Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 52 - 69. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.622.2

Классическая математическая модель С.В. Дубовского и ее некоторые модификации для описания К-волн в экономике

Д. В. Макаров[*1,2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4, Россия

[2] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4, Узбекистан

Аннотация. В настоящей работе была исследована классическая математическая модель С.В. Дубовского для описания длинных волн Н.Д. Кондратьева (К-волн). Эта модель описывает динамику свободных колебаний эффективности новых технологий и эффективности фондоотдачи. С точки зрения математики она представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Целью исследований является визуализация результатов решения с помощью численного моделирования модификации математической модели С.В. Дубовского, которая заключается в учете зависимости нормы накопления от фондоотдачи и внешнего притока инвестиций и новых технологических моделей. Также было показано с помощью критерия Бендиксона, что классическая модель С.В. Дубовского может генерировать замкнутые фазовые траектории, что указывает на ее применение для описание экономических кризисов и циклов. Аналогично было показано, что в рамках модифицированной математической модели С.В. Дубовского также могут существовать замкнутые фазовые траектории. Показано с помощью компьютерного моделирования, что зависимость нормы накопления от фондоотдачи может влиять на период циклических колебаний, что важно при моделировании реальных экономических циклов и кризисов. Учет внешнего притока инвестиций и новых технологий (управленческих решений) с помощью гармонических функций значительно усложняет вид фазовых траекторий, однако и здесь возможны замкнутые фазовые траектории. Эти гармонические функции определяют вынужденные колебания эффективности новых технологий и эффективности фондоотдачи и здесь возможно возникновение эффектов резонанса, которые были показаны с помощью компьютерного моделирования в настоящей статье. Компьютерное моделирование проводилось в среде компьютерной алгебры Matlab.

Ключевые слова: К-волны, осциллограмма, фазовая траектория, экономические циклы и кризисы, норма накопления, критерий Бендиксона, модель, метод Адамса-Башфорта-Мултона

Получение: 19.02.2024; Исправление: 04.03.2024; Принятие: 06.03.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Макаров Д. В. Классическая математическая модель С.В. Дубовского и ее некоторые модификации для описания К-волн в экономике // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 52-69. EDN: DFSKUX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69.

Финансирование. Исследования выполнены рамках программы "Приоритет-2030. Дальний Восток".

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*__Корреспонденция:__ E-mail: danil.makarov.pk@yandex.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Макаров Д. В., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 52 - 69. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELLING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A34

The Classical Mathematical Model of S.V. Dubovsky and Some of its Modifications for Describing K-Waves

D. V. Makarov*[1,2]

[1] Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, st. Pogranichnaya, 4, Russia

[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, st. Universitetskaya, 4, Uzbekistan

Abstract. In this work, the classical mathematical model of S.V. was investigated. Dubovsky to describe long waves N.D. Kondratiev (K-waves). This model describes the dynamics of free fluctuations in the efficiency of new technologies and the efficiency of capital productivity. From the point of view of mathematics, it is a system of nonlinear ordinary differential equations of the first order. The purpose of the research is to visualize the results of the solution using numerical modeling of a modification of the mathematical model of S.V. Dubovsky, which consists in taking into account the dependence of the accumulation rate on capital productivity and external inflow of investments and new technological models. It was also shown using the Bendixson test that the classical model of S.V. Dubovsky can generate closed phase trajectories, which indicates its use in describing economic crises and cycles. Similarly, it was shown that within the framework of the modified mathematical model S.V. Dubovsky can also have closed phase trajectories. It is shown using computer modeling that the dependence of the accumulation rate on capital productivity can influence the period of cyclical fluctuations, which is important when modeling real economic cycles and crises. Taking into account the external influx of investment and new technologies (managerial decisions) using harmonic functions significantly complicates the appearance of phase trajectories, however, closed phase trajectories are also possible here. These harmonic functions determine forced fluctuations in the efficiency of new technologies and the efficiency of capital productivity, and here resonance effects may occur, which were shown using computer modeling in this article. Computer simulation was carried out in the computer algebra environment Matlab.

Key words: K-waves, oscillogram, phase trajectory, economic cycles and crises, accumulation rate, Bendixson criterion, model, Adams-Bashforth-Moulton method

Received: 19.02.2024; Revised: 04.03.2024; Accepted: 06.03.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Makarov D. V. The classical mathematical model of S.V. Dubovsky and some of its modifications for describing K-waves. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 52-69. EDN: DFSKUX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69.

Funding. The research was carried out within the framework of the "Priority 2030. Far East program".

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

***Correspondence:** E-mail: danil.makarov.pk@yandex.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Makarov D. V., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

Проблема прогнозирования экономических циклов и кризов с помощью математических методов является важной практической задачей. Первые исследования экономических циклов с позиции системного подхода в описании причин их возникновения были отражены в работах английского инженера Хайда Кларка, который в 1847 году указал на наличие экономического цикла с периодом 54 года [1]. Далее развивая работы Х. Кларка, английский математик и экономист Уильям Джевонс с помощью математической статистики установил корреляции экономических циклов перепроизводства и связал их с солнечной активностью [2].

На наш взгляд, существенный вклад в исследование экономических циклов внес российский экономист Н.Д. Кондратьев, который в 20-х годах 20 века с помощью математического моделирования исследовал большие циклы конъектуры, основываясь на анализе большого числа экономических показателей за промежуток времени 100-150 лет. Основные труды Н.Д. Кондратьева можно изучить в монографии [3], а приложения его теории к длинным волнам (К-волнам) различных экономик мира – в монографии [4]. Описание научной школы Н.Д. Кондратьева, ее становления, методологические подходы, а также математические модели достаточно хорошо раскрываются в монографии автора [5].

