Динамические системы

Решение дифференциально-алгебраических систем уравнений с помощью аппроксимации Паде матричной экспоненты

Ю.А. Бурцев

Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова, г. Новочеркасск, Россия

Аннотация. Рассмотрено применение новых высокоточных численных методов на основе матричной экспоненты к решению линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений. Расчет состояния системы на каждом шаге интегрирования в зависимости от порядка метода сводится к решению одной или нескольких систем линейных алгебраических уравнений. Методы основаны на разложении аппроксимации Паде матричной экспоненты на простейшие дроби. Предложенные формулы позволяют исключить преобразование дифференциально-алгебраической системы уравнений в систему обыкновенных дифференциальных уравнений на этапе решения задачи. Новые методы отличаются простотой и требуют в несколько раз меньше вычислительной работы, чем методы типа Рунге-Кутты, эквивалентные по области устойчивости и точности.

Ключевые слова: *численные методы, дифференциально-алгебраические системы уравнений, матричная экспонента, аппроксимация Паде.*

DOI: 10.14357/20790279240304 **EDN: HKTOYE**

Введение

В предыдущей публикации [1] представлено семейство новых A-устойчивых и L-устойчивых [2] высокоточных численных методов решения классической задачи Коши для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ). Однако эти же методы с помощью несложных преобразований можно применять и непосредственно для решения дифференциально-алгебраических систем уравнений (ДАСУ), которые часто встречаются на практике. В этих системах имеются линейные дифференциальные уравнения первого порядка, а также линейные алгебраические уравнения. Предлагаемые методы для преобразования ДАСУ в СОДУ используют варианты метода пространства состояний и метода ε-вложения [2, с. 414-422], приспособленные для новых методов решения СОДУ. Но эти преобразования нужны лишь на этапе вывода уравнений и формул. Окончательные формулы для решения ДАСУ имеют понятную простую структуру и выводятся один раз.

1. Анализ состояния проблемы. Актуальность темы

Самые простые и часто используемые способы привести СОДУ или ДАСУ к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) заключаются в применении конечно-разностных формул неявного метода Эйлера, метода трапеций или метода 2-го порядка на основе формул дифференцирования назад (ФДН). Однако эти методы имеют невысокую точность, а два последних – особенно большие погрешности дают при решении жестких, колебательных и жестко-колебательных систем. Между тем, такие системы часто встречаются на практике. Методы на основе ФДН с порядком больше 2 и явные методы без применения специальных приемов имеют ограничения на шаг интегрирования, что неудобно во многих практических случаях. Для решения ДАСУ и СОДУ классическими неявными методами высоких порядков точности (например, методами типа Рунге-Кутты) проблему представляют большие вычислительные затраты, а также сложность теории и алгоритмов. Для численно-аналитических методов необходима сложная процедура преобразования ДАСУ в СОДУ. Известные компьютерные программы для расчетов технических систем нередко дают решения с большими погрешностями или даже качественно неверные [3, 4].

Очень обстоятельные исследования в области ДАСУ были проделаны Ю. Е. Бояринцевым и его коллегами в работах [5 – 10] и других. Для решения ДАСУ предложен эффективный метод на основе так называемых базовых матриц, однако этот метод требует сложных дополнительных построений.

Глубокий анализ различий свойств и методов решения ДАСУ и СОДУ на примерах неявного метода Эйлера и методов на основе ФДН представлен в статье [11]. Отмечены многие еще нерешенные проблемы, особенно для ДАСУ с индексом 3 и выше. Сингулярно-возмущенные задачи образуют особый класс задач, содержащих параметр ε. Когда этот параметр мал, соответствующая СОДУ является жесткой. Когда ε стремится к нулю, СОДУ переходит в ДАСУ. Методы построения асимптотических приближений для сингулярно возмущенных задач оптимального управления предложены в работах [12, 13]. Однако эти методы используют очень сложный математический аппарат и ориентированы на специфические задачи теории управления. Анализ существующих методов решения СОДУ и ДАСУ также можно найти в работах [2, 3, 14].

Таким образом, создание простых высокоточных экономичных по вычислениям методов решения ДАСУ является актуальной задачей. Разработка новых методов была вызвана практической необходимостью расчетов электрических цепей [15].

2. Постановка задачи

Рассмотрим ДАСУ

$$\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{x}' = \begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{Q}\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где $\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{Q}\end{bmatrix}$ – некоторые постоянные в пределах шага интегрирования квадратные матрицы одного размера, причем число строк матриц **V** и **P** равно числу элементов вектора **w**; **x** – неизвестная вектор-функция времени t, **w** и **g** – заданные вектор-функции. Задача заключается в том, чтобы получить семейство простых высокоточных экономичных по вычислениям A-устойчивых и L-устойчивых численных методов для ее решения, исключающих преобразование ДАСУ в СОДУ на этапе решения задачи.

