

УДК 539.23; 539.216.1
doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-10

Фотодиэлектрический эффект, связанный с возбуждением примесных комплексов $A^+ + e$ в квазиульмерных структурах в условиях 1D-диссипативного туннелирования во внешнем магнитном поле

В. Д. Кревчик¹, А. В. Разумов², М. Б. Семенов³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹physics@pnzgu.ru, ²razumov_alex@mail.ru, ³Misha29.02.2@gmail.com

Аннотация. *Актуальность и цели.* В настоящее время значительный интерес представляют способы бесконтактного управления диэлектрическими свойствами полупроводниковых наноструктур и окружающей их матрицы. Оптическая модуляция диэлектрической проницаемости в сочетании с управляемыми туннельными процессами дают возможность направленного изменения свойств низкоразмерных структур и, как следствие, оптимизации характеристик приборов полупроводниковой наноэлектроники. В этой связи полупроводниковые квантовые точки, туннельно-связанные с окружающей матрицей, представляют интерес, так как в таких структурах возможно образование примесных комплексов $A^+ + e$, фотовозбуждение которых может приводить к фотодиэлектрическому эффекту (ФДЭ). Цель работы заключается в теоретическом исследовании влияния туннельной прозрачности потенциального барьера на ФДЭ, связанный с возбуждением примесных комплексов $A^+ + e$ в квазиульмерных структурах во внешнем магнитном поле. *Материалы и методы.* Относительное изменение диэлектрической проницаемости (ОИДП) рассчитано в дипольном приближении. Кривые полевой зависимости ОИДП построены для InSb квантовой точки. Численные расчеты и построение графиков проводились с помощью систем численной математики Mathcad 14.0 и Wolfram Mathematica 10.2. *Результаты.* В дипольном приближении исследована зависимость ОИДП в квазиульмерной полупроводниковой наноструктуре от величины индукции внешнего магнитного поля и параметров 1D-диссипативного туннелирования. Выявлен дихроизм ФДЭ, связанный с наличием внешнего магнитного поля. Показано, что внешнее магнитное поле подавляет ФДЭ, что связано с усилением локализации электронной волновой функции в магнитном поле, а также с модификацией электронного адиабатического потенциала. Показано, что величина ОИДП зависит от параметров диссипативного 1D-туннелирования. *Выводы.* В магнитном поле возможно эффективное управление ФДЭ за счет модификации электронного адиабатического потенциала и электронной волновой функции путем варьирования параметров диссипативного туннелирования.

Ключевые слова: фотодиэлектрический эффект, магнитное поле, квантовая точка, адиабатическое приближение, примесный комплекс, относительная диэлектрическая проницаемость, 1D-диссипативное туннелирование, электронный адиабатический потенциал, квазиульмерная структура

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта Министерства науки и высшего образования Российской Федерации 0748-2020-0012.

Для цитирования: Кревчик В. Д., Разумов А. В., Семенов М. Б. Фотодиэлектрический эффект, связанный с возбуждением примесных комплексов $A^+ + e$ в квазиульмерных структурах в условиях 1D-диссипативного туннелирования во внешнем маг-

Photodielectric effect associated with excitation of impurity complexes $A^+ + e$ in quasi-zero-dimensional structures under conditions of 1D-dissipative tunneling in an external magnetic field

V.D. Krevchik¹, A.V. Razumov², M.B. Semenov³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹physics@pnzgu.ru, ²razumov_alex@mail.ru, ³Misha29.02.2@gmail.com

Abstract. *Background.* Currently, methods of contactless control of the dielectric properties of semiconductor nanostructures and the matrix surrounding them are of considerable interest. Optical modulation of permittivity in combination with controlled tunneling processes makes it possible to change the properties of low-dimensional structures in a targeted manner and, as a consequence, optimize the characteristics of semiconductor nanoelectronic devices. In this regard, semiconductor quantum dots tunnel-coupled to the surrounding matrix are of interest, since in such structures the formation of impurity complexes $A^+ + e$ is possible, the photoexcitation of which can lead to the photodielectric effect (PDE). The purpose of the work is to theoretically study the influence of tunnel transparency of the potential barrier on the PDE associated with the excitation of impurity complexes $A^+ + e$ in quasi-zero-dimensional structures in an external magnetic field. *Materials and methods.* The relative change in permittivity (RCDP) is calculated in the dipole approximation. The field dependence curves of RCDP are plotted for an InSb quantum dot. Numerical calculations and plotting were performed using the numerical mathematics systems Mathcad 14.0 and Wolfram Mathematica 10.2. *Results.* The dependence of the RCDP in a quasi-zero-dimensional semiconductor nanostructure on the magnitude of the external magnetic field induction and the parameters of 1D dissipative tunneling was investigated in the dipole approximation. Dichroism of PDE associated with the presence of an external magnetic field was detected. It is shown that an external magnetic field suppresses PDE, which is associated with an increase in the localization of the electron wave function in the magnetic field, as well as with a modification of the electron adiabatic potential. It is shown that the magnitude of the RCDP depends on the parameters of dissipative 1D tunneling. *Conclusions.* In a magnetic field, effective control of the PDE is possible by modifying the electron adiabatic potential and the electron wave function by varying the parameters of dissipative tunneling.

Keywords: photodielectric effect, magnetic field, quantum dot, adiabatic approximation, impurity complex, relative permittivity, 1D-dissipative tunneling, electron adiabatic potential, quasi-zero-dimensional structure

Financing: the research was supported by the grant 0748-2020-0012 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Krevchik V.D., Razumov A.V., Semenov M.B. Photodielectric effect associated with excitation of impurity complexes $A^+ + e$ in quasi-zero-dimensional structures under conditions of 1D-dissipative tunneling in an external magnetic field. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2025;(2):134–165. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-10

Введение

В настоящей работе проанализирована возможность регистрации возбужденных состояний примесных комплексов $A^+ + e$ по их вкладу в диэлектрическую проницаемость полупроводниковой квазиульмерной структуры

при внутризонных оптических переходах электронов во внешнем магнитном поле в условиях туннельного распада. Ранее [1–3] нами было показано, что фотовозбуждение примесных комплексов $A^+ + e$ за счет роста поляризуемости может приводить к заметному изменению диэлектрической проницаемости полупроводниковой квазиульмерной структуры – фотодиэлектрическому эффекту (ФДЭ). В данной работе мы учли влияние 1D-диссипативного туннелирования на ФДЭ в квазиульмерной структуре во внешнем магнитном поле. Учет 1D-диссипативного туннелирования дает дополнительные степени свободы для управления ФДЭ путем варьирования таких параметров диссипативного туннелирования, как температура, частота фононной моды и константа взаимодействия с контактной средой.

Цель работы заключается в теоретическом исследовании влияния внешнего магнитного поля и параметров 1D-туннельного распада на ФДЭ, связанный с возбуждением примесных комплексов $A^+ + e$ в квазиульмерных структурах, представляющих собой прозрачную диэлектрическую матрицу с синтезированными в ней полупроводниковыми квантовыми точками (КТ).

1. Энергия связи комплекса $A^+ + e$ в полупроводниковой квантовой точке в условиях фотовозбуждения во внешнем магнитном поле при наличии 1D-диссипативного туннелирования

Процесс фотовозбуждения примесного комплекса $A^+ + e$ связан с оптическими переходами электрона из основного состояния КТ в возбужденные состояния размерно-квантованной зоны проводимости во внешнем магнитном поле. Учет кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой, локализованной на A^0 -центре, приводит к тому, что в результате электронных переходов будет изменяться энергия связанного состояния дырки вследствие изменения электронного адиабатического потенциала, который при фиксированном радиусе КТ зависит только от начального и конечного состояния электрона.

Рассмотрим задачу о связанных состояниях дырки в примесном комплексе $A^+ + e$ в полупроводниковой сферически симметричной КТ во внешнем магнитном поле в условиях 1D-диссипативного туннелирования. В качестве модели удерживающего потенциала КТ используем потенциал бесконечно глубокой сферически симметричной ямы:

$$U(\rho) = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho \leq R_0, \\ \infty, & \text{если } \rho \geq R_0, \end{cases} \quad (1)$$

где R_0 – радиус КТ.

