

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ПОВОЛЖСКИЙ РЕГИОН
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

№ 3 (75)

2025

СОДЕРЖАНИЕ
МАТЕМАТИКА

<i>Смирнов Ю. Г.</i> О сходимости метода Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в специальных классах функций	3
<i>Нестеров В. О., Цупак А. А.</i> Численный метод решения скалярной задачи дифракции монохроматической волны на экране с нелинейными условиями сопряжения	13
<i>Лапин К. С.</i> Эквиограниценность по Пуассону в пределе и эквиосциллируемость в пределе множеств всех решений систем дифференциальных уравнений.....	23
<i>Зайцев Б. А., Медведик М. Ю.</i> Итерационный алгоритм для решения нелинейных интегральных уравнений.....	36

ФИЗИКА

<i>Макеева Г. С., Никитин М. С.</i> Перестраиваемые поляризационные магнитооптические эффекты при рассеянии терагерцового излучения на решетках графеновых нанолент в магнитном поле	45
<i>Шляров В. В., Серебрякова А. А., Аксенова К. В., Загуляев Д. В.</i> Влияние постоянного магнитного поля на усталостную долговечность диамагнетиков: роль эффекта Зеемана в усталостной прочности цветных металлов	66
<i>Журавлев В. М.</i> Спиральная структура дисковых галактик и эффект скрытой массы	81
<i>Зинченко Т. О., Печерская Е. А., Кревчик В. Д., Рубцов И. А., Якушов Д. В., Александров В. С.</i> Анализ зависимостей времени релаксации от влияющих факторов в проводящих оксидах на основе $\text{SnO}_2:\text{Sb}$	106
<i>Ниццев К. Н., Новопольцев М. И., Кострюков С. Г., Пыненков А. А., Лютова Е. Н., Безрукова Е. В.</i> Модификация гранулометрического состава ультрадисперсных порошков серебра	119

UNIVERSITY PROCEEDINGS VOLGA REGION

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

№ 3 (75)

2025

CONTENT

MATHEMATICS

<i>Smirnov Yu.G.</i> On the convergence of Galerkin method for solving hypersingular integral equations in special classes of functions.....	3
<i>Nesterov V.O., Tsupak A.A.</i> Numerical method for solving scalar problem of monochromatic wave scattering from a screen with nonlinear transmission conditions	13
<i>Lapin K.S.</i> Poisson ultimate equiboundedness and ultimate equioscillation of sets of all solutions of differential equations' systems	23
<i>Zaytsev B.A., Medvedik M.Yu.</i> An iterative algorithm for solving nonlinear integral equations	36

PHYSICS

<i>Makeeva G.S., Nikitin M.S.</i> Tunable polarization magneto-optical effects at scattering of terahertz radiation on graphene nanoribbon gratings in a magnetic field	45
<i>Shlyarov V.V., Serebryakova A.A., Aksanova K.V., Zagulyaev D.V.</i> Influence of constant magnetic field on fatigue life of diamagnetics: the role of the Zeeman effect in the fatigue strength of non-ferrous metals	66
<i>Zhuravlev V.M.</i> Spiral structure of disk galaxies and hidden mass effect.....	81
<i>Zinchenko T.O., Pecherskaya E.A., Krevchik V.D., Rubtsov I.A., Yakushov D.V., Aleksandrov V.S.</i> Analysis of relaxation time dependences on influencing factors in conducting oxides based on $\text{SnO}_2:\text{Sb}$	106
<i>Nishchev K.N., Novopoltsev M.I., Kostryukov S.G., Pynenkov A.A., Lyutova E.N., Bezrukova E.V.</i> Modification of granulometric composition of ultrafine silver powders	119

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.96

doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-1

О сходимости метода Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в специальных классах функций

Ю. Г. Смирнов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mmm@pnzgu.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Рассматривается численный метод решения гиперсингулярных интегральных уравнений на отрезке, которые возникают во многих задачах математической физики. Материалы и методы. Применяется метод Галеркина для решения гиперсингулярных уравнений с базисными функциями – многочленам Чебышева 2-го рода. Проекционный метод рассматривается в специальных классах функций. Результаты и выводы. Доказывается сходимость метода Галеркина для решения гиперсингулярных уравнений в специальных классах функций. Получена оценка скорости сходимости метода Галеркина.

Ключевые слова: гиперсингулярное уравнение, метод Галеркина, многочлены Чебышева

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по гранту Государственного задания (Рег. № 124020200015-7).

Для цитирования: Смирнов Ю. Г. О сходимости метода Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в специальных классах функций // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 3–12. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-1

On the convergence of Galerkin method for solving hypersingular integral equations in special classes of functions

Yu.G. Smirnov

Penza State University, Penza, Russia

mmm@pnzgu.ru

Abstract. Background. The numerical method for solving hypersingular integral equations on a segment that arise in many problems of mathematical physics is considered. **Materials and methods.** Galerkin method is used to solve hypersingular equations with basic functions – Chebyshev polynomials of the 2nd kind. The projection method is considered in special classes of functions. **Results and conclusions.** The convergence of Galerkin method for solving hypersingular equations in special classes of functions is proved. An estimate of the convergence rate of Galerkin method is obtained.

Keywords: hypersingular equation, Galerkin method, Chebyshev polynomials

Financing: the work was financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the grant of the State Assignment (Reg. No. 124020200015-7).

For citation: Smirnov Yu.G. On the convergence of Galerkin method for solving hypersingular integral equations in special classes of functions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(3):3–12. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-1

Введение

Численные методы используются при решении гиперсингулярных уравнений, к которым сводятся многие краевые задачи электродинамики, аэродинамики, акустики [1–4]. Чаще всего гиперсингулярные операторы понимаются в смысле Адамара [3, 4]. Но можно рассматривать гиперсингулярные операторы как псевдодифференциальные [1] или интегро-дифференциальные [2].

Хорошо известна формула действия гиперсингулярного оператора на многочлены Чебышева 2-го рода [2], которая показывает, что эти многочлены являются собственными функциями оператора. Основываясь на этом свойстве, естественно построить численный метод решения гиперсингулярных уравнений. Приближенное решение ищется в виде линейной комбинации многочленов Чебышева 2-го рода. Таким образом, рассматривается метод Галеркина с многочленами Чебышева в качестве базисных и тестовых функций. Такой подход позволяет явно (аналитически) учесть гиперсингулярную особенность ядра интегрального уравнения, что приводит к уменьшению ошибки при программной реализации численного метода. Иногда этот подход называют методом саморегуляризации.

Центральным вопросом при анализе численного метода является вопрос о его сходимости в некоторых функциональных классах. Также важна оценка скорости сходимости приближенного решения к точному.

Основным результатом настоящей статьи является доказательство сходимости метода Галеркина для решения гиперсингулярного уравнения в специальных классах функций, которые «подбираются» таким образом, чтобы легко изучить действие в них гиперсингулярного оператора. Такой подход был реализован при изучении логарифмических интегральных операторов [2, 5].

1. Гиперсингулярные интегральные уравнения в классах Ψ_p

Далее представлены свойства гиперсингулярных интегральных операторов в некоторых специальных классах Ψ_p (на шкале пространств), естественно связанных с многочленами Чебышева 2-го рода.

Пусть h_p – пространство последовательностей комплексных чисел ξ_k таких, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p < \infty; \quad p \geq 0. \quad (1)$$

Пространства h_p , наделенные скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k (k+1)^p \quad (2)$$

и нормой

$$\|\xi\|_p^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p, \quad (3)$$

являются сепарабельными гильбертовыми пространствами.

Рассмотрим классы функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$:

$$\Psi_p = \left\{ \varphi : \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x), \xi \in h_p \right\}, \quad (4)$$

где

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} -$$

многочлены Чебышева 2-го рода [6]. Эти пространства также становятся гильбертовыми, если определить скалярные произведения по формуле

$$(\varphi, \psi)_p = (\xi, \eta)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k (k+1)^p, \quad (5)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(x). \quad (6)$$

Из (1)–(6) ясно, что Ψ_p унитарно изометрично h_p .

Введем пространства квадратично-суммируемых функций на отрезке $[-1, 1]$ с весами $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\sqrt{1-x^2}$:

$$L_2^{(1)} = L_2 \left([-1, 1]; 1/\sqrt{1-x^2} \right), \quad (7)$$

$$L_2^{(2)} = L_2 \left([-1, 1]; \sqrt{1-x^2} \right). \quad (8)$$

Хорошо известно, что $\Psi_0 = L_2^{(2)}$ [6].

Некоторые другие свойства функций из пространств (7) и (8) доказаны в [7]. В частности, пусть $\varphi \in \Psi_2$. Тогда функция $\varphi(x)$ непрерывна на интервале $(-1, 1)$, и для функции $\varphi^*(x) := \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ имеем $\varphi^*(-1) = \varphi^*(1) = 0$.

Кроме того, функции $\varphi^*(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$, где $\varphi \in \Psi_2$, удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ , $\mu \leq \frac{1}{4}$, и верна оценка

$$|\varphi^*(x)| \leq C(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

Введем гильбертово пространство [2]:

$$\hat{W}_2^1 := \left\{ \varphi : \varphi \in L_2^{(2)}; \varphi^*(x) := \varphi(x)\sqrt{1-x^2}, (\varphi^*)' \in L_2^{(2)}, \varphi^*(-1) = \varphi^*(1) = 0 \right\}, \quad (9)$$

со скалярным произведением и нормой:

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi)_w &:= \int_{-1}^1 \varphi(x) \overline{\psi(x)} \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 \left(\varphi(x) \sqrt{1-x^2} \right)' \left(\overline{\psi(x)} \sqrt{1-x^2} \right)' \sqrt{1-x^2} dx, \\ \|\varphi\|_w^2 &:= \int_{-1}^1 |\varphi(x)|^2 \sqrt{1-x^2} dx + \int_{-1}^1 \left| \left(\varphi(x) \sqrt{1-x^2} \right)' \right|^2 \sqrt{1-x^2} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

В работе [7] доказано, что $\Psi_2 = \hat{W}_2^1$ (где пространства определены посредством формул (4)–(6), (9), (10)), а также что вложение $\Psi_p \subset \Psi_q$ компактно при $p > q \geq 0$.

Будем рассматривать гиперсингулярный интегральный оператор, определяемый формулой

$$H\varphi := \frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{1}{x-y} \varphi(y) \sqrt{1-y^2} dy, \quad \varphi \in \Psi_p. \quad (11)$$

Свойства оператора (11) в классах Ψ_p определяются следующей леммой.

Лемма 1 [8]. Полиномы Чебышева 2-го рода U_n являются собственными функциями оператора H и справедливы следующие выражения:

$$\frac{d}{dx} \int_{-1}^1 \frac{1}{x-y} U_n(y) \sqrt{1-y^2} dy = \pi(n+1)U_n(x), \quad n \geq 0.$$

Из леммы 1 сразу следует

Лемма 2. Оператор $H : \Psi_{p+2} \rightarrow \Psi_p$, $p \geq 0$, непрерывно обратим.

Действительно, в силу леммы 1 для

$$\varphi \in \Psi_p, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x), \quad H\varphi = f,$$

имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(t), \quad \eta_k = \pi(k+1) \xi_k, \\ \xi_k = \frac{\eta_k}{\pi(k+1)}, \quad (12)$$

откуда непосредственно получаем требуемое утверждение.

Формула (12) задает обратный оператор:

$$H^{-1} : \Psi_p \rightarrow \Psi_{p+2}, \quad p \geq 0; \quad H^{-1}f = \varphi,$$

$$\text{где } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(t), \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x).$$

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор, определяемый формулой

$$S\varphi := \int_{-1}^1 \frac{1}{x-y} \varphi(y) \sqrt{1-y^2} dy, \quad \varphi \in \Psi_p. \quad (13)$$

Свойства оператора (13) в классах Ψ_p определяются следующей леммой [8].

Лемма 3 [8]. Справедливы следующие выражения:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x-y} U_n(y) \sqrt{1-y^2} dy = \pi T_{n+1}(x), \quad n \geq 0.$$

В работе [7] доказано, что оператор $S : \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ является компактным.

Пусть оператор K задан формулой

$$K\varphi \equiv \int_{-1}^1 K(x,y) \varphi(y) \sqrt{1-y^2} dy. \quad (14)$$

Лемма 4 [7]. Если $K(x,y) = \frac{\partial K_1(x,y)}{\partial y}$, функция $K_1(x,y)$ ограничена на квадрате $[-1,1] \times [-1,1]$ и выполнено условие $K_1(x,y) \in L_2^{(2)} \times L_2^{(1)}$, т.е.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \int_{-1}^1 |K_1(x,y)|^2 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} dx < \infty, \quad (15)$$

то формула (14) определяет компактный оператор $K : \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$.

Отметим, что оператор K будет компактным и при менее сильных, чем (15), ограничениях на ядро.

Далее рассмотрим интегральный оператор с логарифмической особенностью ядра вида

$$L\varphi \equiv \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-y|} \varphi(y) \sqrt{1-y^2} dy. \quad (16)$$

Лемма 5 [7]. Оператор (16) является компактным оператором $L: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$.

Лемма 6 [7]. Пусть для функции $K(x, y)$ выполнены условия леммы 4, а α и β – произвольные числа. Тогда оператор

$$H + \alpha S + \beta L + K : \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)} \quad (17)$$

является фредгольмовым (с нулевым индексом).

2. Метод Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в классах Ψ_p

Наша задача – изучить метод Галеркина для решения уравнения

$$A\varphi = f, \varphi \in \hat{W}_2^1, f \in L_2^{(2)}, \quad (18)$$

где, в соответствии с формулой (17),

$$A := H + \alpha S + \beta L + K : \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}. \quad (19)$$

Напомним, что $\Psi_2 \equiv \hat{W}_2^1$, $\Psi_0 \equiv L_2^{(2)}$, и ниже будем использовать оба обозначения для этих пространств.

Обозначим через P_N и Q_N проекторы, действующие по формулам:

$$P_N \varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k U_k, P_N : \Psi_2 \rightarrow \Psi_2, \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x), \quad (20)$$

$$Q_N f = \sum_{k=0}^{N-1} \eta_k U_k, Q_N : \Psi_0 \rightarrow \Psi_0, f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(x). \quad (21)$$

Пусть $\Psi_2^N = P_N \Psi_2 \subset \Psi_2$ и $\Psi_0^N = Q_N \Psi_0 \subset \Psi_0$ – конечномерные подпространства соответствующих пространств размерности $N (> 0)$. Заметим, что P_N и Q_N , определяемые формулами (20) и (21), являются ортогональными проекторами [9, п. 1; 10, с. 219]. Тогда можно сформулировать метод Галеркина для решения уравнения (18) как проекционный метод: найти приближенное решение уравнения

$$Q_N A \varphi_N = Q_N f, \varphi_N \in \Psi_2^N, \quad (22)$$

для $N = 1, 2, \dots$. Этот метод также можно сформулировать эквивалентным (и более распространенным) способом: найти приближенное решение уравнения

$$(A\varphi_N, v)_{L_2^{(2)}} = (f, v)_{L_2^{(2)}}, \quad \forall v \in \Psi_0^N, \varphi_N \in \Psi_2^N, \quad (23)$$

для $N = 1, 2, \dots$, где круглые скобки обозначают скалярное произведение в пространстве $L_2^{(2)}$. Эквивалентность формулировок показана в [9, п. 3; 10, с. 240].

Определение 1. Проекционный метод (22) (или (23)) будем называть сходящимся для инъективного оператора $A: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$, если для любого $f \in \text{Im } A$ уравнение (22) однозначно разрешимо для $N \geq N_0$, начиная с некоторого $N_0 > 0$, и $\|\varphi - \varphi_N\|_w \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, где $A\varphi = f$.

Здесь $\text{Im } A$ – образ оператора A , а уравнение $A\varphi = f$ имеет единственное решение для любого $f \in \text{Im } A$ в силу инъективности оператора A .

Теорема 1. Если выполнены условия леммы 4 и оператор $A: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ инъективен, то проекционный метод (22) (или (23)) сходится для оператора A .

Доказательство. Для доказательства сходимости проекционного метода (22) достаточно доказать [9, теорема 4; 10, с. 221], что этот же метод сходится для оператора $H: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$, поскольку оператор $\alpha S + \beta L + K: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ является компактным в силу лемм 3–5 (при выполнении условий леммы 4), а оператор $A: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$, определенный формулой (19), инъективен.

Рассмотрим уравнения

$$H\varphi = f, \quad \varphi \in \hat{W}_2^1, \quad f \in L_2^{(2)} \quad (24)$$

и

$$Q_N H\varphi_N = Q_N f, \quad \varphi_N \in \Psi_2^N. \quad (25)$$

Разложим правую часть в (24) в ряд Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(x). \quad (26)$$

Это возможно, так как $f \in L_2^{(2)}$. Ряд (26) сходится по норме в пространстве $L_2^{(2)}$ и, следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\eta_k|^2 < \infty. \quad (27)$$

В силу леммы 2 и формулы (12) получаем, что (единственное) решение уравнения (24) имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta_k}{\pi(k+1)} U_k(x),$$

а (единственное) решение уравнения (25) имеет вид

$$\varphi_N(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\eta_k}{\pi(k+1)} U_k(x),$$

тогда

$$\varphi(x) - \varphi_N(x) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\eta_k}{\pi(k+1)} U_k(x).$$

Отсюда получаем, что

$$\|\varphi - \varphi_N\|_w = \|\varphi - \varphi_N\|_2 = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{k=N}^{\infty} |\eta_k|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$ в силу сходимости ряда (27). Таким образом, сходимость метода Галеркина (25) доказана. Теорема доказана.

Из сходимости метода Галеркина (22) получаем [9, теорема 3; 10, с. 220]

Следствие 1. Для последовательности приближенных решений уравнений (22) имеет место квазиоптимальная оценка скорости сходимости

$$\|\varphi - \varphi_N\|_w = C \inf_{\psi \in \Psi_2^N} \|\varphi - \psi\|_w \quad (28)$$

с некоторой константой C , зависящей от оператора A .

Заметим, что правую часть в (28) можно вычислить и определить порядок скорости сходимости приближенного решения к точному.

Заключение

Рассмотрен численный метод Галеркина для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на отрезке в специальных классах функций Ψ_p . Это пространства функций, которые представляются рядами Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода со специальным ограничением на скорость убывания коэффициентов Фурье. При $p=2$ пространство Ψ_p совпадает с некоторым весовым пространством Соболева \hat{W}_2^1 .

Основным результатом настоящей статьи является доказательство сходимости метода Галеркина с базисными и тестовыми функциями – многочленами Чебышева 2-го рода – для решений гиперсингулярного интегрального уравнения в этих пространствах функций. Кроме того, получена квазиоптимальная оценка скорости сходимости приближенных решений к точным. Эти результаты являются важными при реализации численных методов для решения гиперсингулярных уравнений.

Список литературы

1. Ilyinsky A. S., Smirnov Y. G. Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998. 114 p.
2. Shestopalov Y. V., Smirnov Y. G., Chernokozhin E. V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. VSP, Utrecht, the Netherlands, 2000. 117 p.
3. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko M. M. Hypersingular Integral Equations and Their Applications. 1st ed. CRC Press, 2003. 396 p.
4. Сетуха А. В. Метод интегральных уравнений в математической физике : учеб. пособие. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2023. 316 с.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. 268 с.
6. Суэтин П. К. Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1979. 416 с.
7. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости гиперсингулярных интегральных операторов в специальных классах функций // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 3–14. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-1
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М. : Мир, 1980. 608 с.
9. Смирнов Ю. Г. Проекционные методы. Пенза : Изд-во ПГТУ, 1997.
10. Kress R. Linear Integral Equations // Applied Mathematical Sciences, 82. Springer-Verlag, New York, 1999. 365 p.

References

1. Ilyinsky A.S., Smirnov Yu.G. *Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998:114.
2. Shestopalov Yu.V., Smirnov Yu.G., Chernokozhin E.V. *Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 2000:117.
3. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko M.M. *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*. 1st ed. CRC Press, 2003:396.
4. Setukha A.V. *Metod integralnykh uravneniy v matematicheskoy fizike: ucheb. posobiye = Method of integral equations in mathematical physics: textbook*. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 2023:316. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G. *Matematicheskiye metody issledovaniya zadach elektrodinamiki = Mathematical methods for studying problems of electrodynamics*. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009:268. (In Russ.)
6. Suyetin P.K. *Klassicheskiye ortogonalnyye mnogochleny = Classical orthogonal polynomials*. Moscow: Nauka, 1979:416. (In Russ.)
7. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of hypersingular integral operators in special classes of functions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):3–14. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-1
8. Lyuk Yu. *Spetsialnyye matematicheskiye funktsii i ikh approksimatsii = Special mathematical functions and their approximations*. Moscow: Mir, 1980:608. (In Russ.)
9. Smirnov Yu.G. *Proyektionnyye metody = Projection methods*. Penza: Izd-vo PGTU, 1997. (In Russ.)
10. Kress R. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences, 82. Springer-Verlag, New York, 1999:365.

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 23.06.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 19.07.2025

Принята к публикации / Accepted 18.08.2025

УДК 517.968, 517.983.37
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-2

Численный метод решения скалярной задачи дифракции монохроматической волны на экране с нелинейными условиями сопряжения

В. О. Нестеров¹, А. А. Цупак²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹nesterovvlad0_o@mail.ru, ²altsupak@yandex.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Цель исследования – разработка численного метода для решения скалярной задачи дифракции на плоском экране с нелинейными условиями сопряжения. Материалы и методы. Задача сопряжения сводится к слабо-сингулярному нелинейному интегральному уравнению. Для решения интегрального уравнения используется метод коллокаций. Результаты. Задача дифракции сведена к нелинейному интегральному уравнению по поверхности экрана. Разработан численный метод для приближенного решения интегрального уравнения. Выводы. Разработан и программно реализован эффективный численный метод для решения актуальной задачи дифракции.

Ключевые слова: скалярная задача дифракции, нелинейное интегральное уравнение, метод коллокаций, итерационная процедура

Для цитирования: Нестеров В. О., Цупак А. А. Численный метод решения скалярной задачи дифракции монохроматической волны на экране с нелинейными условиями сопряжения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 13–22. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-2

Numerical method for solving scalar problem of monochromatic wave scattering from a screen with nonlinear transmission conditions

V.O. Nesterov¹, A.A. Tsupak²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹nesterovvlad0_o@mail.ru, ²altsupak@yandex.ru

Abstract. Background. The purpose of the study is to develop a numerical approach for solving the scalar diffraction problem on a flat screen with nonlinear transmission conditions. **Material and methods.** The original problem is reduced to a weakly singular nonlinear integral equation; the collocation method is used to solve the integral equation. **Results.** The diffraction problem is reduced to a nonlinear integral equation over the screen surface; a numerical method was developed for approximate solving the integral equation. **Conclusions.** An efficient convergent numerical method was developed and implemented to solve the actual diffraction problem.

Keywords: scalar diffraction problem, nonlinear integral equation, collocation method, iterative procedure

For citation: Nesterov V.O., Tsupak A.A. Numerical method for solving scalar problem of monochromatic wave scattering from a screen with nonlinear transmission conditions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(3):13–22. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-2

Введение

Рассматривается скалярная задача дифракции монохроматической (плоской) волны на ограниченном плоском экране. Формулируется задача для уравнения Гельмгольца с двумя условиями сопряжения. В первом постулируется непрерывность полного поля при переходе через внутренние точки экрана. Второе условие выражает разрыв нормальной производной поля через значения самого поля на экране, а также некоторой функции точки экрана, нелинейно зависящей от поля. Условия сопряжения подобного типа возникают, например, при исследовании векторных задач дифракции электромагнитного поля на диэлектрике, покрытом слоем графена [1, 2]. В скалярных задачах акустики и гидродинамики такие условия обычно определяют соотношение между скачком давления в материале и перемещением газа (жидкости) и возникают в случае, когда граница раздела сред покрыта (бесконечно) тонким слоем некоторого материала [3–5].

Исходная краевая задача сводится (в предположении достаточной гладкости искомого решения) к нелинейному интегральному уравнению по поверхности экрана. Для приближенного решения такого уравнения предлагается использовать метод коллокаций с выбором кусочно-постоянных финитных базисных функций, который приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) для отыскания неизвестных коэффициентов, определяющих приближенное решение задачи.

В работе описана явная итерационная процедура для решения СНАУ. Проведено численное тестирование программной реализации алгоритма, установлена внутренняя сходимость численного метода; в графической форме представлены результаты решения нескольких задач дифракции.

1. Постановка задачи дифракции

Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2, 0) : a_i < x_i < b_i\}$ – плоский бесконечно тонкий экран, расположенный в трехмерном однородном пространстве \mathbb{R}^3 . Пространство заполнено средой, характеризующейся заданным волновым числом k_0 ($\operatorname{Re} k_0 > 0$, $\operatorname{Im} k_0 \geq 0$). Во внутренних точках экрана задана функция

$$\sigma(x) = \sigma_1 + \sigma_2 |u(x)|^2, \quad (1)$$

где $u(x)$ – комплексная амплитуда полного поля; σ_1, σ_2 – заданные комплексные параметры.

Падающая плоская монохроматическая волна описывается функцией

$$u_0(x) = e^{ik_0(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Будем искать решение следующей задачи сопряжения. Искомое полное поле $u(x)$ удовлетворяет вне экрана уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k_0^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (2)$$

условиям сопряжения

$$[u]_{\Omega} = 0, \quad (3)$$

и

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Omega} = \sigma u|_{\Omega}, \quad (4)$$

а также условиям излучения Зоммерфельда для рассеянного поля $u_s := u - u_0$,

$$\begin{aligned} u_s(r) &= O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_0 u_s + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{при } \operatorname{Im} k_0 = 0; \\ u_s(r) &= O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{при } \operatorname{Im} k_0 > 0; \quad r := |x| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5)$$

2. Нелинейное интегральное уравнение задачи дифракции

Введем ограниченную область V_1 с гладкой границей, содержащей экран $\Omega \subset \partial V_1$. Пусть $B_R(0)$ – круг радиуса R такой, что $V_1 \subset V_2$, $\partial V_1 \cap \partial V_2 = \emptyset$. Введем ограниченную область $V_2 = B_R(0) \setminus \bar{V}_1$ с границей $\partial V_2 = S_R(0) \cup \partial V_1$ и область $V_3 := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}_2$. Далее используются обозначения $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} =: u_{\mathbf{n}}$, $\frac{\partial u}{\partial r} =: u_r$.

Пусть точка $x \in V_1$, а $u_1^+(y), u_2^-(y)$ – односторонние пределы на ∂V_1 значений $u(y)$ из областей V_1 и V_2 соответственно. Применяя формулу Грина [5, 6]:

$$\begin{aligned} \int_V (u(y) \Delta G(x, y) - \Delta u(y) G(x, y)) dy &= \int_{\partial V} (u(y) G_{\mathbf{n}}(x, y) - u_{\mathbf{n}}(y) G(x, y)) ds_y \\ \text{с } G(x, y) &= \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad \text{в областях } V_i \quad (i=1,2) \quad \text{с внешними нормалями } \mathbf{n}_i, \end{aligned}$$

и учитывая уравнение Гельмгольца (2), получим

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_1} \left(u_1^+(y) G_{\mathbf{n}_1}(x, y) - G(x, y) u_{\mathbf{n}_1}^+(y) \right) ds_y &= \int_{V_1} (u(y) \Delta G(x, y) - G(x, y) \Delta u(y)) dy = \\ &= \int_{V_1} \left(u(y) \Delta G(x, y) + k_0^2 G(x, y) u(y) \right) dV = -u(x), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_{\partial V_1 \cup \partial B} \left(u_2^-(y) G_{\mathbf{n}_2}(x, y) - G(x, y) u_{\mathbf{n}_2}^-(y) \right) ds_y &= \\ &= \int_{V_2} (u(y) \Delta G(x, y) - G(x, y) \Delta u(y)) dy = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь \mathbf{n} и \mathbf{n}' – единичные нормальные векторы, направленные во внешности областей V_1 и V_2 соответственно.

Сложим (6) и (7), примем во внимание условия (4) и противоположную направленность нормалей на поверхности ∂V ($\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ при $y \in \partial V_1$):

$$\begin{aligned}
 -u(x) = & \int_{\partial V_1} \left(u^+(y)G_{\mathbf{n}_1}(x, y) - G(x, y)u_{\mathbf{n}_1}^+(y) \right) ds_y - \\
 & - \int_{\partial V_1} \left(u^-(y)G_{\mathbf{n}_1}(x, y) - G(x, y)u_{\mathbf{n}_1}^-(y) \right) ds_y + \\
 & + \int_{\partial B} \left(u(y)G_{\mathbf{n}_2}(x, y) - G(x, y)u_{\mathbf{n}_2}(y) \right) ds_y, \\
 u(x) = & - \int_{\partial V_1} (u^+ - u^-)(y)G_{\mathbf{n}_1}(x, y) ds_y + \int_{\partial V_1} G(x, y)(u_{\mathbf{n}_1}^+ - u_{\mathbf{n}_1}^-)(y) ds_y + \\
 & - \int_{\partial B} \left(u_0(y)G_{\mathbf{n}'}(x, y) - G(x, y)u_{0, \mathbf{n}'}(y) \right) ds_y - \\
 & - \int_{\partial B} \left(u_s(y)G_{\mathbf{n}'}(x, y) - G(x, y)u_{s, \mathbf{n}'}(y) \right) ds_y.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый из четырех интегралов подробнее. В силу первого условия сопряжения на экране первый из интегралов равен нулю. Преобразуем второй интеграл с учетом (4):

$$\int_{\partial V_1} G(x, y)(u_{\mathbf{n}_1}^+ - u_{\mathbf{n}_1}^-)(y) ds_y = \int_{\Omega} G(x, y)[u_{\mathbf{n}_1}](y) ds_y = \int_{\Omega} G(x, y)\sigma(y)u(y) ds_y.$$

К третьему интегралу снова применим формулу Грина и учтем, что падающая волна удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + k_0^2)u_0(y) = 0$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\partial B} \left(u_0(y)G_{\mathbf{n}}(x, y) - G(x, y)u_{0, \mathbf{n}}(y) \right) ds_y = \\
 & = \int_B (u_0(y)\Delta G(x, y) - \Delta u_0(y)G(x, y)) dy = -u_0(x).
 \end{aligned}$$

Выполним оценку четвертого интеграла. Для любого фиксированного $x \in Q$ и $|y| \rightarrow +\infty$ имеем

$$G(x, y) = O(|x - y|^{-1}) = O(R^{-1}), \quad G_{\mathbf{n}}(x, y) = O(|x - y|^{-2}) = O(R^{-2}),$$

откуда с учетом (5) выводим, что

$$\int_{\partial B} \left(u_s(y)G_{\mathbf{n}}(x, y) - G(x, y)u_{s, \mathbf{n}}(y) \right) ds_y \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, получаем интегральное представление в произвольной точке области V_1 , а следовательно, и для любого $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) u(y) \sigma(y) ds_y + u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Из условия непрерывности поля во внутренних точках экрана и представления проводимости на экране получим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) - \sigma_1 \int_{\Omega} G(x, y) u(y) ds_y - \sigma_2 \int_{\Omega} G(x, y) |u(y)|^2 u(y) ds_y = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

3. Численный метод решения нелинейного интегрального уравнения

Опишем метод коллокаций [7, 8] для решения уравнения (8).

На экране $\Omega = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ введем равномерную сетку и конечные элементы, определенные через число разбиений $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{k,i_k} = a_k + i_k h_k, \quad h_k = \frac{b_k - a_k}{n}, \quad k = 1, 2, \quad i_k = 0, \dots, n;$$

$$\Omega_i := \Omega_{i_1, i_2} = [x_{1,i_1}; x_{1,i_1+1}) \times [x_{2,i_2}; x_{2,i_2+1}), \quad i_1, i_2 = \overline{0, n-1}.$$

Здесь i – номера конечных элементов при их одноиндексной нумерации. В качестве базисных функций будем использовать индикаторы множеств Ω_i :

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_i, \end{cases}$$

а в качестве узлов коллокации – центры ξ_i областей Ω_i .

Приближенные решения $u_n(x)$ интегрального уравнения запишем в виде

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^N c^j \chi_j(x) \quad (N = n^2).$$

Неизвестные коэффициенты c^j можно найти из системы нелинейных уравнений (всюду ниже для краткости знак суммирования по повторяющемуся индексу будет опускаться):

$$c^j \chi_j(\xi_i) - \sigma_1 c^j \int_{\Omega_j} G(\xi_i, y) ds_y - \sigma_2 \left| c^j \right|^2 c^j \int_{\Omega_j} G(\xi_i, y) ds_y = u_0(\xi_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (9)$$

Введя обозначение $\int_{\Omega_j} G(\xi_i, y) = G_{ij}$, получим краткий вид системы (9):

$$c^i - (\sigma_1 c^j + \sigma_2 \left| c^j \right|^2 c^j) G_{ij} = u_0(\xi_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (10)$$

Для приближенного решения СНАУ (10) рассмотрим явную итерационную процедуру: компоненты c_{m+1}^i вектора неизвестных \vec{c}_{m+1} (это m -е приближение вектора коэффициентов \vec{c}) будем вычислять по формуле

$$c_{m+1}^i = (\sigma_1 c_m^j + \sigma_2 |c_m^j|^2 c_m^j) G_{ij} + u_0(\xi_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (11)$$

В качестве начального приближения \vec{c}_0 в итерационной процедуре выберем решение системы (10) при $\sigma_2 = 0$, отвечающее линейному интегральному уравнению (и случаю постоянной проводимости на экране).

4. Результаты численного решения задачи дифракции

В первом вычислительном эксперименте исследована внутренняя сходимость метода коллокаций при следующих предположениях:

$$\Omega = [0; 1]^2, k_0 = 1, \sigma_1 = 0,5 + 0,3i, \sigma_2 = 0,1 + 0,1i, u_0(x) = e^{ik_0(0,6x_3 - 0,8x_1)}.$$

На рис. 1 представлены графики модуля приближенных решений $|u_n(x)|$ для нескольких значений числа разбиения сетки n . Для решения СНАУ в этом тесте использовалась явная итерационная процедура со следующим условием выхода: $\max_i |c_m^i - c_{m+1}^i| < 10^{-10}$.

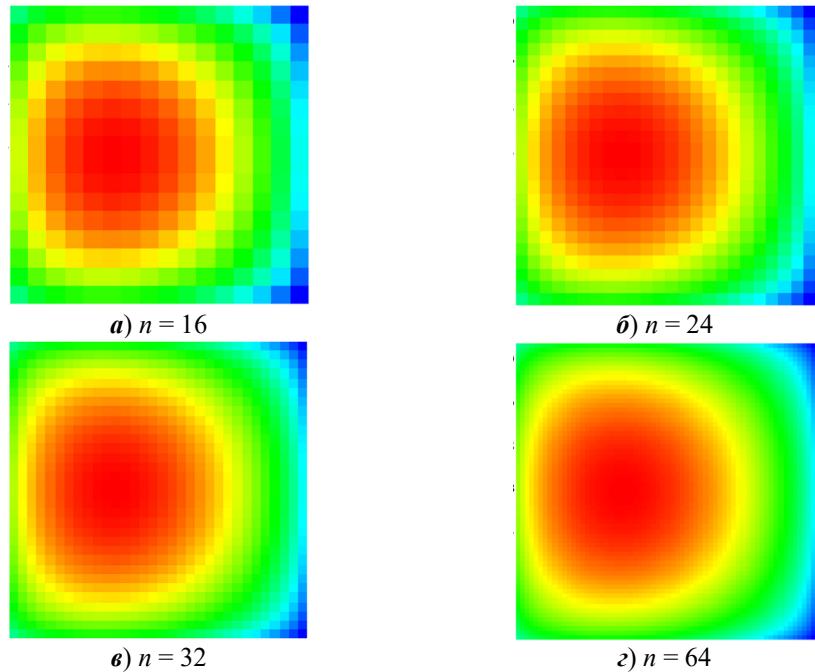


Рис. 1. Графики $|u_n(x)|$ при $n = 16, 24, 32$ и 64

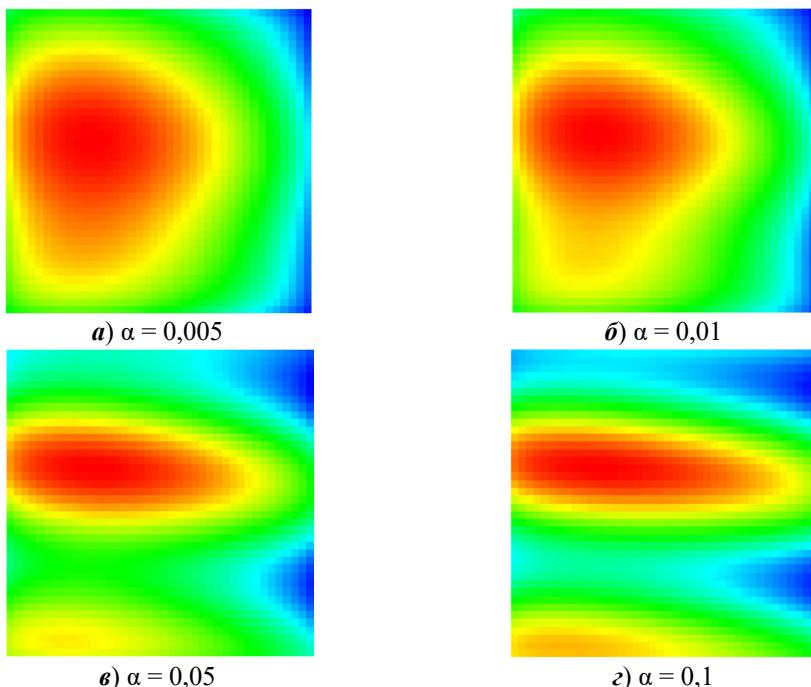
В табл. 1 приведены значения отклонения приближенных решений друг от друга по норме $\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Таблица 1

Значения $\|u_{n_1} - u_{n_2}\|_\infty$

n_1	8	16	24	32	48
n_2	16	24	32	48	64
$\ u_{n_1} - u_{n_2}\ _\infty$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$

Исследована устойчивость решения нелинейного интегрального уравнения к возмущению его правой части. На рис. 2 показаны решения задачи с правыми частями вида $u_0(x) = e^{ik_0(0,6x_3-0,8x_1)} + \alpha e^{i10k_0x_2}$ для нескольких значений параметра α ; приведенные результаты иллюстрируют непрерывную зависимость решений от правой части.

Рис. 2. Графики $|u_{n, \alpha}(x)|$ при $\alpha = 0,005, 0,01, 0,05$ и $0,1$

В третьем тесте (рис. 3) исследована зависимость решения интегрального уравнения от величины волнового числа. Форма экрана в этом тесте прежняя, а падающая плоская описывается функцией $u_0(x) = e^{ik_0(0,8x_1-0,6x_2)}$.

В четвертом тесте (рис. 4) численно исследовано влияние нелинейности в условии сопряжении на экране на решения интегрального уравнения. Форма экрана в этом тесте прежняя, падающая плоская описывается функцией $u_0(x) = e^{ik_0x_1}$, $k_0 = 10$, а комплексная проводимость экрана задается парой коэффициентов $\sigma_1 = 0,5$, $\sigma_2 = (0,1 + 0,1)\sigma_n$. Проведены расчеты при нескольких значениях коэффициента σ_n .

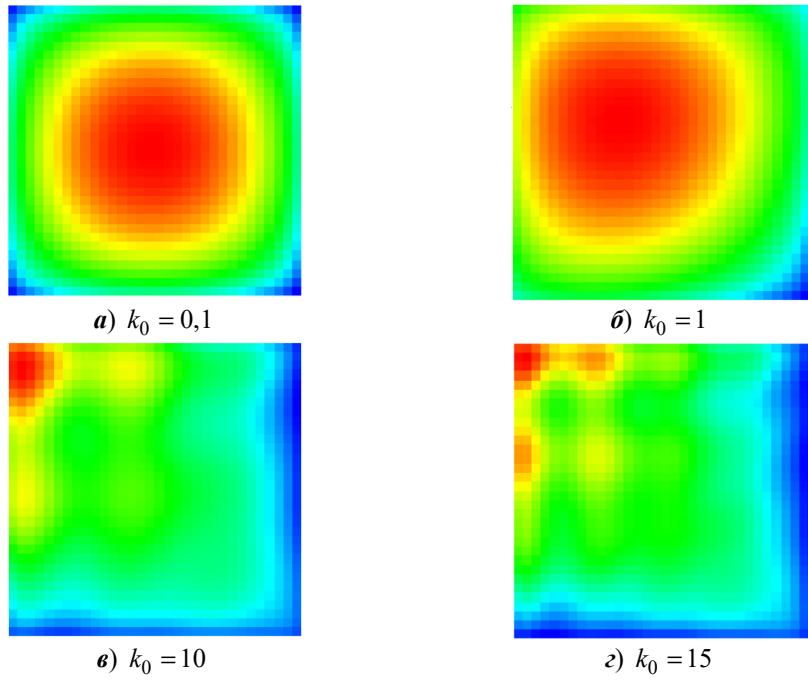


Рис. 3. Графики $|u_n(x)|$ при $k_0 = 0,1, 1, 10$ и 15

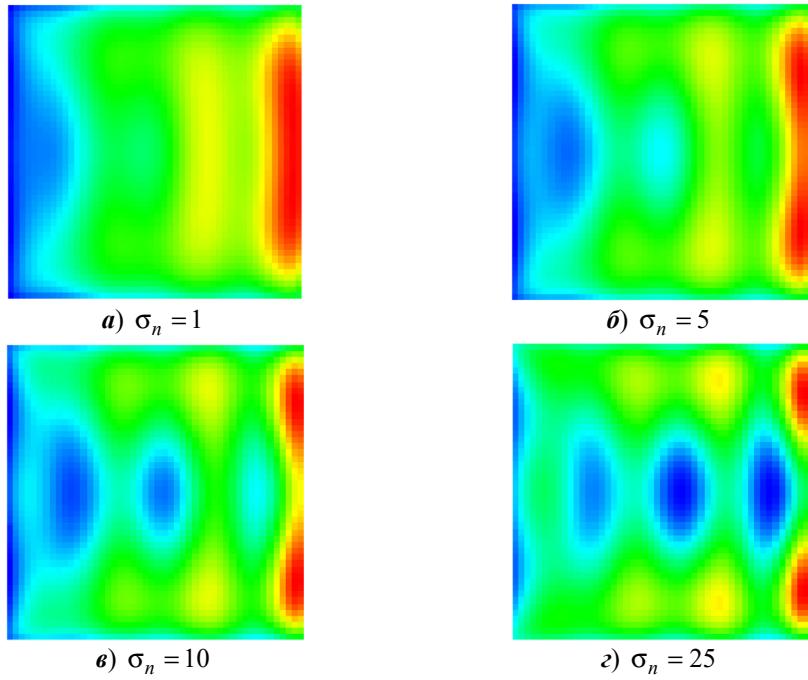


Рис. 4. Графики $|u_n(x)|$ при $\sigma_n = 1, 5, 10$ и 25

Заключение

В работе численно исследована скалярная задача дифракции монохроматической волны на плоском экране с нелинейными условиями сопряжения

третьего рода. Краевая задача, сформулированная в неограниченном трехмерном пространстве, сведена к нелинейному интегральному уравнению по поверхности экрана; для численного решения интегрального уравнения применен метод коллокаций. Программно реализованы две итерационные процедуры для приближенного решения задачи. Проведены вычислительные эксперименты, подтвердившие внутреннюю сходимость предложенного численного метода, его устойчивость к входным данным задачи, а также эффективность для решения задач дифракции в достаточно широком диапазоне частот и при значительной нелинейности на экране.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. Интегро-дифференциальные уравнения в задаче рассеяния электромагнитных волн на диэлектрическом теле, покрытом графеном // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 9. С. 1216–1224.
2. Цупак А. А. Метод интегральных уравнений в задаче распространения электромагнитной волны в пространстве, заполненном локально неоднородной средой, со слоем графена на границе области неоднородности // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 96–106.
3. Colbrook M. J., Ayton L. J. Do we need non-linear corrections? On the boundary Forchheimer equation in acoustic scattering // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 495. P. 115905. doi: 10.1016/j.jsv.2020.115905
4. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнений Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1089–1097.
5. Колтон Д., Кress Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / пер. с англ. Ю. А. Еремина, Е. В. Захарова ; под ред. А. Г. Свешникова. М. : Мир, 1987. 311 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
7. Kress R. Linear integral equations. Berlin : Springer-Verlag, 1989. 367 р.
8. Цупак А. А. Сходимость метода коллокаций для интегрального уравнения Липпмана – Швингера // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 4. С. 84–93.

