

УДК 517.968, 517.983.37
doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-2

**Численный метод решения скалярной задачи
дифракции монохроматической волны на экране
с нелинейными условиями сопряжения**

В. О. Нестеров¹, А. А. Цупак²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹nesterovvlad0_o@mail.ru, ²altsupak@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Цель исследования – разработка численного метода для решения скалярной задачи дифракции на плоском экране с нелинейными условиями сопряжения. *Материалы и методы.* Задача сопряжения сводится к слабо-сингулярному нелинейному интегральному уравнению. Для решения интегрального уравнения используется метод коллокаций. *Результаты.* Задача дифракции сведена к нелинейному интегральному уравнению по поверхности экрана. Разработан численный метод для приближенного решения интегрального уравнения. *Выводы.* Разработан и программно реализован эффективный численный метод для решения актуальной задачи дифракции.

Ключевые слова: скалярная задача дифракции, нелинейное интегральное уравнение, метод коллокации, итерационная процедура

Для цитирования: Нестеров В. О., Цупак А. А. Численный метод решения скалярной задачи дифракции монохроматической волны на экране с нелинейными условиями сопряжения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 3. С. 13–22. doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-2

**Numerical method for solving scalar problem of monochromatic
wave scattering from a screen with nonlinear transmission conditions**

V.O. Nesterov¹, A.A. Tsupak²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹nesterovvlad0_o@mail.ru, ²altsupak@yandex.ru

Abstract. *Background.* The purpose of the study is to develop a numerical approach for solving the scalar diffraction problem on a flat screen with nonlinear transmission conditions. *Material and methods.* The original problem is reduced to a weakly singular nonlinear integral equation; the collocation method is used to solve the integral equation. *Results.* The diffraction problem is reduced to a nonlinear integral equation over the screen surface; a numerical method was developed for approximate solving the integral equation. *Conclusions.* An efficient convergent numerical method was developed and implemented to solve the actual diffraction problem.

Keywords: scalar diffraction problem, nonlinear integral equation, collocation method, iterative procedure

For citation: Nesterov V.O., Tsupak A.A. Numerical method for solving scalar problem of monochromatic wave scattering from a screen with nonlinear transmission conditions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(3):13–22. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-3-2

Введение

Рассматривается скалярная задача дифракции монохроматической (плоской) волны на ограниченном плоском экране. Формулируется задача для уравнения Гельмгольца с двумя условиями сопряжения. В первом постулируется непрерывность полного поля при переходе через внутренние точки экрана. Второе условие выражает разрыв нормальной производной поля через значения самого поля на экране, а также некоторой функции точки экрана, нелинейно зависящей от поля. Условия сопряжения подобного типа возникают, например, при исследовании векторных задач дифракции электромагнитного поля на диэлектрике, покрытом слоем графена [1, 2]. В скалярных задачах акустики и гидродинамики такие условия обычно определяют соотношение между скачком давления в материале и перемещением газа (жидкости) и возникают в случае, когда граница раздела сред покрыта (бесконечно) тонким слоем некоторого материала [3–5].

Исходная краевая задача сводится (в предположении достаточной гладкости искомого решения) к нелинейному интегральному уравнению по поверхности экрана. Для приближенного решения такого уравнения предлагается использовать метод коллокаций с выбором кусочно-постоянных финитных базисных функций, который приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) для отыскания неизвестных коэффициентов, определяющих приближенное решение задачи.

В работе описана явная итерационная процедура для решения СНАУ. Проведено численное тестирование программной реализации алгоритма, установлена внутренняя сходимость численного метода; в графической форме представлены результаты решения нескольких задач дифракции.

1. Постановка задачи дифракции

Пусть $\Omega = \{(x_1, x_2, 0) : a_i < x_i < b_i\}$ – плоский бесконечно тонкий экран, расположенный в трехмерном однородном пространстве \mathbb{R}^3 . Пространство заполнено средой, характеризующейся заданным волновым числом k_0 ($\operatorname{Re} k_0 > 0$, $\operatorname{Im} k_0 \geq 0$). Во внутренних точках экрана задана функция

$$\sigma(x) = \sigma_1 + \sigma_2 |u(x)|^2, \quad (1)$$

где $u(x)$ – комплексная амплитуда полного поля; σ_1, σ_2 – заданные комплексные параметры.