Методы на основе диагональных аппроксимаций Паде матричной экспоненты [2, 16] (у которых степень числителя равна степени знаменателя) являются A-устойчивыми (не имеют ограничений на шаг интегрирования) [2]. Но они склонны к раскачке паразитных колебаний, если число точек интегрирования недостаточно для адекватного расчета жесткой части решения. Эти методы хорошо подходят для задач с длительными слабозатухающими колебаниями. Методы на основе субдиагональных аппроксимаций Паде матричной экспоненты (степень знаменателя на единицу больше степени числителя) являются L-устойчивыми (A-устойчивыми с затухающей до нуля на бесконечности функцией устойчивости) [1]. Они хорошо демпфируют паразитные колебания, хотя имеют некоторую методическую погрешность по затуханию решения [2]. Поэтому L-устойчивые методы более приспособлены для жестких и жестко-колебательных задач. Однако высокоточные (с порядком точности 3 и более) L-устойчивые методы годятся также для колебательных задач.

Будем считать, что матрица $\begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ -\mathbf{Q}\end{bmatrix}$ обратима, матрица $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ -\mathbf{Q}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$ имеет простую структуру (N линейно независимых собственных векторов, где N – размерность матрицы), все собственные значения матрицы **A** различны и имеют отрицательную действительную часть, за исключением нулевого собственного значения кратности n, которому соответствуют n линейно независимых собственных векторов. Также примем, что функция **g** дифференцируема – далее мы будем рассматривать полиномиальное представление свободного члена уравнения. ДАСУ такого типа возникают в некоторых приложениях, в частности, при расчетах электрических цепей. Особые случаи и общие условия разрешимости задачи могут быть предметом дальнейших исследований.

Мы рассмотрим два способа решения – с помощью дифференцирования алгебраических уравнений и предельного перехода. Первый использует более очевидные преобразования уравнений и позволяет в случае необходимости в явном виде найти матрицу **A** эквивалентной СОДУ и ее собственные значения и таким образом ответить на вопрос об устойчивости задачи. Этот способ также дает возможность получить аналитические выражения для матричной экспоненты и аналитические решения. Второй способ по существу представляет собой вариант метода ε-вложения. Он дает более простые формулы для численного решения задачи.

3. Приведение ДАСУ к СОДУ с помощью дифференцирования алгебраических уравнений

Продифференцируем нижнюю матричную строку системы (1). Получим:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\mathbf{Q} \end{bmatrix} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Обозначим $\begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ -\mathbf{Q} \end{bmatrix} = \mathbf{G}$, $\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{H}_0$, $\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \mathbf{f}^+$,

тогда система (2) примет вид:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}' = \mathbf{H}_0\mathbf{x} + \mathbf{f}^+. \qquad (3)$$

Так как согласно принятому условию матрица **G** обратима, преобразуем систему (3) к СОДУ в форме Коши:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}_0\mathbf{x} + \mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}^+. \qquad (4)$$

В соответствии с ранее принятым обозначением $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}_0 = \mathbf{A}$. Для СОДУ (4) с матрицей **A** применимы известные критерии существования и устойчивости решения, основанные на свойствах собственных значений матрицы **A**. Однако в классической теории, как правило, не рассматриваются вырожденные матрицы СОДУ и нулевые собственные значения. Обратим внимание на то что нижняя часть матрицы $\mathbf{H}_0$ состоит из нулей. По этой причине среди собственных значений матрицы **A** также есть нуль, причем в общем случае его кратность больше 1.

Тем не менее, случай кратных чисто нулевых собственных значений для рассматриваемой матрицы простой структуры не представляет проблемы. Пусть λ_1, λ_2, ... λ_m – ненулевые собственные значения матрицы **A**, $\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = ... = \lambda_N = 0$ – нулевые собственные значения, **U** – фундаментальная матрица, столбцы которой $\mathbf{u}_k$ представляют собой собственные векторы матрицы **A**. Тогда аналитическое выражение матричной экспоненты для СОДУ (4) имеет вид

$$\exp(t\mathbf{A}) = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 t) & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 t) & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{U}^{-1},$$

а решение однородной СОДУ (4) (при $\mathbf{f}^+ = 0$) можно представить в форме:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k \exp(\lambda_k t) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathbf{u}_k \exp(\lambda_k t) + \sum_{k=m+1}^{N} c_k \mathbf{u}_k,$$

где c_k – некоторые коэффициенты, $\mathbf{c} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}(0)$. Так как согласно принятому условию $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ при $1 \le k \le m$, то первая сумма стремится к нулю с ростом t. Вторая сумма от t не зависит. Таким образом, СОДУ (4) устойчива, но не асимптотически.

Дифференцирование алгебраических уравнений как способ приведения ДАСУ к СОДУ, известно. Однако при этом, как правило, переменные, которых нет под знаком производной, исключаются из системы [2, 14]. С одной стороны, это исключение уменьшает размер полученной СОДУ. С другой стороны, оно требует дополнительных и зачастую непростых преобразований системы и затем отдельного расчета исключенных переменных. Предлагаемый способ не делает такого исключения.