References

1. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. Integro-differential equations in the problem of scattering of electromagnetic waves on a dielectric body covered with graphene. *Differentsialnyye uravneniya = Differential equations*. 2024;60(9):1216–1224. (In Russ.)
2. Tsupak A.A. The method of integral equations in the problem of electromagnetic wave propagation in a space filled with a locally inhomogeneous medium, with a graphene layer on the boundary of the inhomogeneity region. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;1. S. 96–106. (In Russ.)
3. Colbrook M.J., Ayton L.J. Do we need non-linear corrections? On the boundary Forchheimer equation in acoustic scattering. *Journal of Sound and Vibration*. 2021;495:115905. doi: 10.1016/j.jsv.2020.115905
4. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. On the Fredholm property and solvability of a system of integral equations in the conjugacy problem for the Helmholtz equations. *Differentsialnyye uravneniya = Differential equations*. 2023;59(8):1089–1097. (In Russ.)
5. Kolton D., Kress R. *Metody integralnykh uravneniy v teorii rasseyaniya = Methods of integral equations in scattering theory*. Transl. from Eng. by Yu.A. Yeremina, E.V. Zakharova; ed. by A.G. Sveshnikov. Moscow: Mir, 1987:311. (In Russ.)

6. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1981:512. (In Russ.)
7. Kress R. *Linear integral equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1989:367.
8. Tsupak A.A. Convergence of the collocation method for the Lippmann–Schwinger integral equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2018;(4):84–93. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владислав Олегович Нестеров
аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: nesterovvlad0_o@mail.ru

Vladislav O. Nesterov
Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Алексей Александрович Цупак
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Aleksey A. Tsupak
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 17.06.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 12.07.2025

Принята к публикации / Accepted 14.08.2025

УДК 517.925.5

doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-3

Эквиограниценность по Пуассону в пределе и эквиосциллируемость в пределе множеств всех решений систем дифференциальных уравнений

К. С. Лапин

Мордовский государственный педагогический университет

имени М. Е. Евсевьева, Саранск, Россия

klapin@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследуются осциллирующие движения динамических систем, а именно движения, которые не являются ограниченными и, кроме того, обладают тем свойством, что не стремятся к бесконечности при стремлении времени к плюс бесконечности. Такие движения играют важную роль в различных задачах математической физики, небесной механики, термодинамики и астрофизики. *Материалы и методы.* Введены в рассмотрение новые понятия, связанные с осциллируемостью множества всех решений системы дифференциальных уравнений – понятие эквиосциллируемости в пределе множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. *Результаты.* На основе принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова и найденной автором связи между ограниченностью по Пуассону и осциллируемостью решений получены достаточные условия эквиосциллируемости в пределе множества всех решений, а также частичные аналоги этих условий. Работа продолжает исследования автора по изучению ограниченности и осциллируемости множеств всех решений дифференциальных систем с использованием функций Ляпунова и вектор-функций Ляпунова. *Выводы.* Полученные теоретические результаты могут быть использованы для анализа сложных динамических систем в различных областях науки.

Ключевые слова: эквиограниценность по Пуассону в пределе, эквиосциллируемость, вектор-функция Ляпунова, частично контролируемые начальные условия, частичная осциллируемость

Для цитирования: Лапин К. С. Эквиограниценность по Пуассону в пределе и эквиосциллируемость в пределе множеств всех решений систем дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 23–35. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-3

Poisson ultimate equiboundedness and ultimate equioscillation of sets of all solutions of differential equations' systems

K.S. Lapin

Mordovian State Pedagogical University named after M.E. Evseviev, Saransk, Russia

klapin@mail.ru

Abstract. Background. The oscillating motions of dynamic systems are investigated, namely, motions that are not bounded and, in addition, have the property that they do not tend to infinity as time tends to plus infinity. Such motions play an important role in various problems of mathematical physics, celestial mechanics, thermodynamics and astrophysics. *Materials and methods.* New concepts related to the oscillation of the set of all solutions of

a system of differential equations are introduced into consideration: the concept of equi-oscillation in the limit of the set of all solutions and partial analogues of this concept. *Results.* Based on the principle of comparison of Matrosov with Lyapunov vector functions and the connection found by the author between Poisson boundedness and oscillability of solutions, sufficient conditions for equioscillability in the limit of the set of all solutions, as well as partial analogues of these conditions, are obtained. The work continues the author's research on the study of the boundedness and oscillation of the sets of all solutions of differential systems using Lyapunov functions and Lyapunov vector functions. *Conclusions.* The obtained theoretical results can be used to analyze complex dynamic systems in various fields of science.

Keywords: Poisson ultimate equiboundedness, equioscillation, Lyapunov vector function, partially controlled initial conditions, partial oscillation

For citation: Lapin K.S. Poisson ultimate equiboundedness and ultimate equioscillation of sets of all solutions of differential equations' systems. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(3):23–35. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-3

Введение

Осциллирующие движения динамических систем представляют собой важный класс решений, занимающих промежуточное положение между ограниченными и неограниченными траекториями. Впервые данный феномен был предложен в исследованиях Ж. Шази [1] при анализе возможных движений в классической задаче трех тел. Характерной особенностью таких движений является отсутствие их стремления к бесконечности при неограниченном возрастании времени, несмотря на неограниченность этих решений. Значительный вклад в изучение этого явления внесли исследования К. А. Ситникова [2], где было установлено существование осциллирующих решений в модели Колмогорова, и исследования А. М. Леонтovichа [3], обнаружившего аналогичные траектории в биллиардных системах, связанных с эргодической теорией. Дальнейшее развитие теория получила в трудах В. М. Алексеева (см., например, [4]), который выявил осциллирующие режимы в квазислучайных динамических системах небесной механики. Особого внимания заслуживает цикл работ Л. Д. Пустыльникова (см., например, [5]), в которых осциллирующие движения использовались как ключевой инструмент для решения многих важных задач современной физики. Параллельно развивалась теория P -ограниченных (ограниченных по Пуассону) решений, основные понятия которой были введены в работах автора (см., например, [6–8]). Эти понятия обобщают классическое представление об ограниченности, допуская нахождение решения в заданной области лишь на специальной последовательности временных интервалов. На основе различных модификаций метода вектор-функций Ляпунова были получены достаточные условия различных типов P -ограниченности множеств всех решений дифференциальных систем. В последующих исследованиях на основе синтеза методов вектор-функций Ляпунова, канонических областей Красносельского и направляющих функций были установлены достаточные условия существования P -ограниченных решений. Важным этапом исследований автора стала финальная характеризация понятия P -ограниченности, позволившая выявить глубокую связь между этим понятием и осциллирующими решениями. Это привело к обнаружению достаточных условий различных видов осциллируе-

мости множеств всех решений – равномерной, равномерной в пределе и тотальной. В настоящей работе вводятся новые классы осциллирующих множеств всех решений, а именно введены понятие эквиосциллируемости в пределе множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. Введенные понятия представляют собой специализированные случаи P -эквиограниценности в пределе множества всех решений дифференциальной системы. На основе применения принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова получены достаточные условия различных типов эквиосциллируемости в пределе множества всех решений. В качестве следствий получены достаточные условия соответствующих типов эквиосциллируемости в пределе множества всех решений на языке классических функций Ляпунова. Предлагаемый подход открывает новые возможности для анализа сложных динамических систем в различных областях математической физики.

1. Предварительные сведения

Пусть задана произвольная дифференциальная система

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \quad (1)$$

с непрерывной правой частью, где $\mathbb{R}^+ \equiv [0; +\infty)$, все решения которой продолжимы на \mathbb{R}^+ .

Далее через $\|\cdot\|$ обозначена стандартная норма в \mathbb{R}^n . Для решения $x(t)$ системы (1) используется обозначение $x(t, t_0, x_0)$, если $x_0 = x(t_0)$. Для любого числа $t_0 \in \mathbb{R}^+$ используется обозначение $\mathbb{R}^+(t_0) \equiv [t_0; +\infty)$. Числовая последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ называется P -последовательностью, если эта последовательность неотрицательна, возрастает и, кроме того, удовлетворяет условию $\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_i = +\infty$. Каждой P -последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i \geq 1}$ сопоставле-

но множество $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$. Наконец, для любых $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

и $1 \leq k \leq n$ используется обозначение $y = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Вспомним сначала необходимые базовые определения, связанные с понятиями ограниченности, P -ограниченности (ограниченности по Пуассону) и осциллируемости данного решения системы (1).

Определение 1 [9]. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y -ограниченным (ограниченным [10]), если для этого решения существует такая константа $\beta > 0$, что для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство

$$y(t, t_0, x_0) \leq \beta \quad (x(t, t_0, x_0) \leq \beta).$$

В противном случае решение системы (1) называется y -неограниченным (неограниченным).

Определение 2 [11]. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y - P -ограниченным (P -ограниченным), если для этого решения существуют

такая константа $\beta > 0$ и такая P -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, что для любых $t \in R^+(t_0) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство

$$y(t, t_0, x_0) \leq \beta \quad (x(t, t_0, x_0) \leq \beta).$$

Из определений 1 и 2 видно, что любое y -ограниченное (P -ограниченное) решение системы (1) является y - P -ограниченным (P -ограниченным).

В работе [12] получен следующий признак, дающий финальную характеристизацию y - P -ограниченного (P -ограниченного) решения системы (1).

Предложение 1. Необходимым и достаточным условием y - P -ограниченности (P -ограниченности) решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является выполнение следующего требования:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t_0, x_0) \neq \infty \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) \neq \infty \right).$$

Определение 3 [12, 13]. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y -осцилирующим (осцилирующим [1], см. также [5]), если это решение является y -неограниченным (неограниченным) и, кроме того, выполнено условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t_0, x_0) \neq \infty \quad \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, t_0, x_0) \neq \infty \right).$$

Из данного определения, пользуясь предложением 1, получаем, что каждое y - P -ограниченное (P -ограниченное) решение системы (1) является либо y -ограниченным (ограниченным), либо y -осцилирующим (осцилирующим). Как следствие, имеем следующее утверждение.

Предложение 2 [12, 13]. Необходимым и достаточным условием y -осцилируемости (осцилируемости) решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является одновременное выполнение следующих требований:

- 1) решение $x(t, t_0, x_0)$ является y - P -ограниченным (P -ограниченным);
- 2) решение $x(t, t_0, x_0)$ является y -неограниченным (неограниченным).

Вспомним теперь необходимые базовые определения, которые связаны с понятиями эквиограниченности в пределе и P -эквиограниченности (эквиограниченности по Пуассону) в пределе множества всех решений системы (1). Далее для любых $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $1 \leq k \leq m \leq n$ будем употреблять следующие обозначения:

$$y = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k \quad \text{и} \quad z = (x_1, \dots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Определение 4 [14]. Множество всех решений дифференциальной системы (1) называется y - z_0 -эквиограниченным в пределе, если для системы (1) найдется такое число $B > 0$, и для любых $\alpha \geq 0$ и $t_0 \geq 0$ существует такое

число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$, $z_0 \leq \alpha$ системы (1) при всех $t \in \mathbb{R}^+ (t_0 + T)$ справедливо неравенство $y(t, t_0, x_0) < B$. В случае, когда $m = n$, $y - z_0$ -эквиограниценность в пределе множества всех решений системы (1) называется [9] y -эквиограниценностью в пределе множества всех решений этой системы. В случае же, когда, $k = m = n$, $y - z_0$ -эквиограниценность в пределе множества всех решений системы (1) называется [10] эквиограниценностью в пределе множества всех решений этой системы.

Определение 5 [12]. Множество всех решений дифференциальной системы (1) называется $y - z_0 - P$ -эквиограниценным в пределе, если для системы (1) найдутся такое $B > 0$ и такая P -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, и для любых $\alpha \geq 0$ и $t_0 \in M(\tau)$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \geq 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$, $z_0 \leq \alpha$ системы (1) при всех $t \in \mathbb{R}^+ (t_0 + T) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $y(t, t_0, x_0) < B$. В случае, когда $m = n$, $y - z_0 - P$ -эквиограниценность в пределе множества всех решений системы (1) называется $y - P$ -эквиограниценностью в пределе множества всех решений этой системы. В случае же, когда $k = m = n$, $y - z_0 - P$ -эквиограниценность в пределе множества всех решений системы (1) называется P -эквиограниценностью в пределе множества всех решений этой системы.

Из определений 4 и 5 видно, что если множество всех решений системы (1) $y - z_0$ -эквиограницено в пределе, то это множество $y - z_0 - P$ -эквиограницено в пределе. В частности, если множество всех решений системы (1) y -эквиограницено в пределе, то это множество $y - P$ -эквиограницено в пределе. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиограницено в пределе, то это множество P -эквиограницено в пределе. Кроме того, легко видеть, что без ограничения общности функцию $T = T(t_0, \alpha)$ из определений 4 и 5 можно считать неубывающей по α при каждом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$.

В некоторых случаях при работе с множеством всех решений системы (1) требуется точно указать нужную P -последовательность. В таких случаях будем говорить, что множество всех решений системы (1) $y - z_0 - P$ -эквиограницено в пределе относительно данной P -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Аналогично будем говорить для $y - P$ -эквиограниценности в пределе, а также для P -эквиограниценности в пределе множества всех решений системы (1).

Легко видеть, что если множество всех решений системы (1) $y - z_0 - P$ -эквиограницено в пределе, то любое решение этой системы $y - P$ -ограничено. Действительно, если определить для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $t_0 \in M(\tau)$, требуемое в определении 2 число $\beta > 0$, полагая

$$\beta = \max \left(B; \max_{[t_0, T(t_0, x_0)]} x(t, t_0, x_0) \right),$$

то получим, что решение $x(t, t_0, x_0)$ y - P -ограничено. В случае же, если $t_0 M(\tau)$, то рассмотрим для решения $x(t, t_0, x_0)$ решение $x(t, t'_0, x'_0)$, где $t'_0 > t_0$, $t'_0 \in M(\tau)$ и $x'_0 = x(t'_0, t_0, x_0)$. Решение $x(t, t'_0, x'_0)$ является y - P -ограниченным, поскольку $t'_0 \in M(\tau)$. Из этого, пользуясь предложением 1, имеем $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t'_0, x'_0) \neq \infty$. Так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t_0, x_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t, t'_0, x'_0) \neq \infty$, то из предложения 1 следует, что решение $x(t, t_0, x_0)$ является y - P -ограниченным. В частности, при $k \leq m = n$ получаем, что если решения системы (1) y - P -эквиограничены в пределе, то любое решение этой системы является y - P -ограниченным. При $k = m = n$ получаем, что если решения системы (1) P -эквиограничены в пределе, то любое решение этой системы является P -ограниченным.

Основные результаты

Введем основное понятие в этой работе, а именно введем понятие y - z_0 -эквиосциллируемости в пределе множества всех решений, представляющее собой специальный случай понятия y - z_0 - P -эквиограниченности в пределе множества всех решений.

Определение 6. Множество всех решений дифференциальной системы (1) будем называть y - z_0 -эквиосциллирующим в пределе, если множество всех решений этой системы y - z_0 - P -эквиограничено в пределе и, кроме того, каждое решение этой системы является y -неограниченным. В случае, когда $k \leq m = n$, множество всех решений системы (1) будем называть y -эквиосциллирующим в пределе. В случае же, когда $k = m = n$, множество всех решений системы (1) будем называть эквиосциллирующим в пределе.

Из сказанного выше следует, что если множество всех решений дифференциальной системы (1) y - z_0 -эквиосциллирует в пределе, то любое решение этой системы является y -осциллирующим. В частности, если множество всех решений системы (1) y -эквиосциллирует в пределе, то любое решение этой системы является y -осциллирующим. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиосциллирует в пределе, то любое решение этой системы является осциллирующим.

С целью получить достаточные условия y - z_0 -эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) освежим в памяти необходимые сведения о вектор-функциях Ляпунова [15]. Пусть задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$, $l \geq 1$. Производная $\dot{V}(t, x)$ в силу системы (1) этой вектор-функции определяется обычным способом, т.е. покомпонентно. Далее для любых векторов $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ используется обозначение $\vartheta \leq \psi$, если $\vartheta_i \leq \psi_i$ для

каждого $1 \leq i \leq l$. Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ и дифференциальная система

$$\dot{\vartheta} = g(t, \vartheta), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad \vartheta \in \mathbb{R}^l, \quad (2)$$

с непрерывной правой частью называются соответственно вектор-функцией Ляпунова и системой сравнения для системы (1), если для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место следующее неравенство:

$$\dot{V}(t, x) \leq g(t, V(t, x)). \quad (3)$$

Далее будем предполагать, что вектор-функция $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$ удовлетворяет условию Важевского, которое состоит в том, что для каждого $1 \leq s \leq l$ компонента $g_s: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ этой вектор-функции является неубывающей по переменным $\vartheta_1, \dots, \vartheta_{s-1}, \vartheta_{s+1}, \dots, \vartheta_l$ при любом фиксированном значении переменной ϑ_s . Выполнение условия Важевского для правой части системы (2) гарантирует, что среди всех решений $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0)$ этой системы существует так называемое верхнее решение $\bar{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$, т.е. решение, которое для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ удовлетворяет неравенству $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0) \leq \bar{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$. Главным свойством верхних решений является то, что для решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), вектор-функции Ляпунова $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ и верхнего решения $\bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0))$ системы сравнения (2) для системы (1) имеет место справедливое при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq \bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0)). \quad (4)$$

Далее для произвольных $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и $1 \leq p \leq q \leq l$ будем употреблять обозначения $\mu = (\xi_1, \dots, \xi_p)^T$ и $\gamma = (\xi_1, \dots, \xi_q)^T$. Кроме того, для каждой P -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ вместе с указанным выше множеством $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ далее будем использовать еще и, так сказать, «дополнительное к $M(\tau)$ » множество $N(\tau)$, т.е. множество

$$N(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i}; \tau_{2i+1}].$$

Получим, пользуясь техникой вектор-функций Ляпунова, достаточное условие $y - z_0$ -эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1).

Теорема 1. Предположим, что для системы (1) имеются следующие объекты:

- а) P -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$;
- б) вектор-функция Ляпунова $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ с системой сравнения (2);
- в) числа $1 \leq p \leq q \leq l$;
- г) непрерывно дифференцируемая положительная функция $W: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
- которые удовлетворяют условиям:

1) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$V_1(t, x) \geq 0, \dots, V_q(t, x) \geq 0;$$

2) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$b(y) \leq V_1(t, x) + \dots + V_p(t, x),$$

где $b(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $b(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$;

3) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$V_1(t, x) + \dots + V_q(t, x) \leq a(t, z),$$

где $a(t, r)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая положительная функция, которая возрастает по r при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$;

4) для любых $(t, x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$W(t, x) \leq d(y),$$

где $d(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая положительная и возрастающая функция;

5) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\dot{W}(t, x) \leq h(W(t, x)),$$

где $h(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $h(r) > 0$ при любом $r > 0$.

Кроме того, пусть множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) является μ - γ_0 - P -эквиограниченным в пределе относительно P -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) является y - z_0 -эквиосциллирующим в пределе.

Доказательство. Установим сначала, что каждое решение системы (1) является y -неограниченным. Проще всего доказывается это от противного. Действительно, предположим, что любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является y -ограниченным, т.е. для этого решения существует такое $\beta > 0$, что

при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство $y(t, t_0, x_0) \leq \beta$. При помощи этого неравенства, пользуясь условием 4 теоремы 1, получаем для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau)$ неравенство $W(t, x(t, t_0, x_0)) \leq d(\beta)$. Теперь, используя условие 5 теоремы, получаем для любых $\mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство $W(t, x(t, t_0, x_0)) \geq W(t_0, x_0) + h(W(t_0, x_0))(t - t_0)$. Из двух последних неравенств следует справедливость неравенства

$$d(\beta) \geq W(t_0, x_0) + h(W(t_0, x_0))(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau),$$

что абсурдно, поскольку $h(W(t_0, x_0)) > 0$ и $d(\beta)$ – константа. Таким образом, получено противоречие и, следовательно, каждое решение системы (1) является y -неограниченным. Докажем теперь, что множество всех решений дифференциальной системы (1) y - z_0 - P -эквиограничено в пределе. Рассмотрим любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $z_0 \leq \alpha$, системы (1). С целью поиска для этого решения требуемого в определении 5 числа $T = T(t_0, \alpha)$ заметим сначала, имея в виду неравенство (4) и условие 2, что для любого $t \in M(\tau)$ справедливо неравенство

$$b(y(t, t_0, x_0)) \leq \bar{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)) + \dots + \bar{\vartheta}_p(t, t_0, V(t_0, x_0)),$$

где $\bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0)) = (\bar{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)), \dots, \bar{\vartheta}_p(t, t_0, V(t_0, x_0)))^T$ – верхнее решение системы сравнения (2) для системы (1). По условию теоремы множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) μ - γ_0 - P -эквиограничено в пределе относительно P -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Поэтому для верхнего решения $\bar{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0))$, где $t_0 \in M(\tau)$, системы сравнения (2) и нормы $V^\gamma(t_0, x_0)$ вектора $V^\gamma(t_0, x_0) = (V_1(t_0, x_0), \dots, V_q(t_0, x_0))^T$, существуют такие числа $C > 0$ и $\Psi = \Psi(t_0, V^\gamma(t_0, x_0)) \geq 0$, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0 + \Psi) \cap M(\tau)$ имеет место неравенство

$$\bar{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0)) < C,$$

где $\bar{\mu}(t, t_0, V(t_0, x_0)) = (\bar{\vartheta}_1(t, t_0, V(t_0, x_0)), \dots, \bar{\vartheta}_p(t, t_0, V(t_0, x_0)))^T$.

Из условий 1 и 3 видно, что для любого $t_0 \in M(\tau)$ справедливо неравенство $V^\gamma(t_0, x_0) \leq a(t_0, \alpha)$. Пользуясь теперь тем, что функция $\Psi = \Psi(t_0, r)$ не убывает при любом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$, имеем неравенство $\Psi(t_0, V^\gamma(t_0, x_0)) \leq \Psi(t_0, a(\alpha))$. Если определить искомое число $T = T(t_0, \alpha)$ равенством $T(t_0, \alpha) = \Psi(t_0, a(t_0, \alpha))$, то для этого числа T получаем спра-

ведливое при всех $t \in \mathbb{R}^+ (t_0 + T) \cap M(\tau)$ неравенство $b(y(t, t_0, x_0)) \leq p \cdot C$. Пользуясь теперь условием $b(r) \rightarrow +\infty$ при $r \rightarrow +\infty$ и тем, что числа p и C фиксированы, выберем такое число $B > 0$, что $p \cdot C < b(B)$. Из этого при всех $t \in \mathbb{R}^+ (t_0 + T) \cap M(\tau)$ получаем неравенство $b(y(t, t_0, x_0)) < b(B)$, где B не зависит от решения $x(t, t_0, x_0)$. Так как по условию теоремы функция $b(r)$ является неубывающей, то из последнего неравенства вытекает, что для любого $t \in \mathbb{R}^+ (t_0 + T) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $y(t, t_0, x_0) < B$. Таким образом, установлено, что множество всех решений системы (1) $y - z_0$ -эквиограничено в пределе. Из этого, учитывая доказанную выше y -неограниченность каждого решения системы (1), получаем, что множество всех решений системы (1) является $y - z_0$ -эквиосциллирующим в пределе. Теорема доказана.

Отметим, что если в формулировке теоремы 1 положить $z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием y -эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций Ляпунова. Если же в формулировке теоремы 1 положить $y = z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций Ляпунова.

Рассмотрим теперь случай, когда в теореме 1 для вектор-функций Ляпунова полагается $l = 1$, т.е. когда вектор-функции Ляпунова являются функциями Ляпунова. При помощи неравенства (3) несложно видеть, что в рассматриваемом случае теорема 1 превращается в следующее достаточное условие $y - z_0$ -эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Предложение 3. Предположим, что для системы (1) имеются следующие объекты:

- а) P -последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$;
- б) неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (функция Ляпунова);
- в) непрерывно дифференцируемая положительная функция $W: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$;
- г) непрерывная функция $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

которые удовлетворяют условиям:

- 1) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо двойное неравенство

$$b(y) \leq V(t, x) \leq a(t, z),$$

где функции $b(r)$ и $a(t, r)$ такие же, как в теореме 1;

- 2) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\dot{V}(t, x) \leq g(t, V(t, x));$$

3) для любых $(t, x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$W(t, x) \leq d(y),$$

где функция $d(r)$ такая же, как в теореме 1;

4) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\dot{W}(t, x) \geq h(W(t, x)),$$

где функция $h(r)$ такая же, как в теореме 1;

5) множество всех решений уравнения $\dot{\vartheta} = g(t, \vartheta)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, является P -эквиограниченным в пределе относительно P -последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) является y - z_0 -эквиосциллирующим в пределе.

Отметим, что если в формулировке предложения 3 положить $z = x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие y -эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова. Если же в формулировке предложения 3 положить $y = z = x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Заключение

Введенные в работе понятия эквиосциллируемости в пределе множеств в пределе всех решений дифференциальных систем, а также частичные аналоги этого понятия являются новым видом осциллируемости множеств всех решений. Полученные в работе на основе принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова достаточные условия эквиосциллируемости в пределе множеств всех решений дифференциальных систем могут быть использованы в различных областях качественной теории дифференциальных уравнений и математической физики для решения задач, связанных с вопросами существования осциллирующих движений динамических систем.

Список литературы

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indefiniment // Annales de l'Ecole Norm. Sup. 3eser. 1922, ser. 39. P. 29–130.
2. Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 2. С. 303–306.
3. Леонович А. М. О существовании осциллирующих траекторий в одной биллиардной задаче // Доклады АН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 523–526.
4. Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы. II // Математический сборник. 1968. Т. 77 (119). С. 545–600.
5. Пустыльников Л. Д. О строгом обосновании возможности неограниченного роста энергии частиц в одной задаче ядерной физики // Доклады АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 550–553.

6. Лапин К. С. Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 40–50. doi: 10.1134/S0374064118010053
7. Лапин К. С. Вектор-функции Ляпунова, вращения векторных полей, направляющие функции и существование ограниченных по Пуассону решений // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 3. С. 306–312. doi: 10.31857/S037406412103002X
8. Лапин К. С. Вектор-функции Ляпунова и ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений // Математические заметки. 2018. Т. 104, № 1. С. 74–86. doi: 10.4213/mzm11622
9. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных. М. : Наука, 1987. 254 с.
10. Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений // Математика. 1965. № 5. С. 95–127.
11. Лапин К. С. Вектор-функции Ляпунова, канонические области Красносельского и существование ограниченных по Пуассону решений // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 10. С. 1304–1309. doi: 10.1134/S0374064120100027
12. Лапин К. С. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. Саранск : РИЦ МГПУ, 2022. 163 с.
13. Лапин К. С. Тотальная ограниченность по Пуассону и тотальная осциллируемость решений систем дифференциальных уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 4. С. 104–115. doi: 10.46698/w0398-0994-2990-z
14. Лапин К. С. Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1281–1286. doi: 10.1134/S0374064113100051
15. Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю., Воронов А. А., Земляков А. С., Козлов Р. И., Маликов А. И., Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М. : Наука, 1987. 312 с.

References

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indefiniment. *Annales de l'Ecole Norm. Sup. 3eser.* 1922;39:29–130.
2. Sittnikov K.A. The existence of oscillatory motions in the three-body problem. *Dokl. AN SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR.* 1960;133(2):303–306. (In Russ.)
3. Leontovich A.M. On the existence of oscillating trajectories in a billiard problem. *Doklady AN SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR.* 1962;145(3):523–526. (In Russ.)
4. Alekseyev V.M. Quasi-random dynamic systems. 2. *Matematicheskiy sbornik = Mathematical collection.* 1968;77(119):545–600. (In Russ.)
5. Pustynnikov L.D. On a rigorous justification of the possibility of unlimited growth of particle energy in one problem of nuclear physics. *Doklady AN SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR.* 1985;283(3):550–553. (In Russ.)
6. Lapin K.S. Uniform Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations and Lyapunov vector functions. *Differentsialnye uravneniya = Differential equations.* 2018;54(1):40–50. (In Russ.). doi: 10.1134/S0374064118010053
7. Lapin K.S. Lyapunov vector functions, rotations of vector fields, direction functions and the existence of Poisson-bounded solutions. *Differen-tsialnye uravneniya = Differential equations.* 2021;57(3):306–312. (In Russ.). doi: 10.31857/S037406412103002X
8. Lapin K.S. Lyapunov vector functions and Poisson boundedness in the limit of solutions to systems of differential equations. *Matematicheskiye zametki = Mathematical proceedings.* 2018;104(1):74–86. (In Russ.). doi: 10.4213/mzm11622

9. Rumyantsev V.V., Oziraner A.S. *Ustoychivost i stabilizatsiya dvizheniya otnositelno chasti peremennykh = Stability and stabilization of motion with respect to some variables*. Moscow: Nauka, 1987:254. (In Russ.)
10. Yosidzava T. Lyapunov function and boundedness of solutions. *Matematika = Mathematics*. 1965;(5):95–127. (In Russ.)
11. Lapin K.S. Lyapunov vector functions, Krasnosel'skii canonical domains and the existence of Poisson-bounded solutions. *Differentsialnye uravneniya = Differential equations*. 2020;56(10):1304–1309. (In Russ.). doi: 10.1134/S0374064120100027
12. Lapin K.S. *Ogranichennost po Poissonu resheniy sistem differentsialnykh uravneniy = Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations*. Saransk: RITS MGPU, 2022:163. (In Russ.)
13. Lapin K.S. Total Poisson boundedness and total oscillation of solutions to systems of differential equations. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2022;24(4):104–115. (In Russ.). doi: 10.46698/w0398-0994-2990-z
14. Lapin K.S. Boundedness in the limit of solutions of systems of differential equations with respect to some variables with partially controlled initial conditions. *Differentsialnye uravneniya = Differential equations*. 2013;49(10):1281–1286. (In Russ.). doi: 10.1134/S0374064113100051
15. Abdullin R.Z., Anapolskiy L.Yu., Voronov A.A., Zemlyakov A.S., Kozlov R.I., Malikov A.I., Matrosov V.M. *Metod vektornykh funktsiy Lyapunova v teorii ustoychivosti = The method of Lyapunov vector functions in stability theory*. Moscow: Nauka, 1987:312. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Кирилл Сергеевич Лапин

доктор физико-математических наук,
доцент кафедры математики, экономики
и методик обучения, Мордовский
государственный педагогический
университет имени М. Е. Евсеева
(Россия, г. Саранск,
ул. Студенческая, 11а)

E-mail: klapin@mail.ru

Kirill S. Lapin

Doctor of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics, economics
and educational methods, Mordovian
State Pedagogical University named after
M.E. Evseev (11a Studencheskaya street,
Saransk, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 25.04.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 17.05.2025

Принята к публикации / Accepted 06.06.2025

УДК 517.3

doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-4

Итерационный алгоритм для решения нелинейных интегральных уравнений

Б. А. Зайцев¹, М. Ю. Медведик²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹zaytsevborist@gmail.com, ²_medv@mail.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Целью данного исследования является разработка эффективного алгоритма для решения нелинейных интегральных уравнений. Материалы и методы. Представлено описание и обоснование метода, основывающегося на применении принципа сжимающих отображений. Результаты. Рассмотрено применение метода к различным задачам, представлены численные результаты решения интегральных уравнений, показывающие сходимость метода. Выводы. Решение тестовых задач приведено для различных параметров нелинейности, что позволяет сделать вывод о качестве предложенного метода.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение, принцип сжимающих отображений, численный метод, математическая модель

Финансирование: работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Рег. № 124020200015-7).

Для цитирования: Зайцев Б. А., Медведик М. Ю. Итерационный алгоритм для решения нелинейных интегральных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 36–44. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-4

An iterative algorithm for solving nonlinear integral equations

B.A. Zaytsev¹, M.Yu. Medvedik²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹zaytsevborist@gmail.com, ²_medv@mail.ru

Abstract. *Background.* The purpose of this study is to develop an effective algorithm for solving nonlinear integral equations. *Materials and methods.* The method is based on the application of the principle of contraction mappings. The paper presents a description of the method and its justification. *Results.* The application of the method to various problems is considered, numerical results of solving integral equations are presented, showing the convergence of the method. *Conclusions.* The solution of test problems is given for various nonlinearity parameters, which allows us to draw a conclusion about the quality of the proposed method.

Keywords: nonlinear integral equation, principle of compressive maps, numerical method, mathematical model

Financing: the work was supported by the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, (Reg. no. 124020200015-7).

For citation: Zaytsev B.A., Medvedik M.Yu. An iterative algorithm for solving nonlinear integral equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-*

Введение

Интегральные уравнения занимают одно из центральных мест в современной математической физике, теории упругости, электродинамике, теории переноса излучения, экономическом моделировании и многих других областях науки и техники. Ряд задач приводит к нелинейным интегральным уравнениям, поэтому метод сжимающих отображений занимает центральное место в арсенале современных математических методов, особенно при решении интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, которые повсеместно возникают в фундаментальных и прикладных дисциплинах. Его уникальность заключается в органичном синтезе глубокой теоретической базы и конструктивного вычислительного подхода. В отличие от чисто численных схем, где сходимость часто принимается как эмпирический факт, этот метод строго *доказывает* существование и единственность решения в заданном функциональном пространстве при выполнении ключевого условия – сжимаемости интегрального оператора. Эта доказательная строгость сочетается с явным итерационным алгоритмом: последовательное применение оператора к произвольному начальному приближению гарантированно сходится к точному решению. Важнейшее практическое преимущество – управляемость и устойчивость вычислений. Благодаря природе сжатия погрешности на промежуточных итерациях не накапливаются хаотично, а систематически уменьшаются, что обеспечивает предсказуемость процесса. Метод позволяет оценить скорость сходимости и точность на любом шаге, предоставляя исследователю инструмент для планирования вычислений: например, определение числа итераций, необходимых для достижения заданной точности. Его универсальность проявляется в применимости к широкому спектру задач, включая сложные нелинейные уравнения, где классические подходы (такие как метод резольвент или разложения по собственным функциям) неприменимы или требуют непомерных вычислительных затрат. В таких случаях метод сжимающих отображений становится незаменимым, сохраняя прозрачность реализации даже для уравнений с негладкими ядрами или сложными нелинейностями.

Теоретической основой метода служит принцип Банаха о неподвижной точке, который не только гарантирует корректность, но и придает алгоритму математическую элегантность. Проверка условия сжимаемости, например через оценку нормы интегрального ядра, остается доступной задачей, что усиливает его практическую ценность. Даже в пограничных ситуациях, когда константа сжатия близка к единице и сходимость замедляется, метод сохраняет свою надежность как инструмент для задач, где аналитическое решение невозможно, а альтернативные численные методы не подкреплены теоретическими гарантиями.

Двойственная природа – сочетание доказательной мощи и вычислительной гибкости – делает метод фундаментом для современных гибридных подходов. Его интегрируют с техниками дискретизации, спектральными методами или алгоритмами машинного обучения, создавая эффективные комбинации для решения задач высокой сложности. В контексте растущих требований к точности и надежности математических моделей в науке и инженерии метод сжимающих отображений остается не просто инструментом,

а стратегической методологией, обеспечивающей мост между абстрактной теорией и практическим решением. Его роль особенно возрастает в областях, где нелинейность и многомерность делают традиционные подходы неэффективными, подтверждая статус одного из наиболее универсальных и концептуально завершенных методов современной вычислительной математики. Итерационные методы решения различных видов линейных и нелинейных интегральных уравнений были рассмотрены в работах [1–10].

Постановка задачи

Построим итерационный алгоритм для решения различных видов нелинейных интегральных уравнений, основываясь на принципе сжатых отображений. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$u(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, u(y)) dy + f(x), \quad (1)$$

где $f(y)$ и $K(x, y, u(y))$ – непрерывные функции, $a \leq x, y \leq b$.

Пусть для ядра интегрального уравнения выполняется условие Липшица

$$|K(x, y, u_2(y)) - K(x, y, u_1(y))| \leq M |u_2(y) - u_1(y)|,$$

где M – некоторая постоянная, не зависящая от $u_2(y), u_1(y)$.

Рассмотрим отображение $g = Au$, причем

$$Au \equiv \alpha \int_a^b K(x, y, u(y)) dy + f(x). \quad (2)$$

Если $u_1(y), u_2(y)$ – любые две непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции, тогда

$$\begin{aligned} |Au_2(y) - Au_1(y)| &\equiv \left| \alpha \int_a^b [K(x, y, u_2(y)) - K(x, y, u_1(y))] dy \right| \leq \\ &\leq |\alpha| M (b - a) \max_{a \leq y \leq b} |u_2(y) - u_1(y)|. \end{aligned}$$

Оценка справедлива для любого $x \in [a, b]$, а значит,

$$\begin{aligned} \max_{a \leq y \leq b} |Au_2(y) - Au_1(y)| &= \rho(Au_1(y), Au_2(y)) \leq \\ &\leq |\alpha| M (b - a) \rho(u_1(y), u_2(y)). \end{aligned} \quad (3)$$

Следовательно, при $|\alpha| < \frac{1}{M(b - a)}$ оператор A будет сжимающим,

а интегральное уравнение будет иметь при таких α единственное непрерывное решение. Это решение находится методом последовательных приближений.

$$u_{n+1}(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, u_n(y)) dy + f(y), \quad n = (0, 1, \dots),$$

Уравнение будет однозначно разрешимо для любой достаточно малой α , так как если рассмотреть правую часть уравнения (1), как оператор сжатия, определенный в пространстве $C[a, b]$,

$$Au = \alpha \int_a^b K(x, y) u(y) dy + f(y),$$

то этот оператор будет переводить любую функцию $u(x) \in C[a, b]$ в некоторую функцию $\tilde{u}(x)$, определенную на том же промежутке, тем самым решение существует, если существует неподвижная точка у оператора A , т.е. функция переводящаяся оператором A в себя же

$$f_0 = Af_0.$$

Оператор A действует из полного пространства $C[a, b]$ снова в то же самое пространство $C[a, b]$.

Из принципа сжатых отображений следует, что для любого $|\alpha| < \frac{1}{M(b-a)}$ уравнение Фредгольма с непрерывным ядром $K(x, y)$ и непрерывной функцией $f(x)$ имеет единственное решение, принадлежащее $C[a, b]$.

Последовательные приближения $u_0(x), \dots, u_n(x), \dots$ к решению определяются следующей системой уравнений:

$$u_{n+1}(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, u_n(y)) dy + f(y), \quad n = (0, 1, \dots),$$

где в качестве приближения $u_0(x)$ можно взять любую непрерывную функцию на отрезке $[a, b]$.

Численный метод

Пусть дано уравнение вида

$$f(x) = \alpha \int_a^b K(x, y, u(y)) dy + u(x), \quad x \in [a, b].$$

Необходимо найти функцию $u(x)$, которая может быть представлена в виде

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j. \quad (4)$$

При это функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $K(x,y,u(y))$ непрерывны в области $Q\{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на равные части $\Pi_i = \{x_{i-1} < x_i^0 < x_{i+1}\}$, где x_i^0 – середина Π_i , шаг между точками $x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_N^0$ будет при этом равен $h = (b-a)/N$.

За базисные φ_i возьмем следующую функцию:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Pi_i, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases} \quad (5)$$

Тогда при условии, что α достаточно мало, зададим начальное приближение $u_0 = f(x)$, последующие u_1, u_2, \dots, u_n найдем с помощью метода сжатых отображений, формула (1) запишется в виде

$$u_{n+1}(x) = -\alpha \int_a^b K(x,y,u_n(y)) dy + f(y), \quad n = (0, 1, \dots), \quad (6)$$

Каждая следующая итерация будет увеличивать качество приближения, однако при удачно выбранных базисных функциях сходимости и точного решения можно достичь уже на близких n .

Численные результаты

Решим тестовое интегральное уравнение вида

$$u(x) = \int_{-1}^1 \frac{xy}{1+u^2(y)} dy + 1. \quad (7)$$

$K(x,y,u(y))$ непрерывна на данном отрезке интегрирования, она имеет ограниченную производную, а значит, удовлетворяют условию Липшица. При $\alpha = 1$ получим

$$u_1(x) = \int_{-1}^1 \frac{xy}{2} dy + 1 = 1.$$

Соответственно и при любом другом n значение функции равно единице:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 1.$$

Решение тестовой задачи (7) на трех первых итерациях представлено на рис. 1.

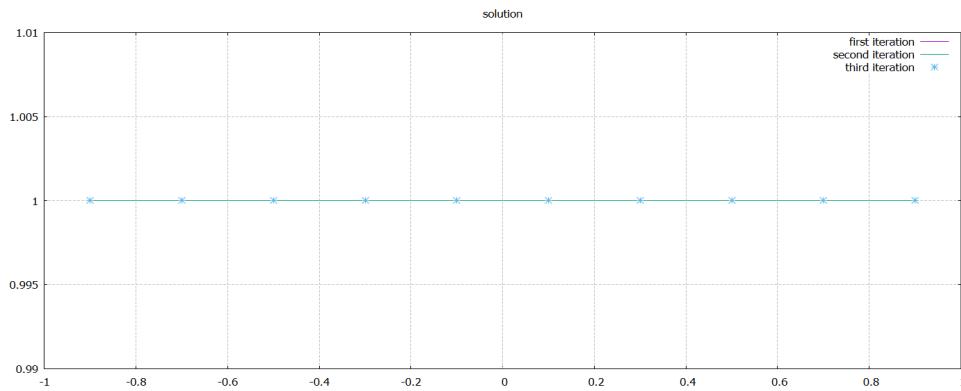


Рис. 1. Численное решение модельной задачи (7)

Увеличивать далее количество итераций более трех нецелесообразно, так как решения начинают совпадать с графической точностью.

Далее возьмем более сложное интегральное уравнение вида

$$u(x) = 2 \int_0^1 \cos(xy u(y)) dy + \sin(x). \quad (8)$$

Ядро уравнения и функция $\sin(x)$ непрерывны на промежутке $[0,1]$, возьмем $\alpha=2$ равной, затем $\alpha=1$, наконец $\alpha<1$, посмотрим при этом за изменением сходимости решения.

На рис. 2–4 представлены численные решения интегрального уравнения (8), полученные с использованием итерационной схемы (6) и различным параметром нелинейности.

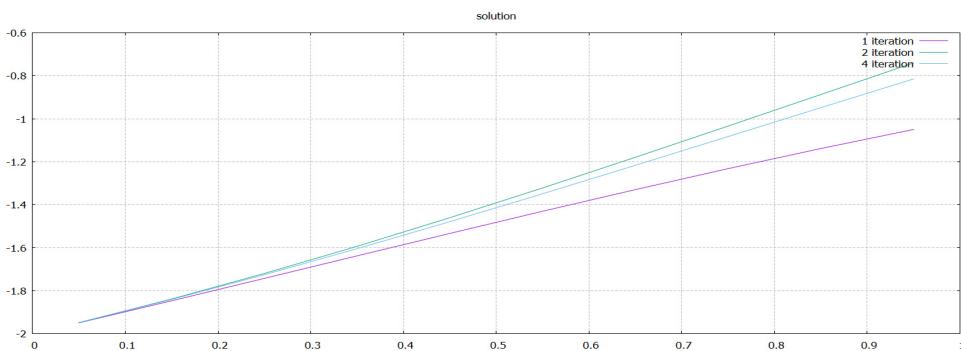


Рис. 2. Численное решение модельной задачи (8).

Параметр нелинейности $\alpha = 2$

Заключение

Рассмотрена задача построения эффективного метода решения нелинейных интегральных уравнений. Предложен метод решения нелинейных интегральных уравнений, основанный на принципе сжимающих отображений. Произведено численное обоснование рассматриваемого метода. Представлены численные результаты решения задачи для различных тестовых задач.

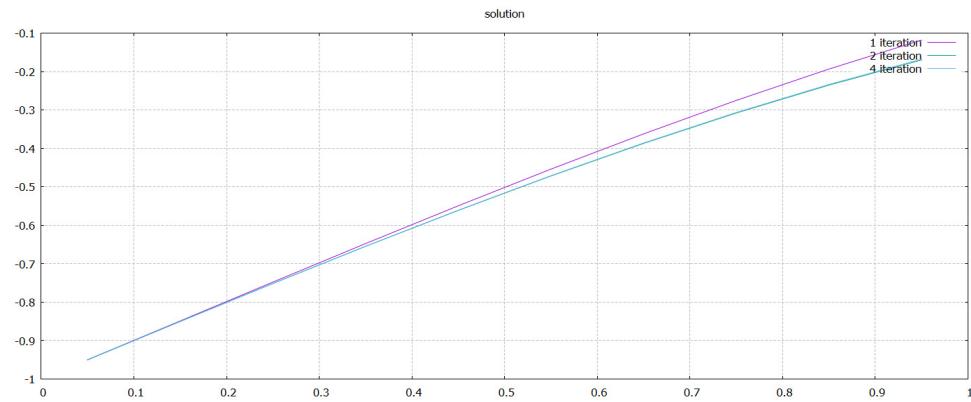


Рис. 3. Численное решение модельной задачи (8). Параметр нелинейности $\alpha = 1$

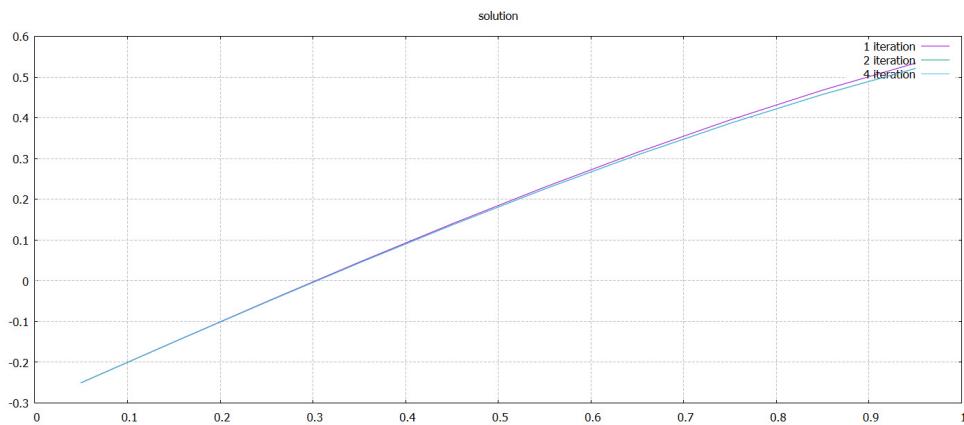


Рис. 4. Численное решение модельной задачи (8). Параметр нелинейности $\alpha = 0,3$

На основе полученных результатов можно заключить, что метод хорошо работает для небольших значений параметра нелинейности и может быть использован для решения прикладных задач математической физики.