Взаимодействие электрона, находящегося в основном состоянии КТ с дыркой, локализованной на A^0 -центре, будем рассматривать в рамках адиабатического приближения. В этом случае электронный потенциал $V_{n,l,m}(\vec{r})$, действующий на дырку, можно считать усредненным по движению электрона [4]:

$$V_{n,l,m}(\vec{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_0^{R_0} \frac{|\Psi_{n,l,m}(\vec{r}_e)|^2}{|\vec{r} - \vec{r}_e|} d\vec{r}_e, \quad (2)$$

где e – заряд электрона; ϵ – статическая диэлектрическая проницаемость материала КТ; ϵ_0 – электрическая постоянная; $\Psi_{n,l,m}(\vec{r}_e)$ – волновая функция электрона в КТ; n – радиальное квантовое число электрона; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ – магнитное квантовое число; $l = 0, 1, 2, \dots$ – орбитальное квантовое число.

В первом порядке теории возмущений для основного состояния электрона ($m = 0, l = 0$) потенциал (2) может быть записан в виде [5]:

$$V_{n,0,0}(\rho, z) = -\frac{e^2\beta_n}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} + \frac{m_h^*\omega_n^2}{2}(\rho^2 + z^2), \quad (3)$$

где $\beta_n = \gamma_0 - Ci(2\pi n) + \ln(2\pi n)$; $\hbar\omega_n = \left[\left(2\hbar^2\pi^2 n^2 e^2 \right) / \left(3m_h^* R_0^3 4\pi\epsilon_0\epsilon \right) \right]^{1/2}$; ρ, z – цилиндрические координаты; $\gamma_0 = 1,781$ – постоянная Эйлера; $Ci(x)$ – интегральный косинус; m_h^* – эффективная масса дырки.

Наложение действующего на дырку внешнего магнитного поля требует модификации формулы (3) путем введения слагаемого, содержащего циклотронную частоту $\omega_B = |e|B / m_h^*$, что в итоге приводит к следующему выражению для адиабатического потенциала (3):

$$V_{n,0,0}^B(\rho, z) = -\frac{e^2\beta_n}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} + \frac{m_h^*}{2} \left(\omega_n^2 + \frac{\omega_B^2}{4} \right) \rho^2 + \frac{m_h^* z^2}{2} \omega_n^2. \quad (4)$$

Как известно [6], волновая функция и энергетический спектр, соответствующие потенциалу (4), имеют вид

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, m, n_2}(\rho, \varphi, z) = & \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{n_1!}{2^{n_2+1} \pi^2 n_2! (n_1 + |m|)! a_n} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{2a_1^2} \right)^{\frac{|m|}{2}} \times \\ & \times \exp \left[- \left(\frac{\rho^2}{4a_1^2} + \frac{z^2}{2a_n^2} \right) \right] H_{n_2} \left(\frac{z}{a_n} \right) L_{n_1}^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{2a_1^2} \right) \exp(im\varphi), \end{aligned} \quad (5)$$

где $n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$ – квантовые числа, соответствующие уровням Ландау и уровням энергии осцилляторной сферически симметричной ямы; $a_1^2 = a_n^2 / \left(2\sqrt{1 + a_n^4 / (4a_B^4)} \right)$; $a_n = \sqrt{\hbar / (m_h^* \omega_n)}$ – характерная длина осцилля-

тора; $a_B = \sqrt{\hbar / (m^* \omega_B)}$ – магнитная длина; $H_n(x)$, $L_n^c(x)$ – полиномы Эрмита и Лаггера соответственно [7];

$$E_{n_1, m, n_2}^{n, 0, 0} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_0} \beta_n + \hbar\omega_n \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_n (2n_1 + |m| + 1) \sqrt{1 + \frac{\omega_B^2}{8\omega_n^2} + \frac{\hbar\omega_B m}{2}}. \quad (6)$$

Далее используем процедуру потенциала нулевого радиуса для получения дисперсионного уравнения, определяющего зависимость энергии связи примесного комплекса $A^+ + e$ в КТ от внешнего магнитного поля и параметров диссипативного туннелирования.

Короткодействующий потенциал примеси описывается в рамках модели потенциала нулевого радиуса

$$V_\delta(\rho, \varphi, z; \rho_a, \varphi_a, z_a) = \gamma \frac{\delta(\rho - \rho_a)}{\rho} \delta(\varphi - \varphi_a) \delta(z - z_a) \times \left[1 + (\rho - \rho_a) \frac{\partial}{\partial \rho} + (z - z_a) \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (7)$$

где $\gamma = 2\pi\hbar^2 / (\alpha m_h^*)$ – мощность потенциала нулевого радиуса; α определяется энергией E_i связанного состояния этого же A^+ -центра в объемном полупроводнике; ρ_a , z_a – координаты A^+ -центра в КТ.

Однодырочная функция Грина $G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_{\lambda h0})$ к уравнению Шредингера, соответствующая источнику в точке $\vec{r}_1 = (\rho_1, \varphi_1, z_1)$ и энергии $E_{\lambda h0}$, запишется в виде

$$G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_{\lambda h0}) = - \sum_{n_1, m, n_2} \frac{\Psi_{n_1, m, n_2}^{(n)*}(\rho_1, \varphi_1, z_1) \Psi_{n_1, m, n_2}^{(n)}(\rho, \varphi, z)}{-E_{\lambda h0} + E_{n_1, m, n_2}^{n, 0, 0} + i\hbar\Gamma_0}, \quad (8)$$

где $E_{\lambda h0}$ – энергия связи дырки, отсчитываемая от дна электронного адиабатического потенциала; Γ_0 – вероятность диссипативного туннелирования.

Используя выражения для одночастичных волновых функций (5) и энергетического спектра (6), для функции Грина $G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_{\lambda h0})$ в единицах эффективной боровской энергии $E_h = \hbar^2 / (2m_h^* a_h^2)$ и эффективного боровского радиуса дырки $a_h = 4\pi\epsilon_0\epsilon\hbar^2 / (m_h^* |e|^2)$, получим

$$\begin{aligned}
 G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a, E_{\lambda h}) &= \frac{-\beta_{h0}}{2\pi^2 a_n^3 E_h} \exp \left[- \left(\frac{\rho^2 + \rho_a^2}{4a_1^2} + \frac{z^2 + z_a^2}{2a_n^2} \right) \right] \times \\
 &\times \int_0^{+\infty} dt \exp \left[- \left(-\eta_{\lambda h0}^2 \beta_{h0} - \beta_0 + i\Gamma_0^* \beta_{h0} + w + 1 \right) t \right] \times \\
 &\times \sum_{n_2=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{2} \right)^{n_2} \frac{H_{n_2} \left(\frac{z_a}{a_n} \right) H_{n_2} \left(\frac{z}{a_n} \right)}{n_2!} \times \\
 &\times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-w|m|t) \left(\frac{\rho^2 \rho_a^2}{2a_1^2} \right)^{|m|} \exp \left(im \left((\varphi - \varphi_a) - \beta_n a^{*-2} t \right) \right) \times \\
 &\times \sum_{n_1=0}^{+\infty} \frac{n_1!}{(n_1 + |m|)!} L_{n_1}^{|m|} \left(\frac{\rho^2}{2a_1^2} \right) L_{n_1}^{|m|} \left(\frac{\rho_a^2}{2a_1^2} \right) \exp[-2n_1 wt], \quad (9)
 \end{aligned}$$

здесь $\eta_{\lambda h0}^2 = |E_{\lambda h0}|/E_h$; $\beta_0 = \beta_n e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_0^* a_n E_h$; $\Gamma_0^* = \hbar\Gamma_0 / E_h$; $R_0^* = R_0 / a_h$; $\beta_{h0} = E_h / \hbar\omega_n$; $a^* = a_B / a_h$; $w = \sqrt{1 + \beta_h^2 a^{*-4}} / 2$; $z_a^* = z_a / a_h$; $\rho_a^* = \rho_a / a_h$; a_h – эффективный боровский радиус дырки.