Падающая плоская монохроматическая волна описывается функцией

$$u_0(x) = e^{ik_0(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Будем искать решение следующей задачи сопряжения. Искомое полное поле $u(x)$ удовлетворяет вне экрана уравнению Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k_0^2(x)u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad (2)$$

условиям сопряжения

$$[u]_{\Omega} = 0, \quad (3)$$

и

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Omega} = \sigma u|_{\Omega}, \quad (4)$$

а также условиям излучения Зоммерфельда для рассеянного поля $u_s := u - u_0$,

$$u_s(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u_s}{\partial r} = ik_0 u_s + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{при } \operatorname{Im} k_0 = 0;$$

$$u_s(r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \text{при } \operatorname{Im} k_0 > 0; \quad r := |x| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

2. Нелинейное интегральное уравнение задачи дифракции

Введем ограниченную область V_1 с гладкой границей, содержащей экран $\Omega \subset \partial V_1$. Пусть $B_R(0)$ – круг радиуса R такой, что $V_1 \subset V_2$, $\partial V_1 \cap \partial V_2 = \emptyset$. Введем ограниченную область $V_2 = B_R(0) \setminus \bar{V}_1$ с границей $\partial V_2 = S_R(0) \cup \partial V_1$ и область $V_3 := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{V}_2$. Далее используются обозначения $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} =: u_{\mathbf{n}}, \frac{\partial u}{\partial r} =: u_r$.

Пусть точка $x \in V_1$, а $u_1^+(y), u_2^-(y)$ – односторонние пределы на ∂V_1 значений $u(y)$ из областей V_1 и V_2 соответственно. Применяя формулу Грина [5, 6]:

$$\int_V (u(y)\Delta G(x, y) - \Delta u(y)G(x, y))dy = \int_{\partial V} (u(y)G_{\mathbf{n}}(x, y) - u_{\mathbf{n}}(y)G(x, y))ds_y$$

с $G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ в областях V_i ($i=1,2$) с внешними нормальными \mathbf{n}_i ,

и учитывая уравнение Гельмгольца (2), получим

$$\int_{\partial V_1} \left(u^+(y)G_{\mathbf{n}_1}(x, y) - G(x, y)u_{\mathbf{n}_1}^+(y) \right) ds_y = \int_{V_1} (u(y)\Delta G(x, y) - G(x, y)\Delta u(y)) dy =$$

$$= \int_{V_1} \left(u(y)\Delta G(x, y) + k_0^2 G(x, y)u(y) \right) dV = -u(x), \quad (6)$$

$$\int_{\partial V_1 \cup \partial V} \left(u^-(y)G_{\mathbf{n}_2}(x, y) - G(x, y)u_{\mathbf{n}_2}^-(y) \right) ds_y =$$

$$= \int_{V_2} (u(y)\Delta G(x, y) - G(x, y)\Delta u(y)) dy = 0. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{n} и \mathbf{n}' – единичные нормальные векторы, направленные во внешности областей V_1 и V_2 соответственно.

Сложим (6) и (7), примем во внимание условия (4) и противоположную направленность нормалей на поверхности ∂V ($\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$ при $y \in \partial V_1$):

$$\begin{aligned} -u(x) &= \int_{\partial V_1} \left(u^+(y) G_{\mathbf{n}_1}(x, y) - G(x, y) u_{\mathbf{n}_1}^+(y) \right) ds_y - \\ &- \int_{\partial V_1} \left(u^-(y) G_{\mathbf{n}_1}(x, y) - G(x, y) u_{\mathbf{n}_1}^-(y) \right) ds_y + \\ &+ \int_{\partial B} \left(u(y) G_{\mathbf{n}_2}(x, y) - G(x, y) u_{\mathbf{n}_2}(y) \right) ds_y, \\ u(x) &= - \int_{\partial V_1} (u^+ - u^-)(y) G_{\mathbf{n}_1}(x, y) ds_y + \int_{\partial V_1} G(x, y) (u_{\mathbf{n}_1}^+ - u_{\mathbf{n}_1}^-)(y) ds_y + \\ &- \int_{\partial B} \left(u_0(y) G_{\mathbf{n}'}(x, y) - G(x, y) u_{0, \mathbf{n}'}(y) \right) ds_y - \\ &- \int_{\partial B} \left(u_s(y) G_{\mathbf{n}'}(x, y) - G(x, y) u_{s, \mathbf{n}'}(y) \right) ds_y. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждый из четырех интегралов подробнее. В силу первого условия сопряжения на экране первый из интегралов равен нулю. Преобразуем второй интеграл с учетом (4):

$$\int_{\partial V_1} G(x, y) (u_{\mathbf{n}_1}^+ - u_{\mathbf{n}_1}^-)(y) ds_y = \int_{\Omega} G(x, y) [u_{\mathbf{n}_1}](y) dy = \int_{\Omega} G(x, y) \sigma(y) u(y) dy.$$

