УДК 517.925.5
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-3

Эквиограниченность по Пуассону в пределе и эквиосциллируемость в пределе множеств всех решений систем дифференциальных уравнений

К. С. Лапин

Мордовский государственный педагогический университет
имени М. Е. Евсевьева, Саранск, Россия

klapin@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследуются осциллирующие движения динамических систем, а именно движения, которые не являются ограниченными и, кроме того, обладают тем свойством, что не стремятся к бесконечности при стремлении времени к плюс бесконечности. Такие движения играют важную роль в различных задачах математической физики, небесной механики, термодинамики и астрофизики. *Материалы и методы.* Введены в рассмотрение новые понятия, связанные с осциллируемостью множества всех решений системы дифференциальных уравнений – понятие эквиосциллируемости в пределе множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. *Результаты.* На основе принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова и найденной автором связи между ограниченностью по Пуассону и осциллируемостью решений получены достаточные условия эквиосциллируемости в пределе множества всех решений, а также частичные аналоги этих условий. Работа продолжает исследования автора по изучению ограниченности и осциллируемости множеств всех решений дифференциальных систем с использованием функций Ляпунова и вектор-функций Ляпунова. *Выводы.* Полученные теоретические результаты могут быть использованы для анализа сложных динамических систем в различных областях науки.

Ключевые слова: эквиограниченность по Пуассону в пределе, эквиосциллируемость, вектор-функция Ляпунова, частично контролируемые начальные условия, частичная осциллируемость

Для цитирования: Лапин К. С. Эквиограниченность по Пуассону в пределе и эквиосциллируемость в пределе множеств всех решений систем дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 23–35. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-3

Poisson ultimate equiboundedness and ultimate equioscillation of sets of all solutions of differential equations' systems

K.S. Lapin

Mordovian State Pedagogical University named after M.E. Evseviev, Saransk, Russia

klapin@mail.ru

Abstract. *Background.* The oscillating motions of dynamic systems are investigated, namely, motions that are not bounded and, in addition, have the property that they do not tend to infinity as time tends to plus infinity. Such motions play an important role in various problems of mathematical physics, celestial mechanics, thermodynamics and astrophysics. *Materials and methods.* New concepts related to the oscillation of the set of all solutions of a system of differential equations are introduced into consideration: the concept of equioscillation in the limit of the set of all solutions and partial analogues of this concept. *Results*. Based on the principle of comparison of Matrosov with Lyapunov vector functions and the connection found by the author between Poisson boundedness and oscillability of solutions, sufficient conditions for equioscillability in the limit of the set of all solutions, as well as partial analogues of these conditions, are obtained. The work continues the author's research on the study of the boundedness and oscillation of the sets of all solutions of differential systems using Lyapunov functions and Lyapunov vector functions. *Conclusions*. The obtained theoretical results can be used to analyze complex dynamic systems in various fields of science.

Keywords: Poisson ultimate equiboundedness, equioscillation, Lyapunov vector function, partially controlled initial conditions, partial oscillation

For citation: Lapin K.S. Poisson ultimate equiboundedness and ultimate equioscillation of sets of all solutions of differential equations' systems. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(3):23–35. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-3