4. Решение ДАСУ после дифференцирования алгебраических уравнений

Будем строить решение на основе матричной экспоненты [2, 17]. Как это обычно делается, положим начальный момент времени $t_0 = 0$, тогда в общем случае переменная t может принимать любое значение от 0 до некоторого малого шага интегрирования Δt. При расчете последовательных шагов по времени будем иметь в виду вычисление $x(\Delta t)$. Воспользуемся методом решения СОДУ на основе разложения аппроксимации Паде матричной экспоненты на простейшие дроби, предложенным в статье [1]. Вначале для краткости и ясности изложения рассмотрим L-устойчивую субдиагональную аппроксимацию третьего порядка точности R_{12} [1, 2, 16] (степень числителя 1, степень знаменателя 2):

$$\exp(t\mathbf{A}) \approx R_{12}(t\mathbf{A}) = (6\mathbf{E} - 4t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(6\mathbf{E} + 2t\mathbf{A}) = \\ = 2\mathrm{Re}[y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}],$$

где $z_1 = 2 - i\sqrt{2}$ – корень многочлена $6 - 4z + z^2$ (корень знаменателя), $y_1 = 1 + i\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ – коэффициент, $\mathbf{E}$ – единичная матрица. Затем представим решения для других аппроксимаций.

В работе [1] показано, что решение СОДУ в форме Коши

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \tag{5}$$

в случае, если функция в правой части в пределах каждого шага интегрирования $[0; \Delta t]$ (локально) задана в виде многочлена $\mathbf{f}(t) = \sum_{m=0}^{3} \mathbf{f}_m t^m$, с помощью аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{12} может быть представлено в виде:

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + t\,(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3))], \tag{6}$$

где $a_{10} = -\frac{1}{2} + i\sqrt{2}$; $a_{11} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}i$; $a_{12} = -\frac{1}{2}$;

$a_{13} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}i.$

Переходя от СОДУ (5) к СОДУ (4), подставим в формулу (6) вместо матрицы $\mathbf{A}$ матрицу $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}_0$ и вместо функции $\mathbf{f}(t)$ функцию $\mathbf{G}^{-1}\mathbf{f}^{+}(t)$, проделаем преобразования:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}_0 - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{-1}t\,(a_{10}\mathbf{f}^{+}_0 + a_{11}\mathbf{f}^{+}_1 t + a_{12}\mathbf{f}^{+}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}^{+}_3 t^3))] = \\ &= 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}_0 - z_1\mathbf{G}\mathbf{E})^{-1}\mathbf{G}(y_1\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}^{-1}t\,(a_{10}\mathbf{f}^{+}_0 + a_{11}\mathbf{f}^{+}_1 t + a_{12}\mathbf{f}^{+}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}^{+}_3 t^3))] = \\ &= 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{H}_0 - z_1\mathbf{G})^{-1}(y_1\mathbf{G}\mathbf{x}(0) + t\,(a_{10}\mathbf{f}^{+}_0 + a_{11}\mathbf{f}^{+}_1 t + a_{12}\mathbf{f}^{+}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}^{+}_3 t^3))].\end{aligned}$$

Далее заметим, что согласно системе (1) выполняется равенство $\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{g} = \mathbf{0}$ и поэтому

$$\mathbf{G}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ -\mathbf{Q}\end{bmatrix}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}\mathbf{V}\mathbf{x}(0)\\ -\mathbf{Q}\mathbf{x}(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{V}\mathbf{x}(0)\\ \mathbf{g}(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{x}(0) + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{g}(0)\end{bmatrix} = \mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + \mathbf{g}_0,\ \mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix}\mathbf{V}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

$\mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{g}(0)\end{bmatrix}$. По этой причине вместо вектора $-\mathbf{Q}\mathbf{x}(0)$, который в результате приближенного характера расчетов на очередном шаге интегрирования получается с некоторой погрешностью, для вычисления $\mathbf{G}\mathbf{x}(0)$ лучше взять точно известный вектор $\mathbf{g}(0)$. Этот прием к тому же сократит вычислительную работу. Для однородной системы $\mathbf{g}(0) = \mathbf{0}$, в этом случае вектор $\mathbf{g}_0$ не нужен. Итак, окончательно, для ДАСУ (1) вектор состояния системы $\mathbf{x}(t)$ с помощью аппроксимации матричной экспоненты R_{12} может быть получен по формуле:

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{H}_0 - z_1\mathbf{G})^{-1}(y_1(\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + \mathbf{g}_0) + t\,(a_{10}\mathbf{f}^{+}_0 + a_{11}\mathbf{f}^{+}_1 t + a_{12}\mathbf{f}^{+}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}^{+}_3 t^3))]. \tag{7}$$

5. Приведение ДАСУ к СОДУ предельным переходом и решение СОДУ

Обозначим $\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{Q}\end{bmatrix} = \mathbf{H}$, $\begin{bmatrix}\mathbf{w}\\ \mathbf{g}\end{bmatrix} = \mathbf{f}$, тогда система (1) примет вид:

$$\mathbf{G}_0\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{f}. \tag{8}$$

Матрица $\mathbf{G}_0$ необратима, поэтому добавим к ней некоторую матрицу $\varepsilon\mathbf{D}$, такую, чтобы матрица $\mathbf{G}(\varepsilon) = \mathbf{G}_0 + \varepsilon\mathbf{D}$ была обратима, здесь ε – малое число. По существу, таким образом мы применяем вариант метода ε-вложения [2]. Подставим в систему (8) вместо матрицы $\mathbf{G}_0$ матрицу $\mathbf{G}(\varepsilon)$ и преобразуем ее к СОДУ в форме Коши:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}\mathbf{f}. \tag{9}$$

