютная угловая скорость вращения СвСК *b* (показания датчиков угловой скорости), рад/с; **J**_{вр} = const – матрица суммарного момента инерции вращающихся частей, кг·м²; $\omega_{вр}$ – суммарная угловая скорость вращающихся частей, рад/с.

В уравнении (36) произведение $\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{b}^{a}$ называют кинетическим моментом объекта, а векторное произведение $\boldsymbol{\omega}_{b}^{a} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{b}^{a}$ – гироскопическим моментом объекта, в данном случае БЛА или квадрокоптера; произведение $\mathbf{J}_{\mathrm{вp}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{вp}}$ – суммарный кинетический момент тяжелых вращающихся частей, обычно направленный вдоль оси вращения; векторное произведение $\boldsymbol{\omega}_{b}^{a} \times \mathbf{J}_{\mathrm{вp}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{вp}}$ определяет гироскопический момент, возникающий при вращении частей двигательной установки с большой угловой скоростью [9, 10].

Полагая $\mathbf{J} = \text{diag}(J_x, J_y, J_z)$ (при совмещении осей СвСК и главных осей инерции БЛА), относительно изменения абсолютной угловой скорости вращения СвСК *b* уравнение (35) можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b}^{a} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{J_{x}}, \frac{1}{J_{y}}, \frac{1}{J_{z}}\right) \left(\mathbf{M}_{b} - \mathbf{J}_{\mathrm{BP}}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{BP}} - \boldsymbol{\omega}_{b}^{a} \times \left(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{b}^{a} + \mathbf{J}_{\mathrm{BP}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{BP}}\right)\right).$$
(36)

Для определения углового положения объекта угловую скорость СвСК относительно НГСК g $\omega_{h}^{o.g}$ можно получить как

$$\boldsymbol{\omega}_{b}^{o.g} = \boldsymbol{\omega}_{b}^{a} - \boldsymbol{\omega}_{g}^{a} \,. \tag{37}$$

Угловую ориентацию БЛА относительно НГСК *g* можно задать с помощью углов рысканья Ψ , тангажа ϑ и крена γ . Связь углов рысканья Ψ , тангажа ϑ и крена γ с угловыми скоростями $\omega_b^{o.g}$ описывается кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\dot{\gamma} = \omega_{xb}^{o.g} - \left(\omega_{yb}^{o.g}\cos\gamma - \omega_{zb}^{o.g}\sin\gamma\right) tg\vartheta;$$

$$\dot{\psi} = \left(\omega_{yb}^{o.g}\cos\gamma - \omega_{zb}^{o.g}\sin\gamma\right) / \cos\vartheta;$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_{yb}^{o.g}\sin\gamma + \omega_{zb}^{o.g}\cos\gamma.$$
(38)

Таким образом, полная математическая модель, описывающая пространственную и угловую динамику квадрокоптера, состоит из уравнений:

ſ

$$\begin{split} \dot{v}_{N} &= \frac{1}{m} \left(R_{\text{agx}} + R_{\text{ingy}} \right) - \left(\frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h} \text{tg} \phi + 2\Omega \sin \phi \right) v_{E} - \frac{v_{N} v_{H}}{R_{\phi} + h}; \\ \dot{v}_{H} &= \frac{1}{m} \left(R_{\text{agy}} + R_{\text{ingy}} \right) - g + \frac{v_{N}^{2}}{R_{\phi} + h} + \left(\frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h} + 2\Omega \cos \phi \right) v_{E}; \\ \dot{v}_{E} &= \frac{1}{m} \left(R_{\text{agy}} + R_{\text{ingy}} \right) + \left(\frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h} tg \phi + 2\Omega \sin \phi \right) v_{N} - \left(\frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h} + 2\Omega \cos \phi \right) v_{H}; \\ \dot{\omega}_{bx}^{a} &= \frac{1}{J_{x}} \left((P_{a3} - P_{a1}) l + (J_{y} - J_{z}) \omega_{by}^{a} \omega_{bz}^{a} + J_{apy} \omega_{apy} \omega_{bz}^{a} \right); \\ \dot{\omega}_{by}^{a} &= \frac{1}{J_{y}} \left((M_{P2} + M_{P4} - M_{P1} - M_{P3} - J B_{apy} \dot{\omega}_{apy} + (J_{z} - J_{x}) \omega_{bx}^{a} \omega_{bz}^{a} \right); \\ \dot{\omega}_{bx}^{a} &= \frac{1}{J_{z}} \left((P_{a2} - P_{a4}) l + (J_{x} - J_{y}) \omega_{bx}^{a} \omega_{by}^{a} - J_{apy} \omega_{apy} \omega_{ay} \right); \\ \dot{\omega}_{bx}^{a} &= \omega_{bx}^{a} - \Omega \cos \phi - \frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h}; \\ \omega_{by}^{a,g} &= \omega_{bx}^{a} - \Omega \cos \phi - \frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h}; \\ \dot{\omega}_{by}^{a,g} &= \omega_{bx}^{a} - \Omega \sin \phi - \frac{v_{E}}{R_{\lambda} + h} tg \phi; \\ \omega_{bx}^{a,g} &= \omega_{bz}^{a} + \frac{v_{N}}{R_{\phi} + h}; \\ \dot{\gamma} &= \omega_{ax}^{a,g} - \left(\omega_{yb}^{a,g} \cos \gamma - \omega_{zb}^{a,g} \sin \gamma \right) \text{tg} \vartheta; \\ \dot{\psi} &= \left(\omega_{yb}^{a,g} \cos \gamma - \omega_{zb}^{a,g} \sin \gamma \right) / \cos \vartheta; \\ \dot{\vartheta} &= \omega_{yb}^{a,g} \sin \gamma + \omega_{zb}^{a,g} \cos \gamma. \end{split}$$

Заключение

На примере квадрокоптера «+»-образной схемы рассмотрена математическая модель мультироторного БЛА, описаны силы и моменты, действующие на БЛА в полете, выведены зависимости необходимых угловых скоростей вращения НВ от потребных значений силы тяги и управляющих моментов, приведены выражения, описывающие модель динамики движения квадрокоптера в виде законов изменения линейного и углового ускорения относительно земной системы координат.

Полученная математическая модель может быть соответствующим образом доработана или упрощена (линеаризована) в соответствии с решаемыми задачами. Математическая модель может

быть использована в составе программного обеспечения полунатурных стендов при разработке и отладке систем стабилизации и управления летательным аппаратом типа квадрокоптер без использования реального БЛА.

Список литературы

- 1. Горячев Н. В., Ергалиев Д. С., Полтавский А. В. [и др.]. Беспилотные летательные аппараты. Проблемы проектирования и эксплуатации. Пенза : Изд-во ПГУ, 2023. 306 с.
- 2. Nikolakopoulos G., Mansouri S. S., Kanellakis C. Aerial Robotic Workers. Design, Modeling, Control, Vision, and Their Applications. Butterworth-Heinemann is an imptrint of Elsevier, 2023.
- 3. Нгуен Тхань Лонг, Кузин Н. А., Юрков Н. К. К проблеме формирования облика перспективных беспилотных летательных аппаратов // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 1. С. 55–66.
- 4. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. 512 с.
- 5. Ромасевич В. Ф., Самойлов Г. А. Аэродинамика и динамика полета вертолетов : учебник для курсантов ВВАУЛ. М. : Воениздат, 1982. 485 с.
- 6. Булат П. В., Дудников С. Ю., Кузнецов П. Н. Основы аэродинамики беспилотных воздушных судов : учеб. пособие. М. : Спутник +, 2021. 273 с.
- 7. Моисеев В. С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами : монография. Казань : Республиканский центр мониторинга качества образования, 2013. 768 с.
- 8. Августов Л. И., Бабиченко А. В., Орехов М. И. [и др.]. Навигация летательных аппаратов в околоземном пространстве. М. : Научтехлитиздат, 2015. 592 с.
- 9. Ефремов А. В., Захарченко В. Ф., Овчаренко В. Н. [и др.]. Динамика полета : учебник для студентов вузов. М. : Машиностроение, 2011. 776 с.
- 10. Овчаренко В. Н. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов: идентификация по полетным данным. М. : Ленанд, 2019. 236 с.