Введение

Осциллирующие движения динамических систем представляют собой важный класс решений, занимающих промежуточное положение между ограниченными и неограниченными траекториями. Впервые данный феномен был предложен в исследованиях Ж. Шази [1] при анализе возможных движений в классической задаче трех тел. Характерной особенностью таких движений является отсутствие их стремления к бесконечности при неограниченном возрастании времени, несмотря на неограниченность этих решений. Значительный вклад в изучение этого явления внесли исследования К. А. Ситникова [2], где было установлено существование осциллирующих решений в модели Колмогорова, и исследования А. М. Леонтовича [3], обнаружившего аналогичные траектории в биллиардных системах, связанных с эргодической теорией. Дальнейшее развитие теория получила в трудах В. М. Алексеева (см., например, [4]), который выявил осциллирующие режимы в квазислучайных динамических системах небесной механики. Особого внимания заслуживает цикл работ Л. Д. Пустыльникова (см., например, [5]), в которых осциллирующие движения использовались как ключевой инструмент для решения многих важных задач современной физики. Параллельно развивалась теория P-ограниченных (ограниченных по Пуассону) решений, основные понятия которой были введены в работах автора (см., например, [6–8]). Эти понятия обобщают классическое представление об ограниченности, допуская нахождение решения в заданной области лишь на специальной последовательности временных интервалов. На основе различных модификаций метода вектор-функций Ляпунова были получены достаточные условия различных типов P-ограниченности множеств всех решений дифференциальных систем. В последующих исследованиях на основе синтеза методов вектор-функций Ляпунова, канонических областей Красносельского и направляющих функций были установлены достаточные условия существования P-ограниченных решений. Важным этапом исследований автора стала финальная характеризация понятия P-ограниченности, позволившая выявить глубокую связь между этим понятием и осциллирующими решениями. Это привело к обнаружению достаточных условий различных видов осциллируемости множеств всех решений – равномерной, равномерной в пределе и тотальной. В настоящей работе вводятся новые классы осциллирующих множеств всех решений, а именно введены понятие эквиосциллируемости в пределе множества всех решений и частичные аналоги этого понятия. Введенные понятия представляют собой специализированные случаи P-эквиограниченности в пределе множества всех решений дифференциальной системы. На основе применения принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова получены достаточные условия различных типов эквиосциллируемости в пределе множества всех решений. В качестве следствий получены достаточные условия соответствующих типов эквиосциллируемости в пределе множества всех решений на языке классических функций Ляпунова. Предлагаемый подход открывает новые возможности для анализа сложных динамических систем в различных областях математической физики.

1. Предварительные сведения

Пусть задана произвольная дифференциальная система

$$\dot{x} = f(t,x), \quad f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad n \ge 1, \tag{1}$$

с непрерывной правой частью, где $\mathbb{R}^+ \equiv [0;+\infty)$, все решения которой продолжимы на $\mathbb{R}^+$.

Далее через $\|\cdot\|$ обозначена стандартная норма в $\mathbb{R}^n$. Для решения $x(t)$ системы (1) используется обозначение $x(t,t_0,x_0)$, если $x_0 = x(t_0)$. Для любого числа $t_0 \in \mathbb{R}^+$ используется обозначение $\mathbb{R}^+(t_0) \equiv [t_0;+\infty)$. Числовая последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$ называется P-последовательностью, если эта последовательность неотрицательна, возрастает и, кроме того, удовлетворяет условию $\lim\limits_{i\to\infty} \tau_i = +\infty$. Каждой P-последовательности $\tau = \{\tau_i\}_{i\ge 1}$ сопоставлено множество $M(\tau) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1};\tau_{2i}]$. Наконец, для любых $x = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $1 \le k \le n$ используется обозначение $y = (x_1,\ldots,x_k)^T \in \mathbb{R}^k$.

Вспомним сначала необходимые базовые определения, связанные с понятиями ограниченности, P-ограниченности (ограниченности по Пуассону) и осциллируемости данного решения системы (1).

Определение 1 [9]. Решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) называется y-ограниченным (ограниченным [10]), если для этого решения существует такая константа $\beta > 0$, что для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство

$$y(t,t_0,x_0) \le \beta \quad \big(x(t,t_0,x_0) \le \beta\big).$$

В противном случае решение системы (1) называется y-неограниченным (неограниченным).

Определение 2 [11]. Решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1) называется y-P-ограниченным (P-ограниченным), если для этого решения существуют такая константа $\beta > 0$ и такая P-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$, что для любых $t \in R^+(t_0) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство

$$y(t, t_0, x_0) \le \beta \quad \left(x(t, t_0, x_0) \le \beta\right).$$

Из определений 1 и 2 видно, что любое y-ограниченное (ограниченное) решение системы (1) является y-P-ограниченным (P-ограниченным).

В работе [12] получен следующий признак, дающий финальную характеризацию y-P-ограниченного (P-ограниченного) решения системы (1).