Далее, выполняя суммирование по квантовым числам n_1 , n_2 , m и выделяя расходящуюся часть (см. например [8]), получим

$$\begin{aligned}
 G(\rho, \varphi, z, \rho_a, \varphi_a, z_a; E_{\lambda h0}) &= - \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\beta_{h0}} E_h a_h^3} \left\{ \exp \left[- \frac{(\rho_a^2 + \rho^2)w + z_a^2 + z^2}{4\beta_{h0} a_h^2} \right] \times \right. \\
 &\times \int_0^{+\infty} dt \exp \left[- \left(-\beta_{h0} (\eta_{\lambda h0}^2 - i\Gamma_0^*) - \beta_0 + w + \frac{1}{2} \right) t \right] \times \\
 &\quad \left[w(1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2wt])^{-1} \times \right. \\
 &\quad \times \exp \left\{ \frac{2z_a z e^{-t} - (z_a^2 + z^2) e^{-2t}}{2\beta_{h0} a_h^2 (1 - e^{-2t})} \right\} \exp \left[- \exp[-2wt] \frac{(\rho_a^2 + \rho^2)w}{2\beta_{h0} a_h^2 (1 - \exp[-2wt])} \right] \times \\
 &\quad \times \exp \left[\frac{1}{2} \left(\exp \left[i(\varphi - \varphi_a) - \beta_{h0} a^{*-2} t \right] + \exp \left[-i(\varphi - \varphi_a) + \beta_{h0} a^{*-2} t \right] \right) \right] \times
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{w\rho_a \rho \exp[-wt]}{\beta_{h0} a_h^2 (1 - \exp[-2wt])} \left] - t^{-\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{(\rho - \rho_a)^2 w + (z - z_a)^2}{4\beta_{h0} a_h^2 t} \right] \right] + 2\sqrt{\pi\beta_{h0}} a_h \times$$

$$\times \frac{\exp \left[-\sqrt{\frac{(-2\beta_{h0} \eta_{\lambda h0}^2 - 2\beta_0 + i2\Gamma_0^* \beta_{h0} + 2w + 1) \left((\rho - \rho_a)^2 w + (z - z_a)^2 \right)}{2\beta_{h0} a_h^2}} \right]}{\sqrt{(\rho - \rho_a)^2 w + (z - z_a)^2}} \right] \}. \quad (10)$$

Энергия связанного состояния дырки в суммарном поле (включая магнитное поле, адиабатический потенциал и яму нулевого радиуса, находящуюся в точке ρ_a, Φ_a, z_a) является полюсом функции Грина и решением уравнения [8]:

$$\alpha = \frac{2\pi\hbar^2}{m^*} (\hat{T}G)(\rho_a, \Phi_a, z_a, \rho_a, \Phi_a, z_a; E_{\lambda h}), \quad (11)$$

где

$$(\hat{T}G)(\rho_a, \Phi_a, z_a, \rho_a, \Phi_a, z_a; E_{\lambda h}) =$$

$$= \lim_{\substack{\rho \rightarrow \rho_a \\ \Phi \rightarrow \Phi_a \\ z \rightarrow z_a}} \left[1 + (\rho - \rho_a) \frac{\partial}{\partial \rho} + (z - z_a) \frac{\partial}{\partial z} \right] G(\rho, \Phi, z, \rho_a, \Phi_a, z_a; E_{\lambda h}).$$

Подставляя (10) в (11) и выполняя необходимые преобразования, получим дисперсионное уравнение дырки, локализованной на A^0 -центре в КТ в магнитном поле:

$$\sqrt{-\eta_{\lambda h0}^2 - \beta_0 \beta_{h0}^{-1} + (2\beta_{h0})^{-1} + w_0 \beta_{h0}^{-1} + i\Gamma_0^*} = \eta_i -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_{h0}}} \int_0^{+\infty} dt \exp \left[-\left(-\beta_{h0} \eta_{\lambda h0}^2 - \beta_0 + w_0 + i\beta_{h0} \Gamma_0^* + \frac{1}{2} \right) t \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2t\sqrt{2t}} - w_0 (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp(-2w_0 t))^{-1} \exp \left[-\frac{z_a^{*2}}{2\beta_{h0}} \operatorname{ctg} \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{w_0 \rho_a^{*2} (1 + \exp(-2w_0 t)) - 2 \exp(-w_0 t) \operatorname{ch}(\beta_{h0} a^{*-2} t)}{2\beta_{h0} (1 - \exp(-2w_0 t))} \right] \}, \quad (12)$$

где $\eta_{\lambda h0}^2 = E_{\lambda h0}/E_h$; $E_{\lambda h0}$ – энергия связи дырки, отсчитываемая от дна электронного адиабатического потенциала; E_h – эффективная боровская

энергия дырки; $\beta_0 = \beta_{h0} e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_0^* a_h E_h$; $R_0^* = R_0 / a_h$; $\beta_{h0} = E_h / \hbar\omega_n$;
 $w_0 = \sqrt{1 + \beta_{h0}^2 a^{*-4}} / 2$; $a^* = a_B / a_h$; $a_B = \sqrt{\hbar / (m_e^* \omega_B)}$ – магнитная длина;
 $\eta_i^2 = |E_i| / E_h$; E_i – энергия связанного состояния дырки, локализованной на
 таком же A^+ -центре в объемном полупроводнике; причем средняя энергия
 связи $\bar{E}_{\lambda h}$ квазистационарного A^+ -состояния определяется как $\bar{E}_{\lambda h} =$
 $= E_{0,0,0} - \text{Re} E_{\lambda h}$, $E_{0,0,0}$ – энергия основного состояния КТ, а уширение ква-
 зистационарного уровня $\Delta E = 2 \text{Im} E_{\lambda h}$.

В одноинстантонном приближении вероятность туннельного распада
 (диссипативного туннелирования) Γ_0 можно представить в виде

$$\Gamma_0 = B^* \exp(-S_B), \quad (13)$$

где B_0 и S_B определяются следующим образом (в боровских единицах) [9]:

$$\begin{aligned}
 B^* = & \frac{E_d}{\hbar} \frac{2\sqrt{U_0^*} (1+b^*) \sqrt{\epsilon_T}}{\sqrt{\pi}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{A^* \left[\beta_1^* \text{ch} \left(\frac{\beta_1^*}{2} \right) - 1 \right] + D^* \left[\beta_2^* \text{ch} \left(\frac{\beta_2^*}{2} \right) - 1 \right]}{\left\{ A^* \left[\frac{\beta_1^* \text{ch} \left(\frac{\beta_1^*}{2} - \tau_{01}^* \right)}{\text{sh} \left(\frac{\beta_1^*}{2} \right)} - 1 \right] + D^* \left[\frac{\beta_2^* \text{ch} \left(\frac{\beta_2^*}{2} - \tau_{02}^* \right)}{\text{sh} \left(\frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right] \right\}^{1/2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{A^* \left[1 - \frac{\beta_1^* \text{ch} \left(\frac{\beta_1^*}{2} - \tau_{01}^* \right)}{\text{sh} \left(\frac{\beta_1^*}{2} \right)} \right] + D^* \left[\frac{\beta_2^* \text{ch} \left(\frac{\beta_2^*}{2} - \tau_{02}^* \right)}{\text{sh} \left(\frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right]}{\left\{ A^* \left[\frac{\beta_1^* \text{ch} \left(\frac{\beta_1^*}{2} - \tau_{01}^* \right)}{\text{sh} \left(\frac{\beta_1^*}{2} \right)} - 1 \right] + D^* \left[\frac{\beta_2^* \text{ch} \left(\frac{\beta_2^*}{2} - \tau_{02}^* \right)}{\text{sh} \left(\frac{\beta_2^*}{2} \right)} - 1 \right] \right\}^{1/2}} \right\}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

где

$$A^* = \omega_0^2 \frac{A}{2\gamma_1} = \frac{2\epsilon_L^* a^{*2} - \gamma_{\delta,p}^{(-)}}{(\gamma_{\delta,p}^{(-)} - \gamma_{\delta,p}^{(+)}) \gamma_{\delta,p}^{(-)}}, \quad D^* = \omega_0^2 \frac{D}{2\gamma_1} = \frac{2\epsilon_L^* a^{*2} - \gamma_{\delta,p}^{(+)}}{(\gamma_{\delta,p}^{(-)} - \gamma_{\delta,p}^{(+)}) \gamma_{\delta,p}^{(+)},$$

$$\beta_1^* = \sqrt{\gamma_1} \beta = \frac{\sqrt{2} \sqrt{U_0^*}}{a^* \varepsilon_T^*} \sqrt{\gamma_{\delta,p}^{(-)}}, \quad \beta_2^* = \sqrt{\gamma_2} \beta = \frac{\sqrt{2} \sqrt{U_0^*}}{a^* \varepsilon_T^*} \sqrt{\gamma_{\delta,p}^{(+)}}$$

$$\tilde{\tau}_{01}^* = 2\sqrt{\gamma_1} \tau_0 = \sqrt{\gamma_{\delta,p}^{(-)}} \tau_0^* \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{\tau}_{02}^* = 2\sqrt{\gamma_2} \tau_0 = \sqrt{\gamma_{\delta,p}^{(+)}} \tau_0^* \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Выражение для S_B имеет вид

$$S_B = a^* \sqrt{U_0^*} \left\{ \frac{1}{2} (b^* + 1)(3 - b^*) \tau_0^* - \frac{(b^* + 1)^2 (\tau_0^*)^2}{2\beta^*} - \frac{(b^* + 1)^2}{2\tilde{\gamma}^*} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{(1 - \tilde{x}'_2)}{\sqrt{\tilde{x}'_1}} \left[\operatorname{cth}(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_1}) - \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_1})} \left\{ \operatorname{ch}((\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}'_1}) - \operatorname{ch}(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_1}) \right\} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{ch}((\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}'_1}) \right] - \frac{(1 - \tilde{x}'_1)}{\sqrt{\tilde{x}'_2}} \left[\operatorname{cth}(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_2}) - \frac{1}{\operatorname{sh}(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_2})} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \left\{ \operatorname{ch}((\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}'_2}) - \operatorname{ch}(\beta^* \sqrt{\tilde{x}'_2}) \right\} + \operatorname{ch}((\beta^* - \tau_0^*) \sqrt{\tilde{x}'_2}) \right] \right] \Bigg\}, \quad (15)$$