Список литературы

1. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю. Итерационные методы решения нерегулярных уравнений : учеб. пособие по курсу «Математические методы системного анализа» / Ин-т системного анализа РАН. М. : Эдиториал УРСС, 2006. 112 с.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 1975. 632 с.
3. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М. : Наука, 1965. 384 с.
4. Kress R. Linear Integral Equations. New York : Springer-Verlag, 1999. 365 р.
5. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Два итерационных метода решения объемного сингулярного уравнения для нелинейной задачи дифракции в полубесконечном прямоугольном волноводе // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 4. С. 49–59. doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-5
6. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Итерационная схема решения нелинейного интегрального уравнения типа Липпмана – Швингера методом Галеркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 66–73. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-5

7. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2024. Т. 166, № 3. С. 395–406.
8. Антонов А. В., Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г. Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД-технологий // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2007. № 4. С. 60–67.
9. Жуковская Л. В. Итерационный метод решения нелинейных интегральных уравнений, описывающих роллинговые решения в теории струн // Теоретическая и математическая физика. 2006. Т. 146, № 3. С. 402–409.
10. Краснов М. Л. Интегральные уравнения: Введение в теорию. М. : Наука, 2019. 304 с.

References

1. Bakushinskiy A.B., Kokurin M.Yu. Iterative methods for solving irregular equations: a textbook for the course “Mathematical methods of systems analysis”. *In-t sistemnogo analiza RAN = Institute of Systems Analysis of the Russian Academy of Sciences*. Moscow: Editorial URSS, 2006:112. (In Russ.)
2. Bakhvalov N.S. *Chislennyye metody = Numerical methods*. Moscow: Nauka, 1975:632. (In Russ.)
3. Mikhlin S.G., Smolitskiy Kh.L. *Priblizhennyye metody resheniya differentialnykh i integralnykh uravneniy = Approximate methods for solving differential and integral equations*. Moscow: Nauka, 1965:384. (In Russ.)
4. Kress R. *Linear Integral Equations*. New York: Springer-Verlag, 1999:365.
5. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Two iterative methods for solving the volume singular equation for a nonlinear diffraction problem in a semi-infinite rectangular waveguide. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(4):49–59. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-4-5
6. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. An iterative scheme for solving a nonlinear integral equation of the Lippmann–Schwinger type using the Galerkin method. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):66–73. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-5
7. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Algorithm for searching for inhomogeneities in inverse nonlinear diffraction problems. *Uchenyye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskiye nauki = Proceedings of Kazan University. Series: Physical and mathematical sciences*. 2024;166(3):395–406. (In Russ.)
8. Antonov A.V., Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G. Development of a web-based computing system for solving three-dimensional vector problems of electromagnetic wave diffraction based on subhierarchical parallel algorithms and grid technologies. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2007;(4):60–67. (In Russ.)
9. Zhukovskaya L.V. An iterative method for solving nonlinear integral equations describing rolling solutions in string theory. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2006;146(3):402–409. (In Russ.)
10. Krasnov M.L. *Integralnyye uravneniya: Vvedeniye v teoriyu = Integral equations: introduction to theory*. Moscow: Nauka, 2019:304. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Борис Алексеевич Зайцев
студент, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: zaytsevborist@gmail.com

Boris A. Zaytsev
Student, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Юрьевич Медведик
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Mikhail Yu. Medvedik
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 07.07.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 03.08.2025

Принята к публикации / Accepted 22.08.2025

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 621.371
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-5

Перестраиваемые поляризационные магнитооптические эффекты при рассеянии терагерцового излучения на решетках графеновых нанолент в магнитном поле

Г. С. Макеева¹, М. С. Никитин²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹radiotech@pnzgu.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Целью работы является численное исследование особенностей резонансных (за счет возбуждения и распространения плазмонных возбуждений) поляризационных магнитооптических (МО) эффектов и способов управления поляризацией терагерцового (ТГц) излучения при рассеянии на решетках графеновых нанолент во внешнем магнитном поле. Материалы и методы. Графен – 2D-материал с уникальными оптическими и электронными свойствами – служит платформой для новых ТГц-приложений и микроминиатюрных систем с новыми возможностями. Возбуждение поверхностных магнитоплазмонов-поляритонов с законом дисперсии, измененным вследствие приложения внешнего магнитного поля, значительно усиливает МО-эффекты в графеновых структурах. Впервые численное исследование поляризационных МО-эффектов проведено методами автоматизированного моделирования с помощью программного комплекса CST MWS на основе решения (методом конечных элементов в частотной области) электродинамической задачи дифракции волны на решетке графеновых нанолент при приложении перпендикулярного внешнего магнитного поля и анализа характеристик дифрагированного поля в ТГц-диапазоне. Результаты. Получены результаты моделирования 3D-*e-Field*-диаграмм рассеяния нормально падающей ТЕМ-волны *p*-поляризации на ячейке решетки графеновых нанолент в перпендикулярном внешнем магнитном поле на частотах плазмонного (при $B_0 = 0$) и магнитоплазмонных резонансов для различных значений B_0 (2, 4, 7, 10 Тл). На основе анализа результатов расчета отношения горизонтальной и вертикальной компонент E_x/E_y дифрагированного поля и осевого соотношения AR в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграмм рассеяния исследован вид поляризации рассеянного ТГц-излучения и рассчитаны угол вращения Фарадея плоскости поляризации прошедшей волны и угол вращения Керра, описывающий поворот оси поляризации отраженной волны. Выводы. Из результатов численного исследования следует, что при дифракции нормально падающей ТЕМ-волны *p*-поляризации на ячейке решетки графеновых нанолент при приложении перпендикулярного внешнего магнитного поля на частотах магнитоплазмонных резонансов наблюдаются перестраиваемые по частоте МО-эффекты: поворот плоскости поляризации линейно-поляризованной волны при прохождении через намагниченную графеновую решетку, когда волновой вектор падающей волны параллелен вектору напряженности внешнего магнитного поля (эффект Фарадея), при этом угол вращения Фарадея зависит от величины внешнего магнитного поля; изменение ориентации поляризации и эллиптичности отраженной волны (полярный МО-эффект

Керра), линейно-поляризованная ТГц-волна, отражаясь от намагниченного графена, становится эллиптически поляризованной. При этом большая ось эллипса поляризации поворачивается на некоторый угол по отношению к плоскости поляризации падающего ТГц-излучения пропорционально величине внешнего магнитного поля.

Ключевые слова: электродинамическая задача дифракции, решетка графеновых нанолент, эффект Фарадея, полярный магнитооптический эффект Керра, дифракция, осевое соотношение

Для цитирования: Макеева Г. С., Никитин М. С. Перестраиваемые поляризационные магнитооптические эффекты при рассеянии терагерцового излучения на решетках графеновых нанолент в магнитном поле // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 45–65. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-5

Tunable polarization magneto-optical effects at scattering of terahertz radiation on graphene nanoribbon gratings in a magnetic field

G.S. Makeeva¹, M.S. Nikitin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹radiotech@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The purpose of the work is a numerical study of the features of resonant (due to the excitation and propagation of plasmonic excitations) polarization magneto-optical (MO) effects and methods for controlling the polarization of THz radiation during scattering on graphene nanoribbon gratings in an external magnetic field. *Materials and methods.* Graphene is a 2D material with unique optical and electronic properties. It serves as a platform for new THz applications and microminiature systems with new capabilities. Excitation of surface magnetoplasmons-polaritons with a dispersion law changed due to the application of an external magnetic field significantly enhances MO effects in graphene structures. For the first time, a numerical study of polarization MO effects was carried out by automated modeling methods using the CST MWS software package based on the solution (using the finite element method in the frequency domain) of the electrodynamic problem of TEM wave diffraction on a graphene nanoribbon grating with the application of a perpendicular external magnetic field and analysis of the diffracted field characteristics in the THz range. *Results.* The results of modeling 3D *e-Field* scattering patterns of a normally incident *p*-polarized TEM wave on a cell of a graphene nanoribbon grating in a perpendicular external magnetic field at the frequencies of plasmon resonance (at $B_0 = 0$) and magnetoplasmon resonances for different values of B_0 (2, 4, 7, 10 T) were obtained. Based on the analysis of the results of calculating the ratio of the horizontal and vertical components E_x/E_y of the diffracted field and the axial ratio AR at the cross-section points ($\varphi = 0^\circ$) of the main lobe of the 3D *e-Field* scattering patterns, the polarization type of the scattered THz radiation was studied and the Faraday rotation angle of the polarization plane of the transmitted wave and the Kerr rotation angle describing the rotation of the polarization axis of the reflected wave were calculated. *Conclusions.* It follows from the results of the numerical study that at the diffraction of a normally incident TEM wave with *p*-polarization on a cell of the graphene nanoribbon grating with the application of a perpendicular external magnetic field at the frequencies of magnetoplasmon resonances frequency-tunable MO effects are observed: rotation of the polarization plane of a linearly polarized wave transmitting through a magnetized graphene grating, when the wave vector of the incident wave is parallel to the vector of the external magnetic field intensity (Faraday effect), while the Faraday rotation angle depends on the value of the external magnetic field; changes in the orientation of polarization and ellipticity of the reflected wave (polar Kerr MO effect), a

linearly polarized THz wave, reflected from magnetized graphene, becomes elliptically polarized; in this case, the major axis of the polarization ellipse rotates by a certain angle with respect to the plane of polarization of the incident THz radiation proportional to the magnitude of the external magnetic field.

Keywords: electrodynamic diffraction problem, graphene nanoribbon grating, Faraday effect, polar magneto-optical Kerr effect, diffraction, axial ratio

For citation: Makeeva G.S., Nikitin M.S. Tunable polarization magneto-optical effects at scattering of terahertz radiation on graphene nanoribbon gratings in a magnetic field. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2024;(3):45–65.* (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-5

Введение

Магнитооптические (МО) эффекты привлекли огромное внимание ученых за последние несколько десятилетий из-за возможности их потенциального применения в различных областях частотного спектра, особенно в тегерцовом (ТГц) диапазоне [1].

МО-эффекты разделяют на две группы: возникающие при прохождении излучения через магнитную среду: эффекты Фарадея, Коттона – Мутона (Фохта), и проявляющиеся при отражении излучения от поверхности магнитной среды: эффекты Керра. Эффект Фарадея, когда волновой вектор падающей волны параллелен вектору намагниченности, состоит в повороте плоскости поляризации линейно поляризованной волны при прохождении через магнитную среду [2]. МО-эффект Керра – это поверхностный МО-эффект, возникающий при отражении волны от магнитной среды. Полярный МО-эффект Керра, когда вектор намагниченности среды перпендикулярен границе среды и параллелен плоскости падения волны, заключается в том, что при отражении линейно-поляризованной волны от поверхности намагниченного материала наблюдается вращение плоскости поляризации волны, и волна становится эллиптически поляризованной [2].

МО-эффекты – это явления, при которых линейно поляризованное излучение взаимодействует с намагниченным материалом, а свойства поляризации выходного излучения света модулируются взаимодействием излучения с веществом [3]. При отражении состояние поляризации излучения будет изменяться двумя способами: во-первых, плоскость поляризации отраженного излучения может вращаться по сравнению с плоскостью поляризации падающего излучения. Во-вторых, линейно поляризованное падающее излучение может стать эллиптически поляризованным отраженным излучением, при этом большая ось эллипса поляризации поворачивается на некоторый угол по отношению к плоскости поляризации падающего излучения [3]. Изменение ориентации поляризации и появление эллиптичности, которое происходит, когда линейно поляризованное падающее излучение отражается от магнитной поверхности, пропорционально намагниченности, т.е. эффект линейно зависит от приложенного магнитного поля или намагниченности [3].

Эффект Фарадея и МО-эффект Керра широко используются в оптической связи, зондировании и магнитной микроскопии [4]. МО-эффект Керра как простой, но мощный метод может использоваться для исследования физических свойств от квантовых эффектов до классической магнитоплазмоники [5].

Развитие магнитоплазмоники позволяет ей претендовать в ближайшем будущем на решение важнейшей задачи – управление оптическими сигналами [6]. Наносистемы с комбинированными магнитными и плазмонными функциями в последние годы стали предметом активных исследований. При соответствующей внутренней архитектуре составляющих компонентов магнитооптическая активность этих систем может быть значительно увеличена за счет усиления электромагнитного поля, связанного с плазмонным резонансом [7].

Плазмонные возбуждения обладают способностью концентрировать электромагнитные поля в сильно субволновой области, и сочетание плазмонного усиления с МО-эффектами недавно оказалось в центре внимания [8]. Однако многие работы были сосредоточены на возбуждении плазмонных мод в магнитных материалах [9]. Ферромагнитные металлы являются сильно поглощающими средами для возбуждения плазмонных мод [9], в то время как большинство плазмонных материалов с низкими потерями не проявляют магнитных свойств, кроме диамагнетизма [8].

МО-эффекты в плазмонных метаматериалах представляют собой широкое поле для исследования. В структурированных средах происходит усиление МО-эффектов и возникают новые МО-эффекты, не имеющие аналогов в однородных средах [10]. Специальное структурирование позволяет демонстрировать МО-свойства, резко отличающиеся от проявляющихся в неструктурированных образцах за счет возбуждения и распространения плазмонных возбуждений [5].

В последнее время богатство оптических и электронных свойств графена привлекло огромный интерес. Графен является 2D-материалом с сотовой структурой и толщиной в один атом. Это диамагнитный материал, который может демонстрировать анизотропную поверхностную проводимость при приложении внешнего магнитного поля [1]. Графен – 2D-материал с уникальными оптическими и электронными свойствами – служит платформой для новых терагерцовых (ТГц) приложений и микроминиатюрных систем с новыми возможностями. Недавние открытия необычного квантового магнитотранспорта и высокой магнитооптической активности в сильных магнитных полях делают графен потенциальным кандидатом для невзаимной фотоники [11].

МО-эффекты в графене будут иметь применение в перспективных ТГц-устройствах [4]. Способность создавать гигантский угол вращения Фарадея экспериментально выявлена как в однослоином, так и в многослойном сплошном графене [12]. Хотя наблюдаемые углы вращения Фарадея в несколько градусов при прохождении ТГц-волн через лист графена при приложении перпендикулярного магнитного поля с индукцией порядка нескольких тесла исключительно велики для одноатомного слоя, для применения в практических устройствах необходимо изучить возможность еще большего увеличения угла вращения Фарадея и смещения эффекта на более высокие частоты от циклотронного резонанса, одновременно уменьшая требуемое магнитное поле [4].

Возбуждение поверхностных плазмон-поляритонов (ППП) предложено для усиления МО-эффекта и увеличения вращения Фарадея в графеновых лентах (ГЛ) [13]. Показано, что возбуждение поверхностных магнитоплазмо-

нов-поляритонов (МППП) – ППП с законом дисперсии, измененным вследствие приложения внешнего магнитного поля, значительно усиливает МО-эффекты в графеновых структурах [14, 15].

Возбуждение ППП в специальным образом структурированных двумерно-периодических структурах приводит к резонансному изменению спектров прохождения и отражения структурированных образцов [6]. В спектральных областях возбуждения магнитоплазмонных резонансов проявляется резонансный МО-эффект Керра, обладающий усиленной в некоторых областях спектра амплитудой [6].

Сильный эффект Фарадея достигнут в решетках графеновых микролент (ГМЛ) за счет возбуждения МППП в отдельных ГМЛ на более высоких ТГц-частотах, чем те, которые диктуются циклотронным резонансом [16].

Поверхностная проводимость графена при наличии внешнего магнитного поля описывается тензором, что усложняет требуемые для расчета анизотропных структур инструменты вычислительной электродинамики [17].

В этой связи актуальной является задача численного исследования методами автоматизированного моделирования особенностей резонансных (за счет возбуждения и распространения плазмонных возбуждений) поляризационных МО-эффектов и способов управления поляризацией ТГц-излучения при рассеянии на решетках графеновых нанолент (ГНЛ) во внешнем магнитном поле.

В отличие от исследования [18], где была разработана модель магнитно-смещенной графеновой метаповерхности (двухпериодической решетки прямоугольных ГНЛ), включающая тензор комплексной диэлектрической проницаемости графена, и проведено моделирование магнитоплазмонных эффектов, в данной статье впервые предложена методика компьютерного анализа средствами автоматизированного моделирования и проведено всестороннее численное исследование поляризационных МО-эффектов (эффекта Фарадея и полярного МО-эффекта Керра) и возможностей их перестройки внешним магнитным полем при дифракции ТГц-волн на 1D-решетках ГНЛ.

1. Модель и результаты решения электродинамической задачи дифракции

Создана модель анизотропной графеновой решетки в магнитном поле, включающая тензор комплексной диэлектрической проницаемости графена:

$$\hat{\epsilon} = \hat{I} + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{xx} & \dot{\sigma}_{xy} & 0 \\ \dot{\sigma}_{yx} & \dot{\sigma}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\sigma}_d \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где компоненты тензора поверхностной проводимости графена при приложении перпендикулярного магнитного поля имеют следующий вид [19]:

$$\dot{\sigma}_{xx} = \dot{\sigma}_{yy} = \frac{e^2 |E_f|}{\pi \hbar^2} \cdot \frac{i(\omega + i/\tau)}{(\omega + i/\tau)^2 - \omega_c^2}, \quad \dot{\sigma}_{xy} = -\dot{\sigma}_{yx} = \frac{e^2 |E_f|}{\pi \hbar^2} \cdot \frac{\omega_c}{(\omega + i/\tau)^2 - \omega_c^2},$$

$$\dot{\sigma}_{xx} = \dot{\sigma}_d \quad (\dot{\sigma}_d \text{ при } B = 0);$$

здесь E_f – уровень Ферми; τ – время релаксации, $\tau = \mu E_f / e V_f^2$; μ – плотность носителей заряда, $\mu = 10^5 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$; ω_c – циклотронная частота, $\omega_c = e B V_f^2 / E_f$; V_f – скорость Ферми, $V_f = 10^6 \text{ м/с}$; t – толщина графена, $t = 1 \text{ нм}$; ϵ_0 – электрическая постоянная. Действительные и мнимые части компонент тензора $\hat{\epsilon}$ (1) вводились в виде формул в программу MWS CST [20].

В программе CST MWS разработана модель решетки (период d) ГНЛ (ширина w) на диэлектрической подложке во внешнем магнитном поле, перпендикулярном графену (рис. 1). Для описания границы раздела сред используем граничное условие *Open (add space)* [21], условные обозначения которого показаны на рис. 1. Эта опция рекомендуется для антенных задач [21].

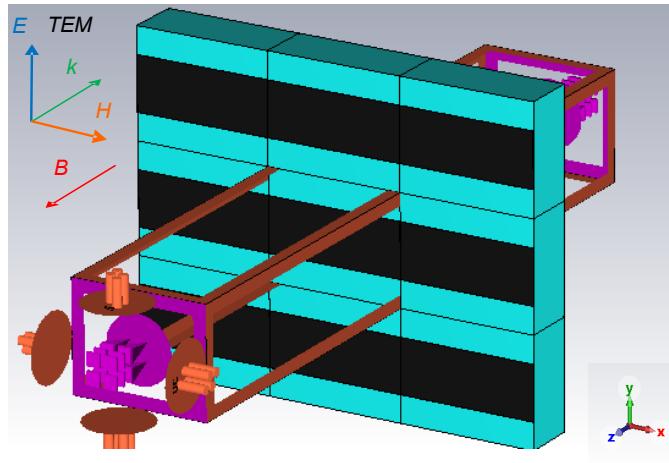


Рис. 1. Модель в CST MWS решетки ГНЛ во внешнем магнитном поле:
нормально падающая TEM-волну (*p*-поляризации)
и ориентация вектора индукции B_0 магнитного поля

С помощью программы CST MWS проведено моделирование дифракции нормально падающей линейно поляризованной TEM-волны (*p*-поляризации) на решетке ГНЛ при приложении перпендикулярного внешнего магнитного поля (рис. 1). Вектор электрического поля E падающей TEM-волны *p*-поляризации перпендикулярен оси ГНЛ (рис. 1).

Для решения электродинамической задачи дифракции с помощью программного комплекса CST MWS выбран метод падающей волны [21]. Электродинамическая задача решается в частотной области численным методом конечных элементов (FEM) [21].

Методом каналов Флока рассчитаны спектральные зависимости коэффициента прохождения $|S_{21}|$ и отражения $|S_{11}|$ TEM-волны *p*-поляризации от решетки ГНЛ для различных значений B_0 внешнего магнитного поля в ТГц- и дальнем инфракрасном диапазонах частот. Результаты расчета $|S_{21}|$, $|S_{11}|$ для решетки ($d = 2 \text{ мкм}$) ГНЛ ($w = 0,5 \text{ мкм}$, $l = 100 \text{ мкм}$) на диэлектрической подложке ($\epsilon = 4$, $h = 1 \text{ мкм}$) при отсутствии ($B_0 = 0$) и приложении внешнего магнитного поля для $B_0 = 2, 4, 7, 10 \text{ Тл}$ приведены на рис. 2. Параметры графена: $E_f = 0,2 \text{ эВ}$, $\tau = 0,1 \text{ пс}$ и $T = 300 \text{ К}$.

При отсутствии внешнего магнитного поля ($B_0 = 0$) на спектральной зависимости имеется минимум $|S_{21}|$ (рис. 2), обусловленный резонансом основ-

ной моды поверхностных плазмон-поляритонов на частоте плазмонного резонанса f_{0res} , зависящей от значений уровня Ферми графена E_f .

При приложении внешнего магнитного поля положение и глубина минимумов $|S_{21}|$, обусловленных резонансом основной моды МПП на частотах магнитоплазмонных резонансов f_{res} , зависят от B_0 (рис. 2, *a*). С увеличением B_0 положение резонансных минимумов $|S_{21}|$ на каждой из спектральных зависимостей смещается в сторону более высоких ТГц-частот.

2. Результаты моделирования 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния ячейки решетки ГНЛ на частотах магнитоплазмонных резонансов

С помощью программы CST MWS проведено моделирование характеристик дальнего поля – 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния [20], т.е. зависимости величины E -поля дифрагированной волны в дальнем поле от угловых сферических координат θ, ϕ , решетки ГНЛ во внешнем магнитном поле.

Результаты моделирования 3D-*e-Field*-диаграмм и 2D-*e-Field*-диаграмм рассеяния нормально падающей ТЕМ-волны p -поляризации на ячейке решетки ГНЛ в перпендикулярном внешнем магнитном поле на частотах плазмонного резонанса f_{0res} ($B_0 = 0$) и магнитоплазмонных резонансов f_{res} для различных значений B_0 (2, 4, 7, 10 Тл) представлены на рис. 3.

Для сравнения 2D-*e-Field*-диаграммы рассеяния ($\phi = 0^\circ$) ячейки решетки ГНЛ на частотах плазмонного резонанса f_{0res} ($B_0 = 0$) и магнитоплазмонных резонансов f_{res} для различных значений B_0 (2, 4, 7, 10 Тл) показаны в декартовой системе координат на рис. 4.

Как следует из результатов моделирования, при дифракции на решетке ГНЛ нормально падающей линейно поляризованной ТЕМ-волны p -поляризации, имеющей только вертикальную компоненту E_y , при приложении перпендикулярного внешнего магнитного поля амплитуда E дифрагированного поля прошедшей волны в точках сечения ($\phi = 0$) главного лепестка диаграммы рассеяния при $\theta = 180^\circ$ (рис. 4) возрастает на частотах магнитоплазмонных резонансов и увеличивается на порядок при $B_0 = 10$ Тл на частоте $f_{res4} = 10,614$ ТГц В/м (рис. 4, кривая 5) E порядка $1,2 \cdot 10^{-6}$ В/м в сравнении с амплитудой E при $B_0 = 0$ на частоте плазмонного резонанса $f_{0res} = 7,175$ ТГц (рис. 4, кривая 1) E порядка $4 \cdot 10^{-7}$ В/м.

Результаты расчета в программе CST MWS отношения амплитуд горизонтальной и вертикальной компонент E_x/E_y дифрагированного поля в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграмм рассеяния (рис. 3) при нормальном падении ТЕМ-волны p -поляризации на частотах плазмонного резонанса f_{0res} ($B_0 = 0$) и магнитоплазмонных резонансов f_{res} для различных значений B_0 (2, 4, 7, 10 Тл) представлены на рис. 5 и в табл. 1.

Амплитуды горизонтальной E_x и вертикальной E_y компонент рассчитываются следующим образом [20]:

$$E_x = E_\theta \cos \phi - E_\phi \sin \phi, \quad E_y = E_\theta \sin \phi + E_\phi \cos \phi.$$

При отсутствии внешнего магнитного поля в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (см. рис. 3, *б*) при $B_0 = 0$ на частоте плазмонного резонанса $f_{0res} = 7,175$ ТГц отношение E_x/E_y (кривая 1 на рис. 5) равно: в точке 1 ($\theta = 180^\circ$, прошедшая волна) $E_x/E_y = 0,012$, в точке 2 ($\theta = 0^\circ$, отраженная волна) $E_x/E_y = 0,022$.

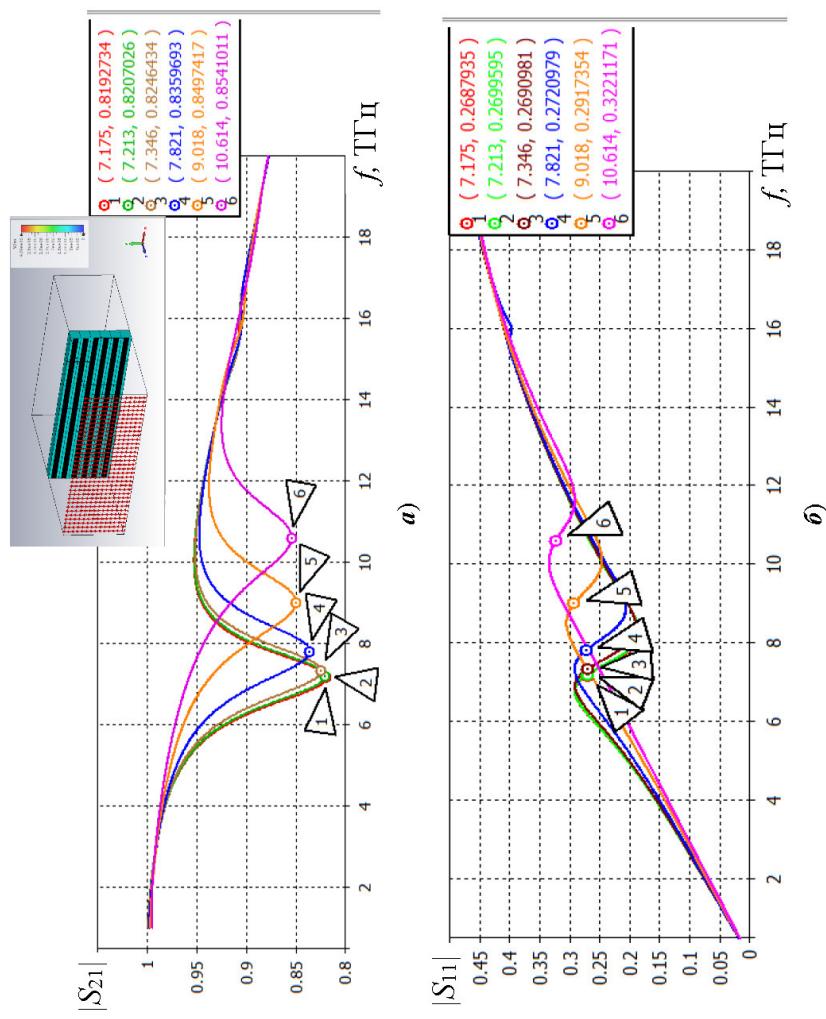


Рис. 2. Спектральные зависимости коэффициента прохождения $|S_{21}|$ (а) и коэффициента отражения $|S_{11}|$ (б) от решетки ГНЛ падающей ТЕМ-волны p -поляризации для различных значений B_0 внешнего магнитного поля; кривые: 1 – $B_0 = 0$; 2 – $B_0 = 2$ Тл; 3 – $B_0 = 4$ Тл; 4 – $B_0 = 7$ Тл; 5 – $B_0 = 10$ Тл; $l = 100$ мкм, $w = 0,5$ мкм, $E_f = -0,2$ эВ, $\tau = 0,1$ пс, $T = 300$ К; на вставке – модель падающей ТЕМ-волны p -поляризации

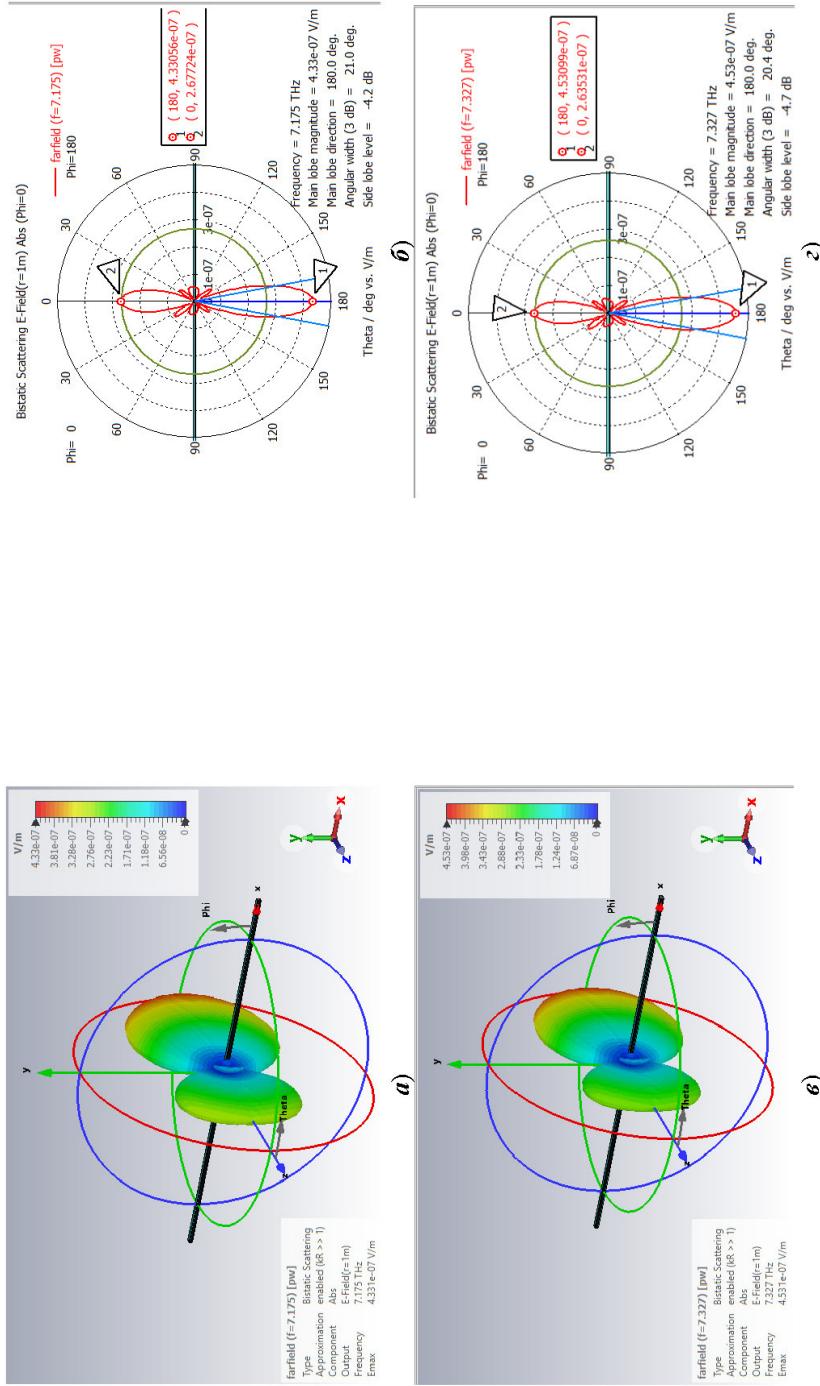


Рис. 3. 3D-e-Field-диаграммы (a, $\mathbf{e}, \mathbf{d}, \mathbf{z}, \mathbf{e}, \mathbf{u}$) и 2 D-e-Field-диаграммы ($\varphi = 0^\circ$) ($\mathbf{d}, \mathbf{z}, \mathbf{e}, \mathbf{3}, \mathbf{e}, \mathbf{u}$) рассеяния нормально падающей TEM-волны p -поляризации на ячейке решетки ГНЛ в перпендикулярном внешнем магнитном поле на частотах плазмонного и магнитоплазмонных резонансов: a, $\mathbf{d} - B_0 = 0$ ТГц; $\mathbf{e}, \mathbf{2} - B_0 = 2$ ТГц, $f_{res1} = 7,346$ ТГц; $\mathbf{d}, \mathbf{e} - B_0 = 4$ ТГц, $f_{res2} = 7,821$ ТГц; $\mathbf{e}, \mathbf{3} - B_0 = 7$ ТГц, $f_{res3} = 9,018$ ТГц; $\mathbf{e}, \mathbf{u} - B_0 = 10$ ТГц, $f_{res4} = 10,614$ ТГц

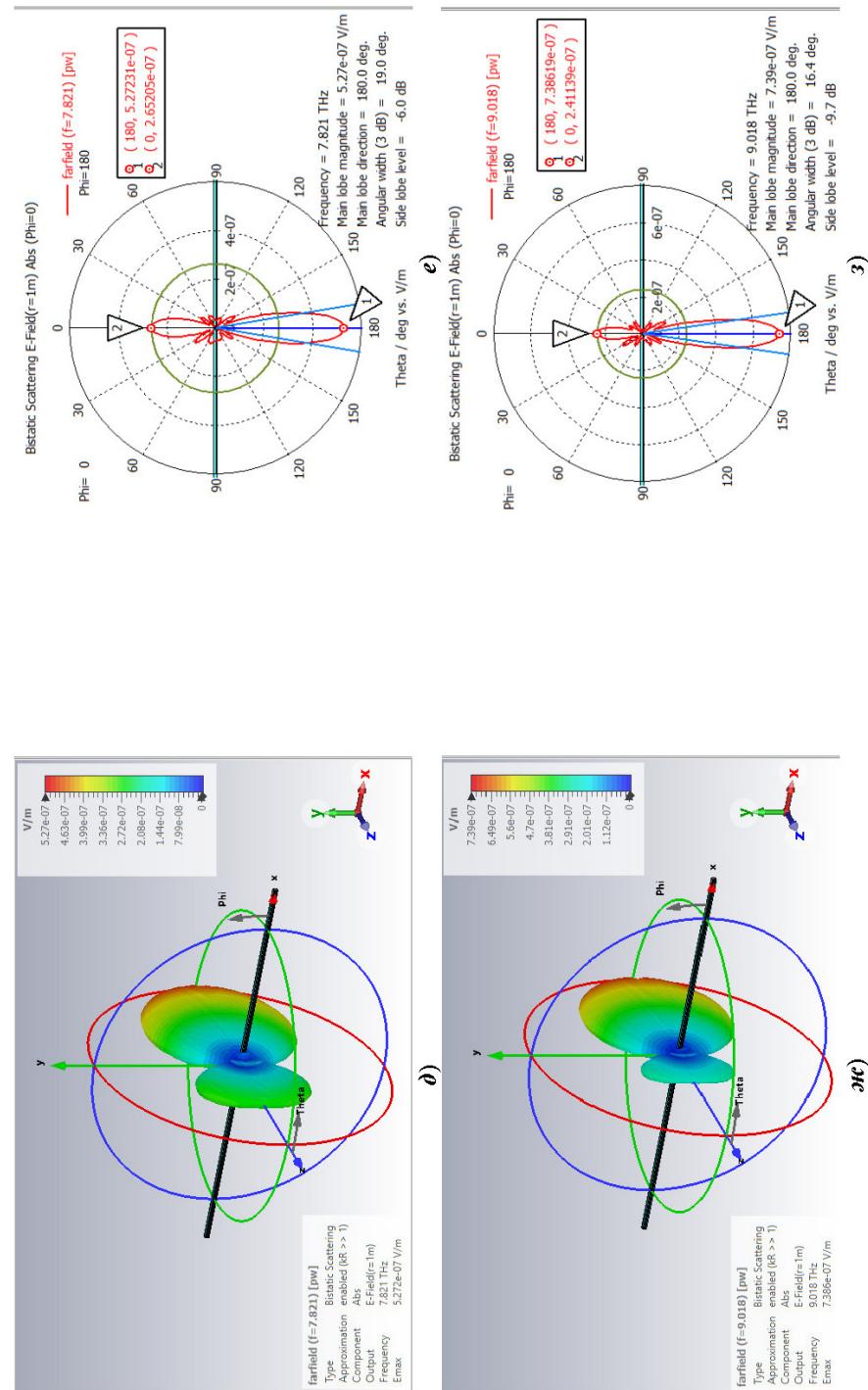


Рис. 3. Продолжение

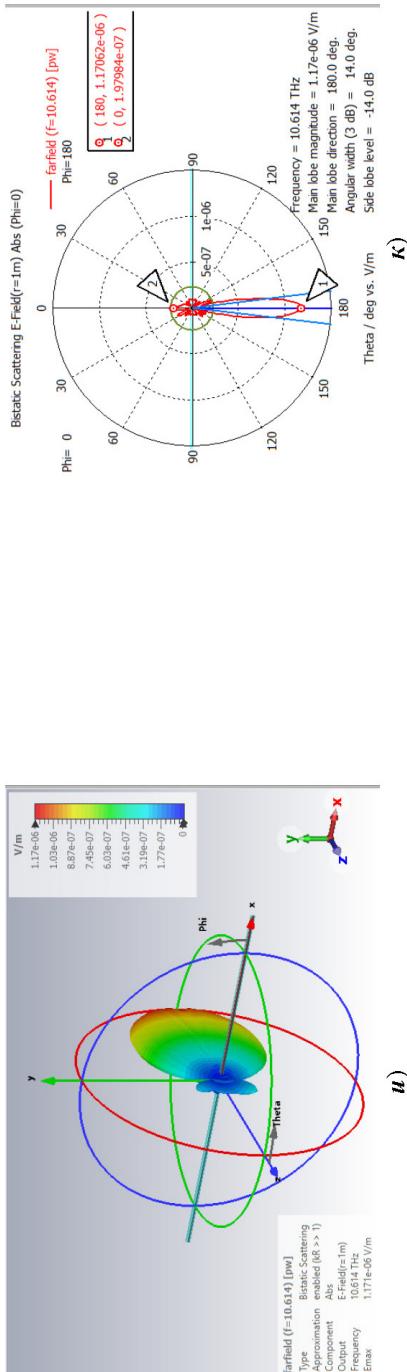


Рис. 3. Окончание

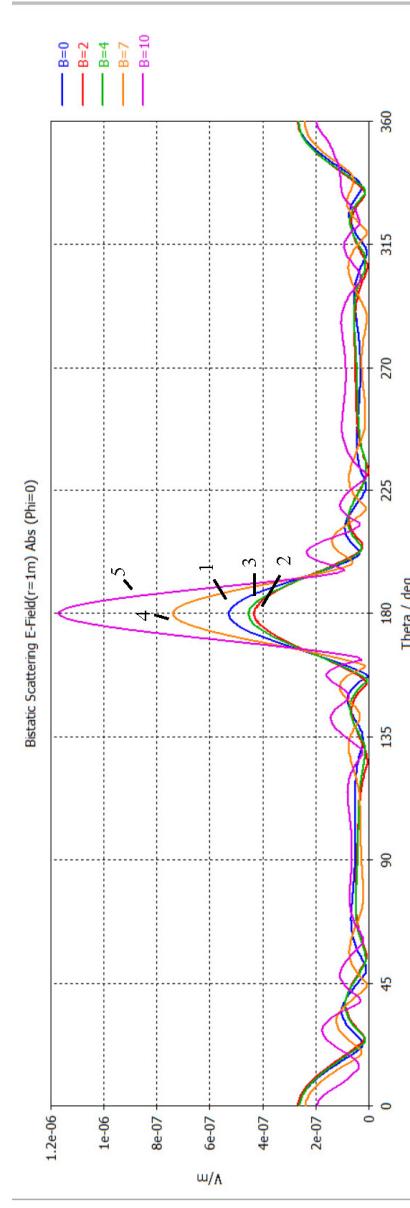


Рис. 4. 2D-*E-field*-диаграммы ($\varphi = 0^\circ$) рассеяния ячейки решетки ГНЛ в зависимости от θ для различных значений B_0 внешнего магнитного поля на частотах плазмонного и магнитоплазмонных резонансов; кривые: 1 – $B_0 = 0$, $f_{res} = 7,175$ ТГц; 2 – $B_0 = 2$ ТГц, $f_{res1} = 7,346$ ТГц; 3 – $B_0 = 4$ ТГц, $f_{res2} = 7,821$ ТГц; 4 – $B_0 = 7$ ТГц, $f_{res3} = 9,018$ ТГц; 5 – $B_0 = 10$ ТГц, $f_{res4} = 10,614$ ТГц

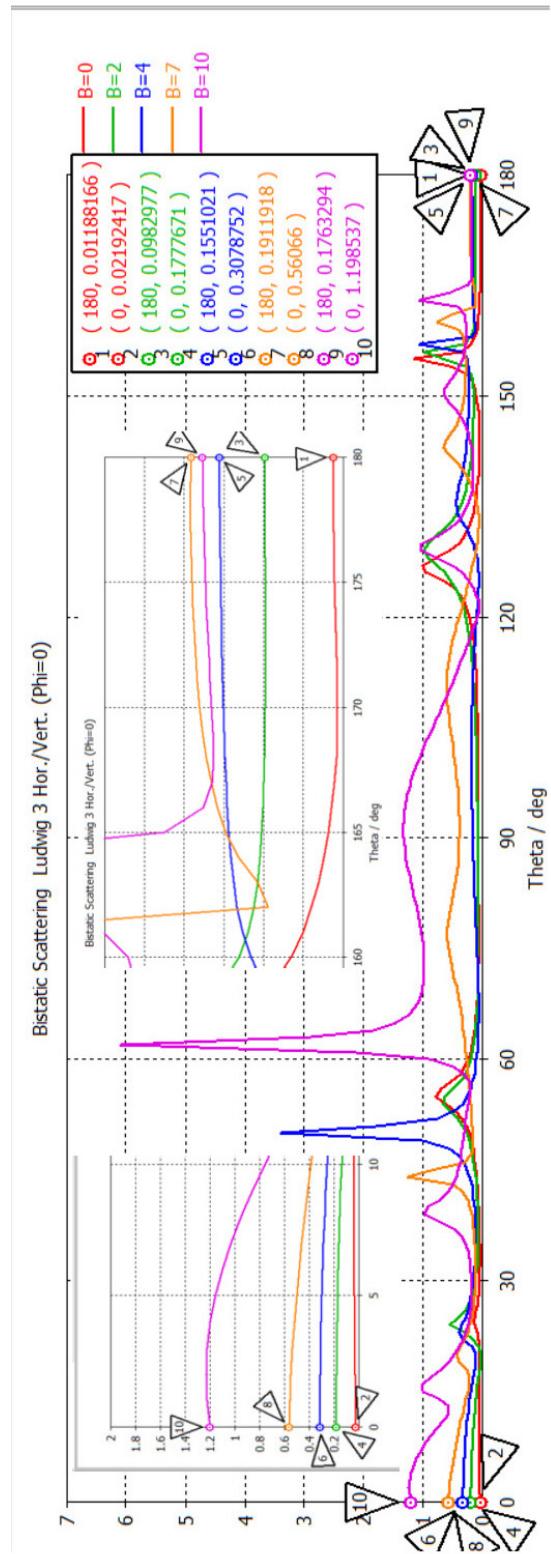


Рис. 5. Отношение E_x/E_y в точках сечения ($\varphi = 0^\circ$) главного лепестка 3D- e -Field-диаграммы рассеяния ячейки решетки ГНП (отраженная волна) в зависимости от 0 для различных значений B_0 внешнего магнитного поля на частотах плазмонного и магнитоплазмонных резонансов; точки: 1, 2 – $B_0 = 0$, $f_{res} = 7,175$ ТГц; 3, 4 – $B_0 = 2$ Тл, $f_{res1} = 7,346$ ТГц; 5, 6 – $B_0 = 4$ Тл, $f_{res2} = 7,821$ ТГц; 7, 8 – $B_0 = 7$ Тл, $f_{res3} = 9,018$ ТГц; 9, 10 – $B_0 = 10$ Тл, $f_{res4} = 10,614$ ТГц

Таблица 1

Параметры и характеристики
дифрагированного поля отраженной и прошедшей волн

B_0, f_{0res}	E_x/E_y , прохождение $\theta = 180^\circ$	$\beta, {}^\circ$	E_x/E_y , отражение $\theta = 0^\circ$	$\gamma, {}^\circ$	AR , прохождение $\theta = 180^\circ$	AR , отражение $\theta = 0^\circ$	AR (дБ), прохождение $\theta = 180^\circ$	AR (дБ), отражение $\theta = 0^\circ$
$B_0 = 0$ Тл, $f_{0res} = 7,175$ ТГц	0,012	0,63	0,022	1,2	100	100	40	40
$B_0 = 2$ Тл, $f_{res1} = 7,346$ ТГц	0,098	5,5	0,178	9,65	12	5,62	21	15
$B_0 = 4$ Тл, $f_{res2} = 7,821$ ТГц	0,155	8,53	0,308	16,7	8	3,25	18	10
$B_0 = 7$ Тл, $f_{res3} = 9,018$ ТГц	0,19	10,76	0,56	29,25	8,33	1,81	18,42	5,18
$B_0 = 10$ Тл, $f_{res4} = 10,614$ ТГц	0,176	9,64	1,199	49,95	12,1	1,6	21,68	4,08

При приложении перпендикулярного магнитного поля отношение E_x/E_y в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (см. рис. 3,2) при $B_0 = 2$ Тл на частоте магнитоплазмонного резонанса $f_{res1} = 7,346$ ТГц отношение E_x/E_y (кривая 2 на рис. 5) равно: в точке 3 ($\theta = 180^\circ$, прошедшая волна) $E_x/E_y = 0,098$, в точке 4 ($\theta = 0^\circ$, отраженная волна) $E_x/E_y = 0,178$.