Мы же в настоящей работе остановимся на математических моделях К-волн. Большой вклад в развитие математических моделей в описание К-волн внесли математики Меньшиков С.М., Клименко Л.А. [6], С.В. Дубовский [7], Хироока М. [8], А.А. Акаев [9], И.П. Гладких [10]. В монографии [5] дается описание различных математических моделей, приводятся их достоинства и недостатки. Основу таких моделей составляют в основном нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые решаются с помощью численных методов.

В настоящей работы в качестве объекта исследований выберем классическую математическую модель С.В. Дубовского, которая была предложена в статье [7]. Этот выбор обусловлен следующими соображениями: 1) математическая модель описывает динамику эффективности новых технологий и фондоотдачи, что на наш взгляд является оправданным для математического описания К-волн в рамках инновационных циклов [11]; 2) математическая модель обладает большим потенциалом в практическом применении и до конца не изучена.

Классическая математическая модель С.В. Дубовского представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (задача Коши). В статье мы покажем с помощью критерия Бендиксона, что решение задачи Коши может обладать замкнутыми фазовыми траекториями, что будет указывать на возможность ее для описания экономических циклов. Рассмотрим некоторые модификации модели посредством учета зависимости нормы накопления от фондоотдачи, а также внешнего притока инвестиций и новых технологий. Построим с помощью численного алгоритма, реализованного в системе компьютерной алгебры Matlab, осциллограммы и фазовые траектории. Покажем, что модифицированная модель обладает потенциалом для дальнейших исследований.

Постановка задачи, методика решения и его свойства

В статье С.В. Дубовского [7] была предложена следующая математическая модель длинных волн Н.Д. Кондратьева (К-волн):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda n x(t)(x(t)-1)(y(t)-y^*), \\ \dot{y}(t) = n(1-n)y^2(t)(x(t)-x^*), \\ x(0) = a, y(0) = b. \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t), y(t) \in C^1[0,T]$ — функции эффективности новых технологий и фондоотдачи, $t \in [0,T]$ — время процесса, $T > 0$ — время моделирования, $0 < n < 1$ — норма накопления, $\lambda > 0$ — постоянный коэффициент, который определяется из статистики, x^* и y^* — постоянные значения, которые соответствуют точке покоя системы, a и b — заданные постоянные, которые определяют начальные условия, $\dot{x}(t) = dx/dt$, $\dot{y}(t) = dy/dt$.

Определение 1. Систему нелинейных дифференциальных уравнений (1), представляющую собой задачу Коши, мы будем называть классической математической моделью С.В. Дубовского.

Замечание 1. Заметим, что классическая математическая модель С.В. Дубовского (1) описывает свободные нелинейные колебания эффективности новых технологий и фондоотдачи.

Определение 2. Односвязной областью U называется область, в которой все замкнутые пути гомотопны нулю, т.е. их можно непрерывным образом стянуть в точку. Это означает, что область не содержит дырок и самопересечений.

Пусть непрерывные функции $f_1(x,y) = -\lambda n x(t)(x(t)-1)(y(t)-y^*)$ и $f_2(x,y) = n(1-n)y^2(t)(x(t)-x^*)$, а $f = (f_1, f_2)$ — векторное поле, заданное в односвязной области $U \subset R^2$.

Теорема 1. *(Теорема Бендиксона [12]) Если дивергенция векторного поля на плоскости знакопостоянна и отлична от нуля в некоторой односвязной области, то отсутствуют замкнутые фазовые кривые этого поля, целиком лежащие в этой области.*

Замечание 2. В частности, это теорема утверждает, что в области отсутствуют предельные циклы.

Теорема 2. *Автономная система дифференциальных уравнений (1) может обладать замкнутыми фазовыми траекториями.*

Доказательство. Используя критерий Бендиксона [12], мы можем показать, что дивергенция векторного поля f меняет свой знак и не тождественно равна нулю в односвязной области.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -2\lambda n\left(x - \frac{1}{2}\right)(y - y^*), \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2n(1-n)y(x - x^*),$$

тогда

$$div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2n\left(\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)(y - y^*) - (1-n)y(x - x^*)\right). \quad (2)$$

Из экономического смысла параметров задачи: $x(t) > 0, y(t) > 0, \lambda > 0$, $0 < n < 1$ и мы можем заключить, что может происходить смена знака функции (2) в односвязной области $U \subset R^2$. Действительно из (2), если выбрать

$$\begin{cases} 0.5 < x < x_c = x^*, \\ 0 < y < y_c = \dfrac{\lambda y^*}{\lambda - 1 + n}. \end{cases} \tag{3}$$

тогда дивергенция векторного поля f будет менять свой знак в односвязной области. Построим средствами визуализация среды компьютерной математики Maple пример односвязной области, в которой выполняются смена знака для значение параметров (1): $n = 0.2, \lambda = 2.25, x^* = 1.3, y^* = 0.5$.

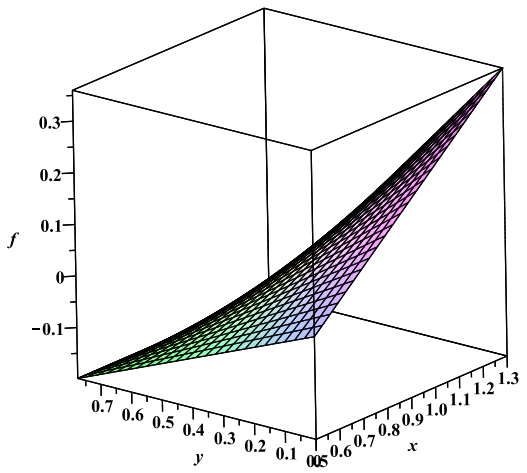


Рис. 1. Пример односвязной области для $x \in [0.5, 1.3]$, $y \in [0, 0.775]$.

[Figure 1. An example of a simply connected region for $x \in [0.5, 1.3]$, $y \in [0, 0.775]$.]