где

$$\tau_0^* = \operatorname{arcsch} \left(\frac{1 - b^*}{1 + b^*} \operatorname{sh} \beta^* \right) + \beta^*; \quad b^* = \frac{b}{a}; \quad \beta^* = \frac{\sqrt{U_0^*}}{a^* \varepsilon_T^*}; \quad \varepsilon_T^* = \frac{kT}{E_d};$$

$$\tilde{\gamma}^* = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} \right)^2 - \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{U_0^*}}; \quad \varepsilon_c^* = \frac{h\sqrt{c}}{E_d}; \quad \varepsilon_L^* = \frac{h\omega_L}{E_d};$$

$$\tilde{x}'_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} \right)^2 - \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{U_0^*}} \right];$$

$$\tilde{x}'_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{4U_0^*} + 1 + \frac{\varepsilon_c^4 a^{*2}}{4\varepsilon_L^{*2} U_0^*} \right)^2 - \frac{\varepsilon_L^{*2} a^{*2}}{U_0^*}} \right].$$

Явный вид потенциала $V_{n,l,m}(\vec{r}_h)$, определяемого формулой (2), в случае, когда электрон находится в возбужденных состояниях КТ, был получен в работе [5]:

1) возбужденное p -состояние ($l = 1; m = 0$):

$$V_{n,1,0}^B(\rho, z) = -\frac{e^2 \beta_{n,0}}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon R_0} + \frac{m_h^*}{2} \left(\omega_{n,0}^2 + \frac{\omega_B^2}{4} \right) \rho^2 + \frac{m_h^* z^2}{2} \omega_{n,0}^2, \quad (16)$$

2) возбужденное p -состояние ($l = 1$; $m = \pm 1$):

$$V_{n,1,\pm 1}^B(\rho, z) = -\frac{e^2 \beta_{n,\pm 1}}{4\pi \epsilon_0 \epsilon R_0} + \frac{m_h^*}{2} \left(\omega_{n,\pm 1}^2 + \frac{\omega_B^2}{4} \right) \rho^2 + \frac{m_h^* z^2}{2} \omega_{n,\pm 1}^2, \quad (17)$$

где величины $\beta_{n,0}$, $\beta_{n,\pm 1}$, $\omega_{n,0}$ и $\omega_{n,\pm 1}$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta_{n,0} = & \frac{X_{n,1}}{30R_0^2 r_{h\min}^3 \left(3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^2 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \times \\ & \times \left[6r_{h\min}^5 X_{n,1}^3 - 3r_{h\min}^5 X_{n,1} - 15r_{h\min}^3 X_{n,1} R_0^2 + 40r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 + \right. \\ & + 3r_{h\min}^5 X_{n,1} \cos(2X_{n,1}) + 15r_{h\min}^3 X_{n,1} R_0^2 \cos(2X_{n,1}) + \\ & + 30r_{h\min} X_{n,1} R_0^4 \cos\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 30r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 Ci(2X_{n,1}) + \\ & + 30r_{h\min}^3 X_{n,1} R_0^2 Ci\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 30r_{h\min}^3 X_{n,1} R_0^2 \ln\left(\frac{r_{h\min}}{R_0}\right) + \\ & + 6r_{h\min}^5 X_{n,1}^2 \sin(2X_{n,1}) + 30r_{h\min}^3 X_{n,1}^2 R_0^2 \sin(2X_{n,1}) - \\ & \left. - 15r_{h\min}^2 X_{n,1}^2 R_0^3 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 15R_0^5 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) \right], \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,\pm 1} = & \frac{X_{n,1}^2}{2 \left(3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^2 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \left[\cos(2X_{n,1}) - 1 + 2\gamma_0 X_{n,1}^2 - \right. \\ & \left. - 2X_{n,1}^2 - 2X_{n,1}^2 Ci(2X_{n,1}) + 2X_{n,1}^2 \ln(2X_{n,1}) + 2X_{n,1} \sin(2X_{n,1}) \right], \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hbar \omega_{n,0} = & \left[\frac{\hbar^2 e^2 X_{n,1}}{m_h 5r_{h\min}^5 R_0^3 \epsilon \left(3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^2 - 3) \sin(X_{n,1}) \right)^2} \left(r_{h\min}^5 X_{n,1} + \right. \right. \\ & + 2r_{h\min}^5 X_{n,1}^3 - 5r_{h\min}^3 X_{n,1}^3 R_0^2 - r_{h\min}^5 X_{n,1} \cos(2X_{n,1}) + \\ & + 15r_{h\min} X_{n,1} R_0^2 \left(r_{h\min}^2 X_{n,1}^2 - 4R_0^2 \right) \cos\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) - 2r_{h\min}^5 X_{n,1}^2 \sin(2X_{n,1}) - \\ & \left. \left. - 45r_{h\min}^2 X_{n,1}^2 R_0^3 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) + 30R_0^5 \sin\left(\frac{2r_{h\min} X_{n,1}}{R_0}\right) \right) \right]^{1/2}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$\hbar\omega_{n,\pm 1} = \left[\frac{\hbar^2 e^2 X_{n,1}^2 (2X_{n,1}^4 - 1 - 2X_{n,1}^2 + \cos(2X_{n,1}) + 2X_{n,1} \sin(2X_{n,1}))}{m_h 10R_0^3 \epsilon (3X_{n,1} \cos(X_{n,1}) + (X_{n,1}^3 - 3) \sin(X_{n,1}))^2} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Энергия связи дырки в комплексе $A^+ + e$ в случае, когда электрон находится в возбужденном состоянии, КТ с учетом (16) и (17) будет определяться решением следующего трансцендентного уравнения:

$$\begin{aligned} & \sqrt{-\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \beta_{(1,2)} \beta_{h(1,2)}^{-1} + (2\beta_{h(1,2)})^{-1} + w_{(1,2)} \beta_{h(1,2)} + i\Gamma_0^*} = \\ & = \eta_i - \sqrt{\frac{2}{\pi\beta_{h(1,2)}}} \int_0^{+\infty} dt \exp \left[- \left(-\beta_{h(1,2)} \eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \beta_{(1,2)} + w_{(1,2)} + i\beta_{h(1,2)} \Gamma_0^* + \frac{1}{2} \right) t \right] \times \\ & \times \left[\frac{1}{2t\sqrt{2t}} - w_{(1,2)} (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp(-2w_{(1,2)}t))^{-1} \exp \left[-\frac{z_a^{*2}}{2\beta_{h(1,2)}} \operatorname{ctg} \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right] \times \\ & \times \exp \left[-\frac{w_{(1,2)} \rho_a^{*2}}{2\beta_{h(1,2)}} \times \frac{1 + \exp(-2w_{(1,2)}t) - 2\exp(-w_{(1,2)}t) \operatorname{ch}(\beta_{h(1,2)} a^{*-2}t)}{1 - \exp(-2w_{(1,2)}t)} \right], \quad (22) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \eta_{\lambda h1}^2 &= E_{\lambda h1} / E_h; \quad \eta_{\lambda h2}^2 = E_{\lambda h2} / E_h; \quad \beta_1 = \beta_{n,0} e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_0^* a_h E_h; \\ \beta_2 &= \beta_{n,\pm 1} e^2 / 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_0^* a_h E_h; \quad \beta_{h1} = E_h / \hbar\omega_{n,0}; \quad \beta_{h2} = E_h / \hbar\omega_{n,\pm 1}; \\ w_1 &= \sqrt{1 + \beta_{h1}^2 a^{*-4}} / 2; \quad w_2 = \sqrt{1 + \beta_{h2}^2 a^{*-4}} / 2. \end{aligned}$$

На рис. 1 приведена зависимость средней энергии связи примесного комплекса $A^+ + e$ в InSb КТ, полученная путем численных расчетов из формулы (12), от величины внешнего магнитного поля и параметров диссипативного туннелирования. Из рис. 1, **а, б** видно, что с ростом параметров ϵ_L^* и ϵ_T^* величина $\bar{E}_{\lambda h}$ уменьшается, а с увеличением «вязкости» контактной среды (параметр ϵ_C^*) величина $\bar{E}_{\lambda h}$ растет из-за уменьшения вероятности диссипативного туннелирования.