Предложение 1. Необходимым и достаточным условием y-P-ограниченности (P-ограниченности) решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является выполнение следующего требования:

$$\varliminf_{t\to+\infty} y(t, t_0, x_0) \ne \infty \quad \left(\varliminf_{t\to+\infty} x(t, t_0, x_0) \ne \infty\right).$$

Определение 3 [12, 13]. Решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) называется y-осциллирующим (осциллирующим [1], см. также [5]), если это решение является y-неограниченным (неограниченным) и, кроме того, выполнено условие

$$\varliminf_{t\to+\infty} y(t, t_0, x_0) \ne \infty \quad \left(\varliminf_{t\to+\infty} x(t, t_0, x_0) \ne \infty\right).$$

Из данного определения, пользуясь предложением 1, получаем, что каждое y-P-ограниченное (P-ограниченное) решение системы (1) является либо y-ограниченным (ограниченным), либо y-осциллирующим (осциллирующим). Как следствие, имеем следующее утверждение.

Предложение 2 [12, 13]. Необходимым и достаточным условием y-осциллируемости (осциллируемости) решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является одновременное выполнение следующих требований:

1) решение $x(t, t_0, x_0)$ является y-P-ограниченным (P-ограниченным);

2) решение $x(t, t_0, x_0)$ является y-неограниченным (неограниченным).

Вспомним теперь необходимые базовые определения, которые связаны с понятиями эквиограниченности в пределе и P-эквиограниченности (эквиограниченности по Пуассону) в пределе множества всех решений системы (1). Далее для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ и $1 \le k \le m \le n$ будем употреблять следующие обозначения:

$$y = (x_1, \ldots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k \quad \text{и} \quad z = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m.$$

Определение 4 [14]. Множество всех решений дифференциальной системы (1) называется y-z_0-эквиограниченным в пределе, если для системы (1) найдется такое число $B > 0$, и для любых $\alpha \ge 0$ и $t_0 \ge 0$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \ge 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$, $z_0 \le \alpha$ системы (1) при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0 + T)$ справедливо неравенство $y(t, t_0, x_0) < B$. В случае, когда $m = n$, y-z_0-эквиограниченность в пределе множества всех решений системы (1) называется [9] y-эквиограниченностью в пределе множества всех решений этой системы. В случае же, когда, $k = m = n$, y-z_0-эквиограниченность в пределе множества всех решений системы (1) называется [10] эквиограниченностью в пределе множества всех решений этой системы.

Определение 5 [12]. Множество всех решений дифференциальной системы (1) называется y-z_0-P-эквиограниченным в пределе, если для системы (1) найдутся такое $B > 0$ и такая P-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$, и для любых $\alpha \ge 0$ и $t_0 \in M(\tau)$ существует такое число $T = T(t_0, \alpha) \ge 0$, что для каждого решения $x(t, t_0, x_0)$, $z_0 \le \alpha$ системы (1) при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0 + T) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $y(t, t_0, x_0) < B$. В случае, когда $m = n$, y-z_0-P-эквиограниченность в пределе множества всех решений системы (1) называется y-P-эквиограниченностью в пределе множества всех решений этой системы. В случае же, когда $k = m = n$, y-z_0-P-эквиограниченность в пределе множества всех решений системы (1) называется P-эквиограниченностью в пределе множества всех решений этой системы.

Из определений 4 и 5 видно, что если множество всех решений системы (1) y-z_0-эквиограничено в пределе, то это множество y-z_0-P-эквиограничено в пределе. В частности, если множество всех решений системы (1) y-эквиограничено в пределе, то это множество y-P-эквиограничено в пределе. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиограничено в пределе, то это множество P-эквиограничено в пределе. Кроме того, легко видеть, что без ограничения общности функцию $T = T(t_0, \alpha)$ из определений 4 и 5 можно считать неубывающей по α при каждом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$.

В некоторых случаях при работе с множеством всех решений системы (1) требуется точно указать нужную P-последовательность. В таких случаях будем говорить, что множество всех решений системы (1) y-z_0-P-эквиограничено в пределе относительно данной P-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Аналогично будем говорить для y-P-эквиограниченности в пределе, а также для P-эквиограниченности в пределе множества всех решений системы (1).