К третьему интегралу снова применим формулу Грина и учтем, что падающая волна удовлетворяет уравнению Гельмгольца $(\Delta + k_0^2)u_0(y) = 0$:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial B} \left(u_0(y) G_{\mathbf{n}}(x, y) - G(x, y) u_{0, \mathbf{n}}(y) \right) ds_y = \\ &= \int_B \left(u_0(y) \Delta G(x, y) - \Delta u_0(y) G(x, y) \right) dy = -u_0(x). \end{aligned}$$

Выполним оценку четвертого интеграла. Для любого фиксированного $x \in Q$ и $|y| \rightarrow +\infty$ имеем

$$G(x, y) = O(|x - y|^{-1}) = O(R^{-1}), \quad G_{\mathbf{n}}(x, y) = O(|x - y|^{-2}) = O(R^{-2}),$$

откуда с учетом (5) выводим, что

$$\int_{\partial B} \left(u_s(y) G_{\mathbf{n}}(x, y) - G(x, y) u_{s, \mathbf{n}}(y) \right) ds_y \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, получаем интегральное представление в произвольной точке области V_1 , а следовательно, и для любого $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) u(y) \sigma(y) ds_y + u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Из условия непрерывности поля во внутренних точках экрана и представления проводимости на экране получим нелинейное интегральное уравнение

$$u(x) - \sigma_1 \int_{\Omega} G(x, y) u(y) ds_y - \sigma_2 \int_{\Omega} G(x, y) |u(y)|^2 u(y) ds_y = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

3. Численный метод решения нелинейного интегрального уравнения

Опишем метод коллокаций [7, 8] для решения уравнения (8).

На экране $\Omega = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ введем равномерную сетку и конечные элементы, определенные через число разбиений $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{k, i_k} = a_k + i_k h_k, \quad h_k = \frac{b_k - a_k}{n}, \quad k = 1, 2, \quad i_k = 0, \dots, n;$$

$$\Omega_i := \Omega_{i_1, i_2} = [x_{1, i_1}; x_{1, i_1+1}] \times [x_{2, i_2}; x_{2, i_2+1}], \quad i_1, i_2 = \overline{0, n-1}.$$

Здесь i – номера конечных элементов при их одноиндексной нумерации. В качестве базисных функций будем использовать индикаторы множеств Ω_i :

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_i, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_i, \end{cases}$$

а в качестве узлов коллокации – центры ξ_i областей Ω_i .

Приближенные решения $u_n(x)$ интегрального уравнения запишем в виде

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^N c^j \chi_j(x) \quad (N = n^2).$$

Неизвестные коэффициенты c^j можно найти из системы нелинейных уравнений (всюду ниже для краткости знак суммирования по повторяющемуся индексу будет опускаться):

$$c^j \chi_j(\xi_i) - \sigma_1 c^j \int_{\Omega_j} G(\xi_i, y) ds_y - \sigma_2 \left| c^j \right|^2 c^j \int_{\Omega_j} G(\xi_i, y) ds_y = u_0(\xi_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (9)$$

Введя обозначение $\int_{\Omega_j} G(\xi_i, y) = G_{ij}$, получим краткий вид системы (9):

$$c^i - (\sigma_1 c^j + \sigma_2 \left| c^j \right|^2 c^j) G_{ij} = u_0(\xi_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (10)$$

Для приближенного решения СНАУ (10) рассмотрим явную итерационную процедуру: компоненты c_{m+1}^i вектора неизвестных \vec{c}_{m+1} (это m -е приближение вектора коэффициентов \vec{c}) будем вычислять по формуле

$$c_{m+1}^i = (\sigma_1 c_m^j + \sigma_2 |c_m^j|^2 c_m^j) G_{ij} + u_0(\xi_i), \quad i = \overline{0, N}. \quad (11)$$

В качестве начального приближения \vec{c}_0 в итерационной процедуре выберем решение системы (10) при $\sigma_2 = 0$, отвечающее линейному интегральному уравнению (и случаю постоянной проводимости на экране).