References

- 1. Goryachev N.V., Ergaliev D.S., Poltavskiy A.V. et al. *Bespilotnye letatel'nye apparaty. Problemy proektirovaniya i ekspluatatsii = Unmanned aerial vehicles. Problems of design and operation.* Penza: Izd-vo PGU, 2023:306. (In Russ.)
- 2. Nikolakopoulos G., Mansouri S.S., Kanellakis C. *Aerial Robotic Workers. Design, Modeling, Control, Vision, and Their Applications.* Butterworth-Heinemann is an imptrint of Elsevier, 2023.
- 3. Nguen Tkhan' Long, Kuzin N.A., Yurkov N.K. On the problem of shaping the appearance of promising unmanned aerial vehicles. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2022;(1):55–66. (In Russ.)
- 4. Chelnokov Yu.N. Kvaternionnye i bikvaternionnye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya = Quaternionic and biquaternionic models and methods of solid mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion. Moscow: FIZMATLIT, 2006:512. (In Russ.)
- 5. Romasevich V.F., Samoylov G.A. Aerodinamika i dinamika poleta vertoletov: uchebnik dlya kursantov VVAUL = Aerodynamics and dynamics of helicopter flight : a textbook for Air Force cadets. Moscow: Voenizdat, 1982:485. (In Russ.)
- 6. Bulat P.V., Dudnikov S.Yu., Kuznetsov P.N. Osnovy aerodinamiki bespilotnykh vozdushnykh sudov: ucheb. posobie = Fundamentals of aerodynamics of unmanned aircraft : textbook. Moscow: Sputnik +, 2021:273. (In Russ.)
- 7. Moiseev V.S. *Prikladnaya teoriya upravleniya bespilotnymi letatel'nymi apparatami : monografiya = Applied theory of control of unmanned aerial vehicles : monograph*. Kazan': Respublikanskiy tsentr monitoringa kachestva obrazovaniya, 2013:768. (In Russ.)
- 8. Avgustov L.I., Babichenko A.V., Orekhov M.I. et al. *Navigatsiya letatel'nykh apparatov v okolozemnom prostranstve = Navigation of aircraft in near-Earth space*. Moscow: Nauchtekhlitizdat, 2015:592. (In Russ.)
- 9. Efremov A.V., Zakharchenko V.F., Ovcharenko V.N. et al. *Dinamika poleta: uchebnik dlya studentov vuzov* = *Flight dynamics : a textbook for university students*. Moscow: Mashinostroenie, 2011:776. (In Russ.)
- 10. Ovcharenko V.N. Aerodinamicheskie kharakteristiki letatel'nykh apparatov: identifikatsiya po poletnym dannym = Aerodynamic characteristics of aircraft: identification from flight data. Moscow: Lenand, 2019:236. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Викторович Ильиных	Vladimir V. Ilyinykh
инженер-конструктор,	Design engineer,
Российский федеральный ядерный центр –	Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin
Всероссийский научно-исследовательский	All-Russian Research Institute of Technical Physics
институт технической физики	(13 Vasilyeva street, Snezhinsk, Russia)
имени академика Е. И. Забабахина	
(Россия, г. Снежинск, ул. Васильева, 13)	
E-mail: kb2@vniitf.ru	

НАДЕЖНОСТЬ И КАЧЕСТВО СЛОЖНЫХ СИСТЕМ. 2025. № 2

Степан Витальевич Андреев

начальник отдела, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е. И. Забабахина (Россия, г. Снежинск, ул. Васильева, 13) E-mail: kb2@vniitf.ru

Александр Васильевич Ключников

кандидат технических наук, главный специалист, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е. И. Забабахина (Россия, г. Снежинск, ул. Васильева, 13) E-mail: kb2@vniitf.ru

Максим Сергеевич Чертков

начальник группы, Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики имени академика Е. И. Забабахина (Россия, г. Снежинск, ул. Васильева, 13) E-mail: kb2@vniitf.ru

Stepan V. Andreev

Head of the department, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics (13 Vasilyeva street, Snezhinsk, Russia)

Aleksandr V. Klyuchnikov

Candidate of technical sciences, chief engineer, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics (13 Vasilyeva street, Snezhinsk, Russia)

Maksim S. Chertkov

Group leader, Russian Federal Nuclear Center – Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics (13 Vasilyeva street, Snezhinsk, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests. Поступила в редакцию/Received 05.04.2025 Поступила после рецензирования/Revised 24.04.2025 Принята к публикации/Accepted 05.05.2025