Подобно тому как это сделано в п. 4, переходя от СОДУ (5) к СОДУ (9), подставим в формулу (6) вместо матрицы $\mathbf{A}$ матрицу $\mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}\mathbf{H}$ и вместо функции $\mathbf{f}(t)$ функцию $\mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}\mathbf{f}(t)$, проделаем преобразования для аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{12}:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}\mathbf{H} - z_1\mathbf{E})^{-1}(y_1\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}t\,(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3))] = \\ &= 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{G}(\varepsilon)\mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}(\varepsilon)\mathbf{E})^{-1}\mathbf{G}(\varepsilon)(y_1\mathbf{x}(0) + \mathbf{G}(\varepsilon)^{-1}t\,(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3))] = \\ &= 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}(\varepsilon))^{-1}(y_1\mathbf{G}(\varepsilon)\mathbf{x}(0) + t\,(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3))].\end{aligned}$$

Окончательно, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим для ДАСУ (1) вектор состояния системы $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t:

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0)^{-1}(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\,(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3))]. \tag{10}$$

Таким образом, для расчета вектора состояния системы $\mathbf{x}(t)$ нужно решать комплексные СЛАУ с матрицей $t\mathbf{H}_0 - z_1\mathbf{G}$ или $t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0$ если матрицы ДАСУ (1) изменяются часто, либо умножать векторы на обратную матрицу $(t\,\mathbf{H}_0 - z_1\mathbf{G})^{-1}$ или $(t\,\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0)^{-1}$, если матрицы ДАСУ (1) не меняются на большом количестве шагов интегрирования. При этом этап преобразования ДАСУ в СОДУ в ходе решения не нужен, используются исходные заданные матрицы.

Формулы (7) и (10) дают один и тот же результат, так как системы уравнений $\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{g} = 0$ и $-\mathbf{Q}\mathbf{x}' = \mathbf{g}'$ имеют решения, которые могут отличаться только на некоторые константы, но они однозначно определяются из начальных условий. Вопрос обратимости матриц $t\mathbf{H}_0 - z_1\mathbf{G}$ и $t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0$

зависит от конкретного типа задач и в этой работе не исследуется. Вероятнее всего, для задач, относящихся к реальным физическим системам, эти матрицы обратимы.

6. Решение ДАСУ для других аппроксимаций Паде матричной экспоненты

Приведем теперь решения вида (10) для нескольких других конкретных аппроксимаций Паде, а также формулы для решения в общем виде. Для решений вида (7) формулы получаются аналогичным образом, однако они представляют скорее теоретический интерес, так как они сложнее формул вида (10). В рассмотренном выше примере функция $\mathbf{f}(t)$ была многочленом 3-й степени. В общем случае степень этого многочлена может быть любой, не превышающей порядок точности аппроксимации Паде матричной экспоненты, который равен сумме степеней числителя и знаменателя аппроксимации. Все формулы выводятся аналогично рассмотренному примеру с аппроксимацией матричной экспоненты R_{12}. Формулы для СОДУ вида (5) получены в статье [1].

Аппроксимация

$$R_{01}(t\mathbf{A}) = -(t\mathbf{A} - \mathbf{E})^{-1} = y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}$$

(неявный метод Эйлера,

$$z_1 = 1,\ y_1 = -1,\ a_{10} = -1,\ a_{11} = -1):$$
$$\mathbf{x}(t) = (t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0)^{-1}(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t)).$$

Аппроксимация

$$R_{11}(t\mathbf{A}) = (2\mathbf{E} - t\mathbf{A})^{-1}(2\mathbf{E} + t\mathbf{A}) = -\mathbf{E} + y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}$$

(метод трапеций, $z_1 = 2$, $y_1 = -4$, $a_{10} = -2$, $a_{11} = -1$, $a_{12} = -1$):

$$\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}(0) + (t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0)^{-1}(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2)).$$

Аппроксимация

$$R_{22}(t\mathbf{A}) = (12\mathbf{E} - 6t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2)^{-1}(12\mathbf{E} + 6t\mathbf{A} + (t\mathbf{A})^2) = \mathbf{E} + 2\mathrm{Re}[y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1}]$$
$$(z_1 = 3 - i\sqrt{3},\ y_1 = 6 + i6\sqrt{3},\ a_{10} = i2\sqrt{3},$$
$$a_{11} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ a_{12} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}},\ a_{13} = -\frac{1}{2}):$$
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0)^{-1}(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3))].$$

Аппроксимация

$$R_{23}(t\mathbf{A}) = (60\mathbf{E} - 36t\mathbf{A} + 9(t\mathbf{A})^2 - (t\mathbf{A})^3)^{-1}(60\mathbf{E} + 24t\mathbf{A} + 3(t\mathbf{A})^2) = y_1(t\mathbf{A} - z_1\mathbf{E})^{-1} + 2\mathrm{Re}[y_2(t\mathbf{A} - z_2\mathbf{E})^{-1}]$$

(коэффициенты для краткости не приводим):

$$\mathbf{x}(t) = (t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0)^{-1}(y_1(\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3)) + 2\mathrm{Re}[(t\mathbf{H} - z_2\mathbf{G}_0)^{-1}(y_2(\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t(a_{20}\mathbf{f}_0 + a_{21}\mathbf{f}_1 t + a_{22}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{23}\mathbf{f}_3 t^3))].$$

В общем случае формулы для расчета состояния системы в момент времени t можно записать так: степень числителя аппроксимации Паде k, степень знаменателя $j > 1$, степень полинома для представления функции $\mathbf{f}(t)$ равна M, коэффициенты для всех аппроксимаций разные, определяются по описанной в статье [1] методике. Для нечетных степеней знаменателя непарный действительный корень знаменателя обозначен z_1.