Легко видеть, что если множество всех решений системы (1) y-z_0-P-эквиограничено в пределе, то любое решение этой системы y-P-ограничено. Действительно, если определить для любого решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), где $t_0 \in M(\tau)$, требуемое в определении 2 число $\beta > 0$, полагая

$$\beta = \max\left(B; \max_{[t_0, T(t_0, x_0)]} x(t, t_0, x_0)\right),$$

то получим, что решение $x(t,t_0,x_0)$ y-P-ограничено. В случае же, если $t_0 M(\tau)$, то рассмотрим для решения $x(t,t_0,x_0)$ решение $x(t,t_0',x_0')$, где $t_0' > t_0$, $t_0' \in M(\tau)$ и $x_0' = x(t_0',t_0,x_0)$. Решение $x(t,t_0',x_0')$ является y-P-ограниченным, поскольку $t_0' \in M(\tau)$. Из этого, пользуясь предложением 1, имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t,t_0',x_0') \neq \infty$. Так как $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t,t_0,x_0) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t,t_0',x_0') \neq \infty$, то из предложения 1 следует, что решение $x(t,t_0,x_0)$ является y-P-ограниченным. В частности, при $k \le m = n$ получаем, что если решения системы (1) y-P-эквиограничены в пределе, то любое решение этой системы является y-P-ограниченным. При $k = m = n$ получаем, что если решения системы (1) P-эквиограничены в пределе, то любое решение этой системы является P-ограниченным.

Основные результаты

Введем основное понятие в этой работе, а именно введем понятие y-z_0-эквиосциллируемости в пределе множества всех решений, представляющее собой специальный случай понятия y-z_0-P-эквиограниченности в пределе множества всех решений.

Определение 6. Множество всех решений дифференциальной системы (1) будем называть y-z_0-эквиосциллирующим в пределе, если множество всех решений этой системы y-z_0-P-эквиограничено в пределе и, кроме того, каждое решение этой системы является y-неограниченным. В случае, когда $k \le m = n$, множество всех решений системы (1) будем называть y-эквиосциллирующим в пределе. В случае же, когда $k = m = n$, множество всех решений системы (1) будем называть эквиосциллирующим в пределе.

Из сказанного выше следует, что если множество всех решений дифференциальной системы (1) y-z_0-эквиосциллирует в пределе, то любое решение этой системы является y-осциллирующим. В частности, если множество всех решений системы (1) y-эквиосциллирует в пределе, то любое решение этой системы является y-осциллирующим. Наконец, если множество всех решений системы (1) эквиосциллирует в пределе, то любое решение этой системы является осциллирующим.

С целью получить достаточные условия y-z_0-эквиосциллируемости множества всех решений системы (1) освежим в памяти необходимые сведения о вектор-функциях Ляпунова [15]. Пусть задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V:\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, $l \ge 1$. Производная $\dot{V}(t,x)$ в силу системы (1) этой вектор-функции определяется обычным способом, т.е. покомпонентно. Далее для любых векторов $\vartheta = (\vartheta_1,\dots,\vartheta_l)^T \in \mathbb{R}^l$ и $\psi = (\psi_1,\dots,\psi_l)^T \in \mathbb{R}^l$ используется обозначение $\vartheta \le \psi$, если $\vartheta_i \le \psi_i$ для каждого $1 \le i \le l$. Непрерывно дифференцируемая вектор-функция $V : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{l}$ и дифференциальная система

$$\dot{\vartheta} = g(t, \vartheta), \quad t \in \mathbb{R}^{+}, \quad \vartheta \in \mathbb{R}^{l}, \tag{2}$$

с непрерывной правой частью называются соответственно вектор-функцией Ляпунова и системой сравнения для системы (1), если для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{n}$ имеет место следующее неравенство:

$$\dot{V}(t, x) \le g(t, V(t, x)). \tag{3}$$

Далее будем предполагать, что вектор-функция $g : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{l} \to \mathbb{R}^{l}$ удовлетворяет условию Важевского, которое состоит в том, что для каждого $1 \le s \le l$ компонента $g_s : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{l} \to \mathbb{R}$ этой вектор-функции является неубывающей по переменным $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{s-1}, \vartheta_{s+1}, \ldots, \vartheta_l$ при любом фиксированном значении переменной ϑ_s. Выполнение условия Важевского для правой части системы (2) гарантирует, что среди всех решений $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0)$ этой системы существует так называемое верхнее решение $\overline{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$, т.е. решение, которое для любых $t \in \mathbb{R}^{+}(t_0)$ удовлетворяет неравенству $\vartheta(t, t_0, \vartheta_0) \le \overline{\vartheta}(t, t_0, \vartheta_0)$. Главным свойством верхних решений является то, что для решения $x(t, t_0, x_0)$ системы (1), вектор-функции Ляпунова $V : \mathbb{R}^{+} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{l}$ и верхнего решения $\overline{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0))$ системы сравнения (2) для системы (1) имеет место справедливое при всех $t \in \mathbb{R}^{+}(t_0)$ неравенство