4. Результаты численного решения задачи дифракции

В первом вычислительном эксперименте исследована внутренняя сходимость метода коллокаций при следующих предположениях:

$$\Omega = [0; 1]^2, k_0 = 1, \sigma_1 = 0,5 + 0,3i, \sigma_2 = 0,1 + 0,1i, u_0(x) = e^{ik_0(0,6x_3 - 0,8x_1)}.$$

На рис. 1 представлены графики модуля приближенных решений $|u_n(x)|$ для нескольких значений числа разбиения сетки n . Для решения СНАУ в этом тесте использовалась явная итерационная процедура со следующим условием выхода: $\max_i |c_m^i - c_{m+1}^i| < 10^{-10}$.

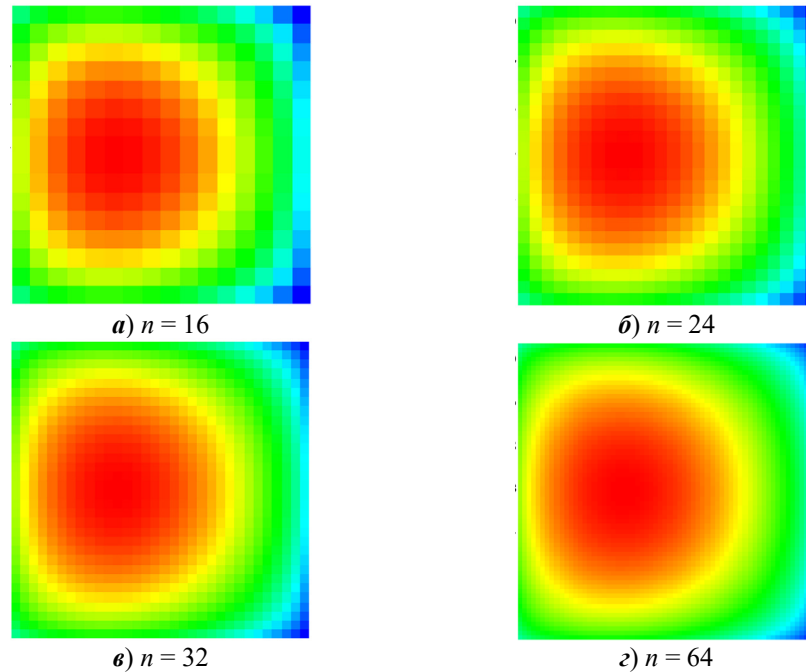


Рис. 1. Графики $|u_n(x)|$ при $n = 16, 24, 32$ и 64

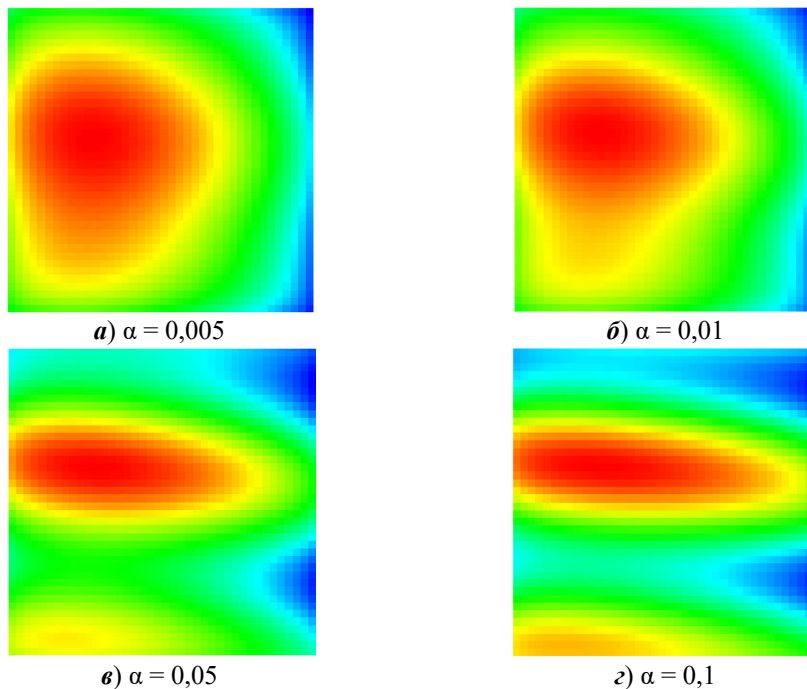
В табл. 1 приведены значения отклонения приближенных решений друг от друга по норме $\|f\|_\infty = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$.