При $B_0 = 4$ Тл на частоте магнитоплазмонного резонанса $f_{res2} = 7,821$ ТГц отношение E_x/E_y (кривая 3 на рис. 5) равно: в точке 5 ($\theta = 180^\circ$, прошедшая волна) $E_x/E_y = 0,155$, в точке 6 ($\theta = 0^\circ$, отраженная волна) $E_x/E_y = 0,308$.

При $B_0 = 7$ Тл на частоте магнитоплазмонного резонанса $f_{res3} = 9,018$ ТГц отношение E_x/E_y (кривая 3 на рис. 5) равно: в точке 7 ($\theta = 180^\circ$, прошедшая волна) $E_x/E_y = 0,191$, в точке 8 ($\theta = 0^\circ$, отраженная волна) $E_x/E_y = 0,56$.

При $B_0 = 10$ Тл на частоте магнитоплазмонного резонанса $f_{res4} = 10,614$ ТГц в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (см. рис. 3,к) отношение E_x/E_y (кривая 5 на рис. 5) равно: в точке 7 ($\theta = 180^\circ$, прошедшая волна) $E_x/E_y = 0,176$, в точке 8 ($\theta = 0^\circ$, отраженная волна) $E_x/E_y = 1,199$.

То есть при дифракции на ячейке решетки ГНЛ нормально падающей линейно поляризованной ТЕМ-волны (*p*-поляризации) при приложении перпендикулярного внешнего магнитного поля отношение E_x/E_y для прошедшей и отраженной волн изменяется в сравнении со случаем отсутствия внешнего магнитного поля ($B_0 = 0$) и возрастает с увеличением B_0 на частотах магнитоплазмонных резонансов, причем более существенно для отраженной волны.

3. Результаты моделирования МО-эффектов при прохождении и отражении падающей линейно поляризованной ТЕМ-волны от ячейки решетки ГНЛ в перпендикулярном внешнем магнитном поле

С помощью программы MWS CST проведен расчет осевого отношения AR (отношения большой оси к малой оси поляризационного эллипса) [20] рассеянного излучения:

$$AR = \sqrt{\frac{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 + |E_\theta + E_\phi|^2}{|E_\theta|^2 + |E_\phi|^2 - |E_\theta + E_\phi|^2}}.$$

Результаты расчета осевого отношения AR в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (см. рис. 3) в зависимости от θ представлены на рис. 6, 7 для прошедшей и отраженной волны соответственно на частотах плазмонного резонанса f_{0res} ($B_0 = 0$) и магнитоплазмонных резонансов f_{res} для различных значений B_0 (2, 4, 7, 10 Тл).

При $B_0 = 2$ Тл, $f_{res1} = 7,346$ ТГц в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (см. рис. 3,2) при нормальном падении линейно поляризованной ТЕМ-волны p -поляризации осевое отношение равно: в точке $\theta = 180^\circ$ (прошедшая волна) $AR = 21,6$ дБ (рис. 6, точка 2), в точке 5 $\theta = 0^\circ$ (отраженная волна) $AR = 15$ дБ (рис. 7, точка 2). Следовательно, при $B_0 = 2$ Тл прошедшая волна имеет эллиптическую поляризацию, близкую к линейной (поляризационный эллипс сильно вытянут); отраженная волна – эллиптическую поляризацию.

При $B_0 = 4$ Тл, $f_{res2} = 7,821$ ТГц в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (см. рис. 3,2) осевое отношение равно: в точке $\theta = 180^\circ$ (прошедшая волна) $AR = 18$ дБ (см. рис. 6, точка 3), в точке $\theta = 0^\circ$ (отраженная волна) $AR = 10,24$ дБ (см. рис. 7, точка 3). Следовательно, при $B_0 = 4$ Тл прошедшая волна имеет эллиптическую поляризацию; отраженная волна – эллиптическую поляризацию, близкую к круговой.

При $B_0 = 7$ Тл, $f_{res3} = 9,018$ ТГц в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (рис. 3,3) осевое отношение равно: в точке $\theta = 180^\circ$ (прошедшая волна) $AR = 18,42$ дБ (см. рис. 6, точка 4), в точке $\theta = 0^\circ$ (отраженная волна) $AR = 5,17$ дБ (см. рис. 7, точка 4). Следовательно, при $B_0 = 7$ Тл прошедшая волна имеет эллиптическую поляризацию; отраженная волна – круговую поляризацию.

При $B_0 = 10$ Тл, $f_{res4} = 10,614$ ТГц в точках сечения ($\phi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния (см. рис. 3,4) осевое отношение равно: в точке $\theta = 180^\circ$ (прошедшая волна) $AR = 21,68$ дБ (см. рис. 6, точка 5), в точке $\theta = 0^\circ$ (отраженная волна) $AR = 4,08$ дБ (см. рис. 7, точка 5). Следовательно, при $B_0 = 10$ Тл прошедшая волна имеет эллиптическую поляризацию (при этом поляризационный эллипс вытянут), близкую к линейной, отраженная волна имеет круговую поляризацию.

Для сравнения в случае отсутствия внешнего магнитного поля ($B_0 = 0$) на частоте плазмонного резонанса $f_{0res} = 7,175$ ТГц (рис. 6, 7) осевое отношение равно: $\theta = 180^\circ$ в точке 1 (кривая 1 на рис. 6) (прошедшая волна) $AR = 100$ дБ (40 дБ), $\theta = 0^\circ$ в точке 1 (кривая 1 на рис. 7) (отраженная волна) $AR = 100$ дБ (40 дБ), т.е. прошедшая и отраженная волны имеют строго линейную поляризацию.

Основными параметрами эллиптически поляризованного излучения являются форма эллипса и его ориентация, которые характеризуются отношением осей поляризационного эллипса b/a и углом α между большой осью эллипса a и осью y , а также направление вращения вектора поля.

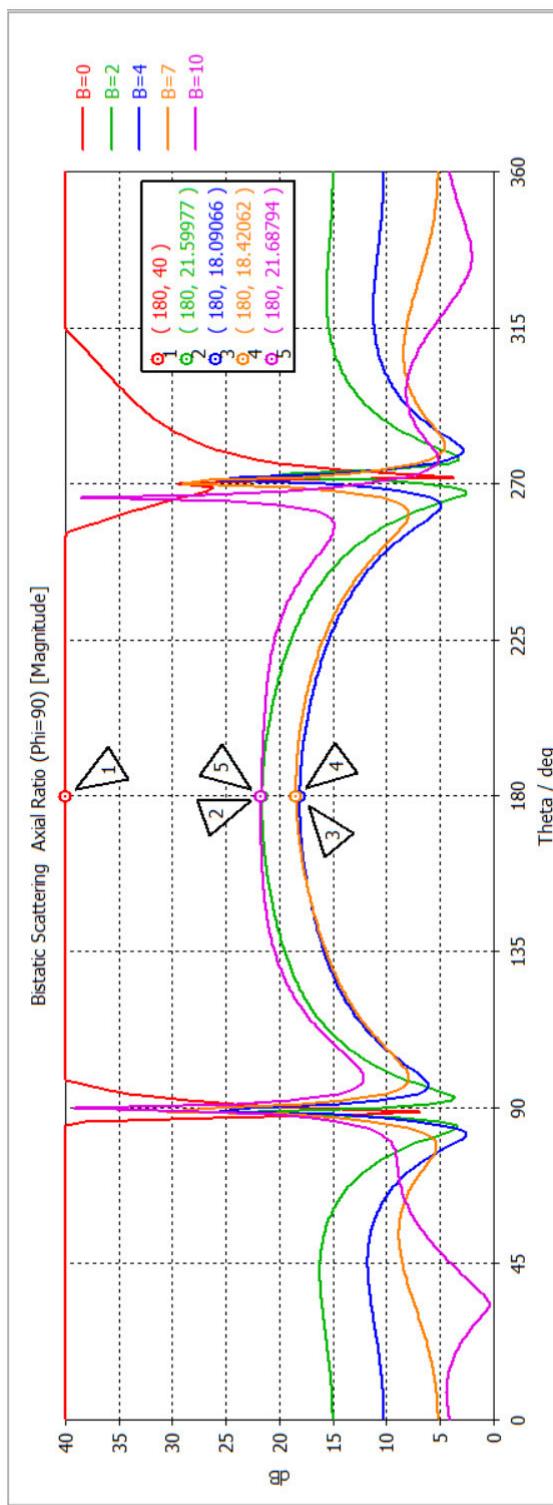


Рис. 6. Осевое соотношение AR (дБ) в точках сечения ($\phi = 90^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния ячейки решетки ГНЛ (пропущенная волна) в зависимости от θ для различных значений B_0 внешнего магнитного поля на частотах плазмонных и магнитоплазмонных резонансов; кривые: 1 – $B_0 = 0$, $f_{res1} = 7,175$ ТГц; 2 – $B_0 = 2$ ТГц, $f_{res1} = 7,346$ ТГц; 3 – $B_0 = 4$ ТГц, $f_{res2} = 7,821$ ТГц; 4 – $B_0 = 7$ ТГц, $f_{res3} = 9,018$ ТГц; 5 – $B_0 = 10$ ТГц, $f_{res4} = 10,614$ ТГц

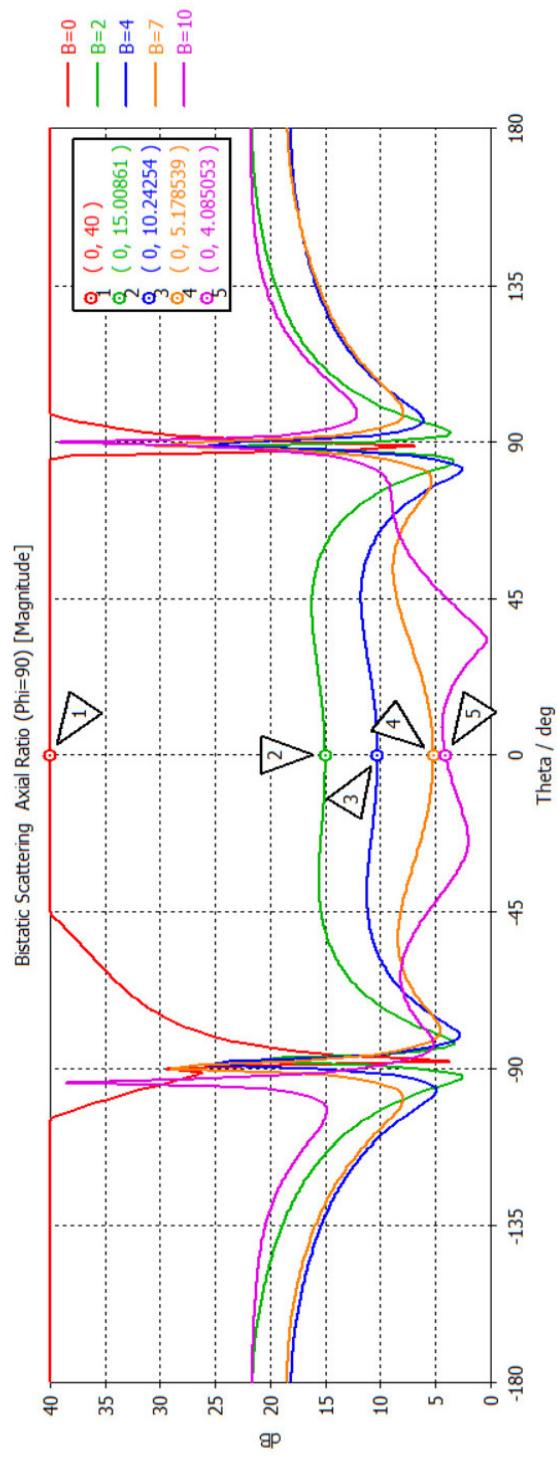


Рис. 7. Осевое соотношение AR (дБ) в точках сечения ($\phi = 90^\circ$) главного лепестка 3D- e -Field-диаграммы рассеяния ячейки решетки ГНЛ (отраженная волна) в зависимости от θ для различных значений B_0 внешнего магнитного поля на частотах плазмонного и магнитоплазмонных резонансов; кривые: 1 – $B_0 = 0$, $f_{res} = 7,175$ ТГц; 2 – $B_0 = 2$ Тл, $f_{res1} = 7,346$ ТГц; 3 – $B_0 = 4$ Тл, $f_{res2} = 7,821$ ТГц; 4 – $B_0 = 7$ Тл, $f_{res3} = 9,018$ ТГц; 5 – $B_0 = 10$ Тл, $f_{res4} = 10,614$ ТГц

Форма и ориентация поляризационного эллипса в системе координат $x0y$ определяются параметрами исходных колебаний: амплитудами E_x , E_y и сдвигом фаз δ . Зависимость угла ориентации большой оси эллипса α и отношения осей поляризационного эллипса b/a от сдвига фаз δ и отношения амплитуд E_x/E_y исходных колебаний можно определить аналитически, используя формулы перехода от системы координат $x0y$ к системе координат, совпадающей с осями эллипса [22].

Качественно эту зависимость можно проанализировать, используя уравнение эллипса [22]. Будем считать на первом этапе, что разность фаз исходных колебаний постоянна $\delta = \text{const}$, а отношение амплитуд E_x/E_y изменяется. Тогда форма и ориентация поляризационного эллипса также будут изменяться [22]. Выявим предельные случаи $E_x/E_y = 0$ ($E_x = 0$) и $E_x/E_y = \infty$ ($E_y = 0$). В этих случаях излучение является линейно поляризованным, и направление колебаний совпадает в первом случае с осью y ($E_x = 0$), во втором – с осью x ($E_y = 0$) (линейно поляризованное излучение рассматривается как предельный случай эллиптически поляризованного, когда малая ось эллипса $b = 0$, а большая ось a совпадает с направлением колебаний). В промежуточном случае при $E_x/E_y = 1$ оси поляризационного эллипса ориентированы по отношению к осям системы координат $x0y$ на угол $\alpha = 45^\circ$ [22]. То есть при изменении отношения E_x/E_y в пределах $0 \leq E_x/E_y \leq \infty$ большая ось поляризационного эллипса поляризации a поворачивается на некоторый угол [22].

Угол вращения Фарадея β плоскости поляризации прошедшей волны, рассчитанный как $\text{arctg } E_x/E_y$, равен: $\beta_1 = 5,5^\circ$ при $B_0 = 2$ Тл, $f_{res1} = 7,346$ ТГц; $\beta_2 = 8,53^\circ$ при $B_0 = 4$ Тл, $f_{res2} = 7,821$ ТГц; $\beta_3 = 10,76^\circ$ при $B_0 = 7$ Тл, $f_{res3} = 9,018$ ТГц; $\beta_4 = 9,64^\circ$ при $B_0 = 10$ Тл, $f_{res4} = 10,614$ ТГц. Из результатов моделирования следует, что при дифракции на ячейке решетки ГНЛ нормально падающей линейно поляризованной ТЕМ-волны p -поляризации в перпендикулярном внешнем магнитном поле наблюдается вращение плоскости поляризации прошедшей волны, при этом угол вращения Фарадея β возрастает на частотах магнитоплазменных резонансов при увеличении внешнего магнитного поля B_0 .

Угол вращения Керра γ отраженной волны, рассчитанный как $\text{arctg } E_x/E_y$, равен: $\gamma_1 = 9,65^\circ$ при $B_0 = 2$ Тл, $f_{res1} = 7,346$ ТГц; $\gamma_2 = 16,7^\circ$ при $B_0 = 4$ Тл, $f_{res2} = 7,821$ ТГц; $\gamma_3 = 29,25^\circ$ при $B_0 = 7$ Тл, $f_{res3} = 9,018$ ТГц; $\gamma_4 = 49,95^\circ$ при $B_0 = 10$ Тл, $f_{res4} = 10,614$ ТГц. Из результатов моделирования следует, что при дифракции на ячейке решетки ГНЛ нормально падающей линейно-поляризованной ТЕМ-волны p -поляризации в перпендикулярном внешнем магнитном поле наблюдается вращение плоскости поляризации отраженной волны при увеличении внешнего магнитного поля B_0 , при этом угол вращения Керра γ , описывающий вращение оси поляризации отраженной волны [22], возрастает на частотах магнитоплазменных резонансов пропорционально увеличению внешнего магнитного поля B_0 . Как показывают результаты расчета, представленные на рис. 8, угол вращения Керра γ оси поляризации отраженной волны изменяется более существенно, чем угол вращения Фарадея β плоскости поляризации прошедшей волны.

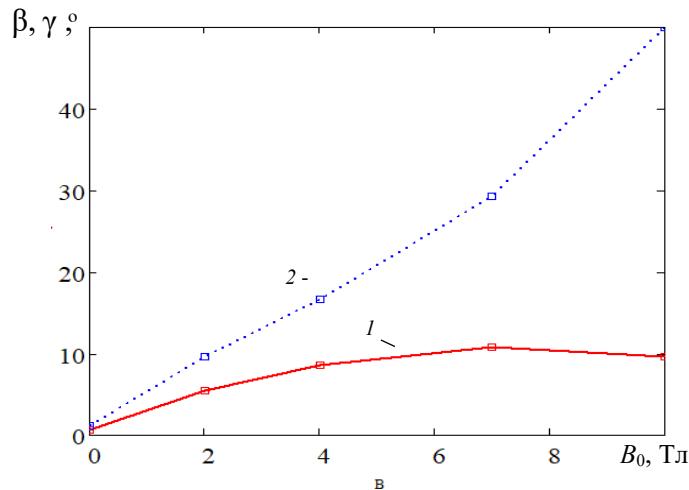


Рис. 8. Угол вращения Фарадея β при прохождении и угол вращения Керра γ при отражении нормально падающей ТЕМ-волны p -поляризации от ячейки решетки ГНЛ в точках сечения ($\varphi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграммы рассеяния в зависимости от внешнего магнитного поля B_0 : кривые: 1 – β (для прошедшей волны); 2 – γ (для отраженной волны)

Заключение

Впервые численное исследование поляризационных МО-эффектов проведено методами автоматизированного моделирования с помощью программного комплекса CST MWS на основе решения (методом конечных элементов в частотной области) электродинамической задачи дифракции волны на решетке ГНЛ при приложении перпендикулярного внешнего магнитного поля и анализа характеристик дифрагированного поля в ТГц-диапазоне.

Получены результаты моделирования 3D-*e-Field*-диаграмм рассеяния нормально падающей ТЕМ-волны p -поляризации на ячейке решетки ГНЛ на частотах плазмонного и магнитоплазмонных резонансов для различных значений B_0 (2, 4, 7, 10 Тл) внешнего магнитного поля. На основе анализа результатов расчета отношения горизонтальной и вертикальной компонент дифрагированного поля E_x/E_y и осевого соотношения AR в точках сечения ($\varphi = 0^\circ$) главного лепестка 3D-*e-Field*-диаграмм рассеяния исследован вид поляризации рассеянного ТГц-излучения и рассчитаны угол вращения Фарадея плоскости поляризации прошедшей волны и угол вращения Керра, описывающий поворот оси поляризации отраженной волны.

Из результатов численного исследования следует, что при дифракции нормально падающей ТЕМ-волны p -поляризации на ячейке решетки ГНЛ при приложении перпендикулярного внешнего магнитного поля на частотах магнитоплазмонных резонансов наблюдаются перестраиваемые по частоте МО-эффекты:

1) поворот плоскости поляризации линейно поляризованной волны при прохождении через намагниченную графеновую решетку, когда волновой вектор падающей волны параллелен вектору напряженности внешнего магнитного поля (эффект Фарадея), при этом угол вращения Фарадея зависит от величины внешнего магнитного поля B_0 ;

2) изменение ориентации поляризации и эллиптичности отраженной волны (полярный МО-эффект Керра), линейно поляризованная ТГц-волн,

отражаясь от намагниченного графена, становится эллиптически поляризованной, при этом большая ось эллипса поляризации поворачивается на некоторый угол по отношению к плоскости поляризации падающего ТГц-излучения пропорционально величине внешнего магнитного поля B_0 .

Результаты работы могут иметь потенциал для разработки ТГц-изоляторов [23], МО-модуляторов и преобразователей поляризации [24] в ряде ТГц-применений, включая сенсорику, ТГц-нанофотонику [11].

Список литературы

1. Roumi B., Abdi-Ghaleh R. Polar magneto-optical Kerr effect of reflected light from Graphene/InAs/Graphene/Polyimide/Al structure // Superlattices and Microstructures. 2021. Vol. 158. P. 107021. doi: 10.1016/j.spmi.2021.107021
2. Zvezdin A. K., Kotov V. A. Modern magneto optics and magneto optical materials. Institute of Physics Publishing, 1997. 400 p.
3. Кринчик Г. С. Физика магнитных явлений. М. : Изд-во МГУ, 1985. 295 с.
4. Chen T., Lu X.-H. Surface Plasmon and Fabry–Perot Enhanced Magneto-Optical Kerr Effect in Graphene Microribbons // Chin. Phys. Lett. 2015. Vol. 32 (2). P. 024204.
5. Roumi B., Abdi-Ghaleh R. Tunable Magneto-Optical Kerr Effect in Gated Monolayer Graphene in Terahertz Region // Journal of the Physical Society of Japan. 2013. Vol. 82. P. 074717. doi: 10.7566/JPSJ.82.074717
6. Четверухин А. В. Резонансный магнитооптический эффект Керра в субволновых двумерных плазмонных решетках : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. : МГУ, 2018. 144 с.
7. Armelles G., Cebollada A., García-Martín A. [et al.]. Magnetoplasmonics: Combining Magnetic and Plasmonic Functionalities // Advanced Optical Materials. 2013. Vol. 1, № 1. P. 10–35. doi: 10.1002/adom.201200011
8. Loughran T. H. J., Keatley P. S., Hendry E. [et al.]. Enhancing the magneto-optical Kerr effect through the use of a plasmonic antenna // Opt. Express. 2018. Vol. 26. P. 4738–4750.
9. Berger A., de la Osa R. A., Suszka A. [et al.]. Enhanced magneto-optical edge excitation in nanoscale magnetic disks // Phys. Rev. Lett. 2015. Vol. 115. P. 187403.
10. Калиш А. Н. Магнитооптические эффекты в периодическихnanostructuredированных средах : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М. : МГУ, 2013.
11. Hadad Y., Davoyan A. R., Engheta N. [et al.]. Extreme and Quantized Magneto-optics with Graphene Meta-atoms and Metasurfaces // ACS Photonics. 2014. Vol. 1 (10). P. 1068–1073. doi: 10.1021/ph500278w
12. Crassee I., Levallois J., Walter A. [et al.]. Giant Faraday rotation in single- and multi-layer graphene // Nature Phys. 2011. Vol. 7. P. 48–51. doi: 10.1038/nphys1816
13. Tymchenko M., Nikitin A. Y., Martín-Moreno L. Faraday rotation due to excitation of magnetoplasmons in graphene microribbons // ACS nano. 2013. Vol. 7, № 11. P. 9780–9787.
14. Poumirol J. M., Liu P., Slipchenko T. [et al.]. Electrically controlled terahertz magneto-optical phenomena in continuous and patterned graphene // Nat. Commun. 2017. Vol. 8. P. 14626. doi: 10.1038/ncomms14626
15. Ben Rhouma M., Guizal B., Bonnet P. [et al.]. Semi-analytical model for the analysis of a magnetically biased 1D subwavelength graphene-strip-grating // Opt. Continuum. 2022. Vol. 1, № 5. P. 1144–1156.
16. Padmanabhan P., Boubanga-Tombet S., Fukidome H. [et al.]. A graphene-based magnetoplasmonic metasurface for actively tunable transmission and polarization rotation at terahertz frequencies // Appl. Phys. Lett. 2020. Vol. 116. P. 221107. doi: 10.1063/5.0006448
17. Karimi Khoozani P., Maddahali M. [et al.]. Analysis of magnetically biased graphene-based periodic structures using a transmission-line formulation // J. Opt. Soc. Am. B. 2016. Vol. 33. P. 2566–2576.

18. Макеева Г. С. Никитин М. С. Магнитоплазмонные эффекты при дифракции терагерцовых волн на магнитно-смещенных графеновых метаповерхностях // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 116–133.
19. Ferreira A., Viana-Gomes J., Bludov A. H. [et al.]. Faraday effect in graphene enclosed in an optical cavity and the equation of motion method for the study of magneto-optical transport in solids // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 84. P. 235410.
20. CST Microwave Studio. URL: <https://www.3ds.com/products/simulia>
21. Курушин А. А. Проектирование СВЧ устройств в CST STUDIO SUITE. М., 2016. 433 с.
22. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М. : Наука, 1970. 720 с.
23. Tamagnone M., Moldovan C., Poumirol J. M. [et al.]. Near optimal graphene terahertz non-reciprocal isolator // Nature Communications. 2016. Vol. 7. P. 11216. doi: 10.1038/ncomms11216
24. Mu Q., Fan F., Ji Y. [et al.]. Enhanced terahertz magneto-optical Kerr rotation based on metasurface structure. Optics Communications. 2020. Vol. 460. P. 125163. doi: 10.1016/j.optcom.2019.125163

References

1. Roumi B., Abdi-Ghaleh R. Polar magneto-optical Kerr effect of reflected light from Graphene/InAs/Graphene/Polyimide/Al structure. *Superlattices and Microstructures*. 2021;158:107021. doi: 10.1016/j.spmi.2021.107021
2. Zvezdin A.K., Kotov V.A. *Modern magneto optics and magnetooptical materials*. Institute of Physics Publishing, 1997:400.
3. Krinchik G.S. *Fizika magnitnykh yavleniy = Physics of magnetic phenomena*. Moscow: Izd-vo MGU, 1985:295. (In Russ.)
4. Chen T., Lu X.-H. Surface Plasmon and Fabry–Perot Enhanced Magneto-Optical Kerr Effect in Graphene Microribbons. *Chin. Phys. Lett.* 2015;32(2):024204.
5. Roumi B., Abdi-Ghaleh R. Tunable Magneto-Optical Kerr Effect in Gated Monolayer Graphene in Terahertz Region. *Journal of the Physical Society of Japan*. 2013;82:074717. doi: 10.7566/JPSJ.82.074717
6. Chetvertukhin A.V. *Resonant magneto-optical Kerr effect in subwavelength two-dimensional plasmonic gratings*. PhD dissertation. Moscow: MGU, 2018:144. (In Russ.)
7. Armelles G., Cebollada A., García-Martín A. et al. Magnetoplasmonics: Combining Magnetic and Plasmonic Functionalities. *Advanced Optical Materials*. 2013;1(1):10–35. doi: 10.1002/adom.201200011
8. Loughran T.H.J., Keatley P.S., Hendry E. et al. Enhancing the magneto-optical Kerr effect through the use of a plasmonic antenna. *Opt. Express*. 2018;26:4738–4750.
9. Berger A., de la Osa R.A., Suszka A. et al. Enhanced magneto-optical edge excitation in nanoscale magnetic disks. *Phys. Rev. Lett.* 2015;115:187403.
10. Kalish A.N. *Magneto-optical effects in periodic nanostructured media*. PhD dissertation. Moscow: MGU, 2013. (In Russ.)
11. Hadad Y., Davoyan A.R., Engheta N. et al. Extreme and Quantized Magneto-optics with Graphene Meta-atoms and Metasurfaces. *ACS Photonics*. 2014;1(10):1068–1073. doi: 10.1021/ph500278w
12. Crassee I., Levallois J., Walter A. et al. Giant Faraday rotation in single- and multi-layer graphene. *Nature Phys.* 2011;7:48–51. doi: 10.1038/nphys1816
13. Tymchenko M., Nikitin A.Y., Martín-Moreno L. Faraday rotation due to excitation of magnetoplasmons in graphene microribbons. *ACS nano*. 2013;7(11):9780–9787.
14. Poumirol J.M., Liu P., Slipchenko T. et al. Electrically controlled terahertz magneto-optical phenomena in continuous and patterned graphene. *Nat. Commun.* 2017;8:14626. doi: 10.1038/ncomms14626
15. Ben Rhouma M., Guizal B., Bonnet P. et al. Semi-analytical model for the analysis of a magnetically biased 1D subwavelength graphene-strip-grating. *Opt. Continuum*. 2022;1(5):1144–1156.

16. Padmanabhan P., Boubanga-Tombet S., Fukidome H. et al. A graphene-based magnetoplasmonic metasurface for actively tunable transmission and polarization rotation at terahertz frequencies. *Appl. Phys. Lett.* 2020;116:221107. doi: 10.1063/5.0006448
17. Karimi Khoozani P., Maddahali M. et al. Analysis of magnetically biased graphene-based periodic structures using a transmission-line formulation. *J. Opt. Soc. Am. B.* 2016;33:2566–2576.
18. Makeyeva G.S. Nikitin M.S. Magnetoplasmonic effects in terahertz wave diffraction on magnetically biased graphene metasurfaces. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(2):116–133. (In Russ.)
19. Ferreira A., Viana-Gomes J., Bludov A.H. et al. Faraday effect in graphene enclosed in an optical cavity and the equation of motion method for the study of magneto-optical transport in solids. *Phys. Rev. B.* 2011;84:235410.
20. *CST Microwave Studio*. Available at: <https://www.3ds.com/products/simulia>
21. Kurushin A.A. *Proyektirovaniye SVCH ustroystv v CST STUDIO SUITE = Design of microwave devices in CST STUDIO SUITE*. Moscow, 2016:433. (In Russ.)
22. Born M., Wolf E. *Osnovy optiki = Fundamentals of optics*. Moscow: Nauka, 1970:720. (In Russ.)
23. Tamagnone M., Moldovan C., Poumirol J.M. et al. Near optimal graphene terahertz non-reciprocal isolator. *Nature Communications.* 2016;7:11216. doi: 10.1038/ncomms11216
24. Mu Q., Fan F., Ji Y. et al. Enhanced terahertz magneto-optical Kerr rotation based on metasurface structure. *Optics Communications.* 2020;460:125163. doi: 10.1016/j.optcom.2019.125163

Информация об авторах / Information about the authors

Галина Степановна Макеева

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры радиотехники и радиоэлектронных систем, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: radiotech@pnzgu.ru

Galina S. Makeeva

Doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the sub-department of radioengineering and radioelectronic systems, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Сергеевич Никитин

студент, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Mikhail S. Nikitin

Student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 17.06.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.07.2025

Принята к публикации / Accepted 20.08.2025

УДК 538.955

doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-6

Влияние постоянного магнитного поля на усталостную долговечность диамагнетиков: роль эффекта Зеемана в усталостной прочности цветных металлов

В. В. Шляров¹, А. А. Серебрякова², К. В. Аксенова³, Д. В. Загуляев⁴

^{1,2,3,4}Сибирский государственный индустриальный университет,
Новокузнецк, Кемеровская обл., Россия

¹shlyarov_vv@sibsiu.ru, ²serebryakova_aa@sibsiu.ru,

³19krestik91@mail.ru, ⁴zagulyaev_dv@physics.sibsiu.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Актуальность исследования обусловлена необходимостью изучения влияния постоянных магнитных полей на усталостную долговечность технически чистой меди и свинца, широко применяемых в промышленности и чувствительных к магнитным воздействиям, что позволит повысить надежность изделий и управлять их механическими свойствами. Цель – изучить влияние постоянного магнитного поля с индукцией 0,1–0,5 Тл на усталостную долговечность технически чистых меди и свинца. **Материалы и методы.** Изготовлены образцы технически чистой меди марки М1 и свинца марки С2 размером 4 × 12 × 130 мм методом электроэрозионной резки на станке с числовым программным управлением. Испытания на усталость проводили на установке с циклическим асимметричным консольным изгибом при температуре (~300 К). Выбран режим с амплитудой нагружения 2,5 мм. Поверхность разрушения изучали методом сканирующей электронной микроскопии (KYKY EM6900) с анализом структуры в ImageJ, а элементный состав – с помощью Ultim Extreme. **Результаты.** Результаты усталостных испытаний показали, что магнитное поле увеличивает долговечность меди М1 на 9–28 % и свинца С2 на 7 % при 0,3 Тл, но снижает ее при 0,4–0,5 Тл; разрушение меди происходит через три зоны с формированием субзеренной структуры, а у свинца магнитное поле изменяет морфологию излома и механизм разрушения. Эффект Зеемана, вызывая расщепление энергетических уровней электронов, изменяет активационные энергии движения дислокаций в диамагнитных металлах, что влияет на скорость их скольжения и механические свойства. **Выводы.** Магнитное поле (0,1–0,25 Тл) увеличивает усталостную долговечность меди на 9–28 %, влияя на механизм разрушения через формирование субзеренной структуры. Магнитное поле при 0,3 Тл повышает усталостную долговечность свинца на 7 %, а при 0,4–0,5 Тл значительно снижает ее из-за влияния на подвижность дислокаций и морфологию излома. Эффект Зеемана изменяет электронную структуру диамагнитных металлов, меняя активационные энергии движения дислокаций и скорость их скольжения, что влияет на механические свойства.

Ключевые слова: магнитное поле, свинец, медь, эффект Зеемана, диамагнетики, структура, сканирующая микроскопия

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-29-00578 (<https://rscf.ru/project/25-29-00578>).

Для цитирования: Шляров В. В., Серебрякова А. А., Аксенова К. В., Загуляев Д. В. Влияние постоянного магнитного поля на усталостную долговечность диамагнетиков: роль эффекта Зеемана в усталостной прочности цветных металлов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 66–80. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-6

Influence of constant magnetic field on fatigue life of diamagnetics: the role of the Zeeman effect in the fatigue strength of non-ferrous metals

V.V. Shlyarov¹, A.A. Serebryakova², K.V. Aksanova³, D.V. Zaguliaev⁴

^{1,2,3,4}Siberian State Industrial University,
Novokuznetsk, Kemerovo region, Russia

¹shlyarov_vv@sibsiu.ru, ²serebryakova_aa@sibsiu.ru,
³19krestik91@mail.ru, ⁴zagulyaev_dv@physics.sibsiu.ru

Abstract. *Background.* The relevance of the study is due to the need to study the effect of constant magnetic fields on the fatigue life of commercially pure copper and lead, widely used in industry and sensitive to magnetic effects, which will improve the reliability of products and control their mechanical properties. The purpose of the work is to study the effect of a constant magnetic field with an induction of 0.1-0.5 T on the fatigue life of commercially pure copper and lead. *Materials and methods.* Samples of commercially pure copper grade M1 and lead grade C2 measuring $4 \times 12 \times 130$ mm were manufactured by electrical discharge cutting on a CNC machine. Fatigue tests were carried out on a setup with cyclic asymmetric cantilever bending at a temperature of (~ 300 K). The mode with a loading amplitude of 2.5 mm was selected. The fracture surface was studied by scanning electron microscopy (KYKY EM6900) with structure analysis in ImageJ, and the elemental composition was studied using Ultim Extreme. *Results.* The fatigue test results showed that the magnetic field increases the fatigue life of copper M1 by 9–28% and lead C2 by 7% at 0.3 T, but reduces it at 0.4–0.5 T; copper fracture occurs through three zones with the formation of a subgrain structure, while in lead the magnetic field changes the fracture morphology and the fracture mechanism. The Zeeman effect, causing splitting of the electron energy levels, changes the activation energies of dislocation motion in diamagnetic metals, which affects their sliding speed and mechanical properties. *Conclusions.* 1 The magnetic field (0.1–0.25 T) increases the fatigue life of copper by 9–28%, affecting the fracture mechanism through the formation of a subgrain structure. 2 A magnetic field of 0.3 T increases the fatigue life of lead by 7%, while at 0.4–0.5 T it significantly reduces it due to the effect on dislocation mobility and fracture morphology. 3 The Zeeman effect changes the electronic structure of diamagnetic metals, changing the activation energies of dislocation motion and their slip velocity, which affects mechanical properties.

Keywords: magnetic field, lead, copper, Zeeman effect, diamagnets, structure, scanning microscopy

Financing: the research was financed by the RSF within the grant No. 25-29-00578 (<https://rscf.ru/project/25-29-00578>).

For citation: Shlyarov V.V., Serebryakova A.A., Aksanova K.V., Zaguliaev D.V. Influence of constant magnetic field on fatigue life of diamagnetics: the role of the Zeeman effect in the fatigue strength of non-ferrous metals. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(3):66–80. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-6

Введение

В последние десятилетия влияние постоянных магнитных полей на механические свойства материалов привлекло значительное внимание исследователей. Особый интерес вызывает воздействие таких полей на усталостную долговечность диамагнитных материалов, включая технически чистую медь и свинец. Понимание этих эффектов важно для разработки надежных компо-

нентов в различных отраслях промышленности, включая электронику, энергетику и транспорт. Исследования показали, что постоянные магнитные поля могут существенно влиять на процессы накопления повреждений и роста трещин в металлах. Современные работы подтверждают наличие как усиления, так и подавления усталостных процессов в зависимости от условий магнитного воздействия. Авторы [1] продемонстрировали, что постоянное магнитное поле изменяет механизм накопления усталостных повреждений в медных сплавах, изменяя морфологию и плотность дислокаций. Установлено, что магнитное поле индукцией до 0,5 Тл оказывает влияние на механическую устойчивость медных нанопроволок при циклическом нагружении, снижая их усталостную прочность на 10–15 % [2]. Это позволяет предположить, что даже для массивных образцов наблюдаются аналогичные эффекты, обусловленные изменением энергетического состояния дислокационных структур [3].

Влияние магнитных полей на медь также изучалось с позиции электронной структуры. К. Тан и соавторы применили метод электронного зондирования и показали, что магнитное поле приводит к изменению плотности электронных состояний вблизи дефектов решетки, что потенциально связано с эффектом Зеемана [4]. Эти изменения могут влиять на активационные барьеры пластической деформации.

В отношении свинца количество прямых исследований влияния постоянных магнитных полей на его усталостную долговечность ограничено. Однако, учитывая его диамагнитные свойства и низкую температуру плавления, можно предположить, что магнитные поля могут оказывать влияние на процессы деформации и разрушения, аналогично другим диамагнитным металлам. L. Chen и соавторы показали высокую чувствительность свинца к низкоэнергетическим внешним воздействиям, включая магнитные поля, что выражается в изменении скорости ползучести и возникновении микротрещин [5].

Исследования других металлов также подтверждают влияние магнитных полей на усталостные характеристики. В наших более ранних работах установлено, что воздействие постоянного магнитного поля увеличивает число циклов до разрушения коммерчески чистого титана [6]. Изучено влияние магнитного поля на усталостные и механические свойства стали 35CrMo [7]. Исследованы эффекты статического магнитного поля на микроструктуру суперсплава Inconel 625, полученного методом селективного лазерного плавления, и обнаружены изменения в микроструктуре материала [8]. Эти данные подтверждают общую тенденцию изменения дефектообразования и микроструктурной стабильности под действием магнитных полей, что важно учитывать при проектировании компонентов, работающих в магнитной среде [9–11].

Подобные изменения были подтверждены в более поздних работах, где также фиксировались модификации зеренной структуры и распределения фаз в металлических сплавах, подвергавшихся статическим магнитным полям [12–15]. Эти результаты являются важным подтверждением универсальности эффектов магнитного поля, распространяющихся не только на диамагнитные материалы, но и на более широкий класс конструкционных металлов.

В целом существующие исследования подчеркивают необходимость дальнейшего изучения влияния постоянных магнитных полей на усталост-

ную долговечность диамагнитных материалов. Особое внимание следует уделить технически чистой меди и свинцу в связи с их широким применением в промышленности и потенциальной чувствительностью к магнитным воздействиям.

Таким образом целью данной работы является изучение влияния постоянного магнитного поля с индукцией 0,1–0,5 Тл на усталостную долговечность технически чистых меди и свинца.

Материалы и методы

Для исследований были изготовлены образцы технически чистой меди марки М1 и свинца марки С2. Образцы изготовлены с помощью электроэрозионного проволочно-вырезного станка с числовым программным управлением, имели форму параллелепипеда размером $4 \times 12 \times 130$ мм. Имитация трещины (концентраторы напряжений) в центральной части образца осуществлялась двумя надрезами в виде полуокружности радиусом 20 мм. В области концентраторов напряжений образцы подвергались механическому шлифованию, в ходе которого использовалась наждачная бумага с уменьшающейся дисперсией абразивных частиц. Поверхность изделия должна быть тщательно подготовлена перед испытаниями, поскольку разрушение компонентов при циклических нагрузках часто связано с возникновением и распространением усталостных трещин, которые обычно возникают непосредственно в поверхностном слое.

Проведение испытаний на усталость осуществлялось на специальной установке по схеме циклического асимметричного консольного изгиба.

Во время испытаний определялось число циклов, которые образцы выдерживали до разрушения. Температура испытаний во всех случаях была комнатной (~300 К). В результате пробных испытаний для проведения дальнейших усталостных испытаний образцов в условиях воздействия магнитного поля и без него был выбран режим, при котором амплитуда нагружения не изменялась и составляла 2,5 мм.

Поверхность разрушения образцов исследовали методами сканирующей электронной микроскопии (СЭМ) на приборе KYKY EM6900, параметры структуры анализировали на специализированном программном обеспечении для анализа и обработки изображений ImageJ. Также с использованием специализированного устройства для исследования элементного состава Ultim Extreme была произведена оценка элементного состава исследуемых образцов. Для исследования поверхности разрушения были выбраны образцы меди и свинца, значения числа циклов до разрушения которых при каждом режиме были наиболее близки к средним по серии испытаний.

Результаты и обсуждение

Были проведены усталостные испытания полированных образцов меди М1 в исходном состоянии (без применения магнитного поля) и в магнитном поле различной индукции – 0,1, 0,15, 0,2 и 0,25 Тл (*in situ*). В результате исследований установлено, что технически чистая медь марки М1, подвергнутая испытаниям в условиях усталости без применения магнитного поля, разрушается в среднем через 248411 ± 24386 циклов после приложения асим-

метрической нагрузки с частотой $\sim 3,7$ циклов/с. Включение постоянного магнитного поля в процессе испытаний приводит к увеличению усталостной долговечности. А именно, среднее число циклов до разрушения при воздействии постоянного магнитного поля составляет: 270584 ± 34867 при $B = 0,1$ Тл, 284597 ± 11130 при $B = 0,15$ Тл, 294994 ± 19445 при $B = 0,2$ Тл и 318605 ± 42910 при $B = 0,25$ Тл. График зависимости среднего количества циклов до разрушения N от параметров внешнего магнитного поля (индукции B) представлен на рис. 1.