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \le \overline{\vartheta}(t, t_0, V(t_0, x_0)). \tag{4}$$

Далее для произвольных $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_l)^T \in \mathbb{R}^{l}$ и $1 \le p \le q \le l$ будем употреблять обозначения $\mu = (\xi_1, \ldots, \xi_p)^T$ и $\gamma = (\xi_1, \ldots, \xi_q)^T$. Кроме того, для каждой P-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ вместе с указанным выше множеством $M(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i-1}; \tau_{2i}]$ далее будем использовать еще и, так сказать, «дополнительное к $M(\tau)$» множество $N(\tau)$, т.е. множество

$$N(\tau) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\tau_{2i}; \tau_{2i+1}].$$

Получим, пользуясь техникой вектор-функций Ляпунова, достаточное условие y-z_0-эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1).

Теорема 1. Предположим, что для системы (1) имеются следующие объекты:

а) P-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$;

б) вектор-функция Ляпунова $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ с системой сравнения (2);

в) числа $1 \le p \le q \le l$;

г) непрерывно дифференцируемая положительная функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

которые удовлетворяют условиям:

1) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$V_1(t, x) \ge 0, \dots, V_q(t, x) \ge 0;$$

2) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$b(y) \le V_1(t, x) + \dots + V_p(t, x),$$

где $b(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$;

3) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$V_1(t, x) + \dots + V_q(t, x) \le a(t, z),$$

где $a(t, r)$, $t \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая положительная функция, которая возрастает по r при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$;

4) для любых $(t, x) \in N(\tau) \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$W(t, x) \le d(y),$$

где $d(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая положительная и возрастающая функция;

5) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\dot{W}(t, x) \le h(W(t, x)),$$

где $h(r)$, $r \in \mathbb{R}^+$, – некоторая неубывающая функция, удовлетворяющая условию $h(r) > 0$ при любом $r > 0$.

Кроме того, пусть множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) является μ-γ_0-P-эквиограниченным в пределе относительно P-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) является y-z_0-эквиосциллирующим в пределе.

Доказательство. Установим сначала, что каждое решение системы (1) является y-неограниченным. Проще всего доказывается это от противного. Действительно, предположим, что любое решение $x(t, t_0, x_0)$ системы (1) является y-ограниченным, т.е. для этого решения существует такое $\beta > 0$, что при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0)$ справедливо неравенство $y(t,t_0,x_0) \le \beta$. При помощи этого неравенства, пользуясь условием 4 теоремы 1, получаем для всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau)$ неравенство $W(t,x(t,t_0,x_0)) \le d(\beta)$. Теперь, используя условие 5 теоремы, получаем для любых $\mathbb{R}^+(t_0)$ неравенство $W(t,x(t,t_0,x_0)) \ge W(t_0,x_0) + h(W(t_0,x_0))(t-t_0)$. Из двух последних неравенств следует справедливость неравенства

$$d(\beta) \ge W(t_0,x_0) + h(W(t_0,x_0))(t-t_0), \quad t \in \mathbb{R}^+(t_0) \cap N(\tau),$$

что абсурдно, поскольку $h(W(t_0,x_0)) > 0$ и $d(\beta)$ – константа. Таким образом, получено противоречие и, следовательно, каждое решение системы (1) является y-неограниченным. Докажем теперь, что множество всех решений дифференциальной системы (1) y-z_0-P-эквиограничено в пределе. Рассмотрим любое решение $x(t,t_0,x_0)$ системы (1), где $z_0 \le \alpha$, системы (1). С целью поиска для этого решения требуемого в определении 5 числа $T = T(t_0,\alpha)$ заметим сначала, имея в виду неравенство (4) и условие 2, что для любого $t \in M(\tau)$ справедливо неравенство

$$b(y(t,t_0,x_0)) \le \bar{\vartheta}_1(t,t_0,V(t_0,x_0)) + \ldots + \bar{\vartheta}_p(t,t_0,V(t_0,x_0)),$$