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что система (1) может обладать замкнутыми фазовыми траекториями. □

Теорема 2 указывает на, то что классическая математическая модель С.В. Дубовского (1) может быть пригодна для исследования циклических режимов, которые могут возникать в теории экономических циклов и кризисов.

Построим осциллограммы и фазовые траектории для классической модели С.В. Дубовского при различных значениях начальных условий и параметра λ. Для этой цели воспользуемся одношаговым методом Адамса-Башфорта-Мултона 2-го порядка сходимости (правило трапеции) [13], который был реализован в системе компьютерной алгебры Matlab.

Расчетные формулы имеют вид:

$$\begin{cases} x_{k+1}^p = x_0 - \lambda n \tau \sum\limits_{j=0}^{k} x_j^p \left(x_j^p - 1\right)\left(y_j^p - y^*\right), \\ y_{k+1}^p = y_0 + n\left(1-n\right) \sum\limits_{j=0}^{k} \left(y_j^p\right)^2 \left(x_j^p - x^*\right), \\ x_{k+1} = x_0 - \dfrac{\lambda n \tau}{2} \left(x_{k+1}^p \left(x_{k+1}^p - 1\right)\left(y_{k+1}^p - y^*\right) + \sum\limits_{j=0}^{k} \rho x_j \left(x_j - 1\right)\left(y_j - y^*\right) \right), \\ y_{k+1} = y_0 + \dfrac{n\left(1-n\right)\tau}{2} \left(\left(y_{k+1}^p\right)^2 \left(x_{k+1}^p - x^*\right) + \sum\limits_{j=0}^{k} \rho \left(y_j\right)^2 \left(x_j - x^*\right) \right), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь τ — шаг расчетной сетки. Первые две формулы (4) являются предиктором, остальные – корректором. Весовые коэффициенты имеют вид:

$$\rho = \begin{cases} 1, j = 0, \\ 2, 1 \leq j \leq k, \\ 1, j = k+1. \end{cases}$$

Визуализация результатов моделирования приведена на рис.2, а значения параметров модели были взяты из работы С.В. Дубовского [7].

Из рис. 2 мы видим, что увеличение значения параметра λ, а также значений x_0 приводят к увеличению значений эффективности новых технологий (рис.2а) и фондоотдачи (рис.2б). Это в свою очередь приводит увеличению орбиты фазовой траектории, которая является замкнутой (точка равновесия системы (1) (x^*, y^*) является центром). Периоды фазовых траекторий (рис.2с) согласно работе [7]: $T = 50.1, 54.9, 60.6$ лет, а их направление обхода осуществляется против часовой стрелки.

Интерпретация экономического цикла дается по фазовому портрету (рис.2с), по аналогии со статьей [7]. Фазовый портрет можно представить в виде четырех квадрантов с центром в точке $(1.3, 0.5)$. В первом квадранте (северо-восточный координатный угол) из-за повышенной экономической активности истощается запас высокоэффективных новшеств, и система переходит во второй квадрант (движение против часовой стрелки). Во втором квадранте из-за пониженной эффективности новшеств снижается экономическая активность, и система переходит в третий квадрант. В третьем квадранте благодаря низкой экономической активности накапливается запас высокоэффективных новшеств, и система переходит в четвертый квадрант. В четвертом квадранте благодаря высокой эффективности новшеств начинается рост экономической активности, и система переходит в первый квадрант, цикл повторяется.

Замечание 3. Необходимо отметить, что моделируемые циклы на рис.2. также обладают асимметрией. Это свойство циклов связано с разными временами выхода в тот или иной квадрант в силу того, что циклы имеют эллиптические орбиты.

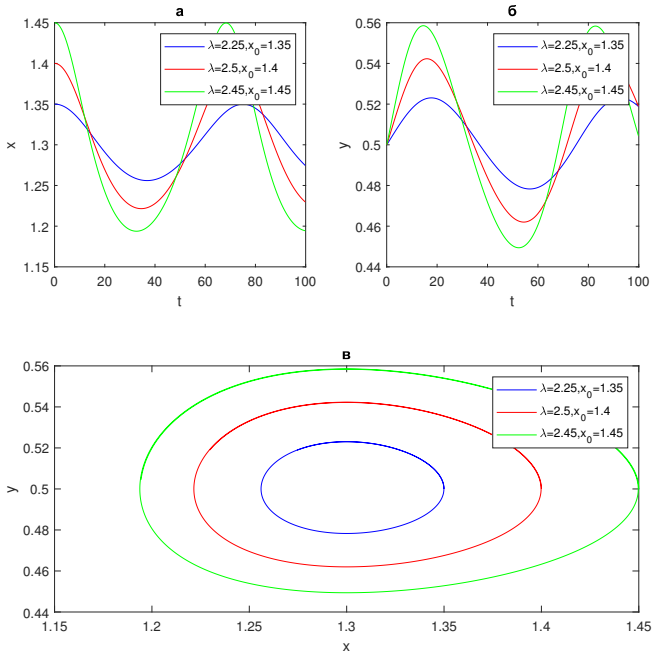


Рис. 2. Осциллограммы и фазовые траектории системы (1), построенные при различных значениях λ и $x_0 = a$.

[Figure 2. Oscillograms and phase trajectories of the system (1), constructed for various values of λ and $x_0 = a$.]

Замечание 4. Отметим, что по мнению А.А. Акаева [9], результаты, полученные С.В. Дубовским в работе [7] были несколько завышены, причем их погрешность достигала 50

Исходя из выше сказанного, возникает необходимость в уточнении классической модели С.В. Дубовского (1). Такое уточнение может быть основано на зависимости нормы накопления от фондоотдачи, введении внешних факторов – притоков инвестиций и новых технологий или управленческих решений, а также наличие эффектов наследственности (памяти).