Диагональные аппроксимации порядка $2j$, степень знаменателя $j = k$ четная:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\frac{j}{2}}\left[\left(t\mathbf{H} - z_{2n-1}\mathbf{G}_0\right)^{-1}\left(y_{2n-1}\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\sum_{m=0}^{M} a_{2n-1,m}\mathbf{f}_m t^m\right)\right].$$

Диагональные аппроксимации порядка $2j$, степень знаменателя $j = k$ нечетная:

$$\mathbf{x}(t) = -\mathbf{x}(0) + \left(t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0\right)^{-1}\left(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\sum_{m=0}^{M} a_{1,m}\mathbf{f}_m t^m\right) + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}}\left[\left(t\mathbf{H} - z_{2n}\mathbf{G}_0\right)^{-1}\left(y_{2n}\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\sum_{m=0}^{M} a_{2n,m}\mathbf{f}_m t^m\right)\right].$$

Субдиагональные аппроксимации вида $j = k + 1$, порядок $2j - 1$, степень знаменателя j четная:

$$\mathbf{x}(t) = 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\frac{j}{2}}\left[\left(t\mathbf{H} - z_{2n-1}\mathbf{G}_0\right)^{-1}\left(y_{2n-1}\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\sum_{m=0}^{M} a_{2n-1,m}\mathbf{f}_m t^m\right)\right].$$

Субдиагональные аппроксимации вида $j = k + 1$, порядок $2j - 1$, степень знаменателя j нечетная:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0\right)^{-1}\left(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\sum_{m=0}^{M} a_{1,m}\mathbf{f}_m t^m\right) + 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\frac{j-1}{2}}\left[\left(t\mathbf{H} - z_{2n}\mathbf{G}_0\right)^{-1}\left(y_{2n}\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\sum_{m=0}^{M} a_{2n,m}\mathbf{f}_m t^m\right)\right].$$

7. Решение ДАСУ для задач, связанных с графами

Существует по крайней мере один класс задач, который позволяет проделать дополнительные несложные преобразования с полученными формулами для решения ДАСУ и существенно сократить вычисления. Это задачи расчета токов (потоков) в ребрах некоторого графа и потенциалов его вершин – расчет переходных процессов в электрических цепях, а также процессов в гидравлических, тепловых, механических и других системах. К такому виду можно привести и некоторые полевые задачи. Матрицу $t\mathbf{H} - z_k\mathbf{G}_0$ для задач, связанных с графами, масштабированием строк можно привести к симметричному виду:

$$\mathbf{W}_k=\begin{bmatrix}-\mathbf{R}_k & \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{K} & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

где $\mathbf{R}_k$ – диагональная матрица сопротивлений ребер графа, $\mathbf{K}$ – матрица инцидентности графа, k-номер корня знаменателя аппроксимации Паде. Масштабирование строк производится умножением на симметрирующую диагональную матрицу $\mathbf{S}_k$: $\mathbf{W}_k = \mathbf{S}_k(t\mathbf{H} - z_k\mathbf{G}_0)$.

Продолжим решение на примере аппроксимации Паде R_{12}. Вставим в формулу (10) матрицу $\mathbf{S}_1$:

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathrm{Re}[(\mathbf{S}_1(t\,\mathbf{H} - z_1\mathbf{G}_0))^{-1}\mathbf{S}_1(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + \\ + t\,(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3))].$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{q} = \mathbf{S}_1(y_1\mathbf{G}_0\mathbf{x}(0) + t\,(a_{10}\mathbf{f}_0 + a_{11}\mathbf{f}_1 t + a_{12}\mathbf{f}_2 t^2 + a_{13}\mathbf{f}_3 t^3)),$$

$$\mathbf{q}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_+\\ \mathbf{j}_+\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_+=\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{q},\ \mathbf{x}_+=\begin{bmatrix}\mathbf{i}_+\\ \boldsymbol{\varphi}_+\end{bmatrix},\ \mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}\\ \boldsymbol{\varphi}\end{bmatrix},\quad(11)$$

где $\mathbf{e}_+$, $\mathbf{j}_+$, $\mathbf{i}_+$, $\boldsymbol{\varphi}_+$ – некоторые вспомогательные векторы; $\mathbf{i}$ – вектор токов; $\boldsymbol{\varphi}$ – вектор потенциалов. Это позволит записать формулу (10) в виде:

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathrm{Re}[\mathbf{x}_+].\quad(12)$$

Можно значительно сократить вычисления, если воспользоваться методом дополнения по Шуру. Симметрия матрицы $\mathbf{W}_1$ облегчает эту задачу. С учетом введенных обозначений запишем систему уравнений для вычисления вектора $\mathbf{x}_+$ в виде:

$$\begin{bmatrix}-\mathbf{R}_1 & \mathbf{K}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{K} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_+\\ \boldsymbol{\varphi}_+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_+\\ \mathbf{j}_+\end{bmatrix}.$$