где $\bar{\vartheta}(t,t_0,V(t_0,x_0)) = (\bar{\vartheta}_1(t,t_0,V(t_0,x_0)),\ldots,\bar{\vartheta}_l(t,t_0,V(t_0,x_0)))^T$ – верхнее решение системы сравнения (2) для системы (1). По условию теоремы множество всех решений системы сравнения (2) для системы (1) μ-γ_0-P-эквиограничено в пределе относительно P-последовательности $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Поэтому для верхнего решения $\bar{\vartheta}(t,t_0,V(t_0,x_0))$, где $t_0 \in M(\tau)$, системы сравнения (2) и нормы $V^\gamma(t_0,x_0)$ вектора $V^\gamma(t_0,x_0) = (V_1(t_0,x_0),\ldots,V_q(t_0,x_0))^T$, существуют такие числа $C > 0$ и $\Psi = \Psi(t_0,V^\gamma(t_0,x_0)) \ge 0$, что для любых $t \in \mathbb{R}^+(t_0+\Psi) \cap M(\tau)$ имеет место неравенство

$$\bar{\mu}(t,t_0,V(t_0,x_0)) < C,$$

где $\bar{\mu}(t,t_0,V(t_0,x_0)) = (\bar{\vartheta}_1(t,t_0,V(t_0,x_0)),\ldots,\bar{\vartheta}_p(t,t_0,V(t_0,x_0)))^T$.

Из условий 1 и 3 видно, что для любого $t_0 \in M(\tau)$ справедливо неравенство $V^\gamma(t_0,x_0) \le a(t_0,\alpha)$. Пользуясь теперь тем, что функция $\Psi = \Psi(t_0,r)$ не убывает при любом фиксированном $t_0 \in M(\tau)$, имеем неравенство $\Psi(t_0,V^\gamma(t_0,x_0)) \le \Psi(t_0,a(\alpha))$. Если определить искомое число $T = T(t_0,\alpha)$ равенством $T(t_0,\alpha) = \Psi(t_0,a(t_0,\alpha))$, то для этого числа T получаем справедливое при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0 + T) \cap M(\tau)$ неравенство $b(y(t, t_0, x_0)) \leq p \cdot C$. Пользуясь теперь условием $b(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$ и тем, что числа p и C фиксированы, выберем такое число $B > 0$, что $p \cdot C < b(B)$. Из этого при всех $t \in \mathbb{R}^+(t_0 + T) \cap M(\tau)$ получаем неравенство $b(y(t, t_0, x_0)) < b(B)$, где B не зависит от решения $x(t, t_0, x_0)$. Так как по условию теоремы функция $b(r)$ является неубывающей, то из последнего неравенства вытекает, что для любого $t \in \mathbb{R}^+(t_0 + T) \cap M(\tau)$ справедливо неравенство $y(t, t_0, x_0) < B$. Таким образом, установлено, что множество всех решений системы (1) y-z_0-P-эквиограничено в пределе. Из этого, учитывая доказанную выше y-неограниченность каждого решения системы (1), получаем, что множество всех решений системы (1) является y-z_0-эквиосциллирующим в пределе. Теорема доказана.

Отметим, что если в формулировке теоремы 1 положить $z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием y-эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций Ляпунова. Если же в формулировке теоремы 1 положить $y = z = x$, то теорема 1 становится достаточным условием эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке вектор-функций Ляпунова.