Норма накопления как функция от фондоотдачи в модели (1)

В работе [7] С.В. Дубовский указывал, на то что норма накопления в системе (1) может быть функцией от фондоотдачи вида:

$$n(y(t)) = \frac{l_1(l_2 - 1)}{y(t)}, \tag{5}$$

где $l_1 > 0, l_2 > 0$ — коэффициенты, которые определяются из статистических данных [15]. Однако зависимость (5) в своей работе [7] С.В. Дубовский не исследовал.

Замечание 5. В статье [7] было проведено исследование зависимости (5), получены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров, но не была дана их экономическая интерпретация.

Замечание 6. Необходимо отметить, что в более поздней работе [14] С.В. Дубовский предложил использовать другую зависимость:

$$n(y(t)) = l_1 - \frac{l_2}{y(t)}, \tag{6}$$

где $l_1 > 0, l_2 > 0$ — константы, которые также определяются из статистики [15].

Однако и в работе [14] не было проведено исследований зависимости (6). Поэтому в этом пункте мы устраним этот недостаток – проведем исследование классической модели С.В. Дубовского (1) с учетом зависимостей (5) и (6), а также дадим их экономическую интерпретацию.

Сделаем ряд замечаний по применению функциональных зависимостей (5) и (6) в классической математической модели Дубовского С.В.

Замечание 7. В силу того, что норма накопления должна быть положительна, то для зависимости (5) выполняется условие $l_2 > 1$, а для зависимости (6) условие $l_1 > \frac{l_2}{y(t)}$.

Замечание 8. Заметим, что согласно зависимости (5) при увеличении фондоотдачи норма накопления уменьшается. Уменьшение нормы накопления в зависимости от фондоотдачи означает, что при увеличении эффективности использования фондоотдачи организация может снизить объем собственных средств, которые необходимо накапливать для обеспечения стабильного функционирования и развития бизнеса. Это позволяет оптимизировать структуру капитала и повысить рентабельность инвестиций. Уменьшение нормы накопления может быть особенно важным для организаций с ограниченными финансовыми ресурсами, поскольку позволяет эффективнее использовать доступные средства.

Замечание 9. Также можно заметить, что зависимость (6) указывает на увеличение нормы накопления от фондоотдачи. Увеличение нормы накопления в зависимости от фондоотдачи означает, что чем выше уровень эффективности использования фондоотдачи, тем больше средств компания может накапливать для будущих инвестиций или финансовых целей. Повышение фондоотдачи может привести к увеличению прибыли, что в свою очередь позволяет организации увеличивать объем накоплений. Это важный аспект финансовой стратегии организации, поскольку показывает, как эффективно используются имеющиеся ресурсы для достижения финансовых целей.

Проведем исследование зависимостей (5) и (6). С учетом зависимости (5) или (6) классическая модель С.В. Дубовского (1) принимает вид ($y(t) \neq 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda n(y(t))\, x(t)\,(x(t) - 1)\,(y(t) - y^*), \\ \dot{y}(t) = n(y(t))\,(1 - n(y(t)))\, y^2(t)\,(x(t) - x^*), \\ x(0) = a, y(0) = b. \end{cases} \tag{7}$$

Задача Коши (7) также, как и задача (1) может обладать замкнутыми фазовыми траекториями. Это можно показать с помощью критерия Бендиксона (Теорема 1).



а) б)

Рис. 3. Примеры односвязной области: а) для зависимости (5); б) для зависимости (6).

[Figure 3. Examples of a simply connected region: a) for dependence (5); b) for dependence (6).]

На рис.3 приведены примеры односвязных областей, в которых дивергенция векторного поля меняет свой знак: рис.3а — функция нормы накопления (5), а рис.3б — функция норма накопления (6).

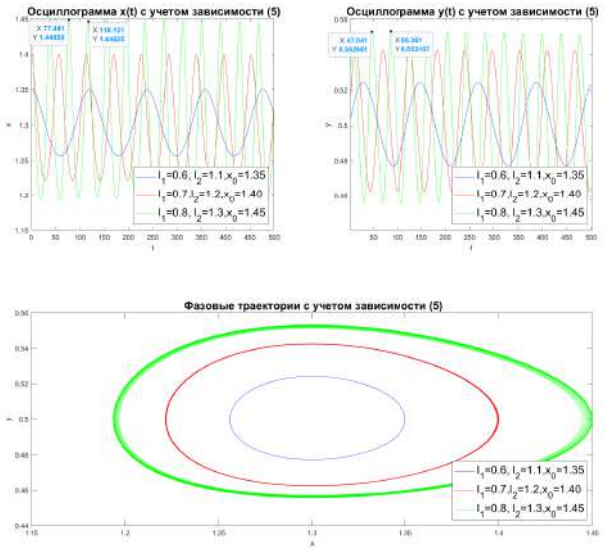


Рис. 4. Примеры осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (5). Точки на осциллограмме – координаты между двумя максимальными пиками.

[Figure 4. Examples of oscillograms and phase trajectories for the dependence (5). The points on the oscillogram are the coordinates between the two maximum peaks.]

Решение задачи (6) будем искать с помощью численного одно шагового метода Адамса-Башфорта-Мултона второго порядка сходимости (метод трапеций). Фазовые траектории, полученные согласно численному методу для модели (7), приведены на рис.4 с учетом зависимостей (5) и (6).

На рис.4 приведен расчет осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (5) нормы накопления от фондоотдачи с учетом различных значений l_1, l_2 и x_0. Можно заметить, что в отличие от рис.2в, норма накопления усиливает асимметричность цикла.

Также можно отметить, что рост значений параметров l_1, l_2 влияет на частоту и следовательно на период колебаний. Пусть временная ось составляет количество лет. Тогда, например, мы видим, что для набора значений: $l_1 = 0.8, l_2 = 1.3, x_0 = 1.45$ период колебаний составляет $T \approx 40$ лет.