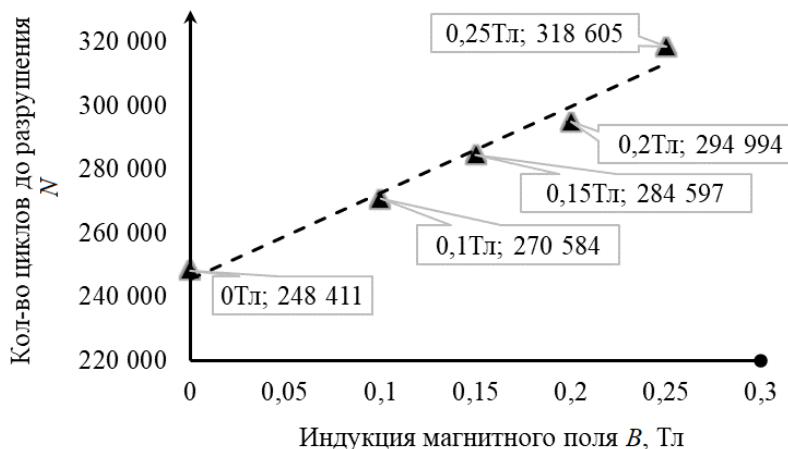


Рис. 1. Зависимость среднего количества циклов до разрушения N от индукции магнитного поля B

Аппроксимацию полученных экспериментальных результатов производили с помощью специализированного математического пакета Origin Pro 8.5. Анализ зависимости показывает, что применение постоянного магнитного поля с индукцией 0,1; 0,15; 0,2 и 0,25 Тл приводит к увеличению среднего количества циклов до разрушения образцов меди М1 на 8,9; 14,6; 18,8 и 28,3 % соответственно.

Усталостное разрушение, как правило, является процессом, развивающимся во времени в локальных объемах деформируемого материала. При достижении критического состояния наступает разрушение образца в целом. Характерное изображение структуры поверхности разрушения технически чистой меди М1, разрушенной в условиях усталости без применения магнитного поля, показано на рис. 2.

Процессы деформации, возникающие при проведении усталостных испытаний, в основном развиваются в области роста усталостных трещин и, в значительно меньшей степени, в области долома. При изменении направления нагрузки в устье трещины возникает значительная локализованная пластическая деформация. Поскольку изучаемый материал является поликристаллическим агрегатом, то фронт трещины распространяется некой паутиной (ветвлением). В общем случае структура образца, разрушенного в условиях усталостных испытаний, имеет три характерные зоны (рис. 3): 1 – зона зарождения трещины; 2 – зона циклического разрушения (стабильного роста трещины); 3 – зона долома, однократного квазистатического разрушения (когда $\sigma_{\text{действующее}} > \sigma_{\text{разрушающее}}$).

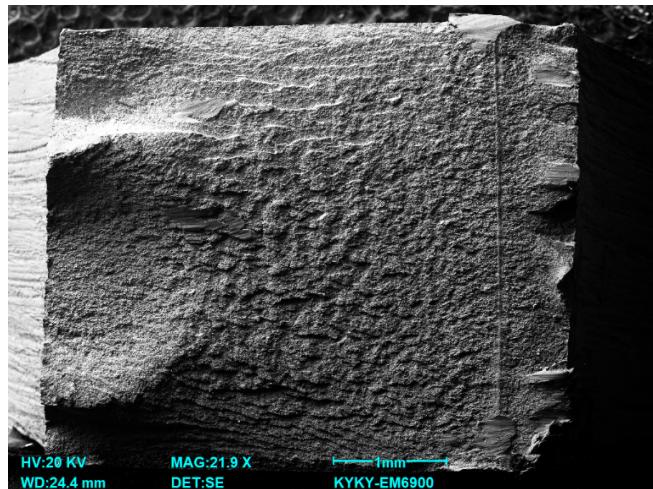


Рис. 2. Характерное изображение структуры поверхности разрушения технически чистой меди М1, разрушенной в условиях усталости без применения магнитного поля

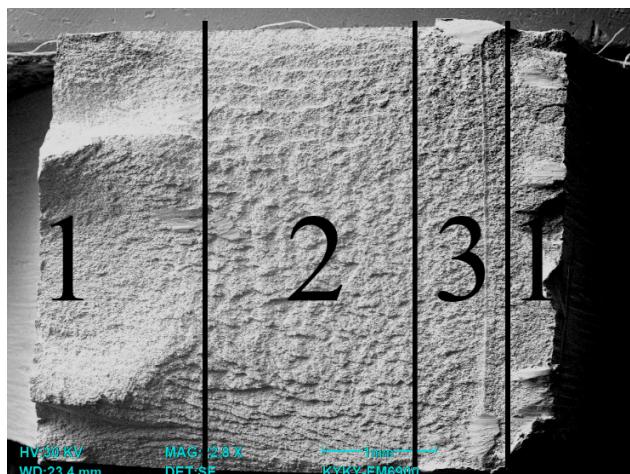


Рис. 3. Характерные зоны усталостного разрушения технически чистой меди М1: 1 – зона зарождения трещины; 2 – зона циклического разрушения (стабильного роста трещины); 3 – зона долома

В случае усталостного разрушения технически чистой меди М1 зона стабильного роста трещины характеризуется различными элементами структуры, присущими вязкому разрушению, среди которых можно отметить элементы вытяжки и ямки отрыва (рис. 4). Возникновение зоны вытяжки, т.е. сравнительно безрельефной поверхности разрушения, обусловлено так называемой вытяжкой, когда в процессе длительной деформации по существу стираются детали рельефа (рис. 4). Иногда в качестве причины образования таких областей рассматривается декогезия материала по плоскости скольжения или вязкий скол. Следует отметить, что ямки разрушения с элементами вытяжки присутствуют преимущественно в образцах меди, разрушенной при наложении магнитного поля. На рис. 5 приведены результаты исследования структуры поверхностного слоя образца меди (зона усталостного роста

трещины), разрушенного при циклических испытаниях в магнитном поле $B = 0,2$ Тл.

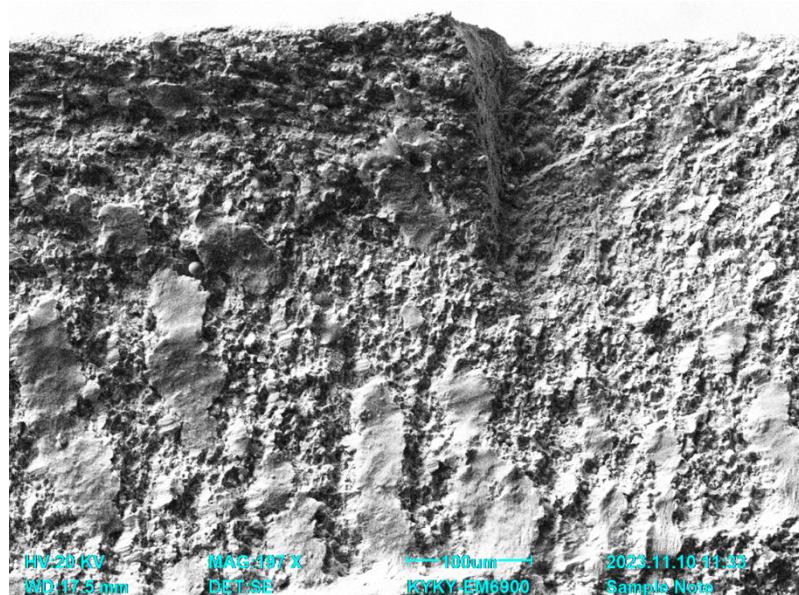


Рис. 4. Структура технически чистой меди с элементами вытяжки. Образец М1, разрушенный в условиях усталости в постоянном магнитном поле 0,25 Тл

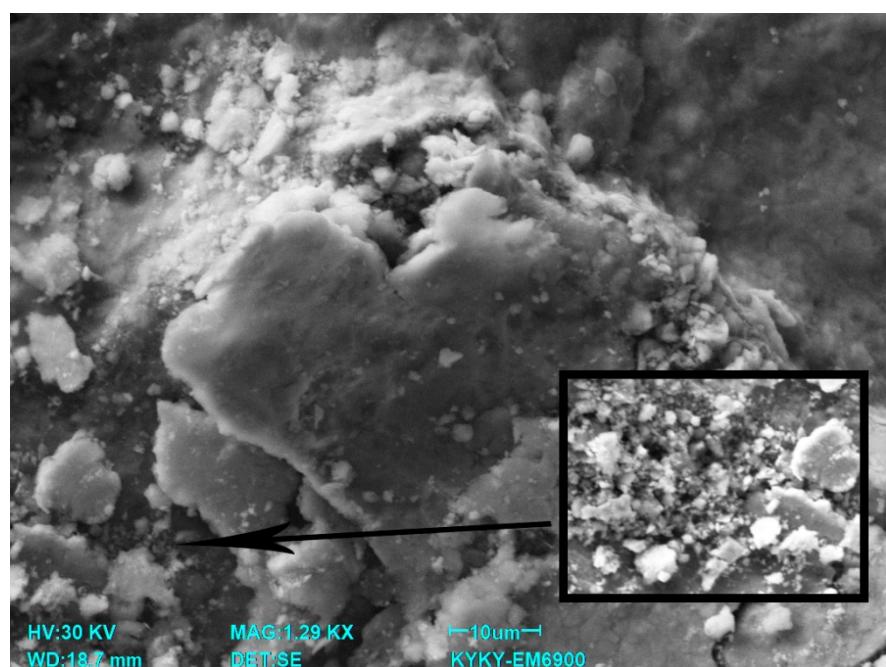


Рис. 5. Блочная (субзеренная) структура, формирующаяся в меди, разрушенной при циклических испытаниях после 274366 циклов в магнитном поле при $B = 0,2$ Тл

Особенностью зоны усталостного роста трещины является формирование субзеренной (фрагментированной) структуры. Размеры субзерен изме-

няются в пределах 0,67–1,5 мкм. Подобная субструктура формируется и в поверхностном слое образцов меди, циклические испытания которых были проведены в условиях отсутствия магнитного поля. Размеры субзерен в этом случае изменяются в пределах 0,56–0,87 мкм. Исследования показывают, что формирование субзеренной структуры в зоне усталостного роста трещины может оказывать влияние на передвижение микротрещины. Фрактографический анализ поверхности разрушения меди М1 в условиях усталостного нагружения позволяет заключить, что разрушение материала проходит по смешанному механизму, что совпадает с общепринятыми представлениями о кинетике данного процесса в металлических материалах.

Результаты проведенных усталостных испытаний образцов свинца марки С2 представлены на рис. 6. Выявлено, что чистый свинец марки С2, подвергнутый испытаниям усталости без применения магнитного поля, разрушается в среднем через 460346 циклов (рис. 5) после приложения нагрузки с частотой $\sim 2,19$ циклов/с.

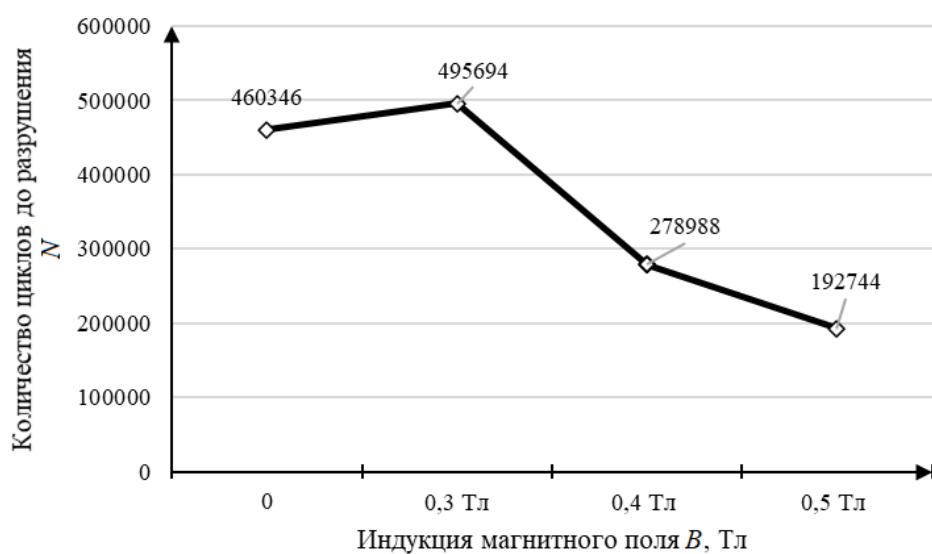


Рис. 6. Зависимость среднего количества циклов до разрушения N от индукции магнитного поля B

Как показано на рис. 6, включение постоянного магнитного поля в процесс приводит к увеличению усталостной долговечности при значении индукции магнитного поля 0,3 Тл, в среднем количество циклов при данном значении индукции составило 495694, что на 7 % больше, чем при испытаниях без магнитного поля (рис. 5)

Обратный характер влияния включения магнитного поля в процессе разрушения образцов наблюдается при усталостных испытаниях с применением индукции 0,4 и 0,5 Тл. Число циклов до разрушения при воздействии постоянного магнитного поля при этих значениях составляет: 278988 при $B = 0,4$ Тл, 192744 при $B = 0,5$ Тл (рис. 5), что на 40 и на 59 % ниже, чем при испытании без включения магнитного поля.

Выявленный знакопеременный характер означает, что в зависимости от изменяющихся значений индукции магнитного поля количество циклов,

необходимых для разрушения образца, изменяется, это указывает на наличие сложности в механизмах взаимодействия между магнитным полем и структурой материала, что может вызывать как усиление, так и ослабление его усталостной прочности.

На рис. 7 можно наблюдать образовавшиеся в процессе разрушения ямки отрыва (микроуглубления) внутри излома диаметром от 50 до 100 мкм. Образование подобных микроуглублений является особенностью морфологии поверхности разрушения при пластическом течении металла в процессе деформации, в данном случае при усталостном нагружении. Частицы неметаллических включений или вторых фаз могут быть очагом зарождения микроуглублений. Поверхность излома в данной области (рис. 7) представлена также многочисленными трещинами, направленными от ямок отрыва, протяженностью 20–300 мкм.

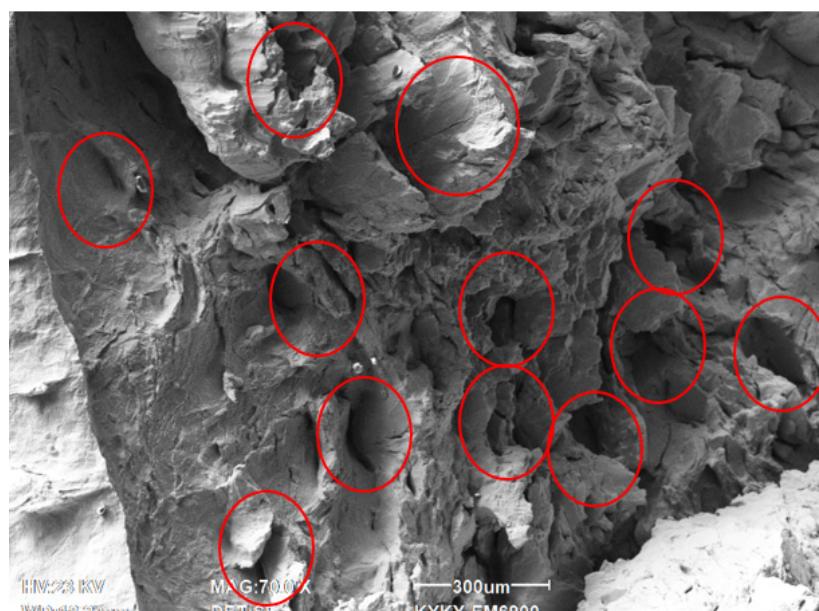


Рис. 7. Фрактограмма излома образца, разрушенного в процессе усталостного нагружения без применения магнитного поля

Далее проанализируем особенности излома и морфологию поверхности образца, полученного при усталостном разрушении с применением магнитного поля с индукцией магнитного поля 0,3; 0,4 и 0,5 Тл в процессе испытания.

Анализ фрактографических характеристик разрушений образцов свинца, полученных в процессе усталости, позволяет сделать следующие выводы. При умеренной индукции, около 0,4 Тл, наблюдается более «вязкая» картина разрушения с несколькими зонами: усталостные бороздки (зона (1)) формируются благодаря повышенной подвижности дислокаций, в то время как зона ускоренного роста трещины зона (2) возникает из-за активного накопления повреждений при циклических нагрузках. Фасетки скола указывают на разрушение вдоль определенных кристаллографических плоскостей, что связано с ориентацией вектора скольжения дислокаций в магнитном поле. При более

высокой индукции, около 0,5 Тл, процесс изменяет свой характер: на поверхности образуются многочисленные неоднородности, шероховатости, выступы и трещины, при этом четкое разграничение зон практически отсутствует. Это может быть связано с «закреплением» или запиранием части дислокаций магнитным полем (магнитопластический эффект), что приводит к образованию локальных пластических зон и, как следствие, к неоднородному рельефу излома.

На рис. 8 представлена фрактограмма излома образца, разрушенного при 0,4 Тл.

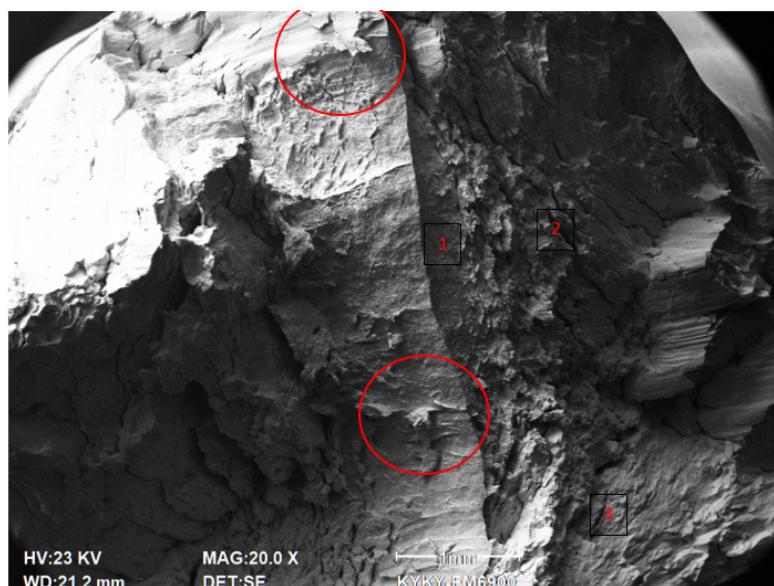


Рис. 8. Фрактограмма излома образца, разрушенного в процессе усталостного нагружения, с указанием зон разрушения (индукция магнитного поля $B = 0,4$ Тл)

Поверхность излома образцов, разрушенных при воздействии магнитного поля с индукцией 0,4 Тл, показывает вязкий, неоднородный характер излома, темно-серого цвета. Выявляются три зоны: 1 – зона среза (долома); 2 – зона ускоренного развития трещины; 3 – зона стабильного роста трещины. Зона 1 протяженностью около 4 мм характеризуется наличием вязких усталостных бороздок. Зона ускоренного развития трещины 2 образована множеством трещин, расположенных параллельно волокнистой зоне.

Основываясь на экспериментальных данных усталостных испытаний диамагнетиков меди и свинца, сформулируем возможный механизм влияния магнитного поля на данные металлы.

Одним из механизмов, посредством которого постоянное магнитное поле может влиять на деформационные характеристики диамагнитных материалов, таких как технически чистая медь и свинец, является эффект Зеемана. Этот эффект заключается в расщеплении энергетических уровней электронов в атоме под действием внешнего магнитного поля. В контексте материаловедения, хотя расщепление уровней невелико, оно может существенно влиять на электронную структуру, плотность состояний и, как следствие, на поведение дислокаций и других дефектов кристаллической решетки [16–18].

Энергия расщепления определяется как

$$\Delta E = \mu_B \cdot g \cdot m_J \cdot B,$$

где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} \approx 9,27 \cdot 10^{-24}$ – магнетрон Бора; g – гиromагнитное отношение

(для электрона ≈ 2); m_J – магнитное квантовое число; B – индукция магнитного поля.

Для электронов в металле, особенно вблизи дефектов (например, дислокаций, вакансий или межузельных атомов), это расщепление может изменить энергетические уровни, тем самым влияя на вероятность термически активируемого движения дефектов [19, 20].

Так, скорость дислокационного скольжения (по механизму активации) при термически активируемых процессах под действием магнитного поля описывается уравнением Аррениуса:

$$v_d = v_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E(B)}{kT}\right),$$

где $\Delta E(B) = \Delta E_0 \pm \mu_B g B$ – энергия активации с учетом эффекта Зеемана; k – постоянная Больцмана; T – температура.

Изменение ΔE даже на небольшую величину под действием магнитного поля приводит к экспоненциальному изменению скорости дислокационного скольжения, что непосредственно влияет на предел текучести, ползучесть и усталостную прочность [21–23].

В наших работах [24, 25] показаны изменения скорости ползучести технически чистого свинца в зависимости от индукции магнитного поля, что можно описать зависимостью

$$\dot{\varepsilon}(B) = \dot{\varepsilon}_0 \cdot \exp\left(-\frac{Q - \mu_B g B}{kT}\right).$$

Таким образом, при увеличении B , если Q уменьшается, скорость ползучести возрастает, эффект особенно будет заметен при низких температурах и в мягких магнетиках, таких как свинец.

Для меди и свинца, как диамагнетиков, магнитная восприимчивость $\chi < 0$, и в них не возникает собственного магнитного момента, однако внешнее поле все равно оказывает влияние через орбитальное движение электронов:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H},$$

где \vec{M} – намагниченность; \vec{H} – напряженность поля.

Даже слабое поле может повлиять на орбитальную структуру электронов и тем самым на межатомные силы.

В работе [26] экспериментально показано, что магнитное поле может вызывать перераспределение дислокаций в меди и изменять характер пластической деформации. Это подтверждает, что в диамагнитных металлах возможно значительное изменение микроструктуры и механических свойств под действием постоянного магнитного поля.

Для свинца, обладающего высокой пластичностью и низкой температурой плавления, магнитные поля могут особенно сильно влиять на термически активируемые процессы, такие как ползучесть, рекристаллизация и рост зерен. Подобные эффекты могут объясняться модификацией электронных состояний при помощи эффекта Зеемана, влияющего на энергетику межатомных взаимодействий и активационные барьеры [27–29].

Таким образом, можно утверждать, что эффект Зеемана представляет собой один из физических механизмов, способных объяснить наблюдаемые изменения деформационных характеристик меди и свинца при воздействии постоянного магнитного поля.

Список литературы

1. Li Q., Zhang Y., Zhao H. Influence of static magnetic field on fatigue damage evolution in copper alloys // Materials Science and Engineering A. 2020. Vol. 785. P. 139431. doi: 10.1016/j.msea.2020.139431
2. Zhou X., Lin M., Zhang H. Magnetic field effect on fatigue resistance of copper nanowires // Journal of Applied Physics. 2021. Vol. 130 (4). P. 045103. doi: 10.1063/5.0056374
3. Wang J., Liu F., Chen Y. Modulation of electronic structure in copper under magnetic field: implications for deformation mechanisms // Acta Materialia. 2023. Vol. 241. P. 118444. doi: 10.1016/j.actamat.2023.118444
4. Tan K., Wu Z., Feng Q. Probing electronic structure of copper under magnetic fields using X-ray magnetic circular dichroism // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2021. Vol. 537. P. 168170. doi: 10.1016/j.jmmm.2021.168170
5. Chen L., Hu M., Sun D. Low-energy external field effects on creep and microdamage in pure lead // Journal of Materials Research and Technology. 2022. Vol. 20. P. 3223–3230. doi: 10.1016/j.jmrt.2022.09.165
6. Aksanova K., Zaguliaev D., Konovalov S., Shlyarov V., Ivanov Y. Influence of constant magnetic field upon fatigue life of commercially pure titanium // Materials. 2022. Vol. 15 (19). P. 6926. doi: 10.3390/ma15196926
7. Gu Q., Huang X., Xi J., Gao Z. The influence of magnetic field on fatigue and mechanical properties of a 35CrMo steel // Metals. 2021. Vol. 11 (4). P. 542. doi: 10.3390/met11040542
8. Zhu W., Yu S., Chen C., Shi L., Xu S., Shuai S., Hu T., Liao H., Wang J., Ren Z. Effects of static magnetic field on the microstructure of selective laser melted Inconel 625 superalloy: numerical and experimental investigations // Metals. 2021. Vol. 11 (11). P. 1846. doi: 10.3390/met11111846
9. Zhang Y., Tang Y., Liu Z., Li Q. Static magnetic field influence on grain refinement in metallic alloys // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2020. Vol. 504. P. 166666. doi: 10.1016/j.jmmm.2020.166666
10. Kim S., Lee H. J., Cho Y. Magnetic-field-assisted microstructure evolution in Fe-based alloys // Metallurgical and Materials Transactions A. 2020. Vol. 51. P. 3432–3441. doi: 10.1007/s11661-020-05757-0
11. Chen Y., Zhao J., Li S. Effects of static magnetic field on solidification structure of Cu-based alloys // Journal of Alloys and Compounds. 2021. Vol. 853. P. 157218. doi: 10.1016/j.jallcom.2020.157218
12. Xie Y., Wang C., He X. Static magnetic field-induced grain growth and recrystallization in aluminum alloys // Materials Characterization. 2022. Vol. 186. P. 111835. doi: 10.1016/j.matchar.2022.111835
13. Liu H., Song Y., Zhang X. Microstructure and phase distribution control in magnetic-field-treated magnesium alloys // Materials Science Forum. 2023. Vol. 1076. P. 138–144. doi: 10.4028/p-4w1532

14. Ren X., Hu D., Wang F. Magnetic field-assisted phase transformation in steels: A review // *Journal of Materials Science & Technology*. 2021. Vol. 75. P. 56–69. doi: 10.1016/j.jmst.2020.09.063
15. Gao Y., Wang J., Li Z. Influence of static magnetic field on dislocation behavior and hardening in pure metals // *Metals*. 2022. Vol. 12 (4). P. 665. doi: 10.3390/met12040665
16. Mishra R. S., McFadden S. X., Valiev R. Z., Mukherjee A. K. Deformation mechanisms and tensile superplasticity in nanocrystalline materials // *Journal of the Minerals Metals & Materials Society*. 1999. Vol. 51, № 1. P. 37–40. doi: 10.1007/s11837-999-0010-1 EDN TEHHQP.
17. Misumi I., Ohkubo H. Effect of Magnetic Field on Fatigue Crack Growth. Oak Ridge, TN : OSTI. 1993. 45 c.
18. Safran S. A. *Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces, and Membranes*. Oxford : Westview Press, 1994. 255.
19. Kraft M. [et al.]. Fatigue in Submicron Copper Films // *International Journal of Materials Research*. 2002. Vol. 93, № 4. P. 321–328.
20. Magnetic Effects in Solids / ed. by H. Kronmüller [et al.]. Berlin : Springer, 2003. 5121 p.
21. Haasen P. *Physical Metallurgy*. 3rd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. 493 p.
22. Meyers M. A., Chawla K. K. *Mechanical Behavior of Materials*. Cambridge : Cambridge University Press, 2008. 680 p.
23. Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*. Hoboken, New Jersey : Wiley, 2004. 704 p.
24. Серебрякова А. А., Загуляев Д. В., Шляров В. В., Громов В. Е. Влияние магнитного поля индукцией 0,4 Тл на пластические свойства свинца С2 // Вестник Сибирского государственного индустриального университета. 2023. № 1 (43). С. 3–9. doi: 10.57070/2304-4497-2023-1(43)-3-9
25. Serebryakova A. A., Zaguliaev D. V., Shlyarov V. V. Influence of a Magnetic Field with Induction up to 0.5 T on the Dynamics of the Deformation Characteristics of Lead // *Physics of the Solid State*. 2023. Vol. 65, № 1. P. 27–31. doi: 10.1134/s1063783423700087
26. Konovalov S., Yaropolova N., Zaguliaev D., Ivanov Y. F., Gromov V. An Impact of the Magnetic Field on the Fine Copper Structure under Creep Failure Conditions // *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 788. P. 111–116. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.788.111>
27. Mura T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Berlin : Springer, 1987. 587 p.
28. Likhachev V. A. [et al.]. *Magnetic Control of Structure and Properties of Materials*. Moscow : Nauka, 2006. 345 p.
29. Шалимова К. В. *Физика полупроводников*. М. : Энергоатомиздат, 1985. 392 c.

References

1. Li Q., Zhang Y., Zhao H. Influence of static magnetic field on fatigue damage evolution in copper alloys. *Materials Science and Engineering A*. 2020;785:139431. doi: 10.1016/j.msea.2020.139431
2. Zhou X., Lin M., Zhang H. Magnetic field effect on fatigue resistance of copper nanowires. *Journal of Applied Physics*. 2021;130(4):045103. doi: 10.1063/5.0056374
3. Wang J., Liu F., Chen Y. Modulation of electronic structure in copper under magnetic field: implications for deformation mechanisms. *Acta Materialia*. 2023;241:118444. doi: 10.1016/j.actamat.2023.118444
4. Tan K., Wu Z., Feng Q. Probing electronic structure of copper under magnetic fields using X-ray magnetic circular dichroism. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2021;537:168170. doi: 10.1016/j.jmmm.2021.168170
5. Chen L., Hu M., Sun D. Low-energy external field effects on creep and microdamage in pure lead. *Journal of Materials Research and Technology*. 2022;20:3223–3230. doi: 10.1016/j.jmrt.2022.09.165

6. Aksanova K., Zaguliaev D., Konovalov S., Shlyarov V., Ivanov Y. Influence of constant magnetic field upon fatigue life of commercially pure titanium. *Materials*. 2022;15(19):6926. doi: 10.3390/ma15196926
7. Gu Q., Huang X., Xi J., Gao Z. The influence of magnetic field on fatigue and mechanical properties of a 35CrMo steel. *Metals*. 2021;11(4):542. doi: 10.3390/met11040542
8. Zhu W., Yu S., Chen C., Shi L., Xu S., Shuai S., Hu T., Liao H., Wang J., Ren Z. Effects of static magnetic field on the microstructure of selective laser melted Inconel 625 superalloy: numerical and experimental investigations. *Metals*. 2021;11(11):1846. doi: 10.3390/met11111846
9. Zhang Y., Tang Y., Liu Z., Li Q. Static magnetic field influence on grain refinement in metallic alloys. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2020;504:166666. doi: 10.1016/j.jmmm.2020.166666
10. Kim S., Lee H. J., Cho Y. Magnetic-field-assisted microstructure evolution in Fe-based alloys. *Metallurgical and Materials Transactions A*. 2020;51:3432–3441. doi: 10.1007/s11661-020-05757-0
11. Chen Y., Zhao J., Li S. Effects of static magnetic field on solidification structure of Cu-based alloys. *Journal of Alloys and Compounds*. 2021;853:157218. doi: 10.1016/j.jallcom.2020.157218
12. Xie Y., Wang C., He X. Static magnetic field-induced grain growth and recrystallization in aluminum alloys. *Materials Characterization*. 2022;186:111835. doi: 10.1016/j.matchar.2022.111835
13. Liu H., Song Y., Zhang X. Microstructure and phase distribution control in magnetic-field-treated magnesium alloys. *Materials Science Forum*. 2023;1076:138–144. doi: 10.4028/p-4w1532
14. Ren X., Hu D., Wang F. Magnetic field-assisted phase transformation in steels: A review. *Journal of Materials Science & Technology*. 2021;75:56–69. doi: 10.1016/j.jmst.2020.09.063
15. Gao Y., Wang J., Li Z. Influence of static magnetic field on dislocation behavior and hardening in pure metals. *Metals*. 2022;12(4):665. doi: 10.3390/met12040665
16. Mishra R.S., McFadden S.X., Valiev R.Z., Mukherjee A.K. Deformation mechanisms and tensile superplasticity in nanocrystalline materials. *Journal of the Minerals Metals & Materials Society*. 1999;51(1):37–40. doi: 10.1007/s11837-999-0010-1 EDN: TEHHQP
17. Misumi I., Ohkubo H. *Effect of Magnetic Field on Fatigue Crack Growth*. Oak Ridge, TN: OSTI. 1993:45.
18. Safran S.A. *Statistical Thermodynamics of Surfaces, Interfaces, and Membranes*. Oxford: Westview Press, 1994:255.
19. Kraft M. et al. Fatigue in Submicron Copper Films. *International Journal of Materials Research*. 2002;93(4):321–328.
20. Kronmüller H. et al. (ed.). *Magnetic Effects in Solids*. Berlin: Springer, 2003:5121.
21. Haasen P. *Physical Metallurgy*. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1996:493.
22. Meyers M.A., Chawla K.K. *Mechanical Behavior of Materials*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008:680.
23. Kittel C. *Introduction to Solid State Physics*. Hoboken, New Jersey : Wiley, 2004:704.
24. Serebryakova A.A., Zagulyayev D.V., Shlyarov V.V., Gromov V.E. The influence of a magnetic field with induction of 0.4 T on the plastic properties of lead C2. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo industrialnogo universiteta = Bulletin of the Siberian State Industrial University*. 2023;(1):3–9. (In Russ.). doi: 10.57070/2304-4497-2023-1(43)-3-9
25. Serebryakova A.A., Zaguliaev D.V., Shlyarov V.V. Influence of a Magnetic Field with Induction up to 0.5 T on the Dynamics of the Deformation Characteristics of Lead. *Physics of the Solid State*. 2023; 65(1):27–31. doi: 10.1134/s1063783423700087
26. Konovalov S., Yaropolova N., Zagulyaev D., Ivanov Y. F., Gromov V. An Impact of the Magnetic Field on the Fine Copper Structure under Creep Failure Conditions. *Applied Mechanics and Materials*. 2015;788:111–116. doi: 10.4028/www.scientific.net/amm.788.111

27. Mura T. *Micromechanics of Defects in Solids*. Berlin: Springer, 1987:587.
28. Likhachev V.A. et al. *Magnetic Control of Structure and Properties of Materials*. Moscow: Nauka, 2006:345.
29. Shalimova K.V. *Physics of Semiconductors*. Moscow: Energoatomizdat, 1985:392 (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виталий Владиславович Шляров

научный сотрудник управления научных исследований, Сибирский государственный индустриальный университет (Россия, Кемеровская обл., г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42)

E-mail: shlyarov_vv@sibsiu.ru

Vitaliy V. Shlyarov

Researcher, Scientific Research Department, Siberian State Industrial University (42 Kirova street, Novokuznetsk, Kemerovo region, Russia)

Анна Александровна Серебрякова

научный сотрудник управления научных исследований, Сибирский государственный индустриальный университет (Россия, Кемеровская обл., г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42)

E-mail: serebryakova_aa@sibsiu.ru

Anna A. Serebryakova

Researcher, Scientific Research Department, Siberian State Industrial University (42 Kirova street, Novokuznetsk, Kemerovo region, Russia)

Крестина Владимировна Аксенова

кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин имени профессора В. М. Финкеля, старший научный сотрудник управления научных исследований, Сибирский государственный индустриальный университет (Россия, Кемеровская обл., г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42)

E-mail: 19krestik91@mail.ru

Krestina V. Aksanova

Candidate of engineering sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of natural science disciplines named after Professor V.M. Finkel, senior researcher, Scientific Research Department, Siberian State Industrial University (42 Kirova street, Novokuznetsk, Kemerovo region, Russia)

Дмитрий Валерьевич Загуляев

доктор технических наук, доцент, профессор кафедры естественнонаучных дисциплин имени профессора В. М. Финкеля, начальник управления научных исследований, Сибирский государственный индустриальный университет (Россия, Кемеровская обл., г. Новокузнецк, ул. Кирова, 42)

E-mail: zagulyaev_dv@physics.sibsiu.ru

Dmitriy V. Zaguliaev

Doctor of engineering sciences, associate professor, professor of the sub-department of natural science disciplines named after Professor V.M. Finkel, senior researcher, Scientific Research Department, Siberian State Industrial University (42 Kirova street, Novokuznetsk, Kemerovo region, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 14.05.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 27.06.2025

Принята к публикации / Accepted 15.07.2025

УДК 524.62, 524.66, 524.7-1/8, 52.33
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-7

Сpirальная структура дисковых галактик и эффект скрытой массы

В. М. Журавлев

Ульяновский государственный педагогический
университет имени И. Н. Ульянова, Ульяновск, Россия
zhvictorm@gmail.com

Аннотация. Актуальность и цели. Строится теория дисковых галактик с нарушением цилиндрической симметрии, которая решает проблему спиральной структуры галактик в рамках модели волны плотности общего вида. Материалы и методы. Теория строится на основе классической гидродинамики сплошной самогравитирующей среды с квазиклассическим полем тяготения, содержащим описание эффекта скрытой массы (темной материи). Результаты. Выведены уравнения пространственного распределения параметров среды и поля тяготения, а также уравнения эволюции масштабных факторов в условиях динамического равновесия вращающейся среды с нарушением цилиндрической симметрии. Устанавливается аналогия между эффектом скрытой массы и гравитационной проницаемостью среды. Рассматривается описание взаимодействия дисковой структуры с внешним окружением. Выводы. Теория позволяет строить модели дисковых галактик со спиральной структурой при наличии эффекта скрытой массы. Такие модели включают описание собственной эволюции дисковых галактик при наличии внешнего воздействия.

Ключевые слова: строение и собственная эволюция спиральных галактик, эффект скрытой массы, квазиклассическое поле тяготения, динамическое равновесие сплошной самогравитирующей среды

Финансирование: работа выполнена в рамках Соглашения о предоставлении субсидии из федерального бюджета на финансовое обеспечение выполнения государственного задания на оказание государственных услуг (выполнения работ) № 073-03-2025-066 от 16.01.2025, заключенного между ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова» и Министерством просвещения Российской Федерации.

Для цитирования: Журавлев В. М. Спиральная структура дисковых галактик и эффект скрытой массы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 81–105. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-7

Spiral structure of disk galaxies and hidden mass effect

V.M. Zhuravlev

Ulyanovsk State Pedagogical University named after I.N. Ulyanov, Ulyanovsk, Russia
zhvictorm@gmail.com

Abstract. *Background.* A theory of disk galaxies with a violation of cylindrical symmetry is being constructed, which solves the problem of the spiral structure of galaxies within the framework of a general density wave model. *Materials and methods.* The theory is based on the classical hydrodynamics of a continuous self-gravitating medium with a quasi-classical gravitational field containing a description of the effect of hidden mass (dark matter). *Results.* The equations of the spatial distribution of the parameters of the medium and the gravitational field, as well as the equations of the evolution of scale factors, are

derived under the conditions of dynamic equilibrium of a rotating medium with a violation of cylindrical symmetry. An analogy is established between the effect of hidden mass and the gravitational permeability of the medium. The description of the interaction of the disk structure with the external environment is considered. *Conclusions.* The theory allows us to build models of disk galaxies with a spiral structure in the presence of a hidden mass effect. Such models include descriptions of the intrinsic evolution of disk galaxies in the presence of external influences.

Keywords: the structure and proper evolution of spiral galaxies, the hidden mass effect, the quasi-classical gravitational field, the dynamic equilibrium of a continuous self-gravitating medium

Financing: the work was carried out within the framework of the Agreement on the provision of subsidies from the federal budget for the financial support of the state assignment for the provision of public services (works) No. 073-03-2025-066 dated January 16, 2025, concluded between the Ulyanov State Pedagogical University and the Ministry of Education of the Russian Federation.

For citation: Zhuravlev V.M. Spiral structure of disk galaxies and hidden mass effect. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(3):81–105. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-7

Введение

В теории дисковых галактик имеются две важные проблемы. Первой является решение задачи объяснения плоской кривой вращения галактик на их периферии. Вторая – формирование и эволюция спиральных структур, которые обладают большим разнообразием их геометрической формы. Проблему плоской кривой вращения дисковых галактик, находящихся в относительном равновесном состоянии, связывают обычно с эффектом «темной материи» или эффектом скрытой массы в зависимости от способа объяснения этого эффекта. Эффект «темной материи» связан с объяснением плоской кривой вращения как следствие присутствия в галактиках неидентифицированной в локальных экспериментах экзотической по свойствам формы материи, которая взаимодействует с обычной материей только за счет гравитации [1–3]. Эффект скрытой массы связан с объяснением плоской кривой вращения как проявление квазиклассического поля тяготения, отличающегося на масштабах галактик и их скоплений от классического закона тяготения Ньютона. Примером такого подхода может служить теория MOND [4–6], а также предложенный в [7, 8] способ объяснения эффекта скрытой массы, опирающийся на новую теорию пространства и материи – Топологическую теорию фундаментальных полей (ТТФП) [9–11].

Проблема теории спиральных галактик находится в разработке уже порядка ста лет и связана с невозможностью объяснить все наблюдаемые формы их спиральной структуры с помощью какого-либо одного типа моделей [12–14]. Основная часть моделей относится к теории волны плотности [15–19], другая часть опирается на теорию динамических спиралей, связанную с численными моделями задачи N тел [20–22].

Модели теории волны плотности можно разделить на два класса. Это кинематический подход [15], опирающийся на модели орбитального движения отдельных звезд в галактиках и подход, основанный на уравнениях динамики сплошной среды с использованием бесстолкновительного уравнения Больцмана [18, 19]. Кинематический подход является достаточно упрощен-

ным способом описания структуры галактик и отражает лишь самые общие свойства их динамики [15]. Подход, основанный на использовании уравнения Больцмана, требует знания распределения звезд в галактике по скоростям, получить которые из экспериментальных данных достаточно сложно [18, 19]. Кроме этого, все имеющиеся варианты теории волны плотности при анализе пространственного распределения плотности массы вынуждены прибегать к линеаризации получающихся уравнений динамики, поскольку исходная задача оказывается существенно нелинейной.

Новым подходом к теории спиральных структур является теория динамического равновесия дисковых галактик [7, 8]. Этот подход опирается на гидродинамические модели сплошной самогравитирующей среды и вместо вероятностных уравнений Больцмана использует непосредственно гидродинамические уравнения Эйлера. Поскольку в таком подходе скорости точек среды детерминированы, то не возникает трудностей с вероятностным распределением звезд по скоростям. Важным элементом нового подхода, позволяющим решать задачу без линеаризации исходных уравнений, является представление параметров среды и напряженности ее собственного поля тяготения с помощью лагранжевых переменных или маркеров. Это позволяет включить в общую схему моделей динамического равновесия и описание спиральных структур дисковых галактик.

Еще одной важной частью предлагаемого подхода является использование квазиклассической теории тяготения для объяснения эффекта скрытой массы. В данной работе общая идеология квазиклассической теории гравитационного поля [7, 8] обобщается, что позволяет использовать ее для описания спиральной структуры галактик в условиях динамического равновесия для более общих граничных условий, чем в работе [8]. Основной задачей данной работы является построение модели динамического равновесия галактик со спиральными структурами.

1. Описание динамики сплошной среды в отсутствие цилиндрической симметрии

В классической механике для описания среды, заполняющей трехмерное пространство, с точки зрения лагранжева подхода необходимо вводить три лагранжевые переменные $e^a(x, t)$, $a = 1, 2, 3$, называемые далее маркерами, которые удовлетворяют по определению трем однотипным уравнениям:

$$\frac{de^a}{dt} \equiv \frac{\partial e^a}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь и далее $x = (x^1, x^2, x^3)$. Следствием этой системы уравнений [7, 8, 23] является соотношение

$$\frac{\partial M(\mathbf{e})|\mathbf{J}|}{\partial t} + \operatorname{div}(M|\mathbf{J}|u) = 0, \quad (2)$$

где $M(\mathbf{e}) = M_0 \aleph(\mathbf{e})$, M_0 – постоянная размерности массы; $\aleph(\mathbf{e})$ – произвольная безразмерная дифференцируемая функция маркеров $\mathbf{e} = (e^1, e^2, e^3)$;

$u = (u^1, u^2, u^3)$ – декартовы компоненты поля скоростей гидродинамического потока. Концентрация маркеров n определяется соотношением

$$n = |\mathbf{J}| = |\det \hat{\mathbf{J}}|, \quad (3)$$

где $|\det \hat{\mathbf{J}}|$ – якобиан преобразования $e \rightarrow x$ с матрицей Якоби:

$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Соотношение (2) в гидродинамике интерпретируется как уравнение неразрывности (сохранения массы)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (5)$$

при определении плотности среды ρ в соответствии с формулой

$$\rho = M_0 \mathbf{x}(\mathbf{e}) |\mathbf{J}|, \quad (6)$$

здесь M_0 – постоянная размерности массы. Функция $\mathbf{x}(\mathbf{e})$ описывает относительную массу отдельных частиц, помеченных различными маркерами e . Если все частицы среды имеют одинаковую массу, то $\mathbf{x} = 1$ и плотность среды просто пропорциональна концентрации n . Поэтому $\mathbf{x}(\mathbf{e})$ будем называть относительной массивностью частиц среды.