Таблица 1

Значения $\|u_{n_1} - u_{n_2}\|_\infty$

n_1	8	16	24	32	48
n_2	16	24	32	48	64
$\ u_{n_1} - u_{n_2}\ _\infty$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$5,8 \cdot 10^{-3}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$

Исследована устойчивость решения нелинейного интегрального уравнения к возмущению его правой части. На рис. 2 показаны решения задачи с правыми частями вида $u_0(x) = e^{ik_0(0,6x_3 - 0,8x_1)} + \alpha e^{i10k_0x_2}$ для нескольких значений параметра α ; приведенные результаты иллюстрируют непрерывную зависимость решений от правой части.

Рис. 2. Графики $|u_{n,\alpha}(x)|$ при $\alpha = 0,005, 0,01, 0,05$ и $0,1$

В третьем тесте (рис. 3) исследована зависимость решения интегрального уравнения от величины волнового числа. Форма экрана в этом тесте прежняя, а падающая плоская описывается функцией $u_0(x) = e^{ik_0(0,8x_1 - 0,6x_2)}$.

В четвертом тесте (рис. 4) численно исследовано влияние нелинейности в условии сопряжения на экране на решения интегрального уравнения. Форма экрана в этом тесте прежняя, падающая плоская описывается функцией $u_0(x) = e^{ik_0x_1}$, $k_0 = 10$, а комплексная проводимость экрана задается парой коэффициентов $\sigma_1 = 0,5$, $\sigma_2 = (0,1 + 0,1i)\sigma_n$. Проведены расчеты при нескольких значениях коэффициента σ_n .