Действительно для эффективности новых технологий $x(t)$: $T = 118.121 - 77.441 = 40,68$ лет, а для эффективности фондоотдачи $y(t)$: $T = 86.361 - 47.041 = 39.32$ лет. Данное значение периода соответствует указанному Акаевым А.А. в статье [9], в которой автор утверждает, что продолжительность циклов Н.Д. Кондратьева в XX веке была в среднем 40 лет.

На рис.5 приведен расчет осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (6) при различных значениях l_1, l_2 и x_0.

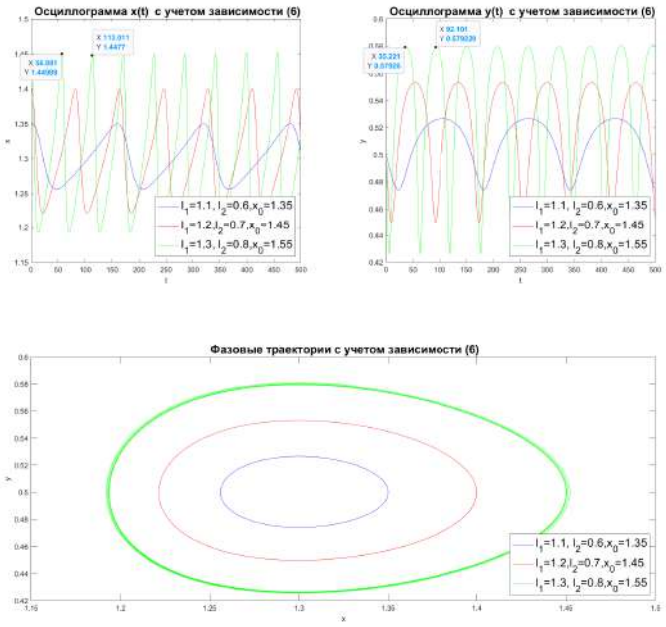


Рис. 5. Примеры осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (6). Точки на осциллограмме – координаты между двумя максимальными пиками.

[Figure 5. Examples of oscillograms and phase trajectories for the dependence (6). Points on the oscillogram are coordinates between two maximum peaks.]

Мы видим, что фазовые траектории являются замкнутыми. Осциллограммы на рис.5 отличаются от осциллограмм рис.4, однако фазовые траектории обладают похожими орбитами. Здесь также увеличение значений l_1, l_2 и x_0 приводит к большей асимметрии — цикла, это также отражается на периоде колебаний. Период колебаний, например, для цикла с параметрами $l_1 = 1.3, l_2 = 0.8, x_0 = 1.45$ составляет $T \approx 56$ лет. Такие значения периодов колебаний получал С.В. Дубовский в своей работе [7], однако эти значения были несколько завышены по сравнению с реальным экономическим циклом.

Однако несмотря на это, все выше сказанное, указывает на то, что период того или иного цикла можно оценивать исходя из зависимостей (5) и (6), т.е. при верном выборе значений параметров l_1 и l_2. Напомним, что значения этих параметров берут из статистики.

В случае, когда выбранные значения параметров дают неверное значение периода цикла, необходимо производить уточнение модели. Например, учитывать какие-то свойства рассматриваемой системы. В качестве таковых может быть учтено внешнее воздействие на систему (1), которое определяет приток внешних инвестиций и новых технологий или управленческих решений.

Приток внешних инвестиций и новых технологий в классической модели С.В. Дубовского (1)

Приток внешних инвестиций и новых технологий можно учесть в математической модели (7) посредством введения в ее правые части функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda n(y(t))\, x(t)\,(x(t)-1)\,(y(t)-y^*) + f_1(t), \\ \dot{y}(t) = n(y(t))\,(1-n(y(t)))\, y^2(t)\,(x(t)-x^*) + f_2(t), \\ x(0) = a, y(0) = b. \end{cases} \tag{8}$$

Замечание 10. Математическая модель (8) описывает вынужденные нелинейные колебания эффективности новых технологий и фондоотдачи.

Замечание 11. В нашей работе мы будем рассматривать гармонические функций $f_1(t) = \delta_1 \cos(\omega_1 t)$ и $f_2(t) = \delta_2 \cos(\omega_2 t)$ в модели (8), где δ_1 и δ_2 — амплитуды, а ω_1 и ω_2 — частоты. Выбор таких зависимостей обусловлен тем, что приток внешних инвестиций и новых технологий имеет периодический характер. Кроме, того такие зависимости приводят к возникновению эффектов резонанса в колебательной системе, что имеет важное прикладное значение. В работе мы покажем эти свойства с помощью компьютерного моделирования.

С помощью численного алгоритма Адамса-Башфорта-Мултона второго порядка сходимости для решения задачи Коши (8) мы можем построить при различных значениях ее параметров с учетом зависимости (5) осциллограммы и фазовые траектории.

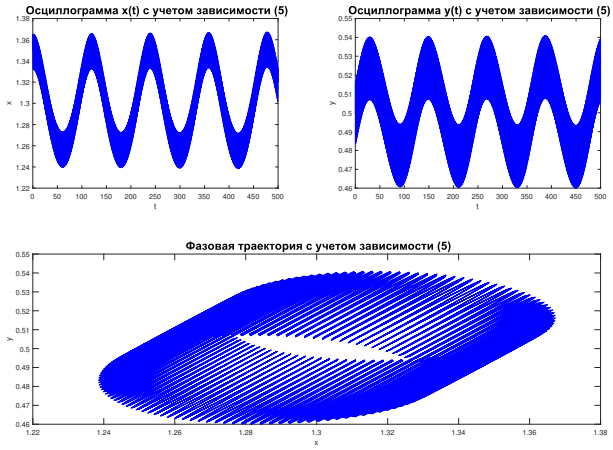


Рис. 6. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (5) с учетом значения параметров: $\delta_1 = \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 6$.