2. Расчет матричных элементов фотовозбуждения комплексов $A^+ + e$ в КТ в случаях продольной и поперечной по отношению к направлению внешнего магнитного поля поляризации света

Рассмотрим далее процесс фотовозбуждения комплексов $A^+ + e$ в КТ, синтезированных в прозрачной диэлектрической матрице, в магнитном поле. Будем считать, что A^+ -центр локализован в точке $\vec{R}_a = (0, 0, 0)$.

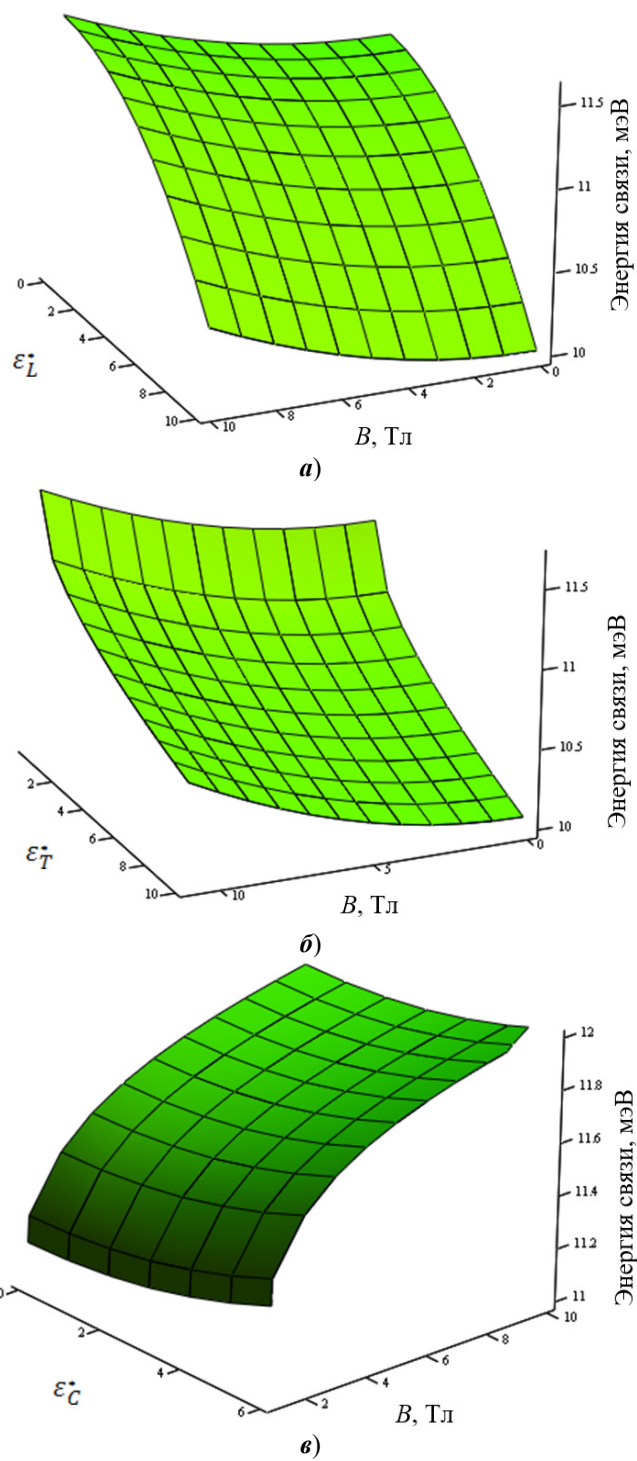


Рис. 1. Зависимость средней энергии связи квазистационарного A^+ -состояния от величины внешнего магнитного поля B и параметров 1D-диссипативного туннелирования при $R_0 = 70$ нм; $\eta_i = 4$:

$$a - \epsilon_T^* = 1, \epsilon_C^* = 1; \quad б - \epsilon_L^* = 1, \epsilon_C^* = 1; \quad в - \epsilon_T^* = 1, \epsilon_L^* = 1$$

Энергетический спектр электрона в магнитном поле во втором порядке теории возмущений будет определяться выражением вида

$$E = E^{(0)} + V_{n,l,m;n,l,m} + \sum_{n'l'm'} \frac{R_0^{*2} |V_{n,l,m;n',l',m'}|^2}{\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2}, \quad (23)$$

здесь $E^{(0)} = \tilde{X}_{n,l}^2 E_h / R_0^{*2}$ – нулевое приближение к энергии электрона в размерно-квантованной зоне; $V_{n,l,m;n',l',m'}$ – матричный элемент оператора возмущения [10]:

$$\begin{aligned} V_{n,l,m;n'l'm'} = & \sum_{n'=0}^{\infty} \left\{ \frac{\hbar\omega_B m}{4\pi(\tilde{X}_{n,l}^2 - \tilde{X}_{n',l}^2)} J_{l+\frac{3}{2}}(\tilde{X}_{n,l}) J_{l+\frac{3}{2}}(\tilde{X}_{n',l}) \times \right. \\ & \times \left[R_0^* \tilde{X}_{n',l} J_{l+\frac{1}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n',l}) J_{l+\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,l}) - \right. \\ & \left. \left. - R_0^* \tilde{X}_{n,l} J_{l+\frac{1}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,l}) J_{l+\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n',l}) \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k m_h^* \omega_B^2 R_0^* \left(\tilde{X}_{n,l}^{l+\frac{3}{2}} \right)^{2k+1}}{k! \Gamma\left(l+k+\frac{5}{2}\right) 2^{l+4+2k}} \times \\ & \times \left[\frac{\sqrt{(l-m+4)(l-m+3)(l-m+2)(l-m+1)}}{(2l+1)(2l-1)^2(2l-3)} \frac{F\left(-k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l-2}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2}\right)}{(2l+2k+2)\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)} \right. \\ & - \frac{2F\left(-k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2}\right)}{(2l+3)(2l-1)(2l+2k+4)} \sqrt{(l-m)(l-m-1)(l+m+2)(l+m+1)} + \\ & \left. + \frac{F\left(-k, -l-k-\frac{3}{2}, l+\frac{5}{2}, \frac{\tilde{X}_{n',l+2}^2}{\tilde{X}_{n,l}^2}\right)}{2l+2k+6} \times \right. \\ & \left. \times \sqrt{\frac{(l+m+4)(l+m+3)(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+5)(2l+3)^2(2l+1)}} \right] \Bigg\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Учтем, что волновая функция дырки, локализованной на A^+ -центре, запишется в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{h(0,1,2)}(\rho, \varphi, z) = & C_{(0,1,2)} \exp\left(-\frac{w_{(0,1,2)}\rho^2 + z^2}{4\beta_{h(0,1,2)}a_h^2}\right) \times \\ & \times \int_0^{+\infty} dt \exp\left[-\left(-\beta_{h(0,1,2)}\eta_{\lambda h(0,1,2)}^2 - \beta_{(0,1,2)} + w_{(0,1,2)} + i\beta_{h(0,1,2)}\Gamma_0^* + \frac{1}{2}\right)t\right] \times \\ & \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2w_{(0,1,2)}t])^{-1} \exp\left\{-\frac{z^2 \exp[-2t]}{2\beta_{h(0,1,2)}a_h^2(1 - \exp[-2t])}\right\} \times \\ & \times \exp\left[-\frac{w_{(0,1,2)}\rho^2 \exp[-2w_{(0,1,2)}t]}{4\beta_{h(0,1,2)}a_h^2(1 - \exp[-2w_{(0,1,2)}t])}\right], \end{aligned} \quad (25)$$