На основе (6) в работе [7] было показано, что точное решение обобщенного уравнения Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = -4\pi G D \rho = -4\pi G (\rho + \rho_D) \quad (7)$$

относительно напряженности \mathbf{g} поля тяготения с учетом эффекта скрытой массы с плотностью $\rho_D = (D-1)\rho$ можно в общем случае представить в следующем виде:

$$g^\alpha = -\frac{4\pi G}{3} M_0 \Xi(\mathbf{e}, t) |\mathbf{J}| e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} + [\operatorname{rot} \mathbf{U}]^\alpha, \quad (8)$$

здесь G – постоянная тяготения Ньютона, а вспомогательная функция Ξ связана с функцией D соотношением

$$D = \frac{\Xi}{\mathbf{x}} \left(1 + \frac{1}{3} e^a \frac{\partial}{\partial e^a} \ln \Xi(\mathbf{e}, t) \right). \quad (9)$$

Для удобства введем векторное поле $\mathbf{K} = (K^1, K^2, K^3)$ с компонентами:

$$K^\alpha = e^a \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a}. \quad (10)$$

Векторное поле \mathbf{U} является аналогом калибровочного поля, позволяющего добиться того, что \mathbf{g} будет некоторым градиентным полем, что требует условие консервативности классического поля тяготения. Если $D = 1$, то уравнение Пуассона (7) будет совпадать с уравнением для классической теории тяготения, а поле (8) будет решением классического уравнения Пуассона при подходящем выборе поля $\mathbf{g}_Z = \text{rot } \mathbf{U}$, компенсирующего вихревую составляющую этого поля [7]. В общем же случае (9) с $D \neq 1$ общее точное решение (8) позволяет использовать его для описания эффекта скрытой массы с плотностью «темной» массы ρ_D [7, 8].

2. Автомодельная эволюция сплошной среды

По аналогии с работой [8] рассмотрим уравнения динамики пылевидной среды в цилиндрической системе координат (r, φ, z) , где r – радиальная координата, z – вертикальная, φ – азимутальный угол. Уравнения Эйлера классической механики сплошной среды для компонентов скорости потока $\mathbf{v} = (u, w, v)$ (u – радиальная компонента, w – вертикальная, а v – зональная) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u - \frac{v^2}{r} &= g^1, \frac{d}{dt}w = g^2, \frac{d}{dt}v + \frac{vu}{r} = g^3, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + w \frac{\partial}{\partial z} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{g} = (g^1, g^2, g^3)$ – компоненты напряженности гравитационного поля в цилиндрической системе координат (g^1 – радиальная, g^2 – вертикальная, g^3 – азимутальная).

Уравнения (11) необходимо дополнить уравнением неразрывности (5) и уравнением Пуассона (7), решение которых уже получено в терминах маркеров $e^a(x, t)$ в виде соотношений (6) и (8). Поэтому для получения решений общей системы уравнений (11), (5) и (7) остается выразить также и скорость гидродинамического потока через маркеры. Это можно сделать в рамках предположения, что исследуемая система находится в динамическом равновесии [23].

Для описания динамического равновесия [23] используются автомодельные переменные, которые по определению сами должны являться маркерами или функциями маркеров. Наиболее простым и полезным в рамках данной задачи способом введения автомодельных переменных является представление соответствующих компонентов скорости потока в форме обобщенного потока Хаббла:

$$u = \frac{dr}{dt} = \dot{a}\xi(\mathbf{e}), v = \frac{dz}{dt} = \dot{b}\zeta(\mathbf{e}), \quad (12)$$

где $\xi = \xi(\mathbf{e})$ и $\zeta = \zeta(\mathbf{e})$ – автомодельные переменные; $a(t)$ и $b(t)$ – масштабные факторы, $\mathbf{e} = (e^1, e^2, e^3)$. Если проинтегрировать эти соотношения по t вдоль траекторий движения частиц, т.е. при условии $\mathbf{e} = \text{const}$, получаем следующие соотношения:

$$r = a(t)\xi(\mathbf{e}) + r_0(\mathbf{e}), \quad z = b(t)\zeta(\mathbf{e}) + z_0(\mathbf{e}),$$

где $r_0(\mathbf{e})$ и $z_0(\mathbf{e})$ – постоянные интегрирования.

В простейшем случае $r_0(\mathbf{e}) = z_0(\mathbf{e}) = 0$ автомодельные переменные имеют стандартный вид [7, 8, 23]:

$$\xi = r/a(t), \quad \zeta = z/b(t). \quad (13)$$

Поскольку наличие спиральных рукавов в галактиках означает нарушение цилиндрической симметрии, то в описание таких объектов необходимо ввести дополнительную автомодельную переменную $\theta = \theta(\xi, \zeta, \varphi, t)$. Эта новая автомодельная переменная должна отражать в условиях динамического равновесия зависимость параметров среды от азимутального угла φ . Чтобы ввести такую переменную, рассмотрим третье уравнение системы (11), полагая $g^3 = 0$. В этом случае приходим к уравнению сохранения удельного момента импульса:

$$\frac{d}{dt}(rv) = rg^3 = 0. \quad (14)$$

Это уравнение имеет общее решение:

$$vr = L(\mathbf{e}), \quad (15)$$

которое представляет собой закон сохранения удельного момента импульса L частиц среды. Из (15) следует соотношение для азимутальной скорости:

$$v = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L(\mathbf{e})}{r}.$$

С учетом (13) приходим к уравнению для азимутального угла в следующем виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{a^2(t)} \Omega_0(\mathbf{e}), \quad \Omega_0(\mathbf{e}) = \frac{L(\mathbf{e})}{\xi^2}.$$

Функцию $\Omega_0(\mathbf{e})$ будем называть коэффициентом локальной угловой скорости зонального потока.

Интегрируя последнее соотношение по t , находим дополнительную автомодельную переменную θ , связанную с φ следующим образом:

$$\theta = \varphi - \Omega(\mathbf{e}, t), \quad (16)$$

где

$$\Omega = c(t)\Omega_0(e), \quad c(t) = \int \frac{dt}{a^2(t)}. \quad (17)$$

Именно эта автомодельная переменная будет описывать зависимость переменных среды от азимутального угла Φ .

3. Параметры среды и поля в автомодельных переменных

Наличие дополнительной автомодельной переменной в описании динамического равновесия среды с нарушенной цилиндрической симметрией требует дополнительных вычислений матрицы преобразования от пространственных переменных к автомодельным. Имеем:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ \xi \Omega_\xi & \xi \Omega_\zeta & 1 + \Omega_\theta \end{pmatrix}.$$

Соответственно, обратная матрица $\hat{J} = \hat{I}^{-1}$ имеет следующий вид:

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial r} & \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{\Omega_\xi}{aC} & -\frac{\Omega_\zeta}{bC} & \frac{1}{C} \end{pmatrix},$$

где

$$C = 1 + \frac{\partial \Omega}{\partial \theta}. \quad (18)$$

Для того чтобы плотность допускала разделение переменных, необходимо выполнение условия

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \theta} = 0, \quad (19)$$

что дает $C = 1$. Это важное условие означает, что коэффициент локальной угловой скорости $\Omega = \Omega(\xi, \zeta, t)$ не зависит от азимутального угла.

Учитывая (6), находим:

$$|J| = \det \left(\frac{\partial e}{\partial x} \right) = \frac{1}{r} |J| \det \hat{J} = \frac{|J|}{a^2(t) b(t) \xi},$$

где

$$\mathbf{J} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial E^1}{\partial \xi} & \frac{\partial E^1}{\partial \zeta} & \frac{\partial E^1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E^2}{\partial \xi} & \frac{\partial E^2}{\partial \zeta} & \frac{\partial E^2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial E^3}{\partial \xi} & \frac{\partial E^3}{\partial \zeta} & \frac{\partial E^3}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

является функцией только автомодельных переменных, поскольку $E^a(\xi, \zeta, \theta) = e^a(r, z, \phi, t)$, а $N = |\mathbf{J}(e)|$ – представляет собой коэффициент плотности числа частиц.

В новых переменных плотность среды будет иметь следующий вид:

$$\rho = M_0 \mathbf{x}(e) |\mathbf{J}| = \frac{M_0 \mathbf{x}(e) |\mathbf{J}|}{a^2(t) b(t) \xi} = \frac{M_0 R}{a^2(t) b(t)}, \quad (20)$$

где R – коэффициент плотности среды,

$$R = \frac{\mathbf{x}(e) N(e)}{\xi}. \quad (21)$$

В результате вычисление компонентов напряженности поля тяготения строится на базе следующих соотношений:

$$\tilde{K}^\alpha = e^\alpha \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial e^\alpha} = E^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial E^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^\beta},$$

здесь и далее $X^1 = \xi, X^2 = \zeta, X^3 = \theta$, $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)$.

Введем дополнительно обозначения:

$$K^1 = E^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial E^\alpha}, K^2 = E^\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial E^\alpha}, K^3 = E^\alpha \frac{\partial \theta}{\partial E^\alpha}. \quad (22)$$

Тогда имеем следующие соотношения:

$$\tilde{K}^\alpha = I_\beta^\alpha K^\beta,$$

где I_β^α – компоненты матрицы $\hat{\mathbf{I}}$.

В покомпонентном виде последние соотношения с учетом формы матрицы $\hat{\mathbf{I}}$ имеют следующий вид:

$$K^1 = a(t) K^1, K^2 = b(t) K^2, \quad (23)$$

$$K^3 = a \xi \left(\Omega_\xi K^1 + \Omega_\zeta K^2 + K^3 \right).$$

Прямой проверкой убеждаемся, что для компонентов вектора K выполняется тождество:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\Xi JK^1) + \frac{\partial}{\partial \zeta}(\Xi JK^2) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\Xi JK^3) = 3\xi DR, \quad (24)$$

где D определяется соотношением (9).

Переход к записи поля $\text{rot } \mathbf{U}$ в автомодельных переменных основывается на следующих общих соотношениях для любой функции $F(r, z, \varphi, t) = F(\xi, \zeta, \theta, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} &= \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} = \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{b} \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial F}{\partial \phi} &= \frac{\partial F}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (25)$$

Используя эти соотношения, выражения для компонентов $\text{rot } \mathbf{U}$ можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} [\text{rot } \mathbf{U}]^1 &= \frac{1}{a\xi} \frac{\partial U^2}{\partial \theta} - \frac{1}{b} \frac{\partial U^3}{\partial \zeta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \frac{\partial U^3}{\partial \theta}, \\ [\text{rot } \mathbf{U}]^2 &= \frac{1}{a} \frac{\partial U^3}{\partial \xi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial U^3}{\partial \theta} + \frac{1}{a\xi} U^3 - \frac{1}{a\xi} \frac{\partial U^1}{\partial \theta}, \\ [\text{rot } \mathbf{U}]^3 &= \frac{1}{b} \frac{\partial U^1}{\partial \zeta} - \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \frac{\partial U^1}{\partial \theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial U^2}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial U^2}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

здесь U^α , $\alpha = 1, 2, 3$, – компоненты поля: $U(\xi, \zeta, \theta, t) = U(r, z, \varphi, t)$.

4. Разделение переменных

Уравнения динамики в автомодельных переменных теперь можно представить следующим образом:

$$\ddot{a}\xi - a^{-3} \Omega_0^2 \xi = g^1, \ddot{a}\zeta = g^2, g^3 = 0. \quad (26)$$

Подставляя в эти уравнения значения компонентов напряженности поля тяготения, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \ddot{a}\xi &= -\frac{\Gamma_0}{ab\xi} \Xi |\mathbf{J}| K^1 + \frac{1}{a\xi} \frac{\partial U^2}{\partial \theta} - \frac{1}{b} \frac{\partial U^3}{\partial \zeta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \frac{\partial U^3}{\partial \theta} + \frac{\Omega_0^2 \xi}{a^3}, \\ \ddot{a}\zeta &= -\frac{\Gamma_0}{a^2 \xi} \Xi |\mathbf{J}| K^2 + \frac{1}{a} \frac{\partial U^3}{\partial \xi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial U^3}{\partial \theta} + \frac{1}{a\xi} U^3 - \frac{1}{a\xi} \frac{\partial U^1}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$-\frac{\Gamma_0}{a^2 b \xi} \Xi |J| (\Omega_\xi K^1 + \Omega_\zeta K^2 + K^3) + \frac{1}{b} \frac{\partial U^1}{\partial \zeta} - \frac{1}{b} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \frac{\partial U^1}{\partial \theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial U^2}{\partial \xi} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \frac{\partial U^2}{\partial \theta} = 0.$$

Здесь введено обозначение: $\Gamma_0 = 4\pi GM_0 / 3$. Компоненты векторного поля $\mathbf{K} = (K^1, K^2, K^3)$, а также J являются функциями автомодельных переменных и не зависят от времени. В то же время компоненты векторного поля $\mathbf{U} = (U^1, U^2, U^3)$ могут зависеть от времени, как и функция Ξ . Поэтому требуется указать такое разделение последних на аддитивные слагаемые, зависящие от времени, при которых уравнения динамики позволяли бы провести разделение переменных по аналогии с работами [7, 23, 24]. Для получения замкнутой системы уравнений после разделения переменных потребуем, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{b(t)}{a^2(t)} \Xi_\omega + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \Xi_j(\mathbf{X}), \quad D = \frac{b(t)}{a^2(t)} D_\omega + \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) D_j(\mathbf{X}), \\ U^3 &= \frac{\Gamma_0 b(t)}{a^3(t)} Q_\omega(\mathbf{X}) + \frac{\Gamma_0}{a(t)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) Q_j(\mathbf{X}), \\ U^1 &= \frac{\Gamma_0 b(t)}{a^3(t)} \left(U_{11}(\mathbf{X}) + \frac{1}{a(t)} U_{12}(\mathbf{X}) \right) + \frac{\Gamma_0}{a(t)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \left(V_{11j}(\mathbf{X}) + \frac{1}{a(t)} V_{12j}(\mathbf{X}) \right), \\ U^2 &= \frac{\Gamma_0}{a^2(t)} \left(U_{21}(\mathbf{X}) + \frac{1}{a(t)} U_{22}(\mathbf{X}) \right) + \frac{\Gamma_0}{b(t)} \sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) \left(V_{21j}(\mathbf{X}) + \frac{1}{a(t)} V_{22j}(\mathbf{X}) \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Слагаемые в этих соотношениях, имеющие индекс ω , а также слагаемые с $U_{ij}(\mathbf{X})$, $i=1,2$; $j=1,2$, относятся к составляющим поля тяготения, связанными с вращением среды. Дополнительные ряды с коэффициентами $f_j(t)$ относятся к условно «невращающимся» параметрам поля. Подставляя эти соотношения в уравнения (24), (27) и проводя разделение переменных, приходим к системе уравнений для пространственных функций поля g .

Из уравнения (24) следуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Xi_j J K^1) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Xi_j J K^2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Xi_j J K^3) &= 3\xi D_j R, \quad j = 0, \dots, \infty; \\ \frac{\partial}{\partial \xi} (\Xi_\omega J K^1) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Xi_\omega J K^2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\Xi_\omega J K^3) &= 3\xi D_\omega R. \end{aligned} \quad (29)$$

Первое уравнение системы (27) приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{f_j}{ab} : -J K^1 \Xi_j + \frac{\partial V_{21j}}{\partial \theta} - \frac{\partial Q_j}{\partial \zeta} \xi = \varpi_{1j} \xi^2, \quad j = 0, \dots, \infty; \quad (30)$$

$$\frac{1}{a^3} : -JK^1 \Xi_{\omega} + \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta} - \frac{\partial Q_{\omega}}{\partial \zeta} \xi + \frac{1}{\Gamma_0} \Omega_0^2 \xi^2 = \kappa_1 \xi^2.$$

Второе уравнение системы (27) сводится также к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{f_j}{a^2} : -JK^2 \Xi_j + \xi \frac{\partial Q_j}{\partial \zeta} + Q_j - \frac{\partial V_{11j}}{\partial \theta} &= \varpi_{2j} \xi \zeta, j = 0, \dots, \infty; \\ \frac{b}{a^4} : -JK^2 \Xi_{\omega} + \xi \frac{\partial Q_{\omega}}{\partial \zeta} + Q_{\omega} - \frac{\partial U_{11}}{\partial \theta} &= \kappa_2 \xi \zeta. \end{aligned} \quad (31)$$

В этих уравнениях $\varpi_{kj}, \kappa_k, k = 1, 2$, – произвольные вещественные параметры разделения переменных. Кроме этого, должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} Q_{\omega} &= 0, \frac{\partial}{\partial \theta} Q_j = 0, j = 0, \dots, \infty; \\ \frac{\partial U_{12}}{\partial \theta} = \frac{\partial U_{22}}{\partial \theta} &= 0, \frac{\partial V_{12j}}{\partial \theta} = \frac{\partial V_{22j}}{\partial \theta} = 0, j = 0, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда следуют соотношения:

$$Q_{\omega} = Q_{\omega}(\xi, \zeta); U_{12} = U_{12}(\xi, \zeta), U_{22} = U_{22}(\xi, \zeta), \quad (33)$$

$$Q_j = Q_j(\xi, \zeta), V_{k2j} = V_{k2j}(\xi, \zeta), k = 1, 2, j = 0, \dots, \infty.$$

Соответствующие соотношениям (30) и (31) уравнения для масштабных факторов принимают такой вид:

$$\ddot{a} = \frac{\mu_1}{a^3} + \frac{F_1(t)}{ab}, \quad \ddot{b} = \frac{\mu_2}{a^4} b + \frac{F_2(t)}{a^2}, \quad (34)$$

где

$$F_k = \sum_{j=0}^{\infty} v_{kj} f_j(t), k = 1, 2; j = 0, \dots, \infty, \quad (35)$$

$$v_{kj} = \Gamma_0 \varpi_{kj}, \quad \mu_k = \Gamma_0 \kappa_k, \quad k = 1, 2. \quad (36)$$

Системы уравнений (30), (31) и (34) подобны системам уравнений, которые рассматривались в [7, 8]. Отличие заключается в появлении бесконечного числа слагаемых рядов разложения поля тяготения, что приводит к фактически произвольным функциям $F_k(t), k = 1, 2$. Произвол в этих функциях, как будет показано далее, связан с произвольностью граничных условий для исходной системы уравнений.

Третье уравнение системы (27) приводит к трем подсистемам. Первая из них может быть представлена в следующей форме:

$$\frac{\partial V_{11j}}{\partial \zeta} - \frac{\partial V_{21j}}{\partial \xi} = 0, j = 0, \dots, \infty; \quad \frac{\partial U_{11}}{\partial \zeta} - \frac{\partial U_{21}}{\partial \xi} = 0. \quad (37)$$

Вторая подсистема сводится к уравнениям:

$$\begin{aligned} -\Omega_{0,\zeta} \frac{\partial V_{11j}}{\partial \theta} + \Omega_{0,\xi} \frac{\partial V_{21j}}{\partial \theta} &= 0, j = 0, \dots, \infty; \\ -\Omega_{0,\zeta} \frac{\partial U_{11}}{\partial \theta} + \Omega_{0,\xi} \frac{\partial U_{21}}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Третья подсистема записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{J}{\xi} \Xi_j K^3 + \frac{\partial V_{12j}}{\partial \zeta} - \frac{\partial V_{22j}}{\partial \xi} &= 0, j = 0, \dots, \infty; \\ -\frac{J}{\xi} \Xi_\omega K^3 + \frac{\partial U_{12}}{\partial \zeta} - \frac{\partial U_{22}}{\partial \xi} &= 0, \\ \Omega_{0,\xi} K^1 + \Omega_{0,\zeta} K^2 &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Из первой подсистемы находим:

$$V_{11j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi}, V_{21j} = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \zeta}, U_{11} = \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \xi}, U_{21} = \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \zeta}, \quad (40)$$

где $\Phi_j = \Phi_j(\xi, \zeta, \theta)$ и $\Phi_\omega = \Phi_\omega(\xi, \zeta, \theta)$ – некоторые новые функции.

Из второй подсистемы получаем следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \zeta} \right) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \zeta} \right) = 0,$$

отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \zeta} &= H_{1j}(\xi, \zeta), \\ \frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \zeta} &= H_\omega(\xi, \zeta), \end{aligned} \quad (41)$$

где $H_{1j}(\xi, \zeta)$ и $H_\omega(\xi, \zeta)$ – некоторые произвольные функции.

Из систем (39) и (32) следует:

$$\begin{aligned} |J| \Xi_j K_3 &= W_j(\xi, \zeta) = -\frac{\partial V_{12j}}{\partial \zeta} + \frac{\partial V_{22j}}{\partial \xi}, j = 0, \dots, \infty, \\ |J| \Xi_\omega K_3 &= W_\omega(\xi, \zeta) = -\frac{\partial U_{12}}{\partial \zeta} + \frac{\partial U_{22}}{\partial \xi}, \\ \Xi_j / W_j &= \Xi_\omega / W_\omega, j = 0, \dots, \infty, \end{aligned} \quad (42)$$

где $W_j(\xi, \zeta)$ и $W_\omega(\xi, \zeta)$ – произвольные функции, определяющиеся в начальный момент времени.

Из последних соотношений системы (42) следует, что

$$\Xi_j = \Xi_\omega \frac{W_j}{W_\omega}, j = 0, \dots, \infty. \quad (43)$$

5. Анализ уравнений пространственного распределения полей

Соотношения (40) позволяют системы (30) и (31) сгруппировать по-новому и записать их в следующей форме:

$$\begin{aligned} -JK^1 \Xi_j + \frac{\partial \Psi_j}{\partial \zeta} &= \varpi_{1j} \xi^2, \\ -JK^2 \Xi_j - \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi} &= \varpi_{2j} \xi \zeta, j = 0, \dots, \infty, \end{aligned} \quad (44)$$

и

$$\begin{aligned} -JK^1 \Xi_\omega + \frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \zeta} + \frac{1}{\Gamma_0} \Omega_0^2 \xi^2 &= \kappa_1 \xi^2, \\ -JK^2 \Xi_\omega - \frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \xi} &= \kappa_2 \xi \zeta, \end{aligned} \quad (45)$$

где введены обозначения:

$$\Psi_j = \frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta} - \xi Q_j, j = 1, \dots, \infty; \quad \Psi_\omega = \frac{\partial \Phi_\omega}{\partial \theta} - \xi Q_\omega. \quad (46)$$

Учитывая теперь последнее уравнение системы (39), получаем дополнительные ограничения на вид функций Ψ_j и Ψ_ω , которые могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_j}{\partial \zeta} &= \varpi_{1j} \xi^2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} - \varpi_{2j} \xi \zeta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} \frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \xi} - \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi_\omega}{\partial \zeta} &= \left(\kappa_1 - \frac{1}{\Gamma_0} \Omega_0^2 \right) \xi^2 \frac{\partial \Omega_0}{\partial \zeta} - \kappa_2 \xi \zeta \frac{\partial \Omega_0}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Учитывая (41), из этих соотношений получаем уравнения для функций Q_j и Q_ω в следующей форме:

$$\begin{aligned} \left(\varpi_{1j} \xi^2 + \frac{\partial(\xi Q_j)}{\partial \zeta} \right) \Omega_{0,\zeta} + \left(\varpi_{2j} \xi \zeta - \frac{\partial(\xi Q_j)}{\partial \xi} \right) \Omega_{0,\xi} &= 0, \\ \left(\kappa_1 \xi^2 + \frac{\partial(\xi Q_\omega)}{\partial \zeta} - \frac{1}{\Gamma_0} \xi^2 \Omega_0^2 \right) \Omega_{0,\zeta} + \left(\kappa_2 \xi \zeta - \frac{\partial(\xi Q_\omega)}{\partial \xi} \right) \Omega_{0,\xi} &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Для выяснения свойств пространственного распределения поля тяготения вычислим дивергенцию поля K , используя уравнения (44) и (45). В результате получаем следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (J \Xi_j K^1) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J \Xi_j K^2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (J \Xi_j K^3) = -(\varpi_{1j} + \varpi_{2j}) \xi, \quad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (J \Xi_\omega K^1) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J \Xi_\omega K^2) + \frac{\partial}{\partial \theta} (J \Xi_\omega K^3) = -(2\kappa_1 + \kappa_2) \xi + \frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0^2). \quad (49)$$

Здесь учитывалось, что функции $V_{12j}, V_{22j}, U_{12}, U_{22}$ не зависят от θ . Используя теперь тождество (24), уравнения (48) и (49) приводим к более простому виду:

$$D_j = -\frac{\Lambda_j}{R}, D_\omega = -\frac{\Lambda_\omega}{R} + \frac{1}{3\Gamma_0} \frac{1}{\xi R} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0^2), \quad (50)$$

здесь

$$\Lambda_j = \frac{1}{3} (2\varpi_{1j} + \varpi_{2j}), \Lambda_\omega = \frac{1}{3} (2\kappa_1 + \kappa_2).$$

Используя (28) и определение плотности (20), окончательно получаем:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{R} \left(-F(t) + \frac{f_\omega(t)}{3\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0) \right) = \\ &= \frac{1}{\rho a^2 b} \left(-F(t) + \frac{f_\omega(t)}{3\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0^2) \right), \end{aligned} \quad (51)$$

здесь

$$F = \frac{1}{3} (2F_1(t) + F_2(t)) + f_\omega(t) \Lambda_\omega, f_\omega(t) = \frac{b(t)}{a^2(t)}. \quad (52)$$

Из соотношений (43) и (50) следует, что функции Ξ_j можно представить в следующем общем виде:

$$\Xi_j = \varpi_j \Xi_s(\xi, \zeta, \theta), \Xi_\omega = W_\omega(\xi, \zeta) \Xi_s(\xi, \zeta, \theta), \quad (53)$$

где ϖ_j – постоянные, при этом $W_j = \varpi_j = \text{const}$. Из этих соотношений и формы уравнений (44) следует, что функции Ψ_j , а также постоянные ϖ_{1j} и ϖ_{2j} должны иметь такой вид:

$$\Psi_j = \varpi_j \Psi_s(\xi, \zeta, \theta), \varpi_{1j} = \lambda_1 \varpi_j, \varpi_{2j} = \lambda_2 \varpi_j, \Lambda_j = \frac{1}{3} \varpi_j \Lambda, \quad (54)$$

где λ_1 и λ_2 – некоторые произвольные постоянные и $\Lambda = 2\lambda_1 + \lambda_2$. В результате уравнения (44) сводятся к уравнениям для одной функции Ξ_s :

$$-JK^1\Xi_s + \frac{\partial\Psi_s}{\partial\zeta} = \lambda_1\zeta^2, \quad -JK^2\Xi_s - \frac{\partial\Psi_s}{\partial\xi} = \lambda_2\zeta\zeta. \quad (55)$$

Соответственно функции D_j и W_j можно представить в аналогичной форме:

$$D_j = \varpi_j D_s, D_s = -\frac{\Lambda}{3R}, W_j = \varpi_j W_s. \quad (56)$$

Этот факт сводит систему уравнений для Ξ_s и Ξ_ω в точности к системе уравнений, рассмотренной в [8] для дисковых галактик с цилиндрической симметрией. Соотношения (54) также модифицируют и функции $F_1(t)$, $F_2(t)$:

$$F_k = \lambda_k F_0(t), k = 1, 2; F_0 = \Gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} \varpi_j f_j(t),$$

$$F = \frac{1}{3} \Lambda F_0(t) + \Lambda_\omega f_\omega(t). \quad (57)$$

Соответственно уравнения эволюции будут выглядеть теперь так:

$$\ddot{a} = \frac{\mu_1}{a^3} + \frac{v_1}{ab} F_0(t), \quad \ddot{b} = \frac{\mu_2}{a^4} b + \frac{v_2}{a^2} F_0(t), \quad (58)$$

где $v_k = \Gamma_0 \lambda_k$, $k = 1, 2$.

6. Переход к классическому полю тяготения

Как отмечалось ранее, случай $D = 1$ соответствует классическому уравнению Пуассона. Если это требование применить к соотношению (51), то из этого соотношения получаем связь между плотностью среды и коэффициентом угловой скорости зонального потока Ω_0 . Учитывая (20), эту связь удобно записать в следующей форме:

$$R(X) = -F(t) + \frac{f_\omega(t)}{3\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial\xi} (\xi^2 \Omega_0^2(\xi, \zeta)). \quad (59)$$

Поскольку функции R и Ω_0 зависят только от автомодельных переменных, то последнее соотношение может иметь место только в случае выполнения двух условий:

$$F_0(t) = \gamma = \text{const}, \quad f_\omega(t) = \frac{b}{a^2} = \varepsilon = \text{const}. \quad (60)$$

Отсюда следует, что $F(t) = \Lambda\gamma/3 + \varepsilon = \text{const}$. При выполнении условий (60) уравнения эволюции масштабных факторов можно привести к следующему виду:

$$\ddot{a} = \frac{\mu_1}{a^3} + \frac{v_1 \gamma}{ab}, \ddot{b} = \frac{\mu_2}{a^4} b + \frac{v_2 \gamma}{a^2}, \quad (61)$$

который совпадает с уравнениями, исследованными в [8]. Кроме этого, при выполнении этих же условий связь между коэффициентом плотности R и Ω_0 примет такой вид:

$$R = -\Lambda \gamma / 3 + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0^2). \quad (62)$$

Фактически это соотношение в рамках данной теории может служить способом проверки новой теории и ее отличия от классической теории тяготения. Самым простым выводом, который следует из соотношения (62), является невозможность появления спиральной структуры в дисковых галактиках при его выполнении. Действительно, при наличии связи (62), поскольку $\Omega_0 = \Omega(\xi, \zeta)$ не зависит от угловой переменной θ , плотность среды также не будет зависеть от нее. Следовательно, динамическое равновесие при наличии спиральной структуры невозможно в рамках классической теории тяготения. Поэтому при условии классической формы уравнения Пуассона модель будет способна описывать лишь дисковые галактики с цилиндрической симметрией распределения плотности, которое определяется соотношением (62).

Кроме требования выполнения уравнения (62) для полного перехода к классической теории тяготения в рамках рассматриваемой теории динамического равновесия необходимо еще одно требование. В рамках ньютоновской теории тяготения требуется также, чтобы напряженность поля тяготения была градиентом некоторого потенциала:

$$g = -\nabla \phi. \quad (63)$$

Для проверки этого требования необходимо рассмотреть уравнения (26), которые для этого полезно представить в таком виде:

$$g^1 = \dot{a} \xi - a^{-3} \Omega_0^2 \xi, g^2 = \dot{b} \zeta. \quad (64)$$

Для выполнения (63) необходимо, чтобы ротор от g обращался в ноль. Единственная компонента ротора $\text{rot } g$, которая может быть отлична от нуля, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} g^1 - \frac{\partial}{\partial \xi} g^2 = -a^{-3} \xi \frac{\partial}{\partial \zeta} \Omega_0^2.$$

Отсюда следует, что вихревая составляющая поля тяготения обращается полностью в ноль при выполнении условия

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \Omega_0 = 0, \quad (65)$$

т.е. в случае, если коэффициент угловой скорости не зависит от $\zeta = z / b(t)$. Если же угловая скорость меняется в зависимости от расстояния до экватори-

альной плоскости, то для существования динамического равновесия с радиальным потоком (12) и зональным потоком со скоростью $v = a^{-2}\xi\Omega_0$ необходима неклассическая форма поля тяготения с вихревой составляющей, поддерживающей дифференциальное вращение среды, зависящее от вертикальной координаты z . В силу этого в случае общей зависимости Ω от ξ полностью перехода к классической теории тяготения при $D=1$ в данной модели не происходит. Это означает, что в случае чисто классической теории тяготения даже при отсутствии эффекта скрытой массы ($D=1$) при общей зависимости Ω от z динамическое равновесие с потоком (12) не может реализовываться. В этом случае и статическое равновесие с вращением среды реализоваться не может, поскольку статическое равновесие является частным случаем динамического равновесия. Более того, в силу требования выполнения уравнения (62) в рамках классической теории дисковые структуры не могут находиться ни в динамическом, ни статическом равновесии, поскольку в этом случае и плотность среды ρ будет зависеть только от ξ : $\rho = M_0 R(\xi) a^{-2}(t) b(t)$.

7. Уравнение Пуассона и гравитационная проницаемость среды

Полученное решение (51) для функции D позволяет также по-новому взглянуть на суть эффекта скрытой массы, опираясь на аналогию между уравнениями Пуассона для электрического поля в диэлектрической среде и поля тяготения в обобщенной форме (7). Уравнение Пуассона для напряженности электрического поля E в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = \text{const}$ можно записать в следующей форме (в системе СГС):

$$\operatorname{div} E = \frac{4\pi}{\epsilon} \rho_e, \quad (66)$$

где ρ_e – плотность электрических зарядов. Сравнивая это уравнение с (7), видим, что функция $G \cdot D$ аналогична величине ϵ^{-1} . С другой стороны, функция D , определенная соотношением (9), обратно пропорциональна функции относительной массивности частиц среды $\mathbf{x}(e)$. Действительно, уравнение Пуассона (7) можно записать в такой форме:

$$\operatorname{div} g = -4\pi G D \rho = -\frac{4\pi}{\epsilon_G} \rho,$$

где условно ϵ_G – гравитационная проницаемость среды:

$$\epsilon_G = \frac{1}{G D} = \frac{\mathbf{x}}{G \mathbf{w}}, \quad \mathbf{w} = \left(1 + \frac{1}{3} K^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \mathbf{E}.$$

Различия в записи уравнений Пуассона в случаях электрического и гравитационного поля сводятся к наличию множителя \mathbf{w}^{-1} . С точки зрения ТТФП подобный множитель имеет место и для фундаментального электрического поля и порожден связью этих полей с геометрией и топологией про-

странства [11]. Кроме этого, источниками электрического поля являются заряды двух знаков, а поле тяготения массы материи всегда имеет положительный знак. В случае электрического поля изменения внутреннего поля в среду связаны с ее поляризацией, т.е. с изменением положения зарядов под действием внешнего электрического поля. В случае тяготения изменения во внутреннем поле в среде можно объяснить различиями в изменении движения частиц среды различной массы. Менее массивные смещаются или изменяют свои орбиты больше, чем более массивные частицы. Обычно считалось, что поле тяготения, в отличие от электрического поля, не экранируется, что, казалось бы, ведет к отсутствию гравитационной проницаемости. Однако наличие эффекта скрытой массы можно интерпретировать именно как определенного sorta изменение внутреннего гравитационного поля, например, его усиление за счет того, что происходят изменения движения частиц различной массы под действием общего коллективного поля. Особенно этот эффект должен проявлять себя в галактиках, которые состоят из совокупности звезд различных масс, а также пыли и газа. Но при описании галактик все эти объекты воспринимаются как точечные, включая отдельные звезды, частицы пыли, атомы и молекулы газов, а также плазмы. В силу этого именно при столь значительном разбросе масс частиц среды и проявляется наблюдаемый эффект скрытой массы. К этому следует добавить, что в ТТФП само пространство материально и его топология и геометрия создают поле тяготения.

Подтверждением такой концепции может служить решение (51) для функции D . Это решение получено без внесения в теорию каких-либо особых представлений о самогравитирующей среде и ее динамике. Динамика построена исключительно на уравнениях ньютонаовской механики для сплошной самогравитирующей среды при дополнительном требовании, что гидродинамический поток удовлетворяет закону Хаббла. Кроме того, допускалось, что поле тяготения этой сплошной среды обладает эффектом скрытой массы в самом общем виде, и радиальный поток представляет собой поток Хаббла, т.е. скорость радиальных составляющих скорости потока прямо пропорциональна расстоянию от центра системы. Тем не менее уравнения динамики в этом случае автоматически приводят к решению (51).

8. Границные условия

Если теперь решение для D (51) подставить в (7), то мы приходим к уравнению Пуассона в следующей форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = \left(3\Gamma_0 \frac{F(t)}{a^2 b} - \frac{1}{a^4} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \Omega_0^2 \right) \right). \quad (67)$$

Правая часть этого уравнения содержит функцию, связанную со скоростью зонального потока среды, т.е. с ее дифференциальным вращением, а не с плотностью. Задавая напряженность поля тяготения на некотором автомодельном расстоянии $\xi = \xi_0 = \text{const}$ от оси вращения в плоскости экватора при $\zeta = 0$, приходим к соотношению

$$g^1(\xi_0, 0, t) = G_1(t) = \left(\frac{\mu_1 - \Omega_0^2(\xi_0, 0)}{a^3(t)} + \frac{v_1 F_0(t)}{a(t) b(t)} \right) \xi_0. \quad (68)$$

Таким образом, функция $F_0(t)$ определяется изменением радиальной компоненты напряженности поля тяготения на некотором расстоянии от оси вращения в плоскости экватора. Этот факт означает, что слагаемое в правой части (67), содержащее функцию $F_0(t)$, отвечает за взаимодействие среды с внешним окружением, которое и будет определять в итоге эволюцию дисковой системы.

9. Уравнения пространственной структуры плотности

Полученные решения указывают на неполную замкнутость рассматриваемой модели. Уравнения динамики, рассматриваемые относительно функции плотности ρ , приводят к решению (51). Поскольку в рассматриваемой модели нет никаких дополнительных сведений относительно функций Ξ и D , то число неизвестных превышает число уравнений. В работе [8] для замыкания системы уравнений было предложено ввести дополнительные предположения относительно общих свойств функций Ξ и \mathbf{X} .

Для анализа пространственного распределения параметров среды рассмотрим по аналогии с [8] уравнения для Ξ_s и Ξ_ω в следующей форме:

$$\begin{aligned}\Xi_s + \frac{1}{3} \hat{D} \Xi_s = \mathbf{X} D_s = \frac{-\Lambda}{3N}, \\ \Xi_\omega + \frac{1}{3} \hat{D} \Xi_\omega = \mathbf{X} D_\omega = \frac{1}{N} \left(-\Lambda_\omega + \frac{1}{3\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0^2) \right).\end{aligned}\quad (69)$$

Здесь введено обозначение:

$$\hat{D} = K^1 \frac{\partial}{\partial \xi} + K^1 \frac{\partial}{\partial \zeta} + K^3 \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (70)$$

Решение этих уравнений можно получить и в маркерных переменных E^1 , E^2 , и в автомодельных. В маркерных переменных [7, 8] соответствующие решения дают общее представление о физическом смысле функций Ξ_j и Ξ_ω , что существенно с точки зрения общей интерпретации квазиклассического поля тяготения с точки зрения ТТФП [7, 11]. Для анализа пространственного распределения параметров среды полезно получить решения в автомодельных переменных. Для этого следует воспользоваться уравнениями (39), (45), и (55), из которых можно вычислить компоненты поля K . Учитывая (43), решения уравнений (69) для Ξ_s и Ξ_ω можно записать в следующем виде:

$$N \Xi_s^2 + \frac{1}{3} N \Xi_s \hat{D} X = -\frac{\Lambda}{3} \Xi_s.$$

Используя (39), (45) и (55) для вычисления компонентов K , приходим к уравнению

$$\hat{L} \ln \Xi_s = \Lambda \Xi_s + 3 \Xi_s^2 N, \quad (71)$$

где оператор \hat{L} имеет следующий вид:

$$\hat{L} = -N\Xi_s \hat{D} = \hat{L}_0 + \frac{W_s}{\xi} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$\hat{L}_0 = \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \zeta} + \lambda_1 \xi \right) \frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi_s}{\partial \xi} - \lambda_2 \zeta \right) \frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Учитывая связь (53) между Ξ_s и Ξ_ω , второе уравнение системы (69) можно привести к уравнению для W_ω :

$$\hat{L}_0 W_\omega + \Lambda W_\omega = 3\Lambda_\omega - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \Omega_0^2 \right). \quad (72)$$

Здесь учтено, что функция W_ω не зависит от переменной θ . Уравнения (71) и (72) почти в точности совпадают с аналогичными уравнениями для дисковых галактик с цилиндрической симметрией [8]. Основное отличие состоит в том, что в форме оператора \hat{L} присутствует теперь производная по переменной θ , которая отвечает за нарушение цилиндрической симметрии. Кроме этого, из-за нарушения цилиндрической симметрии несколько меняются числовые множители перед слагаемыми в записи уравнений.

10. Решение уравнений пространственного распределения параметров поля и среды

С формальной точки зрения, считая, что функции Ξ_s и W_ω заданы, уравнение (71) следует рассматривать как уравнение для вычисления функции N – концентрации частиц среды. Уравнение же (72) следует рассматривать как уравнение для вычисления функции Ω_0 – коэффициента локальной угловой скорости зонального потока. С другой стороны, как и в случае дисковых галактик с цилиндрической симметрией [8], эти уравнения можно использовать для вычисления функций Ξ_s и W_ω по известным из эксперимента функциям N и Ω_0 . Исходя из этого уравнения системы (71) и (72) при заданной функции коэффициента концентрации частиц N и коэффициента угловой скорости Ω_0 можно формально проинтегрировать с помощью метода характеристик.

Для уравнения (71) применение метода характеристик можно свести к представлению решения Ξ_s в виде функции от трех переменных $s = s(\xi, \zeta, \theta)$ и $\tau_{1,2} = \tau_{1,2}(\xi, \zeta, \theta)$, которые по определению должны удовлетворять уравнениям:

$$\hat{L}_s = 1, \hat{L}\tau_1 = 0, \hat{L}\tau_2 = 0. \quad (73)$$

Полагая $\Xi_s = \Xi_s(s, \tau_1, \tau_2)$ и учитывая, что оператор \hat{L} первого порядка, приходим к уравнению

$$\frac{\partial \Xi_s}{\partial s} - \Lambda \Xi_s - 3N\Xi_s^2 = 0. \quad (74)$$

Функции $s = s(\xi, \zeta, \theta)$ и $\tau_{1,2} = \tau_{1,2}(\xi, \zeta, \theta)$, являясь решениями линейных уравнений первого порядка, определяются выбором функции Ψ_s , входящей в определение оператора \hat{L} .

Аналогично для уравнения (72) необходимо ввести две переменные на характеристиках $\sigma = \sigma(\xi, \zeta)$ и $\tau_0 = \tau_0(\xi, \zeta)$, удовлетворяющие уравнениям:

$$\hat{L}_0 \sigma = 1, \hat{L}_0 \tau_0 = 0.$$

В этом случае уравнение (72) для W_ω примет такой вид:

$$\frac{\partial W_\omega}{\partial \sigma} + \Lambda W_\omega = 3\Lambda_\omega - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0^2). \quad (75)$$

Решения уравнений (74) и (75) можно записать [7, 8] в такой форме:

$$\begin{aligned} \Xi_s &= -\frac{1}{2} \frac{e^{\Lambda s}}{\int N e^{\Lambda s} ds + C_0(\tau_1, \tau_2)}, \\ W_\omega &= e^{-\Lambda \sigma} \left(W_0(\tau_1, \tau_2) + \int e^{\Lambda \sigma} F(\sigma, \tau_0) d\sigma \right), \end{aligned} \quad (76)$$

где $W_0(\tau_1, \tau_2), C_0(\tau_1, \tau_2)$ – постоянные вдоль характеристик функции и введено обозначение

$$F = 3\Lambda_\omega - \frac{1}{\Gamma_0} \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 \Omega_0^2).$$

Зависимость от θ в полученных решениях содержится в функциях s, σ и τ_1, τ_2 , которые вычисляются из последних трех уравнений системы (73). Учитывая, что нас интересуют решения периодические по θ с периодом 2π , функции s, σ и τ_1, τ_2 можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} s &= \sigma(\xi, \zeta) + \Re \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} S_m(\xi, \zeta) e^{im\theta} \right\}, \\ \tau_l &= \tau_0^{(l)}(\xi, \zeta) + \Re \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(l)}(\xi, \zeta) e^{im\theta} \right\}, l = 1, 2. \end{aligned} \quad (77)$$

Уравнения для коэффициентов этих разложений в ряд Фурье имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 \sigma &= 1, \hat{L}_0 S_m + i\xi^{-1} W_s S_m = 0, \\ \hat{L}_0 \tau_0^{(l)} &= 0, \hat{L}_0 A_m^{(l)} + i\xi^{-1} W_s A_m^{(l)} = 0, \quad l = 1, 2; m = 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (78)$$

В работе [8] предлагалось специальное замыкание системы уравнений для распределения плотности среды, которое приводило к возможности по-

лучить наблюдаемые в реальности дисковые структуры галактик. Условия замыкания сводились к двум предположениям:

$$\Xi_s = \mathbf{x} = qR^k, \quad (79)$$

где q и k – некоторые постоянные. Равенство $\Xi_s = \mathbf{x}$ приводит к упрощенной форме напряженности поля тяготения, в которую будет входить вместо множителя ΞN непосредственно плотность среды ρ . Равенство $\mathbf{x} = qR^k$ представляется логичным следствием предположения, что массивность точек среды, которыми в галактике являются звезды, является простой функцией плотности среды в данной точке. Используя эти предположения, уравнение для коэффициента плотности среды, являющееся следствием (74), перепишем в следующем виде:

$$k \frac{\partial R}{\partial s} - \Lambda R - 3R^2 = 0. \quad (80)$$

Решение этого уравнения для функции $R = R(s, \tau_1, \tau_2)$ можно представить в следующей форме:

$$R = -\frac{k}{3} \frac{\partial \Theta}{\partial s}, \quad (81)$$

где Θ – вспомогательная функция. После подстановки этого представления в соотношение (80) приходим к уравнению для Θ :

$$\Theta'' - \frac{\Lambda}{k} \Theta' = 0.$$

Решая это уравнение и подставляя решение в (81), находим:

$$R = \frac{\Lambda}{3} \frac{1}{1 + C_0(\tau_1, \tau_2) e^{-\Lambda s/k}}. \quad (82)$$

Это уравнение совпадает по форме с аналогичным решением для дисковых галактик с цилиндрической симметрией [8], но отличается зависимостью переменных s, τ_1, τ_2 от Θ .