[Figure 6. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (5) taking into account the parameter values: $\delta_1 = \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 6$.]

На рис. 6 приведен пример, построения осциллограмм и фазовой траектории, полученной при следующих значениях параметров:$T = 500, \tau = 0.01, \lambda = 2.25, l_1 = 0.6, l_2 = 1.1$, $x_0 = 1.35, y_0 = 0.5$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 6$.

Отметим, что фазовая траектория является замкнутой, кроме того она испытывает колебания за счет внешних гармонических функций.

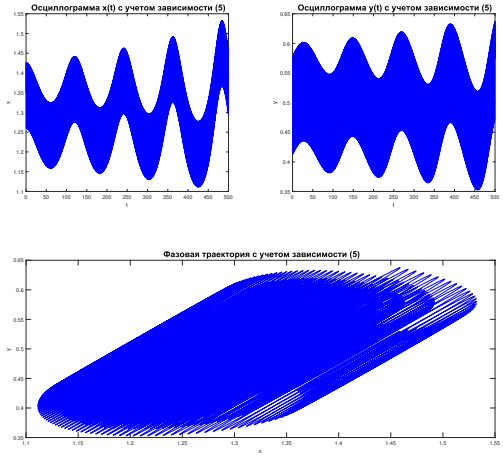


Рис. 7. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (5) с учетом значения параметров: $\delta_1 = \delta_2 = 0.5, \omega_1 = \omega_2 = 6$.

[Figure 7. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (5) taking into account the parameter values: $\delta_1 = \delta_2 = 0.5, \omega_1 = \omega_2 = 6$.]

На рис.7 приведен другой пример при значениях амплитуд $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$, остальные параметры остались без изменения. Здесь мы видим на осциллограммах, рост амплитуды собственных колебаний. Фазовая траектория является незамкнутой и имеет вид раскручивающейся спирали. Также, как и на рис.7 фазовая траектория испытывает колебания за счет внешних гармонических функций.

Для зависимости (6), также могут возникать как циклические колебания (рис.8), так и эффекты резонанса (рис.9).

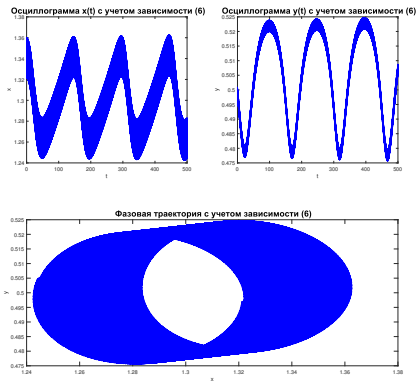


Рис. 8. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (6) с учетом значения параметров: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 50$.

[Figure 8. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (6) taking into account the parameter values: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 50$.]

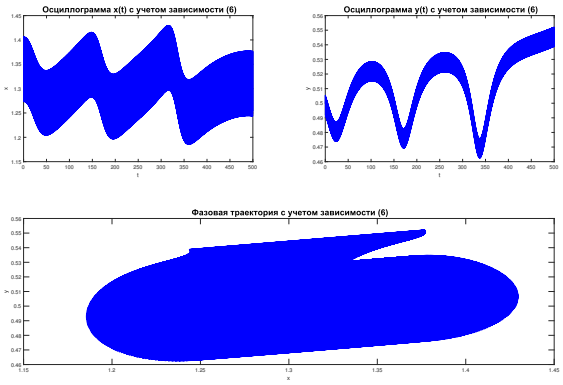


Рис. 9. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (6) с учетом значения параметров: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 15$.

[Figure 9. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (6) taking into account the parameter values: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 15$.]

На рис. 9 мы видим, что фазовая траектория не замкнутая, она раскручивается в силу того, что амплитуда колебаний растет в условиях резонанса. Кроме того, сама траектория испытывает колебания за счет внешнего гармонического воздействия.

На рис. 6-9 создается впечатление, что фазовая траектория представляет собой объемную фигуру. Это связано с тем, что граница фазовой траектории также испытывает колебания и время t здесь становится третьей степенью свободы. Необходимо отметить, что функции $f_1(t) = \delta_1 \cos(\omega_1 t)$ и $f_2(t) = \delta_2 \cos(\omega_2 t)$ могут давать более сложные циклы (рис. 10).

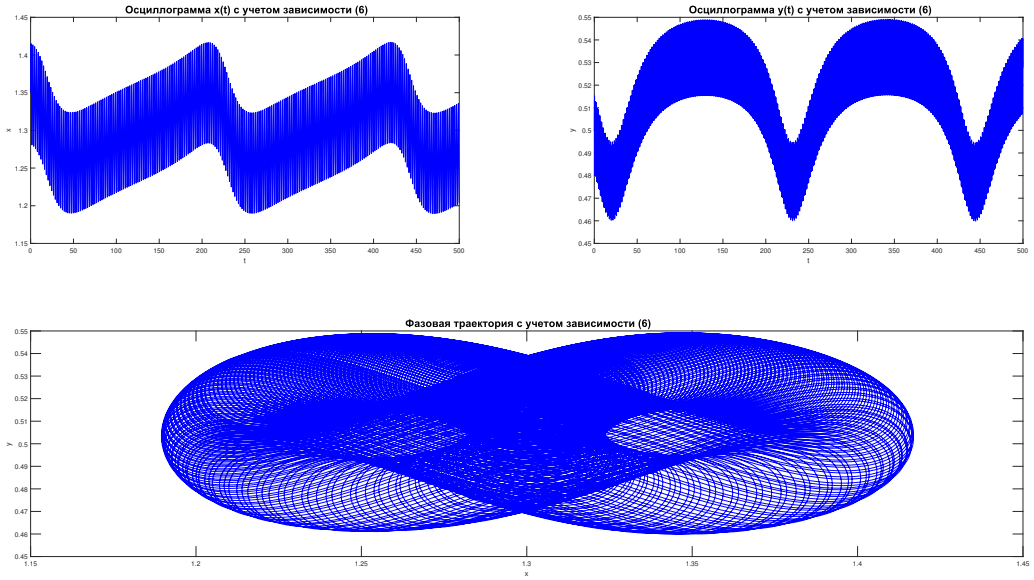


Рис. 10. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (6) с учетом значения параметров: $\delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = 3, \omega_2 = 6$.