Рассмотрим теперь случай, когда в теореме 1 для вектор-функций Ляпунова полагается $l = 1$, т.е. когда вектор-функции Ляпунова являются функциями Ляпунова. При помощи неравенства (3) несложно видеть, что в рассматриваемом случае теорема 1 превращается в следующее достаточное условие y-z_0-эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Предложение 3. Предположим, что для системы (1) имеются следующие объекты:

а) P-последовательность $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$;

б) неотрицательная непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (функция Ляпунова);

в) непрерывно дифференцируемая положительная функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

г) непрерывная функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

которые удовлетворяют условиям:

1) для любых $(t, x) \in M(\tau) \times \mathbb{R}^n$ справедливо двойное неравенство

$$b(y) \leq V(t, x) \leq a(t, z),$$

где функции $b(r)$ и $a(t, r)$ такие же, как в теореме 1;

2) для любых $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\dot{V}(t, x) \leq g(t, V(t, x));$$

3) для любых $(t,x)\in N(\tau)\times\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$W(t,x)\le d(y),$$

где функция $d(r)$ такая же, как в теореме 1;

4) для любых $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\dot{W}(t,x)\ge h\big(W(t,x)\big),$$

где функция $h(r)$ такая же, как в теореме 1;

5) множество всех решений уравнения $\dot{\vartheta}=g(t,\vartheta)$, $t\in\mathbb{R}^+$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, является P-эквиограниченным в пределе относительно P-последовательности $\tau=(\tau_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Тогда множество всех решений системы (1) является y-z_0-эквиосциллирующим в пределе.

Отметим, что если в формулировке предложения 3 положить $z=x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие y-эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова. Если же в формулировке предложения 3 положить $y=z=x$, то предложение 3 превращается в достаточное условие эквиосциллируемости в пределе множества всех решений системы (1) на языке функций Ляпунова.

Заключение

Введенные в работе понятия эквиосциллируемости в пределе множеств всех решений дифференциальных систем, а также частичные аналоги этого понятия являются новым видом осциллируемости множеств всех решений. Полученные в работе на основе принципа сравнения Матросова с вектор-функциями Ляпунова достаточные условия эквиосциллируемости в пределе множеств всех решений дифференциальных систем могут быть использованы в различных областях качественной теории дифференциальных уравнений и математической физики для решения задач, связанных с вопросами существования осциллирующих движений динамических систем.

Список литературы

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps quand le temps croit indefiniment // Annales de l'Ecole Norm. Sup. 3eser. 1922, ser. 39. P. 29–130.
2. Ситников К. А. Существование осциллирующих движений в задаче трех тел // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133, № 2. С. 303–306.
3. Леонтович А. М. О существовании осциллирующих траекторий в одной биллиардной задаче // Доклады АН СССР. 1962. Т. 145, № 3. С. 523–526.
4. Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы. II // Математический сборник. 1968. Т. 77 (119). С. 545–600.
5. Пустыльников Л. Д. О строгом обосновании возможности неограниченного роста энергии частиц в одной задаче ядерной физики // Доклады АН СССР. 1985. Т. 283, № 3. С. 550–553.

6. Лапин К. С. Равномерная ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений и вектор-функции Ляпунова // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 40–50. doi: 10.1134/S0374064118010053
7. Лапин К. С. Вектор-функции Ляпунова, вращения векторных полей, направляющие функции и существование ограниченных по Пуассону решений // Дифференциальные уравнения. 2021. Т. 57, № 3. С. 306–312. doi: 10.31857/S037406412103002X
8. Лапин К. С. Вектор-функции Ляпунова и ограниченность в пределе по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений // Математические заметки. 2018. Т. 104, № 1. С. 74–86. doi: 10.4213/mzm11622
9. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения относительно части переменных. М. : Наука, 1987. 254 с.
10. Йосидзава Т. Функция Ляпунова и ограниченность решений // Математика. 1965. № 5. С. 95–127.
11. Лапин К. С. Вектор-функции Ляпунова, канонические области Красносельского и существование ограниченных по Пуассону решений // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56, № 10. С. 1304–1309. doi: 10.1134/S0374064120100027
12. Лапин К. С. Ограниченность по Пуассону решений систем дифференциальных уравнений. Саранск : РИЦ МГПУ, 2022. 163 с.
13. Лапин К. С. Тотальная ограниченность по Пуассону и тотальная осциллируемость решений систем дифференциальных уравнений // Владикавказский математический журнал. 2022. Т. 24, № 4. С. 104–115. doi: 10.46698/w0398-0994-2990-z
14. Лапин К. С. Ограниченность в пределе решений систем дифференциальных уравнений по части переменных с частично контролируемыми начальными условиями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 10. С. 1281–1286. doi: 10.1134/S0374064113100051
15. Абдуллин Р. З., Анапольский Л. Ю., Воронов А. А., Земляков А. С., Козлов Р. И., Маликов А. И., Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости. М. : Наука, 1987. 312 с.