Дополнительным элементом решений (82), который отсутствует в решениях, построенных в [8], является их зависимость от угловой автомодельной переменной Θ и, соответственно, φ . Эта зависимость от угловой переменной будет определяться решением уравнений (77). Общий анализ решений (82) с учетом зависимости от Θ представляется слишком объемным для того, чтобы включать его в данную работу. При тех же ограничениях, которые использовались в [8] при вычислении пространственного распределения коэффициента плотности среды, можно ожидать, что основным изменением в их структуре будет именно наличие спиральных структур различной формы в зависимости от начальных условий, которые определяют зависимость $A_m^{(l)}(\xi, \zeta), l=1,2$ и $S_m(\xi, \zeta)$ от ξ и ζ .

Заключение

Построена общая теория динамического равновесия дисковых структур без специального требования цилиндрической симметрии в пространственном распределении параметров среды и поля тяготения. Выведены все основные уравнения, позволяющие в дальнейшем по аналогии с работой [8] строить решения для пылевых дисков и дисковых галактик, допускающих спиральные структуры. Основным новым элементом теории является наличие в ней новой автомодельной переменной θ , связанной линейно с азимутальным углом φ . Это позволяет распространить модель динамического равновесия на случай отсутствия цилиндрической симметрии в структуре дисковых галактик.

Важным дополнением к теории дисковых галактик с цилиндрической симметрией, построенной на основе квазиклассического поля тяготения, кроме спиральных образований в их структуре, обобщенная теория включает два новых аспекта.

Первый состоит в том, что обобщается эволюция масштабных параметров дисков. Обобщение состоит в возможности учитывать внешнее воздействие на диск, которое определяется одним граничным условием. Такая возможность не рассматривалась в работе [8].

Второй аспект состоит в том, что возникающий в квазиклассической теории тяготения эффект скрытой массы, как было показано в работе, можно интерпретировать как эффект гравитационной проницаемости среды, аналогичный по форме диэлектрической проницаемости. Причиной возникновения эффекта гравитационной проницаемости, в отличие от электромагнетизма, является не наличие двух противоположных зарядов, а различная массивность отдельных точек сплошной среды, описываемая в квазиклассической теории тяготения функцией $\aleph(e)$ [7, 24].

Список литературы

1. Einasto J. Dark Matter // arXiv:0901.0632v1.2009.
2. Засов А. В., Сабурова А. С., Хоперсов А. В., Хоперсов С. А. Темная материя в галактиках // Успехи физических наук. 2017. Т. 187, № 1. С. 3–44.
3. Edmonds D., Erlich. J., Minic D., Takeuchi T. Universal Acceleration and Fuzzy Dark Matter // arXiv:2405.08744v1. 2024.
4. Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis // Astrophys. J. 1983. Vol. 270. P. 365–370.
5. McGaugh S. S. A Novel Test of the Modified Newtonian Dynamics with Gas Rich Galaxies // arXiv:1102.3913v1. 2011.
6. Govaerts J. Newtonian Gravity and Galaxy Rotation Curves: An Axisymmetric Green's Function Perspective // arXiv:2408.09977v1. 2024.
7. Журавлев В. М. Поле тяготения сплошной самогравитирующей среды и “темная материя” // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2024. Т. 120, № 6. С. 400–408.
8. Zhuravlev V. M. The gravitational field of a self-gravitating continuous medium, dark matter and disk galaxies // Gravitation and Cosmology. 2025. Vol. 31, № 3. С. 291–311.
9. Журавлев В. М. Материя и геометрия. ОТО и далее.... // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2016. № 2. С. 5–26.
10. Zhuravlev V. M. Induction Equations for Fundamental Fields and Dark Matter // Gravitation and Cosmology. 2017. Vol. 23, № 2. P. 95–104.

11. Zhuravlev V. M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles // *Gravitation and Cosmology*. 2022. Vol. 28, № 4. P. 319–341.
12. Dobbs C., Baba J., Dawes I. Review 4: Spiral Structures in Disc Galaxies // *Publications of the Astronomical Society of Australia (PASA)*. 2014. Vol. 31, № 35. P. 40.
13. Марчук А. А., Костюк В. С. Прояснение природы спиральной структуры в галактиках: такие разные случаи NGC 3686 и М 100 // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. 2023. № 229. С. 53–75.
14. Marchuk A. A. Resonance coupling in spiral arms. Patterns for flat rotation curve // arXiv:2405.14483v3. 2024.
15. Lin C. C., Shu F. H. On the Spiral Structure of Disk Galaxies // *Astrophysical Journal*. 1964. Vol. 140. P. 646–655.
16. Toomre A. What amplifies the spirals // *Structure and Evolution of Normal Galaxies* / ed. by S. M. Fall, D. Lynden-Bell. Cambridge and New York : Cambridge University Press, 1981. P. 111–136.
17. Pour-Imani H., Kennefick D., Kennefick J., Davis B. L., Shields D. W., Abdeen M. S. Strong evidence for the density-wave theory of spiral structure in disk galaxies // arXiv:1608.00969v1. 2016.
18. Морозов А. Г. Физика дисков. Волгоград : Изд-во ВолГУ, 2005. 422 с.
19. Фридман А. М. Физика галактических дисков. М. : Физматлит, 2011. 645 с.
20. Baba J., Takayuki R. S., Keiichi W. Dynamics of Non-steady Spiral Arms in Disk Galaxies // *Astrophysical Journal*. 2013. Vol. 763.1, № 46. P. 1–14.
21. Sellwood J. A. New Developments in Spiral Structure Theory // arXiv:1001.5430. 2010.
22. Forgan D., Bonnell I., Lucas W., Rice K. Tensor classification of structure in smoothed particle hydrodynamics density fields // arXiv:1601.02580v1. 2016.
23. Журавлев В. М. Модели динамического равновесия астрофизических объектов // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2022. Т. 162, № 6. С. 850–877.
24. Журавлев В. М. Масса и параметры вращения звезд в условиях динамического равновесия // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 3. С. 107–145.

References

1. Einasto J. Dark Matter. *arXiv:0901.0632v1*. 2009.
2. Zasov A.V., Saburova A.S., Khoperskov A.V., Khoperskov S.A. Dark matter in galaxies. *Uspekhi fizicheskikh nauk = Advances in the physical sciences*. 2017;187(1):3–44. (In Russ.)
3. Edmonds D., Erlich J., Minic D., Takeuchi T. Universal Acceleration and Fuzzy Dark Matter. *arXiv:2405.08744v1*. 2024.
4. Milgrom M. A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.* 1983;270:365–370.
5. McGaugh S.S. A Novel Test of the Modified Newtonian Dynamics with Gas Rich Galaxies. *arXiv:1102.3913v1*. 2011.
6. Govaerts J. Newtonian Gravity and Galaxy Rotation Curves: An Axisymmetric Green's Function Perspective. *arXiv:2408.09977v1*. 2024.
7. Zhuravlev V.M. The gravitational field of a continuous self-gravitating medium and “dark matter”. *Pisma v Zhurnal eksperimentalnoi i teoreticheskoy fiziki = Letters to the Journal of experimental and theoretical physics*. 2024;120(6):400–408. (In Russ.)
8. Zhuravlev V.M. The gravitational field of a self-gravitating continuous medium, dark matter and disk galaxies. *Gravitation and Cosmology*. 2025;31(3):291–311.
9. Zhuravlev V.M. Matter and geometry. General relativity and beyond... *Prostranstvo, vremya i fundamentalnyye vzaimodeystviya = Space, time and fundamental interactions*. 2016;(2):5–26. (In Russ.)
10. Zhuravlev V.M. Induction Equations for Fundamental Fields and Dark Matter. *Gravitation and Cosmology*. 2017;23(2):95–104.

11. Zhuravlev V.M. Matter and Space. New Theory of Fields and Particles. *Gravitation and Cosmology*. 2022;28(4):319–341.
12. Dobbs C., Baba J., Dawes I. Review 4: Spiral Structures in Disc Galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Australia (PASA)*. 2014;31(35):40.
13. Marchuk A.A., Kostyuk V.S. Clarifying the nature of spiral structure in galaxies: the very different cases of NGC 3686 and M 100. *Izvestiya Glavnayi astronomicheskoy observatorii v Pulkove = Proceedings of the Main Astronomical Observatory in Pulkovo*. 2023;(229):53–75. (In Russ.)
14. Marchuk A.A. Resonance coupling in spiral arms. Patterns for flat rotation curve. *arXiv:2405.14483v3*. 2024.
15. Lin C.C., Shu F.H. On the Spiral Structure of Disk Galaxies. *Astrophysical Journal*. 1964;140:646–655.
16. Toomre A. What amplifies the spirals. *Structure and Evolution of Normal Galaxies*. Ed. by S.M. Fall, D. Lynden-Bell. Cambridge and New York: Cambridge University Press, 1981:111–136.
17. Pour-Imani H., Kennefick D., Kennefick J., Davis B.L., Shields D.W., Abdeen M.S. Strong evidence for the density-wave theory of spiral structure in disk galaxies. *arXiv:1608.00969v1*. 2016.
18. Morozov A.G. *Fizika diskov = Disc physics*. Volgograd: Izd-vo VolGu, 2005:422. (In Russ.)
19. Fridman A.M. *Fizika galakticheskikh diskov = Physics of galactic disks*. Moscow: Fizmatlit, 2011:645. (In Russ.)
20. Baba J., Takayuki R.S., Keiichi W. Dynamics of Non-steady Spiral Arms in Disk Galaxies. *Astrophysical Journal*. 2013;763.1(46):1–14.
21. Sellwood J.A. New Developments in Spiral Structure Theory. *arXiv:1001.5430*. 2010.
22. Forgan D., Bonnell I., Lucas W., Rice K. Tensor classification of structure in smoothed particle hydrodynamics density fields. *arXiv:1601.02580v1*. 2016.
23. Zhuravlev V.M. Modeli dinamicheskogo ravnovesiya astrofizicheskikh obyektov. *Zhurnal eksperimentalnoi i teoreticheskoy fiziki*. 2022;162(6):850–877.
24. Zhuravlev V.M. Mass and rotation parameters of stars under conditions of dynamic equilibrium. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(3):107–145. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук,
профессор, научный сотрудник
лаборатории гравитации, космологии
и астрофизики, Ульяновский
государственный педагогический
университет имени И. Н. Ульянова
(Россия, г. Ульяновск, пл. Ленина, 4/5)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, researcher of the
laboratory of gravity, cosmology
and astrophysics, Ulyanovsk State
Pedagogical University named after
I.N. Ulyanov (4/5 Lenina square,
Ulyanovsk, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 01.07.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 27.08.2025

Принята к публикации / Accepted 10.09.2025

Анализ зависимостей времени релаксации от влияющих факторов в проводящих оксидах на основе $\text{SnO}_2:\text{Sb}$

Т. О. Зинченко¹, Е. А. Печерская², В. Д. Кревчик³,
И. А. Рубцов⁴, Д. В. Якушов⁵, В. С. Александров⁶

^{1,2,3,4,5,6}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹scar0243@gmail.com, ²peal@list.ru, ³physics@pnzgu.ru,

⁴rui2000@yandex.ru, ⁵hammer.fate@yandex.ru, ⁶vsalexrus@gmail.com

Аннотация. Актуальность и цели. Прозрачные проводящие оксиды на основе $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ представляют собой перспективный материал для создания прозрачных электродов в оптоэлектронных устройствах. Понимание механизмов проводимости и релаксации носителей заряда в этих материалах имеет большое значение для оптимизации их электрофизических свойств. Целью исследования является анализ зависимостей времени релаксации от концентрации электронов, проводимости и подвижности в $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ на основе использования различных методов интерполяции и аппроксимации, а также сопоставление полученных результатов с теорией Друде. Материалы и методы. Использованы результаты экспериментальных данных об электрофизических параметрах для образцов $\text{SnO}_2:\text{Sb}$, в том числе концентрации электронов (n), проводимости (σ), подвижности (μ) и времени релаксации (t). Для обработки данных применены три метода интерполяции: линейная интерполяция, интерполяция Акимы и кубический сплайн. Аппроксимация осуществлена методом наименьших квадратов с использованием полиномов первой степени. Результаты. Выполнен сравнительный анализ различных методов интерполяции для зависимостей времени релаксации от влияющих факторов. Установлено, что зависимость времени релаксации от подвижности хорошо описывается линейной интерполяцией, что соответствует теории Друде. Для остальных зависимостей времени релаксации наиболее подходящей является интерполяция Акимы, учитывающая нелинейный характер зависимостей. Кубический сплайн демонстрирует осцилляции в областях с резкими изменениями данных. Полученные результаты согласуются с результатами, полученными на основе теории Друде. Выводы. Результаты экспериментального исследования $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ хорошо согласуются с теорией Друде для описания электрофизических свойств прозрачных проводящих оксидов. Даны рекомендации по выбору метода интерполяции с учетом физической природы анализируемых зависимостей. Полученные результаты целесообразно использовать для оптимизации технологических режимов процесса получения $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ с заданными электрофизическими свойствами.

Ключевые слова: прозрачные проводящие оксиды, $\text{SnO}_2:\text{Sb}$, теория Друде, интерполяция Акимы, аппроксимация, время релаксации, кубический сплайн, линейная интерполяция

Финансирование: работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект «Синтез и исследование перспективных наноматериалов, покрытий и устройств электроники» № 124041700069-0.

Для цитирования: Зинченко Т. О., Печерская Е. А., Кревчик В. Д., Рубцов И. А., Якушов Д. В., Александров В. С. Анализ зависимостей времени релаксации от влияющих факторов в проводящих оксидах на основе $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ // Известия высших учеб-

ных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 106–118. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-8

Analysis of relaxation time dependences on influencing factors in conducting oxides based on SnO₂:Sb

T.O. Zinchenko¹, E.A. Pecherskaya², V.D. Krevchik³,
I.A. Rubtsov⁴, D.V. Yakushov⁵, V.S. Aleksandrov⁶

^{1,2,3,4,5,6}Penza State University, Penza, Russia

¹scar0243@gmail.com, ²pea1@list.ru, ³physics@pnzgu.ru,

⁴rui2000@yandex.ru, ⁵hammer.fate@yandex.ru, ⁶vsalexrus@gmail.com

Abstract. *Background.* Transparent conducting oxides (TCOs) based on SnO₂:Sb are promising materials for transparent electrodes in optoelectronic devices. Understanding the mechanisms of charge carrier conductivity and relaxation in these materials is crucial for optimizing their electrophysical properties. The purpose of this work is to analyze experimental data on the dependence of relaxation time on electron concentration, conductivity, and mobility in SnO₂:Sb using various interpolation and approximation methods, as well as to compare the obtained results with the Drude theory. *Materials and methods.* The study utilized experimental data on electron concentration (n), conductivity (σ), mobility (μ), and relaxation time (τ) for SnO₂:Sb samples. Three interpolation methods were applied for data processing: linear interpolation, Akima interpolation, and cubic spline. Approximation was performed using the least squares method with first-degree polynomials. The analysis accounted for the logarithmic nature of the dependencies for electron concentration and conductivity. *Results.* A comparative analysis of interpolation methods was conducted for three dependencies. It was found that the dependence of relaxation time on mobility is well described by linear interpolation, consistent with the Drude theory. For other relaxation time dependencies, Akima interpolation proved most suitable due to its ability to handle nonlinear trends. Cubic spline exhibited oscillations in regions with abrupt data changes. The results align with theoretical predictions of the Drude theory. *Conclusions.* Experimental data confirm the applicability of the Drude theory for describing the electrophysical properties of SnO₂:Sb. The choice of interpolation method should consider both the physical nature of the dependency and the characteristics of the experimental data. For linear dependencies, linear interpolation is optimal. For nonlinear dependencies, Akima interpolation is preferred. The findings can be used to optimize technological parameters for producing SnO₂:Sb with tailored electrophysical properties.

Keywords: transparent conducting oxides, SnO₂:Sb, Drude theory, Akima interpolation, approximation, relaxation time, cubic spline, linear interpolation

Financing: the work was supported by the grant of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation «Synthesis and research of promising nanomaterials, coatings and electronics devices» № 124041700069-0.

For citation: Zinchenko T.O., Pecherskaya E.A., Krevchik V.D., Rubtsov I.A., Yakushov D.V., Aleksandrov V.S. Analysis of relaxation time dependences on influencing factors in conducting oxides based on SnO₂:Sb. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(3):106–118. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-8

Введение

Прозрачные проводящие оксиды (ППО) представляют собой класс функциональных материалов, широко используемых в современной опто-

электронике [1, 2]. Среди них особое место занимает оксид олова (SnO_2), легированный сурьмой (Sb), который характеризуется высокой прозрачностью в видимой области спектра и хорошей электрической проводимостью. Понимание механизмов проводимости и релаксации носителей заряда в этих материалах имеет фундаментальное значение для разработки новых устройств и оптимизации их характеристик [3, 4].

Теория Друде, являющаяся одной из базовых моделей для описания электрофизических свойств проводящих материалов, связывает время релаксации носителей заряда с их подвижностью и концентрацией. В рамках указанной теории время релаксации τ определяется как среднее время между столкновениями носителей заряда с дефектами решетки и примесями. Для $\text{SnO}_2:\text{Sb}$, как и для других ППО, характерны сложные механизмы рассеяния носителей заряда, включающие рассеяние на ионизированных примесях, фононах, а также на границах зерен [5–8].

В данном исследовании выполнен анализ экспериментальных зависимостей времени релаксации от концентрации электронов, проводимости и подвижности в $\text{SnO}_2:\text{Sb}$. Для обработки данных использованы различные методы интерполяции и аппроксимации, что позволило получить более полное представление о характере зависимостей и их соответствии теоретической модели. Особое внимание уделено сравнению эффективности различных методов интерполяции (линейной, Акимы и кубического сплайна) для описания экспериментальных данных.

Актуальность исследования обусловлена необходимостью оптимизации электрофизических свойств $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ и потребностью в надежных методах обработки экспериментальных данных.

Материалы и методы

В теории Друде предполагается, что электроны совершают колебания в ответ на электрическую компоненту электромагнитного поля [6]. Так называемое уравнение движения Лоренца-осциллятора используется для описания положения, скорости и ускорения среднего электрона как функций времени и угловой частоты электромагнитного поля.

Дифференциальное уравнение движения колеблющихся электронов в одном измерении имеет вид

$$m^* \ddot{x} + \frac{m^*}{\tau} \dot{x} + Kx = eE(t), \quad (1)$$

где m^* и τ – эффективная масса и время релаксации электронов соответственно; K – восстанавливающая сила на единицу смещения между электронами и их ионными оставами; $E(t)$ – напряженность электрического поля.

Время релаксации электронов τ для прозрачных проводящих оксидов можно определить по формуле

$$\tau = \frac{\sigma \mu}{ne^2}, \quad (2)$$

где σ – проводимость; n – концентрация носителей заряда; e – заряд электрона; μ – подвижность носителей заряда.

Согласно выражению (2) выполнено моделирование зависимостей времени релаксации от следующих параметров покрытия: концентрации носителей заряда (рис. 1,*а*), проводимости покрытия (рис. 1,*б*), подвижности носителей заряда (рис. 1,*в*).

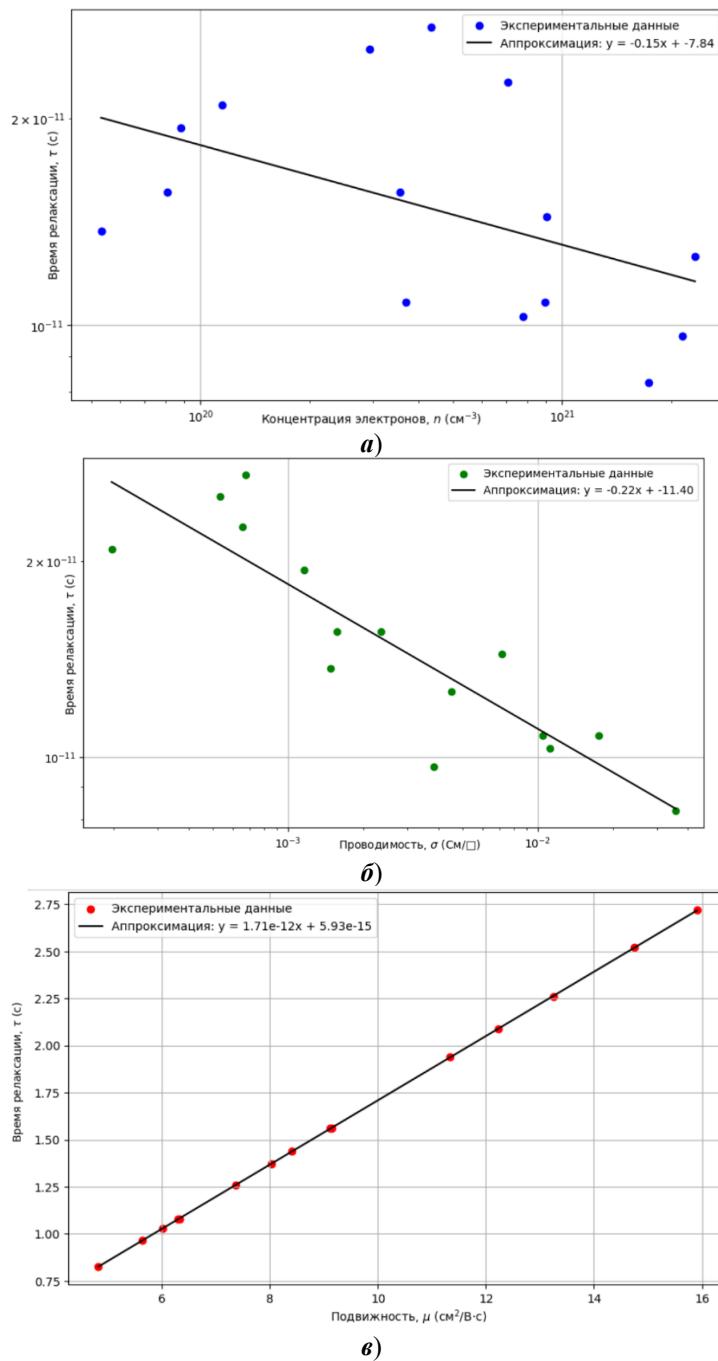


Рис. 1. Графики зависимостей времени релаксации от параметров покрытия:
 α – концентрации носителей заряда; β – проводимости покрытия;
 γ – подвижности носителей заряда

Время релаксации τ можно интерпретировать несколькими способами [7, 8]. Когда система электронов выводится из равновесия, τ представляет собой характерное время, за которое система возвращается в равновесие после удаления возмущающей силы. Его также можно рассматривать как интервал времени между последовательными случайными столкновениями электронов. В общем случае τ зависит от энергии электронов, что требует отдельного пояснения для прозрачных проводящих оксидов [7–9]. В рассматриваемом случае имеет место электрон-электронное рассеяние.

Для анализа полученных зависимостей (показаны точками на рис. 1) выполнена их аппроксимация и интерполяция.

Для зависимостей $\tau(n)$ и $\tau(\sigma)$ использована логарифмическая аппроксимация методом наименьших квадратов. В логарифмическом масштабе зависимость описывается полиномом первой степени:

$$\log_{10}(\tau) = a \log_{10}(x) + b, \quad (3)$$

где x – концентрация электронов n или проводимость σ ; a и b – коэффициенты аппроксимации. Коэффициенты определяются минимизацией суммы квадратов отклонений:

$$\min \sum (\log_{10}(\tau_i) - (a \cdot \log_{10}(x_i) + b))^2. \quad (4)$$

Для зависимости $\tau(\mu)$ применена линейная аппроксимация:

$$\tau = k\mu + b, \quad (5)$$

где k и b – коэффициенты аппроксимации, определяемые методом наименьших квадратов:

$$\min \sum (\tau_i - (k\mu_i + b))^2. \quad (6)$$

Для дискретного набора точек (x_i, y_i) линейная интерполяция в интервале $[x_i, x_{i+1}]$ определяется следующим образом:

$$y(x) = y_i + \frac{(y_{i+1} - y_i)(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}. \quad (7)$$

Для логарифмических зависимостей $\tau(n)$ и $\tau(\sigma)$ интерполяция выполняется в логарифмическом масштабе:

$$\log_{10}(\tau(x)) = \log_{10}(\tau_i) + \frac{(\log_{10}(\tau_{i+1}) - \log_{10}(\tau_i))(\log_{10}(x) - \log_{10}(x_i))}{(\log_{10}(x_{i+1}) - \log_{10}(x_i))}. \quad (8)$$

Интерполяция Акимы использует кубические полиномы с особым выбором коэффициентов. Для набора точек (x_i, y_i) в интервале $[x_i, x_{i+1}]$ интерполированная функция имеет следующий вид:

$$y(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (9)$$

Коэффициенты a_i , b_i , c_i , d_i определяются из условий непрерывности функции, непрерывности первой производной и специального выбора наклонов в узлах интерполяции.

Для логарифмических зависимостей интерполяция выполняется в логарифмическом масштабе:

$$\begin{aligned} \log_{10}(\tau(x)) = & a_i (\log_{10}(x) - \log_{10}(x_i))^3 + \\ & + b_i (\log_{10}(x) - \log_{10}(x_i))^2 + c_i (\log_{10}(x) - \log_{10}(x_i)) + d_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Кубический сплайн представляет собой кусочную функцию, состоящую из кубических полиномов. В каждом интервале $[x_i, x_{i+1}]$ функция имеет вид

$$y(x) = a_i (x - x_i)^3 + b_i (x - x_i)^2 + c_i (x - x_i) + d_i. \quad (11)$$

Коэффициенты определяются из условий непрерывности функции, непрерывности первой производной, непрерывности второй производной и естественных граничных условий.

Для логарифмических зависимостей имеет место следующее выражение:

$$\begin{aligned} \log_{10}(\tau(x)) = & a_i (\log_{10}(x) - \log_{10}(x_i))^3 + \\ & + b_i (\log_{10}(x) - \log_{10}(x_i))^2 + c_i (\log_{10}(x) - \log_{10}(x_i)) + d_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Результаты

В табл. 1 представлены полученные параметры, оказывающие влияние на времена релаксации согласно теории Друде. Данные указаны для 15 образцов ППО на основе SnO₂:Sb, полученных методом спрей-пиролиза.

Таблица 1
Параметры, оказывающие влияние на времена релаксации
для 15 образцов ППО на основе SnO₂:Sb согласно теории Друде

Образец	σ (См/□)	τ (с)	n (см ⁻³)	μ (см ² /(В·с))
1	$1,48 \cdot 10^{-3}$	$1,37 \cdot 10^{-11}$	$5,31 \cdot 10^{19}$	8,03
2	$1,57 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-11}$	$8,11 \cdot 10^{19}$	9,15
3	$2,35 \cdot 10^{-3}$	$1,56 \cdot 10^{-11}$	$3,56 \cdot 10^{20}$	9,12
4	$7,19 \cdot 10^{-3}$	$1,44 \cdot 10^{-11}$	$9,04 \cdot 10^{20}$	8,41
5	$1,12 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^{-11}$	$7,79 \cdot 10^{20}$	6,02
6	$4,52 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-11}$	$2,33 \cdot 10^{21}$	7,38
7	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,08 \cdot 10^{-11}$	$3,7 \cdot 10^{20}$	6,31
8	$1,75 \cdot 10^{-2}$	$1,08 \cdot 10^{-11}$	$8,98 \cdot 10^{20}$	6,34
9	$3,57 \cdot 10^{-2}$	$8,26 \cdot 10^{-12}$	$1,73 \cdot 10^{21}$	4,83
10	$3,82 \cdot 10^{-3}$	$9,65 \cdot 10^{-12}$	$2,15 \cdot 10^{21}$	5,64
11	$6,54 \cdot 10^{-4}$	$2,26 \cdot 10^{-11}$	$7,08 \cdot 10^{20}$	13,25
12	$1,16 \cdot 10^{-3}$	$1,94 \cdot 10^{-11}$	$8,83 \cdot 10^{19}$	11,34
13	$1,96 \cdot 10^{-4}$	$2,09 \cdot 10^{-11}$	$1,15 \cdot 10^{20}$	12,24
14	$5,33 \cdot 10^{-4}$	$2,52 \cdot 10^{-11}$	$2,93 \cdot 10^{20}$	14,75
15	$6,78 \cdot 10^{-4}$	$2,72 \cdot 10^{-11}$	$4,33 \cdot 10^{20}$	15,91

Для зависимости времени релаксации от концентрации носителей заряда (см. рис. 1, *а*) с помощью аппроксимации получены следующие значения коэффициентов: коэффициент наклона $a = -0,15 \pm 0,02$; свободный член $b = -10,8 \pm 0,1$; коэффициент детерминации $R^2 = 0,82$.

Полученная зависимость показывает слабую отрицательную корреляцию между временем релаксации и концентрацией электронов, что согласуется с теорией рассеяния на ионизированных примесях [9–12].

Для зависимости времени релаксации от проводимости покрытия (см. рис. 1, *б*) посредством аппроксимации получены следующие значения коэффициентов: коэффициент наклона $a = 0,45 \pm 0,03$; свободный член $b = -11,2 \pm 0,1$; коэффициент детерминации $R^2 = 0,89$.

Полученная положительная корреляция между τ и σ соответствует теоретическим представлениям теории Друде [6–8].

Для зависимости времени релаксации от подвижности носителей заряда (см. рис. 1, *в*) с помощью аппроксимации получены следующие параметры: коэффициент наклона $k = (1,45 \pm 0,05) \cdot 10^{-12} \text{ с} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{В}$; свободный член $b = (0,15 \pm 0,05) \cdot 10^{-12} \text{ с}$; коэффициент детерминации $R^2 = 0,95$.

Сильная положительная корреляция между τ и μ полностью соответствует формуле (2), полученной согласно теории Друде.

На рис. 2–4 представлены результаты интерполяции зависимостей времени релаксации от параметров покрытия разными методами.

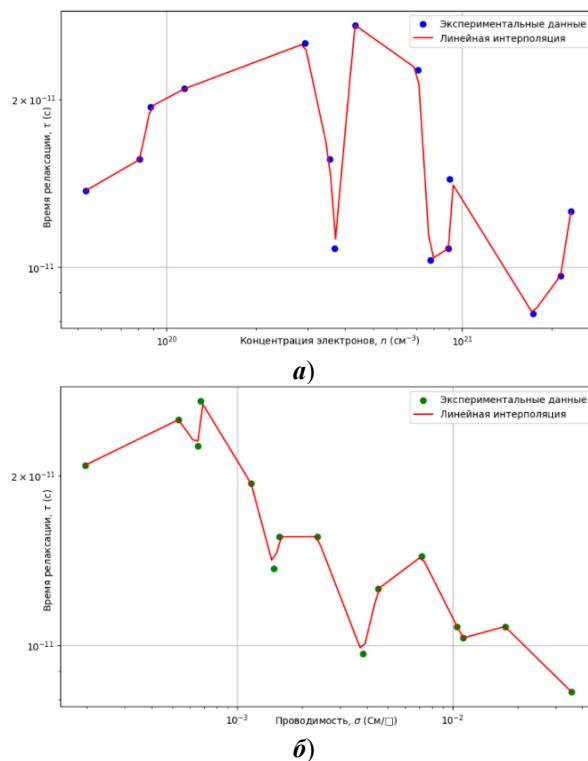
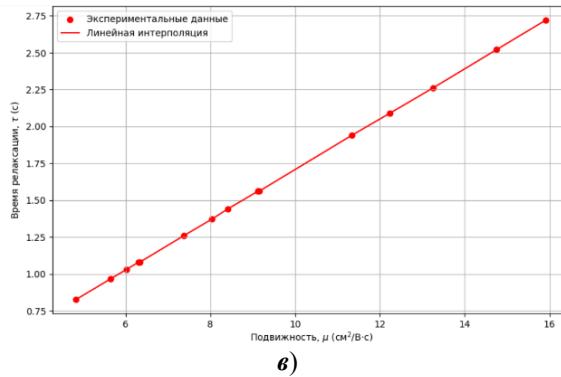
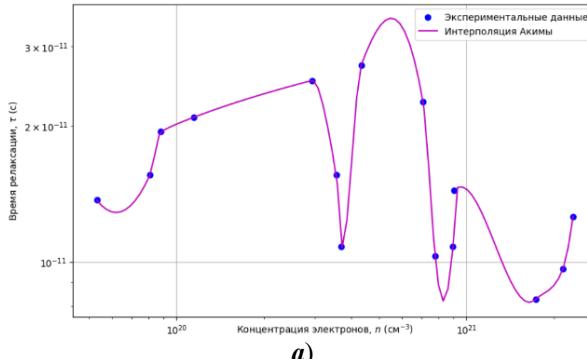


Рис. 2. Линейная интерполяция зависимости времени релаксации от параметров покрытия: *а* – концентрации носителей заряда; *б* – проводимости покрытия; *в* – подвижности носителей заряда

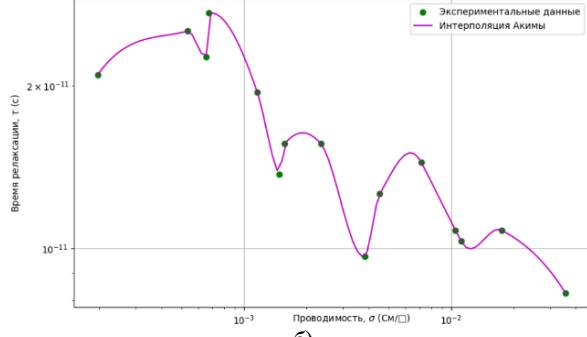


б)

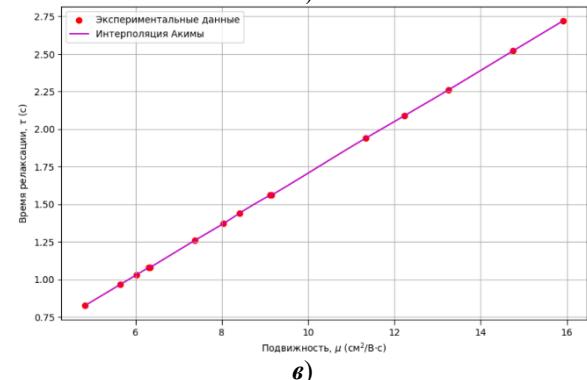
Рис. 2. Окончание



а)



б)



в)

Рис. 3. Интерполяция Акимы зависимости времени релаксации от параметров покрытия: а – концентрации носителей заряда; б – проводимости покрытия; в – подвижности носителей заряда

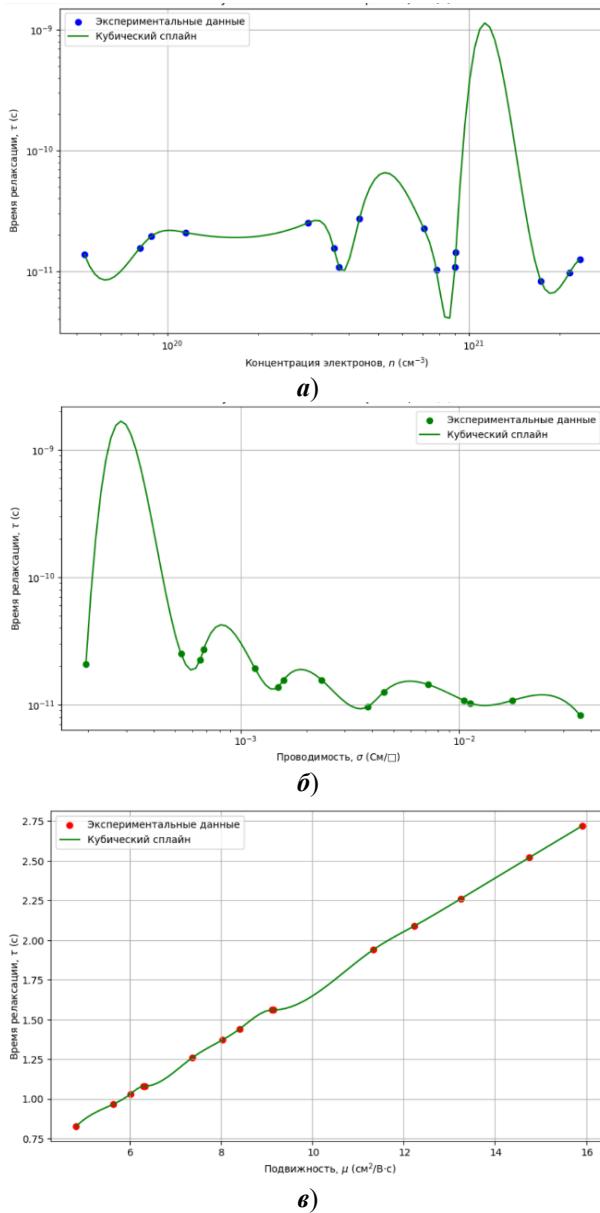


Рис. 4. Интерполяция кубическим сплайном зависимости времени релаксации от параметров покрытия: *а* – концентрации носителей заряда; *б* – проводимости покрытия; *в* – подвижности носителей заряда

Выполнен анализ методов интерполяции с точки зрения соответствия теории Друде (физическая интерпретируемость результатов – коэффициент детерминации) и точности (среднеквадратичное отклонение). Результаты представлены в табл. 2.

Сравнительный анализ показал, что выбор метода интерполяции должен учитывать физическую природу исследуемой зависимости [7, 8, 13, 14]. Для $\text{SnO}_2:\text{Sb}$ оптимальным является комбинированный подход: линейная интерполяция для зависимости времени релаксации от подвижности носителей

заряда и интерполяция Акимы для зависимости времени релаксации от проводимости покрытия и от концентрации носителей заряда. Описанный подход к выбору метода интерполяции обеспечивает наиболее адекватное и физически интерпретируемое описание электрофизических свойств материала в рамках теории Друде.

Таблица 2
Анализ методов интерполяции

Метод интерполяции	Зависимость времени релаксации от влияющих параметров	Коэффициент детерминации	Среднеквадратичное отклонение
Линейная интерполяция	от концентрации носителей заряда	0,85	0,12
	от проводимости покрытия	0,88	0,10
	от подвижности носителей заряда	0,94	0,08
Интерполяция Акимы	от концентрации носителей заряда	0,87	0,11
	от проводимости покрытия	0,90	0,09
	от подвижности носителей заряда	0,95	0,07
Интерполяция кубическим сплайном	от концентрации носителей заряда	0,86	0,11
	от проводимости покрытия	0,89	0,10
	от подвижности носителей заряда	0,94	0,08

Заключение

Экспериментальные данные подтверждают применимость теории Друде для описания электрофизических свойств $\text{SnO}_2:\text{Sb}$, поскольку полученные зависимости полностью согласуются с теорией Друде.

Наблюдается сильная положительная корреляция между временем релаксации и подвижностью. Зависимость времени релаксации от подвижности носителей заряда демонстрирует линейный характер, что соответствует теоретическим представлениям. Полученные результаты позволяют оценить механизмы рассеяния. Установлена слабая отрицательная корреляция между временем релаксации и концентрацией электронов, что свидетельствует о преобладании рассеяния на ионизированных примесях.

Также наблюдается положительная корреляция между временем релаксации и проводимостью, что подтверждает доминирование электрон-ионного взаимодействия. Также отметим, что линейная интерполяция оптимальна для зависимости времени релаксации от подвижности носителей заряда из-за линейного характера зависимости. Интерполяция Акимы лучше описывает зависимость времени релаксации от проводимости покрытия и от концентрации носителей заряда благодаря учету нелинейности. Кубический сплайн демонстрирует осцилляции в областях резких изменений.

Список литературы

1. Lee J., Kang Y., Jung I. H. Key phase diagram experiment of the ZnO-SnO₂ system and thermodynamic modeling of the ZnO-SnO₂-TiO₂ system // Physics and Chemistry of Minerals. 2025. Vol. 52. doi: 10.1007/s00269-024-01308-2
2. Pecherskaya E. A., Zinchenko T. O., Golubkov P. E., Karpanin O. V., Gurin S. A., Novichkov M. D. Analysis of the Influence of Technological Parameters on the Properties of Transparent Conductive Oxides // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2024. Vol. 58, № 3. P. 798–806.
3. Zhang Zh. Transparent electrodes in neuroscience: Review // Science and Technology of Engineering, Chemistry and Environmental Protection. 2024. Vol. 1. doi: 10.61173/frabhk26
4. Jeon T. I., Grischkowsky D., Mukherjee A. K., Menon R. Electrical characterization of conducting polypyrrole by THz time-domain spectroscopy // Applied Physics Letters – APPL PHYS LETT. 2000. Vol. 77. doi: 10.1063/1.1319188
5. Pecherskaya E. A., Semenov A. D., Zinchenko T. O., Gurin S. A., Konovalov S. V., Novichkov M. D., Shepeleva A. E., Tuzova D. E. Calculation of the spray supply system characteristics for obtaining film material by spray-pyrolysis // Vacuum. 2025. Vol. 234. P. 114100. doi: 10.1016/j.vacuum.2025.114100
6. Drude P. Zur Elektronentheorie der Metalle // Annalen der Physik. 1900. Vol. 306, № 3. P. 566–613. doi: 10.1002/andp.19003060312
7. Coutts T. J., Young D., Li X. Characterization of Transparent Conducting Oxides // MRS Bulletin. 2000. Vol. 25. doi: 10.1557/mrs2000.152
8. Suh K. S., Okada H., Wakahara A., Chang H., Kim H., Yoshida A. Transparent Conducting ZnO Films on Polymer Substrates by Pulsed Laser Deposition // Key Engineering Materials. 2004. Vol. 270–273. P. 878–883. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.270-273.878
9. Stadler A. Transparent Conducting Oxides – An Up-To-Date Overview // Materials. 2012. Vol. 5. P. 661–683. doi: 10.3390/ma5040661
10. Pecherskaya E. A., Semenov A. D., Zinchenko T. O., Danilov A. A., Tuzova D. E. The system of automatic control of the substrate temperature as part of the installation for the production of film material by spray pyrolysis // Measurement Techniques. 2024. Vol. 67, № 5. P. 377–385.
11. Szindler M., Łukaszewicz K., Matus K., Nosidlak N., Jaglarz J., Fijałkowski M., Nuckowski P. The ITO thin films deposited by magnetron sputtering for solar cell applications. 2024. Vol. 75. P. e150803. doi: 10.24425/bpasts.2024.150803
12. Yusuf A., Abubakar A., Mohammed I., Ahmadu U., Isah K. A Review of Coating Tin Oxide Electron Transport Layers for Optimizing the Performance of Perovskite Solar Cells // Chemistry of Inorganic Materials. 2025. Vol. 6. P. 100100. doi: 10.1016/j.cinorg.2025.100100
13. Woods-Robinson R., Broberg D., Faghaninia A., Jain A., Dwaraknath Sh., Persson K. Assessing High-Throughput Descriptors for Prediction of Transparent Conductors // Chemistry of Materials. 2018. Vol. 30. doi: 10.1021/acs.chemmater.8b03529
14. Coulter J. E., Birnie D. P. Assessing Tauc Plot Slope Quantification: ZnO Thin Films as a Model System // Physica Status Solidi (b). 2017. Vol. 255. P. 1700393. doi: 10.1002/pssb.201700393

References

1. Lee J., Kang Y., Jung I. H. Key phase diagram experiment of the ZnO-SnO₂ system and thermodynamic modeling of the ZnO-SnO₂-TiO₂ system. *Physics and Chemistry of Minerals*. 2025;52. doi: 10.1007/s00269-024-01308-2
2. Pecherskaya E. A., Zinchenko T. O., Golubkov P. E., Karpanin O. V., Gurin S. A., Novichkov M. D. Analysis of the Influence of Technological Parameters on the Properties

- of Transparent Conductive Oxides. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. 2024;58(3):798–806.
- 3. Zhang Zh. Transparent electrodes in neuroscience: Review. *Science and Technology of Engineering, Chemistry and Environmental Protection*. 2024;1. doi: 10.61173/frabhk26
 - 4. Jeon T.I., Grischkowsky D., Mukherjee A.K., Menon R. Electrical characterization of conducting polypyrrole by THz time-domain spectroscopy. *Applied Physics Letters – APPL PHYS LETT*. 2000;77. doi: 10.1063/1.1319188
 - 5. Pecherskaya E.A., Semenov A.D., Zinchenko T.O., Gurin S.A., Konovalov S.V., Novichkov M.D., Shepeleva A.E., Tuzova D.E. Calculation of the spray supply system characteristics for obtaining film material by spray-pyrolysis. *Vacuum*. 2025;234:114100. doi: 10.1016/j.vacuum.2025.114100
 - 6. Drude P. Zur Elektronentheorie der Metalle. *Annalen der Physik*. 1900;306(3):566–613. doi: 10.1002/andp.19003060312
 - 7. Coutts T.J., Young D., Li X. Characterization of Transparent Conducting Oxides. *MRS Bulletin*. 2000;25. doi: 10.1557/mrs2000.152
 - 8. Suh K.S., Okada H., Wakahara A., Chang H., Kim H., Yoshida A. Transparent Conducting ZnO Films on Polymer Substrates by Pulsed Laser Deposition. *Key Engineering Materials*. 2004;270–273:878–883. doi: 10.4028/www.scientific.net/KEM.270-273.878
 - 9. Stadler A. Transparent Conducting Oxides – An Up-To-Date Overview. *Materials*. 2012;5:661–683. doi: 10.3390/ma5040661
 - 10. Pecherskaya E.A., Semenov A.D., Zinchenko T.O., Danilov A.A., Tuzova D.E. The system of automatic control of the substrate temperature as part of the installation for the production of film material by spray pyrolysis. *Measurement Techniques*. 2024;67(5):377–385.
 - 11. Szindler M., Łukaszkowicz K., Matus K., Nosidlak N., Jaglarz J., Fijałkowski M., Nuckowski P. *The ITO thin films deposited by magnetron sputtering for solar cell applications*. 2024;75:e150803. doi: 10.24425/bpasts.2024.150803
 - 12. Yusuf A., Abubakar A., Mohammed I., Ahmadu U., Isah K. A Review of Coating Tin Oxide Electron Transport Layers for Optimizing the Performance of Perovskite Solar Cells. *Chemistry of Inorganic Materials*. 2025;6:100100. doi: 10.1016/j.cinorg.2025.100100
 - 13. Woods-Robinson R., Broberg D., Faghaninia A., Jain A., Dwaraknath Sh., Persson K. Assessing High-Throughput Descriptors for Prediction of Transparent Conductors. *Chemistry of Materials*. 2018;30. doi: 10.1021/acs.chemmater.8b03529
 - 14. Coulter J.E., Birnie D.P. Assessing Tauc Plot Slope Quantification: ZnO Thin Films as a Model System. *Physica Status Solidi (b)*. 2017;255:1700393. doi: 10.1002/pssb.201700393

Информация об авторах / Information about the authors

Тимур Олегович Зинченко

кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры информационно-измерительной техники и метрологии, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: scar0243@gmail.com

Timur O. Zinchenko

Candidate of engineering sciences, senior lecturer of the sub-department of information and measuring technology and metrology, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Екатерина Анатольевна Печерская
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой информационно-
измерительной техники и метрологии,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: peal@list.ru

Владимир Дмитриевич Кревчик
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
физики, декан факультета
информационных технологий
и электроники, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Илья Александрович Рубцов
аспирант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: rui2000@yandex.ru

Дмитрий Викторович Якушов
аспирант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: hammer.fate@yandex.ru

Владимир Сергеевич Александров
магистрант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: vsalexrus@gmail.com

Ekaterina A. Pecherskaya
Doctor of engineering sciences, professor,
head of the sub-department of information
and measuring technology and metrology,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Vladimir D. Krevchik
Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of physics, dean of the
faculty of information technology
and electronics, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Ilya A. Rubtsov
Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Dmitriy V. Yakushov
Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Vladimir S. Aleksandrov
Master's degree student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 17.07.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 28.08.2025

Принята к публикации / Accepted 02.09.2025

УДК 539.215.2
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-9

Модификация гранулометрического состава ультрадисперсных порошков серебра

К. Н. Нищев¹, М. И. Новопольцев², С. Г. Кострюков³,
А. А. Пыненков⁴, Е. Н. Лютова⁵, Е. В. Безрукова⁶

^{1,2,3,4,5,6}Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва, Саранск, Россия

¹nishchev@inbox.ru, ²novopol@inbox.ru, ³kostryukov_sg@mail.ru,
⁴alekspyn@yandex.ru, ⁵ekat.lyutova@yandex.ru, ⁶tadaakiyattsu@gmail.com

Аннотация. Актуальность и цели. В современном производстве приборов силовой электроники для низкотемпературного соединения их конструкционных элементов применяется технология спекания (синтеринга) с использованием специальных паст на основе ультрадисперсных порошков серебра. Ключевой проблемой при изготовлении таких паст является агломерация частиц серебра в порошке. Цель – разработка способов модификации гранулометрического состава порошков серебра, приводящих к увеличению в них доли субмикронных частиц. Материалы и методы. Проведено исследование ультрадисперсного порошка серебра отечественного производства. Гранулометрический состав порошка определялся методом лазерной дифракции с использованием гранулометра SALD-3101. Для измерений изготавливались суспензии исследуемого порошка в изопропиловом спирте с концентрациями 50 мкг/мл и 75 мг/мл. Суспензии подвергались обработке ультразвуком частотой 35 кГц в ультразвуковой ванне ПСБ-5735-05. Результаты. Установлено, что исходный порошок серебра состоял из двух фракций частиц размером от 0,5 до 2,0 мкм и от 10 до 500 мкм. В результате ультразвуковой (УЗ) обработки низкоконцентрированной суспензии порошка (50 мкг/мл) в течение 80 мин объемная доля частиц субмикронной фракции повышается с 18 до 60 %. Длительная (4 ч и более) УЗ-обработка высококонцентрированной суспензии (75 мг/мл) не приводит к появлению в ней частиц серебра размером менее 1 мкм. Такие частицы появляются в суспензии при добавлении в нее миристиновой кислоты в качестве диспергатора с последующей УЗ-обработкой. Разбавление суспензии изопропиловым спиртом до концентрации 50 мкг/мл с последующей УЗ-обработкой позволяет увеличить объемную долю частиц серебра размером менее 1 мкм до 70 %. Выводы. Разработан способ модификации гранулометрического состава ультрадисперсных порошков серебра, позволяющий увеличить объемную долю субмикронных частиц до 70 %.