[Figure 10. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (6) taking into account the parameter values: $\delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = 3, \omega_2 = 6$.]

Эти сложные циклы похоже на фигуры Лиссажу, форма которых определяется отношением частот и . Известно, что если отношение частот рациональное число, то траектория будет замкнутой, а если иррациональным, то не будет. В любом случае изучение подобных фигур заслуживает внимание.

В работах автора [16–22] было предложено обобщение классической модели С.В. Дубовского с учетом эффекта наследственности. Это свойство указывает на то, что система помнить оказанное на нее воздействие и с точки зрения математики оно описывается с помощью дробной производной [23–29]. В работе [21] показано, что введение дробных производных в систему (1) приводит к затухающим колебаниями и поэтому для того, чтобы существовали циклические колебания необходимо наличие внешнего источника типа и . Это дает возможность фазовой траектории через некоторое время выходить на предельный цикл.

Автор благодарит за ценные советы и замечания своего руководителя д.ф.-м.н., доцента Паровика Р.И., которые послужили улучшению статьи.

Заключение

В работе была исследована классическая модель С.В. Дубовского с некоторыми модификациями. В частности, норма накопления зависела от фондоотдачи, а также был произведен учет внешний приток инвестиции и новых технологий. Показано с помощью критерия Бендиксона, что классическая модель С.В. Дубовского и ее модификации могут приводить к замкнутым фазовым траекториям, и, следовательно, их можно использовать для изучения экономических циклов. С помощью численного алгоритма Адамса-Башфорта-Мултона были рассчитаны осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что норма накопления как функция от фондоотдачи позволяет корректировать период цикла. Внешний приток инвестиций и новых технологий подчинялся гармоническому закону. Здесь помимо замкнутых фазовых траекторий, могут возникать незамкнутые фазовые траектории, которые возникают в результате резонанса. Также отношение частот определяет форму фазовых траекторий, а сами траектории похожи на фигуры Лиссажу. Поэтому исходя из выше сказанного, модификация (8) классической модели С.В. Дубовского (1) обладает более богатыми свойствами, которые заслуживают отдельного изучения.

Список литературы

1. Clarke H. *Physical economy: a preliminary inquiry into the physical laws governing the periods of famines and panics*: Verlag nicht ermittelbar, 1847.
2. Jevons W.S. The solar-commercial cycle, *Nature*, 1882. vol. 26, no. 662, pp. 226-228.
3. Кондратьев Н. Д. *Большие циклы конъюнктуры. Избранные работы.* М.: Издательство Юрайт, 2021. 490 с.
4. Alexander M. A. *The Kondratiev cycle: A generational interpretation.* Bloomington: IUniverse, 2002. 314 pp.
5. Макаров Д.В., Паровик Р.И. *Теория длинных волн Кондратьева: научные школы, методологические подходы, математические модели.* М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2023. 116 с.
6. Меньшиков С. М., Клименко Л. А. *Длинные волны в экономике: когда общество меняет кожу.* М.: Международные отношения, 1989. 226 с.
7. Дубовский С. В. Объект моделирования цикл Кондратьева, *Математическое моделирование*, 1995. Т. 7, № 6, С. 65-74.
8. Hirooka M. *Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective.* Cheltenham, Northampton: Edward Elgar, 2006.
9. Акаев А. А. Математические основы инновационно-циклической теории экономического развития Шумпетера-Кондратьева / *Кондратьевские волны*, Т. 1, 2012, С. 314-341.
10. Гладких И. П. *Длинные волны в постиндустриальной экономике: Теоретические основы и особенности.* Саарбрюккен: Lambert Academic, 2012.
11. Макаров Д.В. Экономико-математическое моделирование инновационных систем, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014. № 1(8), С. 66-70.
12. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 1901. vol. 24(1), pp. 1–88.

13. Iserles A. *A first course in the numerical analysis of differential equations*, vol. 44: Cambridge university press, 2009. 459 pp.
14. Дубовский С. В. Моделирование циклов Кондратьева и прогнозирование кризисов / *Кондратьевские волны*, Т. 1, 2012, С. 179-188.
15. Столерю Л. *Равновесие и экономический рост.* М.: Статистика, 1974. 472 с.
16. Макаров Д. В. Об одной эредитарной динамической системе, моделирующей экономические циклы, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016. №2 (13), С. 55-61.
17. Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus, *Journal of Internet Banking and Commerce*, 2016. vol. 21, no. S21, S6.
18. Макаров Д. В., Паровик Р. И. Обобщенная математическая модель Дубовского для прогнозирования экономических кризисов, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2016. №1, С. 74-77.
19. Makarov D., Parovik R. Numerical modeling of Kondratyev's long waves taking into account heredity, *AIP Conference Proceedings*, 2021. vol. 2365, 020007 DOI: 10.1063/5.0056847.
20. Makarov D.V., Parovik R.I. A computer program for the numerical analysis of economic cycles within the framework of the Dubovsky generalized model, *AIP Conference Proceedings*, 2022. vol. 2467, 060015 DOI: 10.1063/5.0092376.
21. Макаров Д. В., Паровик Р. И. Дробная математическая модель С.В. Дубовского и экономические циклы, *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2023. №5(52), С. 8-25..
22. Макаров Д.В., Паровик Р.И. Дробная математическая модель С.В. Дубовского с эффектом переменной наследственности, *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2023. №6(53), С. 5-22..
23. Tarasov V.E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus, *Mathematics*, 2019. vol. 7 DOI: 10.3390/ math7060509.
24. Oldham K. B., Spanier J. *The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. London: Academic Press, 1974. 240 pp.
25. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
26. Miller K. S., Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* New York: A Wiley-Interscience publication, 1993. 384 с.
27. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
28. Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
29. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.