где $C_{(0,1,2)}$ – нормировочный множитель, определяемый выражением вида

$$\begin{aligned} C_{(0,1,2)} = & \left[-2^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} a_h^3 \frac{\beta_{h(0,1,2)}^{3/2} w_{(0,1,2)} \Gamma\left(\frac{1}{2} - w_{(0,1,2)}\right)}{\left(\frac{\beta_{h(0,1,2)}\left(-\eta_{\lambda h(0,1,2)}^2 + i\Gamma_0^*\right) + w_{(0,1,2)}\right) + \frac{1}{4}}\right]^2 \times \\ & \times \Gamma^{-1}\left(\frac{\beta_{h(0,1,2)}\left(-\eta_{\lambda h(0,1,2)}^2 + i\Gamma_0^*\right) - w_{(0,1,2)} + \frac{3}{4}}{2}\right) \times \\ & \times \Gamma\left(\frac{\beta_{h(0,1,2)}\left(-\eta_{\lambda h(0,1,2)}^2 + i\Gamma_0^*\right) + w_{(0,1,2)} + \frac{5}{4}}{2}\right) \times \\ & \times \left[\frac{\beta_{h(0,1,2)}\left(-\eta_{\lambda h(0,1,2)}^2 + i\Gamma_0^*\right) + w_{(0,1,2)} + \frac{1}{4}}{2}\right] \times \\ & \times \left[\Psi\left(\frac{\beta_{h(0,1,2)}\left(-\eta_{\lambda h(0,1,2)}^2 + i\Gamma_0^*\right) + w_{(0,1,2)} + \frac{5}{4}}{2}\right)\right]^{-1} \end{aligned}$$

$$-\Psi \left[\frac{\beta_{h(0,1,2)} \left(-\eta_{\lambda h(0,1,2)}^2 + i\Gamma_0^* \right) - w_{(0,1,2)}}{2} + \frac{3}{4} \right] - 1 \Big]^{-1/2}. \quad (26)$$

Далее рассмотрим случаи продольной $\vec{e}_\lambda \uparrow\uparrow \vec{B}$ и поперечной $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ к направлению внешнего магнитного поля поляризации света. Эффективный гамильтониан взаимодействия $\hat{H}_{\text{int}B}$ с полем световой волны, характеризуемой волновым вектором \vec{q}_s (для продольной поляризации), \vec{q}_t (для поперечной поляризации) и единичным вектором поляризации \vec{e}_λ с полем световой волны запишется для случая, когда $\vec{e}_\lambda \uparrow\uparrow \vec{B}$:

$$\hat{H}_{\text{int}B}^{(s)} = -i\hbar\lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\alpha^*}{m^{*2}\omega}} I_0 \exp(i\vec{q}_s \vec{r}) (\vec{e}_{\lambda s} \nabla_{\vec{r}}), \quad (27)$$

и случая, когда $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$:

$$\hat{H}_{\text{int}B}^{(t)} = -i\hbar\lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2\alpha^*}{m^{*2}\omega}} I_0 \exp(i\vec{q}_t \vec{r}) \left((\vec{e}_{\lambda t} \nabla_{\vec{r}}) - \frac{i|e|B}{2\hbar} [\vec{e}_{\lambda t}, \vec{r}]_z \right), \quad (28)$$

здесь λ_0 – коэффициент локального поля; α^* – постоянная тонкой структуры с учетом статической относительной диэлектрической проницаемости ϵ ; I_0 – интенсивность света с частотой; $\nabla_{\vec{r}}$ – оператор Гамильтона.

Матричный элемент $M_{f',f}^{(s)}$, определяющий величину силы осциллятора дипольных оптических переходов электрона и дырки из основного состояния $\Phi_{in}(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$ примесного комплекса в возбужденные состояния $\Phi_{out}(\vec{r}_e, \vec{r}_h)$ КТ, запишется как

$$\begin{aligned} M_{f',f}^{(s)} &= i \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} (E_{n,1,0} - E_{1,0,0} - (E_{\lambda h1} - E_{\lambda h})) \times \\ &\quad \times \left\langle \Phi_{out}^{(s)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \left| (\vec{e}_{\lambda s}, \vec{r}_e) \right| \Phi_{in}^{(s)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \right\rangle = \\ &= i \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} (E_{n,1,0} - E_{1,0,0} - (E_{\lambda h1} - E_{\lambda h})) \times \\ &\quad \times \left\langle \Psi_{h1}(\vec{r}_h) \left| \Psi_h(\vec{r}_h) \right\rangle \left\langle \Psi_{n,l,m}(\vec{r}_e) \left| (\vec{e}_{\lambda s}, \vec{r}_e) \right| \Psi_{1,0,0}(\vec{r}_e) \right\rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

В дипольном приближении матричный элемент $M_{f',f}^{(t)}$ рассматриваемых оптических переходов в случае поперечной по отношению к направлению внешнего магнитного поля поляризации можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 M_{f',f}^{(t)} = & \lambda_0 \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} \left[i(E_{n,1,\pm 1} - E_{1,0} - (E_{\lambda h 2} - E_{\lambda h})) \times \right. \\
 & \times \left\langle \Phi_{out}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) | (\vec{e}_{\lambda t}, \vec{r}_e) | \Phi_{in}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \right\rangle - \\
 & \left. - \frac{\hbar\omega_B}{2} \left\langle \Phi_{out}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) | [\vec{e}_{\lambda t}, \vec{r}_e]_z | \Phi_{in}^{(t)}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \right\rangle \right]. \quad (30)
 \end{aligned}$$

В результате расчета для матричных элементов (29) и (30) получим:

а) для $M_{f',f}^{(s)}$:

$$\begin{aligned}
 M_{f',f}^{(s)} = & i \sqrt{\frac{2\pi\alpha^* I_0}{\omega}} \left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (E_{\lambda h(1,2)} - E_{\lambda h 0}) + \right. \\
 & \left. + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right) \times \left[2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \beta_{h0}^{\frac{3}{2}} \beta_{h1}^{\frac{3}{2}} w_0 w_1 \times \right. \\
 & \Gamma\left(\frac{1}{2} - w\right) \Gamma\left(\frac{\beta_h(-\eta_{\lambda h 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4}\right) \\
 & \times \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(-\eta_{\lambda h 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(-\eta_{\lambda h 0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_{h1}(-\eta_{\lambda h 1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right)} \times \\
 & \times \frac{\Gamma\left(\frac{\beta_{h1}(-\eta_{\lambda h 1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h1}(-\eta_{\lambda h 1}^2 + i\Gamma_0^*) - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta_{h1}(-\eta_{\lambda h 1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{1}{4}\right)} \times \\
 & \times \left[\Psi\left(\frac{\beta_{h1}(-\eta_{\lambda h 1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h1}(-\eta_{\lambda h 1}^2 + i\Gamma_0^*) - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\left(\frac{\beta_{h0}(-\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{1}{4} \right) \times \right. \\
 & \times \left. \left[\Psi \left(\frac{\beta_{h0}(-\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4} \right) - \Psi \left(\frac{\beta_{h0}(-\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4} \right) \right] - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left[- \left(\beta_{h0}(-\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) - \beta_0 + w_0 + \frac{1}{2} \right) t - \right. \\
 & \quad \left. - \left(\beta_{h1}(-\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) - \beta_1 + w_1 + \frac{1}{2} \right) t' \right] dt dt' \times \\
 & \times \left(1 - e^{-2t} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-2t'} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \exp[-2w_0 t] \right)^{-1} \left(1 - \exp[-2w_1 t'] \right)^{-1} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{\pi} R_0^*}{\sqrt{3} \left(\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2 \right)} \times \frac{\operatorname{erf} \left[-\frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\operatorname{erf} \left[\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{R_0^*}{2} \right]}{2\sqrt{\pi} \left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \quad \left. - 2R_0^* \frac{\exp \left[- \left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right) \frac{R_0^{*2}}{4} \right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)} \right\} \times \\
 & \times \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) J_{\frac{5}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) \right), \quad (31)
 \end{aligned}$$

здесь $\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибок.