References

1. Chazy J. Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps quand le temps croit indefiniment. *Annales de l'Ecole Norm. Sup. 3eser*. 1922;39:29–130.
2. Sitnikov K.A. The existence of oscillatory motions in the three-body problem. *Dokl. AN SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 1960;133(2):303–306. (In Russ.)
3. Leontovich A.M. On the existence of oscillating trajectories in a billiard problem. *Doklady AN SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 1962;145(3):523–526. (In Russ.)
4. Alekseyev V.M. Quasi-random dynamic systems. 2. *Matematicheskiy sbornik = Mathematical collection*. 1968;77(119):545–600. (In Russ.)
5. Pustylnikov L.D. On a rigorous justification of the possibility of unlimited growth of particle energy in one problem of nuclear physics. *Doklady AN SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR.* 1985;283(3):550–553. (In Russ.)
6. Lapin K.S. Uniform Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations and Lyapunov vector functions. *Differentsialnyye uravneniya = Differential equations.* 2018;54(1):40–50. (In Russ.). doi: 10.1134/S0374064118010053
7. Lapin K.S. Lyapunov vector functions, rotations of vector fields, direction functions and the existence of Poisson-bounded solutions. *Differen-tsialnyye uravneniya = Differential equations*. 2021;57(3):306–312. (In Russ.). doi: 10.31857/S037406412103002X
8. Lapin K.S. Lyapunov vector functions and Poisson boundedness in the limit of solutions to systems of differential equations. *Matematicheskiye zametki = Mathematical proceedings*. 2018;104(1):74–86. (In Russ.). doi: 10.4213/mzm11622

9. Rumyantsev V.V., Oziraner A.S. *Ustoychivost i stabilizatsiya dvizheniya otnositelno chasti peremennykh = Stability and stabilization of motion with respect to some variables*. Moscow: Nauka, 1987:254. (In Russ.)
10. Yosidzava T. Lyapunov function and boundedness of solutions. *Matematika = Mathematics*. 1965;(5):95–127. (In Russ.)
11. Lapin K.S. Lyapunov vector functions, Krasnosel'skii canonical domains and the existence of Poisson-bounded solutions. *Differentsialnyye uravneniya = Differential equations.* 2020;56(10):1304–1309. (In Russ.). doi: 10.1134/S0374064120100027
12. Lapin K.S. *Ogranichennost po Puassonu resheniy sistem differentsialnykh uravneniy = Poisson boundedness of solutions to systems of differential equations*. Saransk: RITS MGPU, 2022:163. (In Russ.)
13. Lapin K.S. Total Poisson boundedness and total oscillation of solutions to systems of differential equations. *Vladikavkazskiy matematicheskiy zhurnal = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2022;24(4):104–115. (In Russ.). doi: 10.46698/w0398-0994-2990-z
14. Lapin K.S. Boundedness in the limit of solutions of systems of differential equations with respect to some variables with partially controlled initial conditions. *Differentsialnyye uravneniya = Differential equations*. 2013;49(10):1281–1286. (In Russ.). doi: 10.1134/S0374064113100051
15. Abdullin R.Z., Anapolskiy L.Yu., Voronov A.A., Zemlyakov A.S., Kozlov R.I., Malikov A.I., Matrosov V.M. *Metod vektornykh funktsiy Lyapunova v teorii ustoychivosti = The method of Lyapunov vector functions in stability theory*. Moscow: Nauka, 1987:312. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Кирилл Сергеевич Лапин
доктор физико-математических наук, доцент кафедры математики, экономики и методик обучения, Мордовский государственный педагогический университет имени М. Е. Евсевьева (Россия, г. Саранск, ул. Студенческая, 11а)

Kirill S. Lapin
Doctor of physical and mathematical sciences, associate professor of the sub-department of mathematics, economics and educational methods, Mordovian State Pedagogical University named after M.E. Evseviev (11a Studencheskaya street, Saransk, Russia)

E-mail: klapin@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 25.04.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 17.05.2025

Принята к публикации / Accepted 06.06.2025