Далее выполним преобразования, фактически используем блочный метод Гаусса:

$$\begin{bmatrix}-\mathbf{E} & \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{K} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_+\\ \boldsymbol{\varphi}_+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{e}_+\\ \mathbf{j}_+\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-\mathbf{E} & \mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0} & \mathbf{K}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{i}_+\\ \boldsymbol{\varphi}_+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{e}_+\\ \mathbf{j}_+ + \mathbf{K}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{e}_+\end{bmatrix}.$$

Диагональная матрица $\mathbf{R}_1$ обращается элементарно. Нижняя матричная строка представляет собой отдельную систему уравнений для вектора $\boldsymbol{\varphi}_+$, в электротехнике это известно как метод узловых потенциалов:

$$\mathbf{K}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_+ = \mathbf{j}_+ + \mathbf{K}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{e}_+.\quad(13)$$

Векторы $\mathbf{e}_+$ и $\mathbf{j}_+$ находятся как составляющие вектора $\mathbf{q}$ согласно обозначениям (11). Решив систему (13), находим вектор $\boldsymbol{\varphi}_+$, далее вычисляем вектор $\mathbf{i}_+$ по формуле: $\mathbf{i}_+ = \mathbf{R}_1^{-1}(\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_+ - \mathbf{e}_+)$.

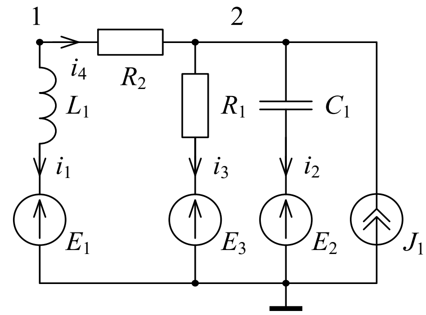

Рис. 1. Схема электрической цепи

Зная векторы $\mathbf{i}_+$ и $\boldsymbol{\varphi}_+$, находим вектор состояния системы $\mathbf{x}(t)$ по формуле (12). Можно рассчитывать не все составляющие векторов $\mathbf{i}_+$ и $\mathbf{i}$, а только те, которые нужны в конкретной задаче. Обязательны к вычислению только составляющие вектора $\mathbf{i}$, соответствующие ненулевым столбцам матрицы $\mathbf{G}_0$.

8. Пример решения ДАСУ для электрической цепи

Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис 1. Запишем исходную ДАСУ цепи:

$$\mathbf{G}_0\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{f}.$$

Соответствующие матрицы имеют вид

$$\mathbf{G}_0=\begin{bmatrix}L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_1\\ & & & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -R_2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\\ \varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix},\ \mathbf{f}=\begin{bmatrix}-E_1\\ C_1E_2'\\ -E_3\\ 0\\ 0\\ -J_1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{-z_1 L_1}{\Delta t} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\Delta t}{z_1 C_1} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -R_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -R_2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \dfrac{-\Delta t}{z_1 C_1} & & & \text{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & \text{0} & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta t}{z_1 L_1} + \dfrac{1}{R_2} & \dfrac{-1}{R_2} \\ \dfrac{-1}{R_2} & \dfrac{z_1 C_1}{\Delta t} + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \end{bmatrix}.$$

Матрицу $\mathbf{K}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ можно составить прямо по схеме цепи согласно известным в электротехнике правилам для метода узловых потенциалов.

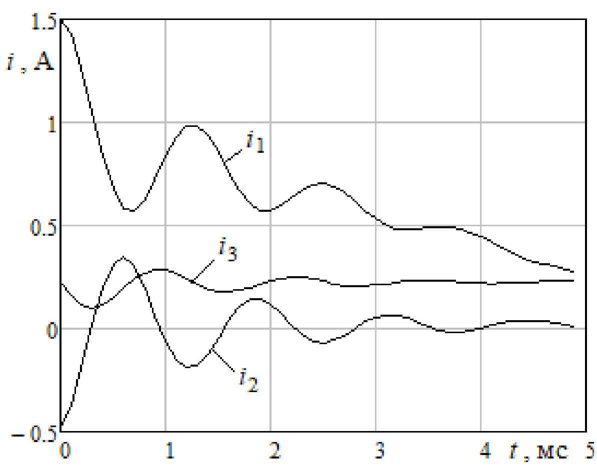

Рис. 2. Токи электрической цепи

На рис. 2 представлены графики токов электрической цепи, показанной на рис. 1. Расчет произведен с помощью аппроксимации Паде матричной экспоненты R_{12} по формуле (10).

Параметры цепи:

$R_1 = 180$ Ом, $R_2 = 0{,}5$ Ом,

$L = 0{,}01$ Гн, $C = 4$ мкФ,

$E_1(t) = 10 + 2\cdot10^3 t - 3\cdot10^5 t^2 + 5\cdot10^7 t^3$ В,

$E_2(t) = 20 - 3\cdot10^3 t + 4\cdot10^5 t^2 - 6\cdot10^7 t^3$ В,

$E_3(t) = -30 + 2\cdot10^3 t - 5\cdot10^5 t^2 + 7\cdot10^7 t^3$ В.