Ключевые слова: ультрадисперсный порошок серебра, гранулометрический состав, агломерация, диспергатор, миристиновая кислота, ультразвуковая обработка

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FZRS-2025-0002) в рамках государственного задания ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва».

Для цитирования: Нищев К. Н., Новопольцев М. И., Кострюков С. Г., Пыненков А. А., Лютова Е. Н., Безрукова Е. В. Модификация гранулометрического состава ультрадисперсных порошков серебра // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 119–131. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-9

Modification of granulometric composition of ultrafine silver powders

K.N. Nishchev¹, M.I. Novopol'tsev², S.G. Kostryukov³,
A.A. Pynenkov⁴, E.N. Lyutova⁵, E.V. Bezrukova⁶

^{1,2,3,4,5,6}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia

¹nishchev@inbox.ru, ²novopol@inbox.ru, ³kostryukov_sg@mail.ru,
⁴alekspyn@yandex.ru, ⁵ekat.lyutova@yandex.ru, ⁶tadaakiyattsu@gmail.com

Abstract. *Background.* In the modern production of power electronics devices, sintering technology is used for low-temperature connection of their structural elements using special pastes based on ultrafine silver powders. The key problem in the manufacture of such pastes is the agglomeration of silver particles in the powder. The purpose of the work was to develop methods for modifying the granulometric composition of silver powders, leading to an increase in the proportion of submicron particles in them. *Materials and methods.* The work investigated ultrafine silver powder of domestic production. The granulometric composition of the powder was determined by laser diffraction using a SALD-3101 granulometer. For measurements, suspensions of the studied powder in isopropyl alcohol with concentrations of 50 $\mu\text{g}/\text{ml}$ and 75 mg/ml were prepared. Suspensions were subjected to ultrasonic treatment at a frequency of 35 kHz in a PSB-5735-05 ultrasonic bath. *Results.* It was found that the original silver powder consisted of two fractions of particles with sizes from 0.5 to 2.0 μm and from 10 to 500 μm . As a result of ultrasonic (US) treatment of a low-concentration powder suspension (50 $\mu\text{g}/\text{ml}$) for 80 minutes, the volume fraction of submicron fraction particles increased from 18 to 60%. Long-term (4 hours or more) US treatment of a highly concentrated suspension (75 mg/ml) did not result in the appearance of silver particles smaller than 1 μm in it. Such particles appeared in the suspension upon addition of myristic acid as a dispersant, followed by US-treatment. Dilution of the suspension with isopropyl alcohol to a concentration of 50 $\mu\text{g}/\text{ml}$, followed by US-treatment, made it possible to increase the volume fraction of silver particles with sizes less than 1 μm to 70%. *Conclusions.* A method has been developed for modifying the granulometric composition of ultrafine silver powders, which makes it possible to increase the volume fraction of submicron particles to 70%.

Keywords: ultrafine silver powder, granulometric composition, agglomeration, dispersant, myristic acid, ultrasonic treatment

Financing: this work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (scientific topic code FZRS-2025-0002) (scientific topic code FZRS-2025-0002) as part of the state assignment of the Ogarev Mordovia State University.

For citation: Nishchev K.N., Novopol'tsev M.I., Kostryukov S.G., Pynenkov A.A., Lyutova E.N., Bezrukova E.V. Modification of granulometric composition of ultrafine silver powders. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(3):119–131. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-9

Введение

Основные параметры силовых полупроводниковых приборов (СПП) и их надежность определяются не только свойствами полупроводниковых структур, но и в значительной степени технологией соединения функциональных и конструкционных элементов СПП. В настоящее время в силовой электронике для соединения функциональных и конструкционных элементов приборов широко используется технология низкотемпературного спекания (*Low-Temperature Joint Technique – LTJT*) [1–3]. *LTJT* представляет собой технологический способ соединения электрически активной кремниевой струк-

туры с металлическим или композитным термокомпенсатором (обеспечивающим передачу тепловых потерь от кремниевой структуры к охладителю) путем их спекания (синтеринга) с использованием специальных серебросодержащих паст. При этом температура синтеринга и прилагаемое давление определяются составом пасты и условиями ее приготовления. Получаемая в результате спекания структура является основным активным полупроводниковым элементом, определяющим выходные электрические и тепловые характеристики СПП. Полупроводниковые элементы СПП должны одновременно обладать минимальными электрическими и тепловыми сопротивлениями, низкой индуктивностью, способностью эффективно отводить возникающие в кремниевых полупроводниковых структурах потери мощности без заметной разницы температур на полупроводниковом элементе и поверхности корпуса. Кроме того, межэлементные соединения должны обеспечивать механическую прочность приборам в широком диапазоне температур и циклических нагрузках мощности. Качество межэлементных соединений в конечном счете определяется свойствами серебросодержащей пасты, используемой для соединения элементов конструкции СПП методом низкотемпературного спекания. Поэтому разработка технологии получения серебросодержащих паст с заданными эксплуатационными характеристиками является актуальной задачей современной силовой электроники.

Многочисленными исследованиями, проведенными ранее, установлено, что одной из ключевых проблем при получении мелкодисперсных серебросодержащих паст является агломерация частиц порошка серебра, негативно влияющая на свойства получаемой пасты. В связи с этим целью настоящей работы являлась разработка способов модификации гранулометрического состава ультрадисперсных порошков серебра, используемых при получении серебросодержащих паст для низкотемпературного соединения элементов силовых полупроводниковых приборов.

Материалы и методы

В настоящей работе в качестве исследуемого использовался ультрадисперсный порошок серебра, полученный методом электрического взрыва проводника [4]. Согласно экспериментальным данным [5, 6], ультрадисперсные порошки, получаемые методом электрического взрыва проволоки, обладают значительной избыточной энергией. Например, порошки алюминия со средним размером частиц 500–800 нм имеют избыточную энергию 100–200 кДж/моль, а порошки серебра со средним размером частиц порядка 120 нм обладают избыточной энергией 40–80 кДж/моль, что в несколько раз превышает теплоту плавления массивного вещества.

По данным производителя, массовые доли фракций порошка составляют: 100 % с размерами частиц менее 400 нм; 90 % с размерами частиц менее 300 нм и 50 % с размерами частиц менее 120 нм. При хранении в таких порошках серебра образуются агломераты размером до сотен микрон, которые впоследствии могут препятствовать однородному смешиванию пасты, изготовленной на их основе.

Гранулометрический состав исследуемых порошков серебра определялся методом лазерной дифракции с использованием гранулометра SALD-3101. Для проведения гранулометрических измерений приготавливались суспензии исследуемого порошка в изопропиловом спирте с концентрацией

50 мкг/мл и 75 мг/мл. Приготовленные суспензии подвергались обработке ультразвуком частотой 35 кГц в ультразвуковой ванне ПСБ-5735-05м с генератором мощностью 150 Вт.

Ультразвуковые волны, воздействуя на суспензию, создают в ней кавитацию, акустические течения и другие эффекты, которые способствуют разрушению агрегатов частиц, повышению однородности смеси и ускорению различных процессов, протекающих в суспензии. Кавитация создает микроскопические пузырьки, которые при схлопывании генерируют локальные ударные волны и силы сдвига. Эти силы разрушают агломераты твердых частиц, разделяя их на более мелкие частицы и равномерно распределяя их в жидкости.

Результаты и обсуждение

На первом этапе исследований определялось влияние ультразвуковой (УЗ) обработки на гранулометрический состав исходного порошка серебра. Гранулометрический состав порошков представляют обычно в виде интегральной (кумулятивной) зависимости объемной доли частиц порошка $Q_3(D)$ от их диаметра D . Наряду с интегральной дополнительно приводят дифференциальную кривую распределения частиц по их размерам $p_3(D)$.

На рис. 1 представлены результаты измерения гранулометрического состава суспензии исходного порошка серебра в изопропиловом спирте с концентрацией 50 мкг/мл.

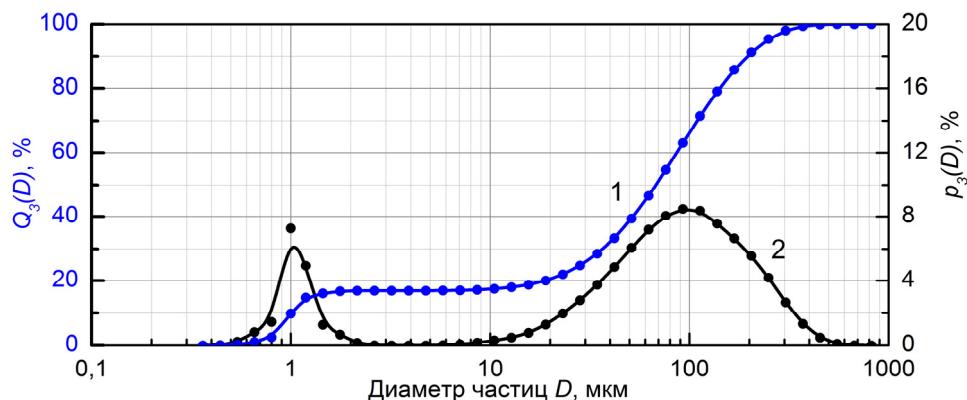


Рис. 1. Гранулометрический состав суспензии исходного порошка серебра в изопропиловом спирте. Концентрация суспензии – 50 мкг/мл; кривая 1 – $Q_3(D)$, кривая 2 – $p_3(D)$

Из рис. 1 следует, что гранулометрический состав исходного порошка включал в себя две фракции частиц. В первую (субмикронную) фракцию входили частицы размером от 0,5 до 2 мкм. Их объемная доля составляла 18 %. Другая (крупноразмерная) фракция содержала частицы размером от 10 до 500 мкм. Обе фракции представляли собой агломераты более мелких частиц серебра. На рис. 2 приведены изображения поверхности исследуемого исходного порошка, полученные с помощью растрового электронного микроскопа (РЭМ).

На рис. 3 приведены результаты измерений гранулометрического состава суспензии исходного порошка серебра в изопропиловом спирте после

ее УЗ-обработки в течение 80 мин. Концентрация исследуемой суспензии составляла 50 мкг/мл.

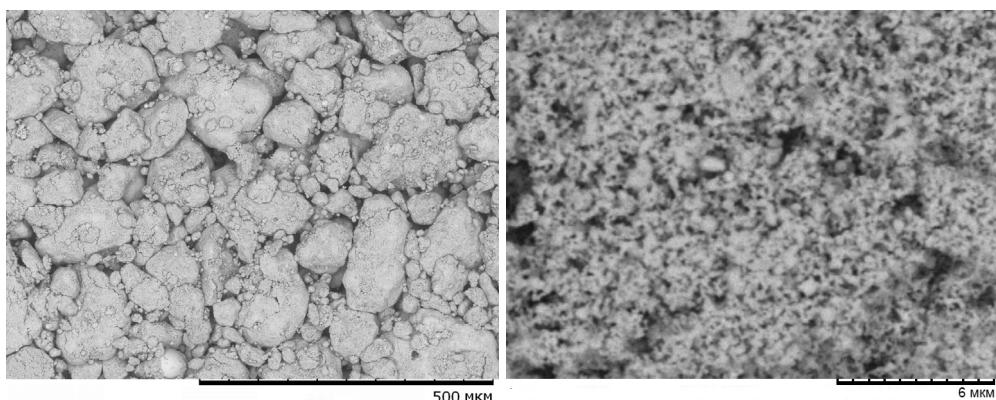


Рис. 2. РЭМ-изображения поверхности агломератов исходного порошка серебра

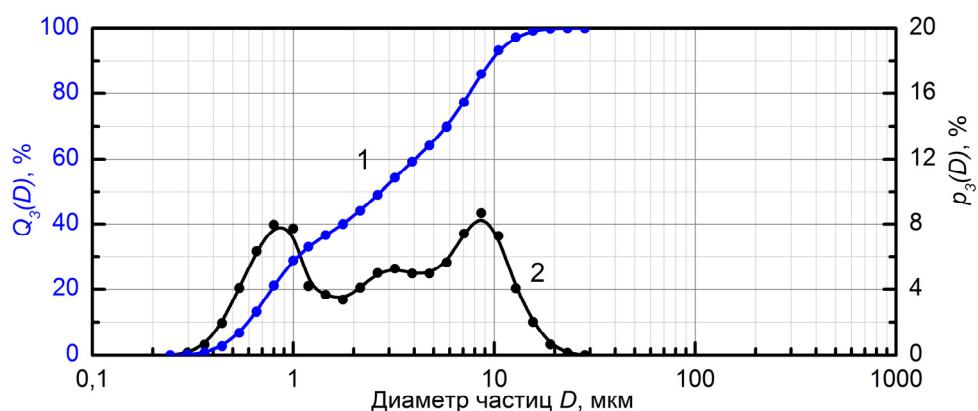


Рис. 3. Гранулометрический состав суспензии исходного порошка серебра в изопропиловом спирте после УЗ-обработки в течение 80 мин; концентрация суспензии – 50 мкг/мл; кривая 1 – $Q_3(D)$, кривая 2 – $p_3(D)$

Из рис. 3 следует, что в результате УЗ-обработки суспензии в течение 80 мин размер наиболее мелких частиц субмикронной фракции уменьшался с 500 до 300 нм. При этом доля частиц размером менее 2 мкм увеличивалась до 42 %, а ранее наблюдавшаяся крупноразмерная фракция частиц полностью исчезала и появлялась новая (микронная) фракция частиц размером от 2 до 30 мкм. Дальнейшее увеличение длительности УЗ-обработки суспензии не приводило к существенному изменению ее гранулометрического состава. РЭМ-изображения агломератов частиц серебра, образовавшихся в результате такой обработки, приведены на рис. 4.

Представленные экспериментальные результаты подтверждают, что крупные частицы исходного порошка серебра размером от 10 до 500 мкм представляли собой агломераты более мелких частиц.

В оптических гранулометрических измерениях обычно используют сильно разбавленные суспензии. В наших измерениях для определения гранулометрического состава исходного порошка использовались суспензии

с концентрацией 50 мкг/мл. Высоконаполненные серебросодержащие пасты, используемые для соединения функциональных элементов силовых полупроводниковых приборов, представляют собой высококонцентрированные суспензии, содержащие в своем составе более 70 масс.% частиц порошка серебра. Поэтому в настоящей работе исследовалось влияние УЗ-обработки на гранулометрический состав порошка серебра в виде его суспензии в изопропиловом спирте с концентрацией 75 мг/мл.

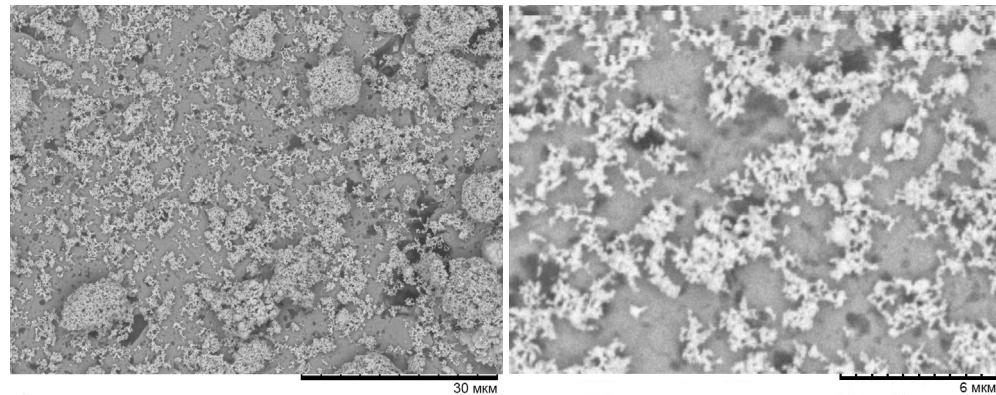


Рис. 4. РЭМ-изображения агломератов исходного порошка серебра, подвергнутого УЗ-обработке в изопропиловом спирте в течение 80 мин

В результате проведенных исследований было установлено (рис. 5), что в высоконаполненных суспензиях, даже после их длительной (в течение 4 ч и более) УЗ-обработки, фракция частиц серебра размером менее 1 мкм не возникала. В гранулометрическом составе таких суспензий были зарегистрированы лишь частицы размером от 6 до 60 мкм. Это может быть объяснено тем, что с увеличением концентрации частиц твердой фазы в суспензии снижается диспергирующая способность УЗ-обработки, так как при высокой концентрации (более 10 масс.%) кавитационные эффекты ослабевают из-за поглощения энергии частицами [7].

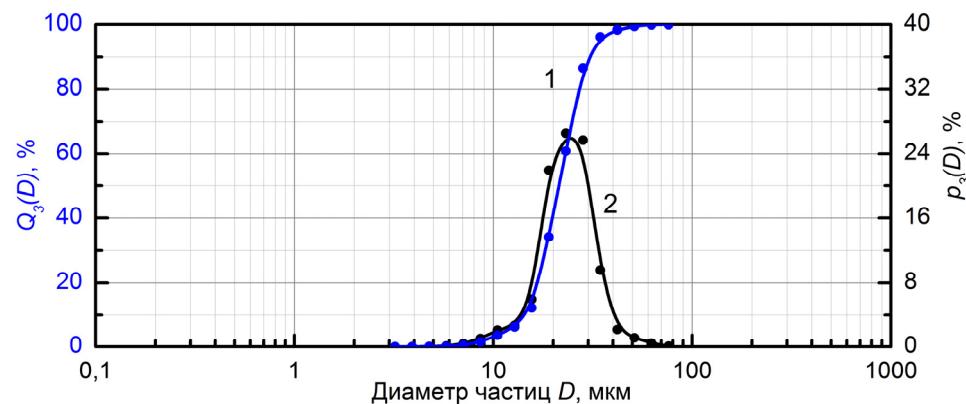


Рис. 5. Гранулометрический состав исходного порошка серебра в суспензии в изопропиловом спирте после УЗ-обработки в течение 4 ч; концентрация частиц серебра в суспензии – 75 мг/мл; кривая 1 – $Q_3(D)$, кривая 2 – $p_3(D)$

В процессе УЗ-обработки, наряду с процессом разрушения агломератов наночастиц серебра, происходит процесс образования новых агломератов. Регистрируемый гранулометрический состав суспензии является результатом данных процессов, между которыми устанавливается динамическое равновесие. Для смещения этого равновесия в сторону процессов диспергирования агломератов используются специальные химические вещества – диспергаторы, которые препятствуют агрегации наночастиц серебра [8–10]. В качестве диспергаторов могут использоваться высшие карбоновые кислоты, образующие на поверхности наночастиц серебра защитный гидрофобный слой, предотвращающий агрегацию и окисление частиц.

Стабилизация наночастиц серебра с помощью высших карбоновых кислот происходит за счет комбинации химической адсорбции и стерического отталкивания. За счет химической адсорбции карбоновые кислоты адсорбируются на поверхности частиц серебра через взаимодействие между карбоксильной группой ($-\text{COOH}$) и атомами серебра, а углеводородные «хвосты» высших карбоновых кислот создают защитный слой толщиной 1–3 нм в зависимости от длины алкильной цепи, который препятствует агрегации частиц. Наиболее эффективны карбоновые кислоты с длинными алкильными цепями от C12 до C18, причем насыщенные кислоты (миристиновая, пальмитиновая, стеариновая) дают защитный слой, имеющий упорядоченную структуру, что повышает стабильность частиц.

В настоящей работе в качестве диспергатора для модификации гранулометрического состава исследуемого нанопорошка серебра использовалась миристиновая кислота ($\text{C}_{13}\text{H}_{27}\text{COOH}$). Выбор миристиновой кислоты был обусловлен следующими ее особенностями. Во-первых, миристиновая кислота имеет достаточно длинный углеводородный «хвост» (C13), который обеспечивает эффективную стерическую стабилизацию наночастиц, предотвращая их агрегацию. Во-вторых, миристиновая кислота по сравнению со стеариновой кислотой ($\text{C}_{17}\text{H}_{35}\text{COOH}$), обладает меньшей молекулярной массой, что способствует ее более полному удалению при термообработке. Сравнительно низкая температура кипения (326–327 °C) гарантирует полное испарение и выгорание органической добавки в процессе спекания, минимизируя риск возникновения остаточного углерода.

Стеариновая кислота обеспечивает более сильное стабилизирующее действие благодаря более длинному углеводородному «хвосту» (C17). Однако высокая температура кипения (376 °C) делает ее менее подходящей для процессов, требующих последующей термообработки ввиду неполного выгорания органики и загрязнения материала углеродными включениями. Миристиновая кислота оптимально сочетает достаточную диспергирующую способность и удобство ее удаления при нагревании.

На следующем этапе исследований определялось влияние концентрации миристиновой кислоты и длительности УЗ-обработки на гранулометрический состав суспензий порошка серебра в изопропиловом спирте.

Концентрация миристиновой кислоты (масс.%) определялась отношением ее массы к общей массе порошка серебра и миристиновой кислоты в суспензии.

На рис. 6 приведены результаты исследования влияния длительности УЗ-обработки суспензии исходного порошка серебра в изопропиловом спир-

те, содержащей 1 масс.% миристиновой кислоты на гранулометрический состав порошка. Концентрация супензии составляла 75 мг/мл.

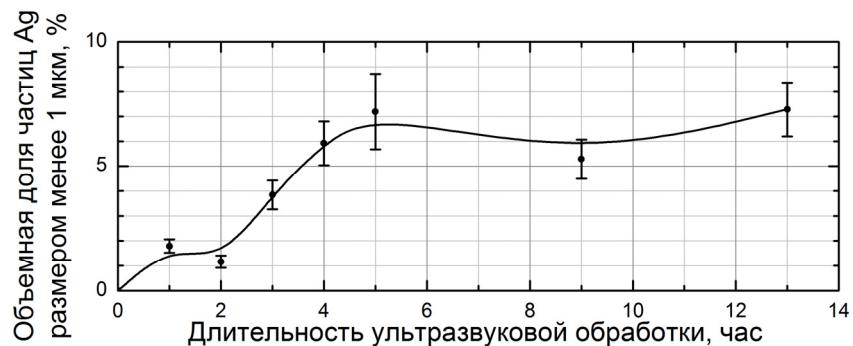


Рис. 6. Влияние длительности УЗ-обработки супензии исходного порошка серебра в изопропиловом спирте с добавлением 1 масс.% миристиновой кислоты на гранулометрический состав порошка

Как следует из рис. 6, объемная доля частиц серебра размером менее 1 мкм не превышала 7 % даже после УЗ-обработки супензии в течение 13 ч. Для достижения данного значения относительного объема частиц было достаточно УЗ-обработки супензии в течение 4 ч. В качестве примера на рис. 7 приведены результаты измерения гранулометрического состава порошка в супензии, содержащей 1 масс.% миристиновой кислоты. Длительность УЗ-обработки супензии составляла 4 ч.

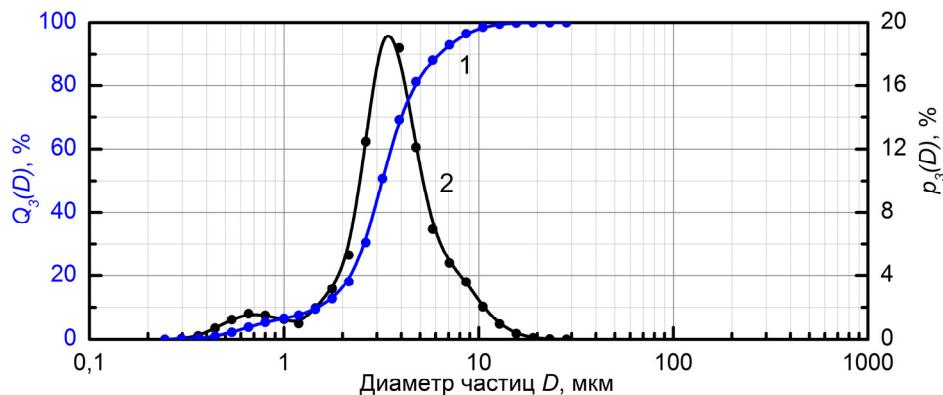


Рис. 7. Гранулометрический состав порошка в супензии, содержащей 1 масс.% миристиновой кислоты; Концентрация супензии – 75 мг/мл; кривая 1 – $Q_3(D)$, кривая 2 – $p_3(D)$

Сравнение результатов измерений, приведенных на рис. 5 и 7, показало, что добавление в супензию миристиновой кислоты существенно влияло на гранулометрический состав порошка. При добавлении 1 масс.% миристиновой кислоты в супензию и ее последующей УЗ-обработке в течение 4 ч в порошке возникали две фракции частиц, одна из них с частицами размером менее 1 мкм (6 %), а другая – от 1 до 15 мкм (94 %).

На рис. 8 (кривая 1) представлены результаты исследования влияния концентрации миристиновой кислоты в суспензии частиц порошка серебра в изопропиловом спирте на гранулометрический состав порошка. Длительность УЗ-обработки – 4 ч.

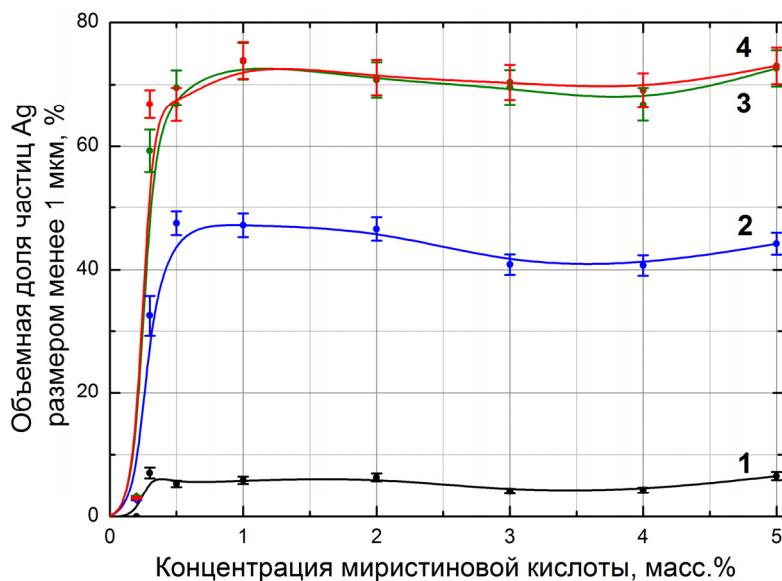


Рис. 8. Влияние концентрации миристиновой кислоты и длительности дополнительной УЗ-обработки суспензии порошка серебра в изопропиловом спирте на гранулометрический состав порошка; длительность дополнительной УЗ-обработки: кривая 1 – 0 мин; кривая 2 – 0,5 мин; кривая 3 – 2 мин; кривая 4 – 20 мин

Из рис. 8 (кривая 1) следует, что в интервале концентраций миристиновой кислоты от нуля до 5 масс.% объемная доля частиц серебра размером менее 1 мкм в суспензии не превышала 7 %. Минимальная концентрация диспергатора, необходимая для достижения данного значения, составляла 0,5 масс.%.

Поскольку с уменьшением концентрации частиц твердой фазы в суспензии диспергирующая способность УЗ-обработки возрастает, то возможным способом увеличения доли субмикронной фракции частиц серебра в порошке может быть дополнительная УЗ-обработка разбавленной до концентрации 50 мкг/мл суспензии. Результаты исследования влияния концентрации миристиновой кислоты и длительности дополнительной УЗ-обработки на гранулометрический состав порошка приведены на рис. 8 (кривые 2–4).

Из рис. 8 следует, что дополнительная УЗ-обработка сильноразбавленной суспензии с добавлением 0,5 масс.% миристиновой кислоты в течение уже 2 мин позволяло увеличить объемную долю частиц серебра размером менее 1 мкм до 70 %. Дальнейшее увеличение длительности дополнительной УЗ-обработки суспензии не приводило к росту объемной концентрации частиц серебра субмикронного размера.

Результаты измерения гранулометрического состава суспензии, содержащей 0,5 масс.% миристиновой кислоты и подвергнутой дополнительной УЗ-обработке длительностью 2 мин, приведены на рис. 9.

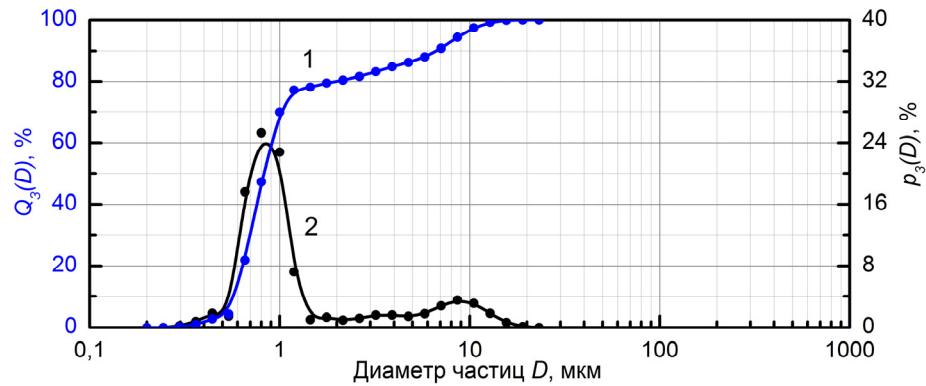


Рис. 9. Гранулометрический состав супензии порошка серебра в изопропиловом спирте, содержащей 0,5 масс.-% миристиновой кислоты и подвергнутой дополнительной УЗ-обработке длительностью 2 мин; концентрация супензии – 50 мкг/мл; кривая 1 – $Q_3(D)$, кривая 2 – $p_3(D)$

Заключение

В результате проведенных исследований установлено, что гранулометрический состав коммерческих ультрадисперсных порошков серебра может быть модифицирован путем ультразвуковой обработки супензий этих порошков в изопропиловом спирте с добавлением миристиновой кислоты в качестве диспергатора. Гранулометрический состав исследуемого порошка серебра включал в себя две фракции: с частицами размером от 0,5 до 2 мкм и от 10 до 500 мкм. Объемная доля частиц мелкой фракции в порошке составляла 18 %. Ультразвуковая обработка супензии исходного порошка в изопропиловом спирте с концентрацией 50 мкг/мл в течение 80 мин приводит к увеличению объемной доли частиц размером менее 2 мкм до 60 %. В высококонцентрированной (75 мг/мл) супензии порошка серебра даже после длительной УЗ-обработки частицы размером менее 1 мкм не наблюдались. Добавление в супензию перед УЗ-обработкой миристиновой кислоты (0,5 масс.-%) в качестве диспергатора позволяет увеличить объемную долю частиц серебра размером менее 1 мкм до 6 %. Разбавление высококонцентрированной супензии порошка серебра, содержащей миристиновую кислоту, до концентрации 50 мкг/мл и ее последующая УЗ-обработка в течение 2 мин приводит к возрастанию объемной доли частиц серебра размером менее 1 мкм до 70 %.

Список литературы

1. Gobl C., Beckedahl P., Braml H. Low Temperature Sinter Technology Die Attachment for Automotive Power Electronic Applications // Proc. Automotive Power Electronics. Paris, 2006. C. 1–5.
2. Матюхин С. И., Сурма А. М., Ставцев А. В., Титушкин Д. А., Писарев А. А. Применение технологии низкотемпературного спекания (синтеринга) для улучшения динамических характеристик мощных быстродействующих диодов и тиристоров // Наноинженерия. 2015. № 12. С. 11–16.
3. Grishanin A., Martynenko V., Khapugin A., Malygin M., Frolov O., Nishchev K., Novopoltsev M. Reliability Improving of Power Semiconductor Discharge Switch by Means of LTJT Technology // PCIM Europe 2017, 16–18 May. Nuremberg, Germany, 2017. P. 756–760.

4. Бирюков Ю. А., Бузник В. М., Дунаевский Г. Е. [и др.]. Ультрадисперсные и наноразмерные порошки: создание, строение, производство и применение / под ред. В. М. Бузника. Томск : Изд-во науч.-техн. литературы. 2009. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000471544>
5. Ильин А. П. Об избыточной энергии ультрадисперсных порошков, полученных методом взрыва проволок // Физика и химия обработки материалов. 1994. № 3. С. 94–97.
6. Tepper F., Lerner M., Ginley D. Metallic Nanopowders // Dekker Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology. Marcel Dekker, Inc., New York 2004. P. 1921–1933.
7. Utomo A., Alderman N. J., Padron G. A., Özcan-Taşkin N. G. Effects of particle concentration and dispersion rheology on the breakup of nanoparticle clusters through ultrasonication // Chemical Engineering Research and Design. 2023. Vol. 191. P. 301–312. doi: 10.1016/j.cherd.2023.01.041
8. Abbas R., Luo J., Qi X., Naz A., Khan I. A., Liu H., Yu S., Wei J. Silver Nanoparticles: Synthesis, Structure, Properties and Applications // Nanomaterials. 2024. Vol. 14 (17). P. 1425. doi: 10.3390/nano14171425
9. Le A. T., Tam L. T., Tam P. D., Huy P. T., Huy T. Q., Hieu N. V., Kudrinskiy A. A., Krutakov Yu. A. Synthesis of oleic acid-stabilized silver nanoparticles and analysis of their antibacterial activity // Materials Science and Engineering. 2010. Vol. 30 (6). P. 910–916. doi: 10.1016/j.msec.2010.04.009
10. Dong C., Zhang X., Cai H., Cao C., Zhou K., Wang X., Xiao X. Synthesis of stearic acid-stabilized silver nanoparticles in aqueous solution // Advanced Powder Technology. 2016. Vol. 27 (6). P. 2416–2423. doi: 10.1016/j.apt.2016.08.018

References

1. Gobl C., Beckedahl P., Braml H. Low Temperature Sinter Technology Die Attachment for Automotive Power Electronic Applications. *Proc. Automotive Power Electronics*. Paris, 2006:1–5.
2. Matyukhin S.I., Surma A.M., Stavtsev A.V., Titushkin D.A., Pisarev A.A. Application of low-temperature sintering technology to improve the dynamic characteristics of high-power fast-acting diodes and thyristors. *Nanoizheneriya*. 2015;(12):11–16. (In Russ.)
3. Grishanin A., Martynenko V., Khapugin A., Malygin M., Frolov O., Nishchev K., Novopoltsev M. Reliability Improving of Power Semiconductor Discharge Switch by Means of LTJT Technology. *PCIM Europe 2017, 16–18 May*. Nuremberg, Germany, 2017:756–760.
4. Biryukov Yu.A., Buznik V.M., Dunayevskiy G.E. et al. *Ultradispersnye i nanorazmernyye poroshki: sozdaniye, stroyeniye, proizvodstvo i primeneniye = Ultrafine and nanoscale powders: creation, structure, production and application*. Tomsk: Izd-vo nauch.-tekhn. literature. 2009. (In Russ.). Available at: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000471544>
5. Ilin A.P. On the excess energy of ultrafine powders obtained by wire explosion method. *Fizika i khimiya obrabotki materialov = Physics and chemistry of materials processing*. 1994;(3):94–97. (In Russ.)
6. Tepper F., Lerner M., Ginley D. Metallic Nanopowders. *Dekker Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2004:1921–1933.
7. Utomo A., Alderman N.J., Padron G.A., Özcan-Taşkin N.G. Effects of particle concentration and dispersion rheology on the breakup of nanoparticle clusters through ultrasonication. *Chemical Engineering Research and Design*. 2023;191:301–312. doi: 10.1016/j.cherd.2023.01.041
8. Abbas R., Luo J., Qi X., Naz A., Khan I.A., Liu H., Yu S., Wei J. Silver Nanoparticles: Synthesis, Structure, Properties and Applications. *Nanomaterials*. 2024;14(17):1425. doi: 10.3390/nano14171425

9. Le A.T., Tam L.T., Tam P.D., Huy P.T., Huy T.Q., Hieu N.V., Kudrinskiy A.A., Krutyakov Yu.A. Synthesis of oleic acid-stabilized silver nanoparticles and analysis of their antibacterial activity. *Materials Science and Engineering*. 2010;30(6):910–916. doi: 10.1016/j.msec.2010.04.009
10. Dong C., Zhang X., Cai H., Cao C., Zhou K., Wang X., Xiao X. Synthesis of stearic acid-stabilized silver nanoparticles in aqueous solution. *Advanced Powder Technology*. 2016;27(6):2416–2423. doi: 10.1016/j.apt.2016.08.018

Информация об авторах / Information about the authors

Константин Николаевич Нищев

кандидат физико-математических наук, доцент, директор Института научно-исследовательских технологий и новых материалов, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68)

E-mail: nishchev@inbox.ru

Konstantin N. Nishchev

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, director of the Institute of High Technologies and New Materials, Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevikskaia street, Saransk, Russia)

Михаил Ильич Новопольцев

кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник кафедры физического материаловедения, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68)

E-mail: novopol@inbox.ru

Mikhail I. Novopol'tsev

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, leading researcher of the sub-department of physical materials science, Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevikskaia street, Saransk, Russia)

Сергей Геннадьевич Кострюков

кандидат химических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной химии и химической технологии, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68)

E-mail: kostryukov_sg@mail.ru

Sergey G. Kostryukov

Candidate of chemical sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of fundamental chemistry and chemical technology, Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevikskaia street, Saransk, Russia)

Александр Алексеевич Пыненков

младший научный сотрудник кафедры физического материаловедения, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва (Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, 68)

E-mail: alekspyn@yandex.ru

Aleksandr A. Pynenkov

Junior researcher of the sub-department of physical materials science, Ogarev Mordovia State University (68 Bolshevikskaia street, Saransk, Russia)

Екатерина Николаевна Лютова

младший научный сотрудник кафедры
физического материаловедения,
Национальный исследовательский
Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва
(Россия, г. Саранск,
ул. Большевистская, 68)

E-mail: ekat.lyutova@yandex.ru

Ekaterina N. Lyutova

Junior researcher of the sub-department
of physical materials science,
Ogarev Mordovia State University
(68 Bolshevikskaia street, Saransk, Russia)

Елена Валерьевна Безрукова

кандидат химических наук, доцент
кафедры фундаментальной химии
и химической технологии,
Национальный исследовательский
Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарёва
(Россия, г. Саранск,
ул. Большевистская, 68)

E-mail: tadaakiyattsu@gmail.com

Elena V. Bezrukova

Candidate of chemical sciences, associate
professor of the sub-department
of fundamental chemistry and chemical
technology, Ogarev Mordovia State
University (68 Bolshevikskaia street,
Saransk, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 20.07.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 21.08.2025

Принята к публикации / Accepted 07.09.2025

Уважаемые читатели!

Для гарантированного и своевременного получения журнала «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» рекомендуем вам оформить подписку.

Журнал выходит 4 раза в год. Научные направления (группы специальностей):

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

1.1.6. Вычислительная математика

1.3.3. Теоретическая физика

1.3.6. Оптика

1.3.8. Физика конденсированного состояния

1.3.11. Физика полупроводников

1.3.15. Физика атомных ядер и элементарных частиц, физика высоких энергий

Стоимость одного номера журнала – 500 руб. 00 коп.

Для оформления подписки через редакцию необходимо заполнить и отправить заявку в редакцию журнала: факс/тел. +7 (8412) 64-32-89. E-mail: volgavuz@pnzgu.ru

Подписку можно также оформить по объединенному каталогу «Пресса России» тематические разделы «Научно-технические издания. Известия РАН. Известия ВУЗов». Подписной индекс – 82413.

ЗАЯВКА

Прошу оформить подписку на журнал «**Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки**» на 20__ г.

№ 1 – _____ шт., № 2 – _____ шт., № 3 – _____ шт., № 4 – _____ шт.

Наименование организации (полное) _____

ИНН _____ КПП _____

Почтовый индекс _____

Республика, край, область _____

Город (населенный пункт) _____

Улица _____ Дом _____

Корпус _____ Офис _____

ФИО ответственного _____

Должность _____

Тел. _____ Факс _____ E-mail _____

Руководитель предприятия _____
(подпись) _____ (ФИО) _____

Дата «____» _____ 20__ г.