Интегралы в (31) имеют следующий вид:

$$\int_0^{R_0^*} \exp \left[- \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right) \frac{z^{*2}}{4} \right] dz^* =$$

$$= \sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf} \left[- \frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad (32)$$

$$\int_0^{R_0^*} r_h^{*2} \exp \left[- \left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right) \frac{r_h^{*2}}{4} \right] dr_h^* =$$

$$= 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf} \left[\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{R_0^*}{2} \right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- 2R_0^* \frac{\exp \left[- \left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right) \frac{R_0^{*2}}{4} \right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2wt))} + \frac{w_1}{\beta_{h1}(1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)}; \quad (33)$$

$$\int_0^{R_0^*} dr_e^* r_e^* J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{\tilde{X}_{1,0}}{R_0^*} r^* \right) J_{\frac{5}{2}} \left(\frac{\tilde{X}_{n,1}}{R_0^*} r_e^* \right) = \frac{R_0^*}{(\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2)} \times$$

$$\times \left[R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) J_{\frac{5}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) \right]. \quad (34)$$

Интегрирование по угловым переменным в (31) дает

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta \cos \theta Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{0,0}(\theta, \varphi) = \frac{\delta_{m,0} \delta_{l,1}}{\sqrt{3}} \quad (35)$$

и

$$\begin{aligned}
 M_{f',f}^{(t)} = & i\lambda_0 \sqrt{\frac{\pi\alpha^* I_0}{3\omega}} \times \frac{R_0^*}{\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2} \left(E_{n,1,\pm 1} - E_{1,0} - (E_{\lambda h 2} - E_{\lambda h 0}) + \frac{\hbar\omega_B}{2} \right) \times \\
 & \times \left[R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) J_{\frac{5}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) \right] \times \\
 & \times \left[2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \frac{\beta_{h0}^{\frac{3}{2}} \beta_{h2}^{\frac{3}{2}} w_0 w_2 \Gamma\left(\frac{1}{2} - w_0\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right. \\
 & \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w_2\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{3}{4}\right)} \times \\
 & \times \left. \left[\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left[\Psi\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) - w_2}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\
 & \times \left. \left[\left(\frac{\beta_h(\eta_{\lambda h}^2 + i\Gamma_0^*) + w}{2} + \frac{1}{4}\right) \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left. \left[\Psi\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{\lambda h 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{\lambda h 0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \right. \\
 & \times \left. \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(\beta_{h0}(\eta_{\lambda h 0}^2 + i\Gamma_0^*) - \beta_0 + w_0 + \frac{1}{2}\right)t - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\beta_{h2} \left(\eta_{\lambda h2}^2 + i\Gamma_0^*\right) - \beta_2 + w_2 + \frac{1}{2}\right) t' \Big] dt dt' \times \\
 & \times \left(1 - e^{-2t}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-2t'}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \exp[-2w_0 t]\right)^{-1} \left(1 - \exp[-2w_2 t']\right)^{-1} \times \\
 & \times \frac{\operatorname{erf}\left[-\frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2t'))}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2t'))}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \\
 & \times \left\{ \frac{\operatorname{erf}\left[\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{R_0^*}{2}\right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))}\right)^{\frac{3}{2}}} - \right. \\
 & \left. - 2R_0^* \frac{\exp\left[-\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))}\right) \frac{R_0^{*2}}{4}\right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))}\right)} \right\}. \quad (36)
 \end{aligned}$$

Расчет матричного элемента (36) приводит к следующему интегралу по угловым переменным:

$$\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \theta \cos(\varphi - \vartheta) Y_{00}(\varphi, \theta) Y_{lm}(\varphi, \theta) = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \delta_{m,\pm 1} \delta_{l,1} \exp(-mi\vartheta), \quad (37)$$

где ϑ – полярный угол единичного вектора поляризации $\vec{e}_{\lambda t}$ в цилиндрической системе координат.

Нетрудно заметить, что дальнейшее интегрирование приводит к уже полученным ранее результатам в (24)–(32).

3. Расчет радиационного времени жизни возбужденных электронных состояний

При относительно небольших изменениях диэлектрической проницаемости ε ($\Delta\varepsilon \leq 3\varepsilon$) изменение величины ε при фотовозбуждении в дипольном приближении с учетом дисперсии радиуса КТ определяется как

$$\Delta\varepsilon(\omega) = \frac{4\pi N_0 I_0}{\hbar\omega} \sum_n \int_0^{3/2} \sigma_n(\omega) \tau_n \alpha_n P(u) du, \quad (38)$$

где I_0 – интенсивность излучения; ω – частота падающего света; α_n – поляризуемость возбужденных состояний электрона в КТ; τ_n – время жизни возбужденных электронных состояний; $\sigma_n(\omega)$ – парциальное сечение поглощения фотона КТ с комплексом $A^+ + e$.

Поскольку величина $1/\tau_n$ определяет суммарную вероятность, отнесенную к единице времени, спонтанного испускания фотонов при квантовых переходах электрона из p -состояния (с различными квантовыми числами n) в основное состояние, то в предположении, что система характеризуется только радиационным временем жизни, выражение для τ_n запишется как

$$\frac{1}{\tau_n} = \varpi, \quad (39)$$

где полная вероятность перехода ϖ определяется выражением вида

$$\varpi = \frac{2\pi}{\hbar} \int \sum_{\sigma} \left| \langle \Phi_{out}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) | \hat{V} | \Phi_{in}(\vec{r}_e, \vec{r}_h) \rangle \right|^2 d\rho(E_{out}), \quad (40)$$

при этом величина $d\rho(E_{out})$ характеризует плотность числа конечных состояний системы и определяется как

$$d\rho(E_{out}) = \frac{V(\tilde{\omega})^2 d\Omega}{(2\pi)^3 \hbar c^3}, \quad (41)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} = (E_{in} - E_{out})/\hbar = & \left(\hbar^2 (X_{n,1}^2 - \pi^2) / 2m_e^* a_h^2 R_0^{*2} - (E_{\lambda h(1,2)} - E_{\lambda h}) \right) + \\ & + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \left(\left| V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'} \right|^2 - \left| V_{1,0,0;n',l',m'} \right|^2 \right) / \left(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2 \right) E_h \Big/ \hbar; \end{aligned}$$

$d\Omega$ – бесконечно малый элемент телесного угла, а оператор взаимодействия частицы с электромагнитным полем (в однофотонном приближении) имеет вид

$$\hat{V} = -\frac{e}{m_e c} \hat{A}(\vec{r}) \hat{p}, \quad (42)$$

здесь $\hat{A}(\vec{r})$ – оператор векторного потенциала, определяемый формулой (в кулоновской калибровке):

$$\hat{A}(\vec{r}) = \sum_{k,\sigma} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k} \right)^{1/2} \vec{e}_{k,\sigma} \left(\hat{a}_{k,\sigma} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{k,\sigma}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right), \quad (43)$$

$\hat{a}_{k,\sigma}$ и $\hat{a}_{k,\sigma}^\dagger$ – операторы уничтожения и рождения фотона с волновым вектором \vec{k} и поляризацией σ соответственно. В случае дипольного приближения выражение для полной вероятности в борновских единицах с учетом дисперсии размера КТ [6] будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} \varpi &= \frac{4e^2 E_h^3}{3\hbar^4 c^3} \left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{R_0^{*2}} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h0}^2) \bar{R}_0^{*2} \times \right. \\ &\times \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \left. \right)^3 |P_n^{0,\pm 1}|^2, \end{aligned} \quad (44)$$

где величина $P_n^{0,\pm 1}$ определяется выражением

$$|P_n^{0,\pm 1}|^2 = \left\langle \Psi_{\lambda h}^{0,\pm 1}(\vec{r}_h) \left| \Psi_{\lambda h}(\vec{r}_h) \right. \right\rangle^2 \left\langle \Psi_n^{0,\pm 1}(\vec{r}_e) \left| \left(\vec{e}_\lambda^{(s,t)}, \vec{r}_e \right) \left| \Psi_{1,0}(\vec{r}_e) \right. \right. \right\rangle^2. \quad (45)$$

С учетом полученных ранее выражений для матричных элементов (31) и (36) выражения для (45) запишутся следующим образом:

– для случая, когда $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$:

$$\begin{aligned} |P_n^0|^2 &= \left[\frac{2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \beta_{h0}^{\frac{3}{2}} \beta_{h1}^{\frac{3}{2}} w_0 w_1 \Gamma\left(\frac{1}{2} - w_0\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right] \times \\ &\times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w_1\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h1}(\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h1}(\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h1}(\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \left[\left[\left(\frac{\beta_{h1}(\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \times \right. \\ &\times \left. \left[\Psi\left(\frac{\beta_{h1}(\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) + w_1}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h1}(\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) - w_1}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \right]^{-1/2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[\left(\frac{\beta_{h0} (\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \times \\
 & \times \left[\Psi \left(\frac{\beta_{h0} (\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4} \right) - \Psi \left(\frac{\beta_{h0} (\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4} \right) \right]^{-1/2} \Bigg|^2 \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left[- \left(\beta_{h0} (\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^*) - \beta_0 + w_0 + \frac{1}{2} \right) t \right] \times \\
 & \times \exp \left[- \left(\beta_{h1} (\eta_{\lambda h1}^2 + i\Gamma_0^*) - \beta_1 + w_1 + \frac{1}{2} \right) t' \right] dt dt' \times \\
 & \times (1 - e^{-2t})^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-2t'})^{-\frac{1}{2}} (1 - \exp[-2w_0 t])^{-1} (1 - \exp[-2w_1 t'])^{-1} \times \\
 & \times \frac{\sqrt{\pi} R_0^*}{\sqrt{3} (\tilde{X}_{1,0}^2 - \tilde{X}_{n,1}^2)} \times \frac{\operatorname{erf} \left[-\frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0} (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0} (1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}}} \times \\
 & \times \left\{ 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{erf} \left[\left(\frac{w_0}{\beta_{h0} (1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{1/2} \frac{R_0^*}{2} \right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0} (1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)^{3/2}} - \right. \\
 & \left. - 2R_0^* \frac{\exp \left[- \left(\frac{w_0}{\beta_{h0} (1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_1}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right) \frac{R_0^{*2}}{4} \right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0} (1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w^{(0)}}{\beta_{h1} (1 - \exp(-2w_1 t'))} \right)} \right\} \times \\
 & \times \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) J_{\frac{3}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{1,0} \right) J_{\frac{5}{2}} \left(R_0^* \tilde{X}_{n,1} \right) \right)^2 ; (46)
 \end{aligned}$$