Ток источника тока $J_1(t)$, а также составляющие остальных токов и потенциалов, обусловленные действием источников ЭДС и источников тока без учета влияния начальных значений, для аналитического решения вычислены исходя из заданной составляющей тока катушки, обусловленной только действием источников: $i_{1F}(t) = 1 - 200t + 3\cdot10^4 t^2\ \ 4\cdot10^6 t^3$ А. Этот же ток источника использовался как заданный для численного решения. Функции источников заданы на всем расчетном интервале, глобально. По ним рассчитаны локальные коэффициенты полиномов для каждого шага интегрирования. Начальные условия: $\mathbf{x}(0) = (1{,}5; -0{,}486; 0{,}222; -1{,}5; 9{,}25; 10)^{\mathrm{T}}$.

Расчетный интервал – 5 мс, число точек интегрирования – 50, шаг интегрирования – 100 мкс. Постоянная времени затухания переходного процесса – 1,390 мс, период собственных колебаний процесса – 1,268 мс. Число точек интегрирования на постоянную времени – 13,9; число точек интегрирования на период собственных колебаний – 12,7. Относительная среднеквадратическая погрешность максимальная у тока i_2 – 0,76 %; минимальная у тока i_3 – 0,14 %. Погрешности при решении этой же задачи методом трапеций: максимальная у тока i_2 – 9,5 %; минимальная у тока i_3 – 1,7 %. Сравнение проводилось с аналитическим решением.

Заключение

Предложены новые экономичные по вычислениям, простые по теории и практической реализации высокоточные методы решения линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений. На этапе решения задачи не требуется преобразование этих систем в системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы позволяют решать однородные системы, а также системы, у которых свободный член в пределах шага интегрирования представлен в форме полинома, степень которого не выше чем порядок точности соответствующего метода. Так как полином является удобной формой аппроксимации для весьма разнообразных функций, это придает методам универсальность. Методы пригодны для решения задач без какой-либо настройки, не имеют ограничений на шаг интегрирования. По точности и устойчивости новые методы эквивалентны известным методам решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений соответствующих порядков, однако требуют в несколько раз меньше вычислительной работы [1]. Методы одношаговые, это позволяет легко изменять шаг интегрирования.

Предложенные методы позволяют решать задачи на каждом шаге интегрирования с малыми вычислительными затратами без подготовительных процедур, что дает возможность использовать их как основу для решения систем уравнений с переменными коэффициентами и нелинейных систем. Методы проверены на практике большим количеством численных экспериментов. Они не требуют глубоких математических знаний и доступны инженерам с обычным техническим образованием.

Подробные исследования свойств и условий применения предложенных в настоящей работе методов еще не проводились и являются актуальными. В частности, пока неясно влияние на решение индекса ДАСУ.

Литература

1. *Бурцев Ю.А.* Решение задачи Коши высокоточными методами на основе аппроксимации Паде матричной экспоненты // Труды ИСА РАН. 2024. № 1. С. 3-11.
2. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. / Пер. с англ., М.: Мир, 1999. 685 с. (E. Hairer, G. Wanner. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised Edition. Springer Verlag Berlin Heidelberg 1991, 1996.)
3. *Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б.* Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем. М.: Наука. 2008. 339 с.
4. *Бурцев Ю.А.* Сравнение программы расчета электрических цепей на основе модифицированного табличного метода с известными аналогами // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. 2013. № 4. С. 8-13.
5. *Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М.* Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Вопросы прикладной математики. – Иркутск : Изд. СЭИ СО АН СССР. 1975.
6. *Бояринцев Ю.Е.* Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск : Наука, Сиб. отделение, 1980. 222 с.
7. *Бояринцев Ю.Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука. 1988. 158 с.
8. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы: Методы решения и исследования. Новосибирск: Наука. 1998. 224 с.
9. *Бояринцев Ю.Е.* Линейные и нелинейные алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука. 2000. 222 с.
10. *Бояринцев Ю.Е., Орлова И.В.* Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука. 2006. 124 с.
11. *Petzsold L.* Differential/Algebraic Equations are not ODE'S. SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing. Vol. 3. No. 3. September 1982.
12. *Курина Г.А.* Новый алгоритм построения асимптотического решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с пересекающимися траекториями вырожденного уравнения состояния. // Прикладная математика & Физика. 2023. Т. 55. № 4. С. 313–329.
13. *Курина Г.А.* Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефедова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 12. С. 2073–2084
14. *Скворцов Л.М.* Численное решение обыкновенных дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений. М.: ДМК Пресс. 2018. 230 с.
15. *Burtsev Y.* High Precision Methods Based on Pade Approximation of Matrix Exponent for Numerical Analysis of Stiff-Oscillatory Electrical Circuits. Proceedings - 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2020; IEEE inc.
16. *Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. / Пер. с англ., Москва: Мир, 1986. 502 с. (G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris. Pade approximants. London, Addison-Wesley Publishing Company. 1981. 502 p.)
17. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. Издание второе, дополненное. М.: Наука. 1966. 576 с.