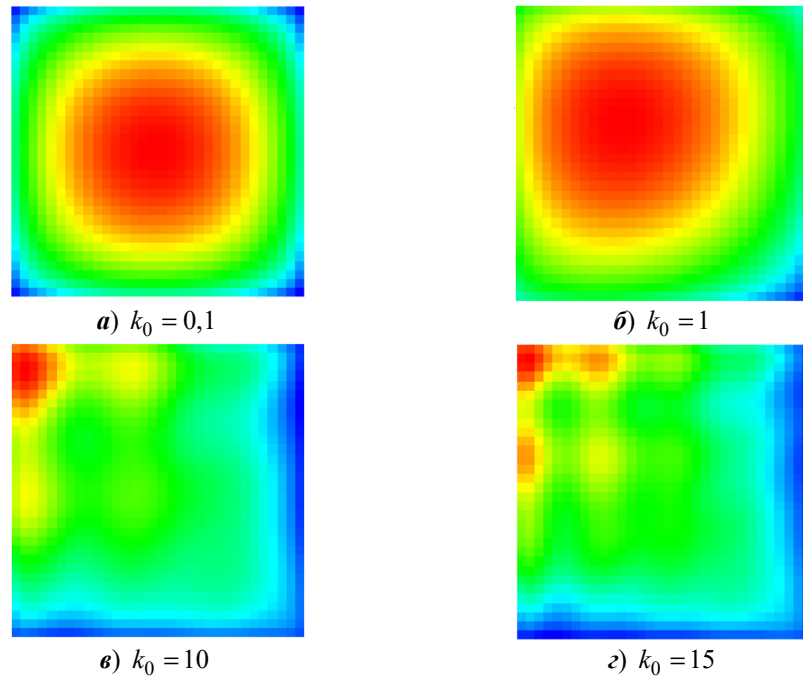


Рис. 3. Графики $|u_n(x)|$ $k_0 = 0,1, 1, 10$ и 15

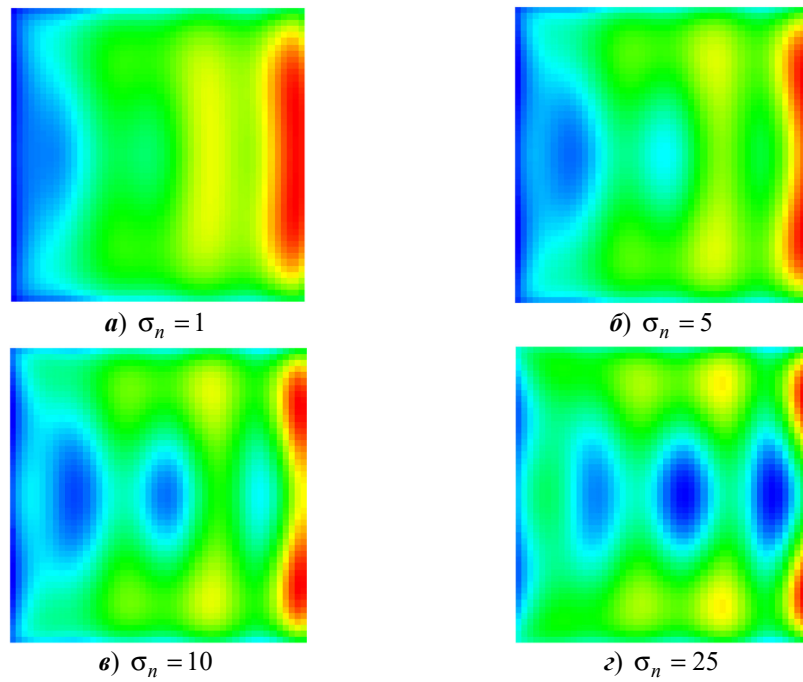


Рис. 4. Графики $|u_n(x)|$ при $\sigma_n = 1, 5, 10$ и 25

Заключение

В работе численно исследована скалярная задача дифракции монохроматической волны на плоском экране с нелинейными условиями сопряжения

третьего рода. Краевая задача, сформулированная в неограниченном трехмерном пространстве, сведена к нелинейному интегральному уравнению по поверхности экрана; для численного решения интегрального уравнения применен метод коллокаций. Программно реализованы две итерационные процедуры для приближенного решения задачи. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие внутреннюю сходимость предложенного численного метода, его устойчивость к входным данным задачи, а также эффективность для решения задач дифракции в достаточно широком диапазоне частот и при значительной нелинейности на экране.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. Интегро-дифференциальные уравнения в задаче рассеяния электромагнитных волн на диэлектрическом теле, покрытом графеном // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 9. С. 1216–1224.
2. Цупак А. А. Метод интегральных уравнений в задаче распространения электромагнитной волны в пространстве, заполненном локально неоднородной средой, со слоем графена на границе области неоднородности // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 96–106.
3. Colbrook M. J., Ayton L. J. Do we need non-linear corrections? On the boundary Forchheimer equation in acoustic scattering // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 495. P. 115905. doi: 10.1016/j.jsv.2020.115905
4. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнений Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1089–1097.
5. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / пер. с англ. Ю. А. Еремина, Е. В. Захарова ; под ред. А. Г. Свешникова. М. : Мир, 1987. 311 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981. 512 с.
7. Kress R. Linear integral equations. Berlin : Springer-Verlag, 1989. 367 p.
8. Цупак А. А. Сходимость метода коллокаций для интегрального уравнения Липпмана – Швингера // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 4. С. 84–93.

References

1. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. Integro-differential equations in the problem of scattering of electromagnetic waves on a dielectric body covered with graphene. *Differentsialnyye uravneniya = Differential equations*. 2024;60(9):1216–1224. (In Russ.)
2. Tsupak A.A. The method of integral equations in the problem of electromagnetic wave propagation in a space filled with a locally inhomogeneous medium, with a graphene layer on the boundary of the inhomogeneity region. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;1. S. 96–106. (In Russ.)
3. Colbrook M.J., Ayton L.J. Do we need non-linear corrections? On the boundary Forchheimer equation in acoustic scattering. *Journal of Sound and Vibration*. 2021;495:115905. doi: 10.1016/j.jsv.2020.115905
4. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. On the Fredholm property and solvability of a system of integral equations in the conjugacy problem for the Helmholtz equations. *Differentsialnyye uravneniya = Differential equations*. 2023;59(8):1089–1097. (In Russ.)
5. Koltun D., Kress R. *Metody integralnykh uravneniy v teorii rasseyaniya = Methods of integral equations in scattering theory*. Transl. from Eng. by Yu.A. Yeremina, E.V. Zakharova; ed. by A.G. Sveshnikov. Moscow: Mir, 1987:311. (In Russ.)

6. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki = Equations of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1981:512. (In Russ.)
7. Kress R. *Linear integral equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1989:367.
8. Tsupak A.A. Convergence of the collocation method for the Lippmann–Schwinger integral equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskiye nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2018;(4):84–93. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владислав Олегович Нестеров

аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: nesterovvlad0_o@mail.ru

Vladislav O. Nesterov

Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Алексей Александрович Цупак

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: altsupak@yandex.ru

Aleksey A. Tsupak

Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, associate professor of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 17.06.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 12.07.2025

Принята к публикации / Accepted 14.08.2025