Информация об авторе



Макаров Данил Васильевич – младший научный сотрудник международной интегративной научно-исследовательской лаборатории экстремальных явлений Камчатки, г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ORCID 0000-0003-1033-7611.

References

[1] Clarke H. Physical economy: a preliminary inquiry into the physical laws governing the periods of famines and panics. Verlag nicht ermittelbar. 1847

[2] Jevons W.S. The solar-commercial cycle. Nature. 1882. vol 26. no. 662. p. 226-228

[3] Kondrat'yev N. D. Bol'shiye tsikly kon"yunktury. Izbrannyye raboty [Large cycles of market conditions. Selected works.] Moscow, Izdatel'stvo Yurayt. 2021. 490 p. (In Russian)

[4] Alexander M. A. The Kondratiev cycle: A generational interpretation. Bloomington. IUniverse. 2002. 314 p.

[5] Makarov D.V., Parovik R.I. Teoriya dlinnykh voln Kondrat'yeva: nauchnyye shkoly, metodologicheskiye podkhody, matematicheskiye modeli [Kondratieff's theory of long waves: scientific schools, methodological approaches, mathematical models]. Moscow. Izdatel'skiy dom Akademii Yestestvoznaniya. 2023. 116 p. (In Russian)

[6] Men'shikov S. M., Klimenko L. A. Dlinnyye volny v ekonomike: kogda obshchestvo menyayet kozhu [Long waves in economics: when society changes its skin]. Moscow. Mezhdunarodnyye otnosheniya, 1989. 226 p.

[7] Dubovsky S. V. Modeling object Kondratieff cycle. Math. modeling. 1995. vol 7. no. 6. p. 65-74 (In Russian)

[8] Hirooka M. Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective. Cheltenham, Northampton. Edward Elgar. 2006

[9] Akayev A. A. Matematicheskiye osnovy innovatsionno-tsiklicheskoy teorii ekonomicheskogo razvitiya Shumpetera-Kondrat'yeva. Kondrat'yevskiye volny. vol. 1. 2012. p. 314-341 (In Russian)

[10] Gladkikh I. P. Dlinnyye volny v postindustrial'noy ekonomike: Teoreticheskiye osnovy i osobennosti [Long waves in the post-industrial economy: Theoretical foundations and features]. Saarbryukken. Lambert Academic. 2012 (In Russian)

[11] Makarov D.V. Economic and mathematical modeling of innovative systems. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2014. no. 1(8). p. 66-70 (In Russian)

[12] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. 1901. vol. 24(1). p. 1–88

[13] Iserles A. A first course in the numerical analysis of differential equations. vol. 44. Cambridge university press. 2009. 459 p.

[14] Dubovskiy S. V. Modelirovaniye tsiklov Kondrat'yeva i prognozirovaniye krizisov. Kondrat'yevskiye volny. vol. 1. 2012. p. 179-188 (In Russian)

[15] Stoleryu L. Ravnovesiye i ekonomicheskiy rost [Equilibrium and economic growth]. Moscow. Statistika. 1974. 472 p. (In Russian)

[16] Makarov D. V. About one hereditary dynamic system modeling economic cycles. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. no. 2 (13). p. 55-61 (In Russian)

[17] Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus. Journal of Internet Banking and Commerce. 2016. vol. 21. no. S21, S6.

[18] Makarov D. V., Parovik R. I. Obobshchennaya matematicheskaya model' Dubovskogo dlya prognozirovaniya ekonomicheskikh krizisov. Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya. 2016. no. 1. p. 74-77. (In Russian)

[19] Makarov D., Parovik R. Numerical modeling of Kondratyev's long waves taking into account heredity. AIP Conference Proceedings. 2021. vol. 2365. 020007. DOI: 10.1063/5.0056847

[20] Makarov D.V., Parovik R.I. A computer program for the numerical analysis of economic cycles within the framework of the Dubovsky generalized model. AIP Conference Proceedings. 2022. vol. 2467. 060015. DOI: 10.1063/5.0092376

[21] Makarov D. V., Parovik R. I. Fractional mathematical model S.V. Dubovsky and economic cycles. Problems of computational and applied mathematics. 2023. no. 5(52). pp. 8-25. (In Russian)
[22] Makarov D.V., Parovik R.I. Fractional mathematical model S.V. Dubovsky with the effect of variable heredity. Problems of computational and applied mathematics. 2023. no. 6(53). pp. 5-22. (In Russian)
[23] Tarasov V.E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus. Mathematics. 2019. vol. 7 DOI: 10.3390/ math7060509
[24] Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. London. Academic Press. 1974. 240 p.
[25] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk. Nauka i tekhnika. 1987. 688 p. (In Russian)
[26] Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York. A Wiley-Interscience publication. 1993. 384 p.
[27] Nakhushev A.M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p. (In Russian)
[28] Pskhu A.V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional partial differential equations]. Moscow. Nauka. 2005. 199 p. (In Russian)
[29] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam. Elsevier. 2006. 523 p.

Information about author



Makarov Danil Vasilyevich – Junior Researcher at the International Integrative Research Laboratory for Extreme Phenomena in Kamchatka, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, ORCID 0000-0003-1033-7611.