Бурцев Юрий Алексеевич. Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова», г. Новочеркасск, Россия. Доцент. Кандидат технических наук. Область научных интересов: численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциально-алгебраических систем уравнений, теория электрических цепей. E-mail: proton36@yandex.ru

Solving Differential-Algebraic Equation Systems with Pade Approximation of Matrix Exponent

Y. A. Burtsev
Platov South-Russian State Polytechnic University, Russia

Abstract. A set of new numerical methods for solving linear differential-algebraic equation systems is developed. Homogenous systems can be solved, and nonhomogeneous systems with piecewise-polynomial right-hand side function. Calculation of system state at each integration step requires solving one or several (depending on the method order) systems of linear algebraic equations. The methods are based on decomposition of Pade approximation of the matrix exponent to simplest fractions. The proposed formulas make possible to avoid conversion of the differential-algebraic equation system to the ordinary differential equation system at the stage of system solving. The new methods are equivalent to some well-known Runge-Kutta type methods like Radau and Lobatto methods in terms of accuracy and steady areas. However, new methods are much more simple in theory and practical implementation, and they require several times less computational work. Methods with diagonal Pade approximations are *A*-stable, and methods with subdiagonal Pade approximations are *L*-stable. New methods can be used for solving stiff, oscillative and stiff-oscillative systems.
Keywords: *numerical methods, differential-algebraic equation systems, matrix exponent, Pade approximation.*
DOI: 10.14357/20790279240304 **EDN: HKTOYE**

References

1. *Burtsev Y.A.* Solving of Cauchy Problem with High Precision Methods Based on Matrix Exponent // Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossiyskoy akademii nauk (ISA RAN) (Proceedings of the Institute for Systems Analysis Russian Academy of Sciences (ISA RAS)). 2024; 1:3-11 (In Russ.).
2. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Second Revised Edition. Springer Verlag Berlin Heidelberg; 1991, 1996. 685 p.
3. *Gridin V.N., Mikhajlov V.B., Shusterman L.B.* Numerical-analytical modelling of radioelectronic schemes. Moscow: Science Publishing; 2008. 339 p. (In Russ.)
4. *Burtsev Y.A.* Comparing of Program for Calculation of Electrical Circuits Based on Modified Table Method with Known Analogs. Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Elektromekhanika (Russian Electromechanics). 2013; 4:8-13 (In Russ).
5. *Boyarintsev Y.E., Korsukov V.M.* Applying of Finite-difference Methods to Solving Regular Systems of Ordinary Differential Equations // Voprosy prikladnoj matematiki (Questions of Applied Mathematic. Irkutsk: Publishing of Siberian Energy Institute, Siberian Section of Academy of Sciences of the USSR), 1975. (In Russ.)
6. *Boyarintsev Y.E.* Regular and Singular Systems of Linear Ordinary Differential Equations. Novosibirsk: Science Publishing, Siberian Section; 1980. 222 p. (In Russ.)
7. *Boyarintsev Y.E.* Methods for Solving of Degenerate Systems of Ordinary Differential Equations. Novosibirsk: Science Publishing, 1988. 158 p. (In Russ.)
8. *Boyarintsev Y.E.* Algebro-Differential Systems: Methods of Solving and Research. Novosibirsk: Science Publishing, 1998. 224 p. (In Russ.)
9. *Boyarintsev Y.E.* Linear and Non-linear Algebro-Differential Systems. Novosibirsk: Science Publishing, 2000. 222 p. (In Russ.)
10. *Boyarintsev Y.E., Orlova I.V.* Sheaves of Matrixes and Algebro-Differential Systems. Novosibirsk: Science Publishing, 2006. 124 p. (In Russ.)
11. *Petzsold L.* Differential/Algebraic Equations are not ODE'S. SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing. Vol. 3, No. 3, September 1982.
12. *Kurina G.A.* New Algorithm for Constructing Asymptotic Solution of Singular Indignant Problems of Optimal Control with Intersecting Trajectories of degenerate State Equation. // Prikladnaya Matematika & Fizika (Applied Mathematics and Physics, 2023, vol. 55, # 4, p. 313-329.) (In Russ.)
13. *Kurina G.A.* Projector Approach to Butuzov-Nefedov Algorithm for Asymptotic Solution of One Class Singular Indignant Tasks in Critical Case // Zhurnal vychislitelnoj matematiki i matematicheskoj fiziki (Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2020, vol. 60, # 12, p. 2073-2084.) (In Russ.)
14. *Skvortsov L.M.* Numerical solving of ordinary differential and differential-algebraic equations. Moscow: DMK Press Publishing; 2018. 230 p. (In Russ.)
15. *Burtsev Y.A.* High Precision Methods Based on Pade Approximation of Matrix Exponent for Nu-

merical Analysis of Stiff-Oscillatory Electrical Circuits. Proceedings - 2020 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing, ICIEAM 2020; IEEE inc.

16. *Baker G.A. Jr., Graves-Morris P.* Pade approximants. London: Addison-Wesley Publishing Company; 1981. 502 p.
17. *Gantmaher F.R.* Theory of Matrixes. Second Edition, Expanded. Moscow: Science; 1966. 576 p. (In Russ)

Burtsev Yuri Alexeevich. Philosophy doctor, senior lecturer. Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI). Scientific interests: Numerical methods for solving systems of ordinary differential equations and systems of differential-algebraic equations, theory of electrical circuits. Email: proton36@yandex.ru