– для случая, когда $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$:

$$\begin{aligned}
 |P_n^{\pm 1}|^2 &= \left[R_0^* \tilde{X}_{n,1} J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) J_{\frac{3}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) - R_0^* \tilde{X}_{1,0} J_{\frac{1}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{1,0}) J_{\frac{5}{2}}(R_0^* \tilde{X}_{n,1}) \right]^2 \times \\
 &\times \left[2^{-1} \pi^{-3} a_h^6 \frac{\beta_{h0}^{\frac{3}{2}} \beta_{h2}^{\frac{3}{2}} w_0 w_2 \Gamma\left(\frac{1}{2} - w_0\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right] \times \\
 &\times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - w_2\right) \Gamma\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{5}{4}\right)}{\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 \Gamma\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{3}{4}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left[\left[\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \times \right. \\
 &\times \left[\Psi\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) + w_2}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h2}(\eta_{h\lambda 2}^2 + i\Gamma_0^*) - w_2}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \left. \right]^{-\frac{1}{2}} \times \\
 &\times \left[\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] \times \\
 &\times \left[\Psi\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) + w_0}{2} + \frac{5}{4}\right) - \Psi\left(\frac{\beta_{h0}(\eta_{h\lambda 0}^2 + i\Gamma_0^*) - w_0}{2} + \frac{3}{4}\right) \right] - 1 \left. \right]^{-\frac{1}{2}} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left| \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \exp \left[- \left(\beta_{h0} \left(\eta_{\lambda h0}^2 + i\Gamma_0^* \right) - \beta_0 + w_0 + \frac{1}{2} \right) t - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(\beta_{h2} \left(\eta_{\lambda h2}^2 + i\Gamma_0^* \right) - \beta_2 + w_2 + \frac{1}{2} \right) t' \right] dt dt' \times \right. \\
 & \times \left(1 - e^{-2t} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - e^{-2t'} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \exp[-2w_0 t] \right)^{-1} \left(1 - \exp[-2w_2 t'] \right)^{-1} \times \\
 & \quad \times \frac{\operatorname{erf} \left[-\frac{R_0^*}{2} \left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{\left(\frac{1 + \exp(-2t)}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2t))} + \frac{1 + \exp(-2t')}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2t'))} \right)^{\frac{1}{2}}} \times \\
 & \times \left[\frac{\operatorname{erf} \left[\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{R_0^*}{2} \right]}{2\sqrt{\pi} \left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))} \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \\
 & \left. - 2R_0^* \frac{\exp \left[- \left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))} \right) \frac{R_0^{*2}}{4} \right]}{\left(\frac{w_0}{\beta_{h0}(1 - \exp(-2w_0 t))} + \frac{w_2}{\beta_{h2}(1 - \exp(-2w_2 t'))} \right)} \right]^2. \quad (47)
 \end{aligned}$$

Соответственно для времени жизни электрона на возбужденном уровне с учетом дисперсии радиуса КТ будем иметь

$$\begin{aligned}
 \tau_n &= \frac{3\hbar^4 c^3}{4e^2 E_h^3 |P_n^{0,\pm 1}|^2} \left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{R_0^{*2}} - \right. \\
 & \left. - \left(\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h0}^2 \right) R_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{\left(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2 \right) E_h} \right)^{-3}. \quad (48)
 \end{aligned}$$

4. Зависимость фотодиэлектрического эффекта в квазиульмерной структуре с примесными комплексами $A^+ + e$ от величины внешнего магнитного поля и параметров 1D-диссипативного туннелирования

Поляризуемость α_n электронных состояний в КТ с комплексом $A^+ + e$ определяется выражением вида (в боровских единицах):

$$\alpha_n = \frac{4a_h^3}{E_h} \left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{R_0^{*2}} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h0}^2) + \right. \\ \left. + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^{-1} |P_{n,(0,\pm 1)}|^2. \quad (49)$$

Парциальные сечения поглощения фотонов КТ с комплексом $A^+ + e$ можно записать в виде (в боровских единицах):

$$\sigma_n(X) = \frac{2\pi}{\hbar I_0} \left| M_{f'\lambda',f\lambda}^{(s,t)} \right|^2 \Gamma_0^* \left[\left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h(1,2)}^2 - \eta_{\lambda h}^2) - X + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{R}_0^{*2} u^2 \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,(0,\pm 1);n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^2 + \Gamma_0^{*2} \right]^{-1}, \quad (50)$$

где $M_{f'\lambda',f\lambda}^{(s,t)}$ определяется формулами (31) и (34) для случаев $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$ и $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ соответственно.

Таким образом, выражение (50) примет вид:

– для случая $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$:

$$\Delta \epsilon^{(s)}(X) = \frac{12N_0 I_0 \pi^2 \hbar^4 c^3 a_h^5 \alpha^*}{e^2 E_h^5} \sum_{n=1}^M \int_0^{3/2} du \frac{|P_{n,0}|^2}{X^2} \times \\ \times \left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h1}^2 - \eta_{\lambda h0}^2) + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,0;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^{-2} \times \\ \times \Gamma_0^* \left[\left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{(\bar{R}_0^* u)^2} - (\eta_{\lambda h1}^2 - \eta_{\lambda h0}^2) + \right. \right.$$

$$+\bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,0;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \Big)^2 + \Gamma_0^{*2} \Big]^{-1}; \quad (51)$$

– для случая $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon^{(t)}(X) = & \frac{12N_0 I_0 \pi^2 \hbar^4 c^3 a_h^5 \alpha^*}{e^2 E_h^5} \sum_{n=1}^M \int_0^{3/2} du \frac{|P_{n,\pm 1}|^2}{X^2} \times \\ & \times \left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{R_0^{*2}} - (\eta_{\lambda h 2}^2 - \eta_{\lambda h 0}^2) + \bar{R}_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,\pm 1;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^{-2} \times \\ & \times \Gamma_0^* \left[\left(\frac{k(X_{n,1}^2 - \pi^2)}{R_0^{*2}} - (\eta_{\lambda h 2}^2 - \eta_{\lambda h 0}^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + R_0^{*2} \sum_{n'l'm'} \frac{|V_{n,1,\pm 1;n',l',m'}|^2 - |V_{1,0,0;n',l',m'}|^2}{(\pi^2 - \tilde{X}_{n',l'}^2) E_h} \right)^2 + \Gamma_0^{*2} \right]^{-1}. \quad (52) \end{aligned}$$

На рис. 2 и 3 представлена зависимость относительного изменения диэлектрической проницаемости (ОИДП) $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ квазиульмерной структуры с InSb КТ от величины внешнего магнитного поля и параметров диссипативного туннелирования ε_L^* , ε_T^* и ε_C^* , рассчитанная по формулам (51) и (52) для случая $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$ (рис. 2) и $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ (рис. 3).

Сравнение графиков на рис. 2 и 3 позволяет выявить дихроизм ФДЭ, связанный с наличием внешнего магнитного поля, проявляющийся в изменении формы кривой и уменьшении величины ОИДП при переходе от продольной (рис. 2) к поперечной (рис. 3) по отношению к направлению внешнего магнитного поля поляризации света. Как можно видеть из рис. 2 и 3, рост величины фононной моды, температуры и параметра ε_C^* , характеризующего «вязкость» контактной среды, приводит к значительному изменению величины ОИДП, что связано с изменением эффективного радиуса возбужденных состояний примесного комплекса $A^+ + e$ в условиях туннельного распада A^+ -состояния и, как следствие, к изменению поляризуемости электронных состояний в КТ.

Таким образом, прозрачность туннельного барьера существенно влияет на ФДЭ в квазиульмерной структуре вследствие изменения эффективного радиуса возбужденных состояний примесного комплекса $A^+ + e$ при варьировании таких параметров диссипативного туннелирования, как частота фононной моды, температура и константа взаимодействия с контактной средой.

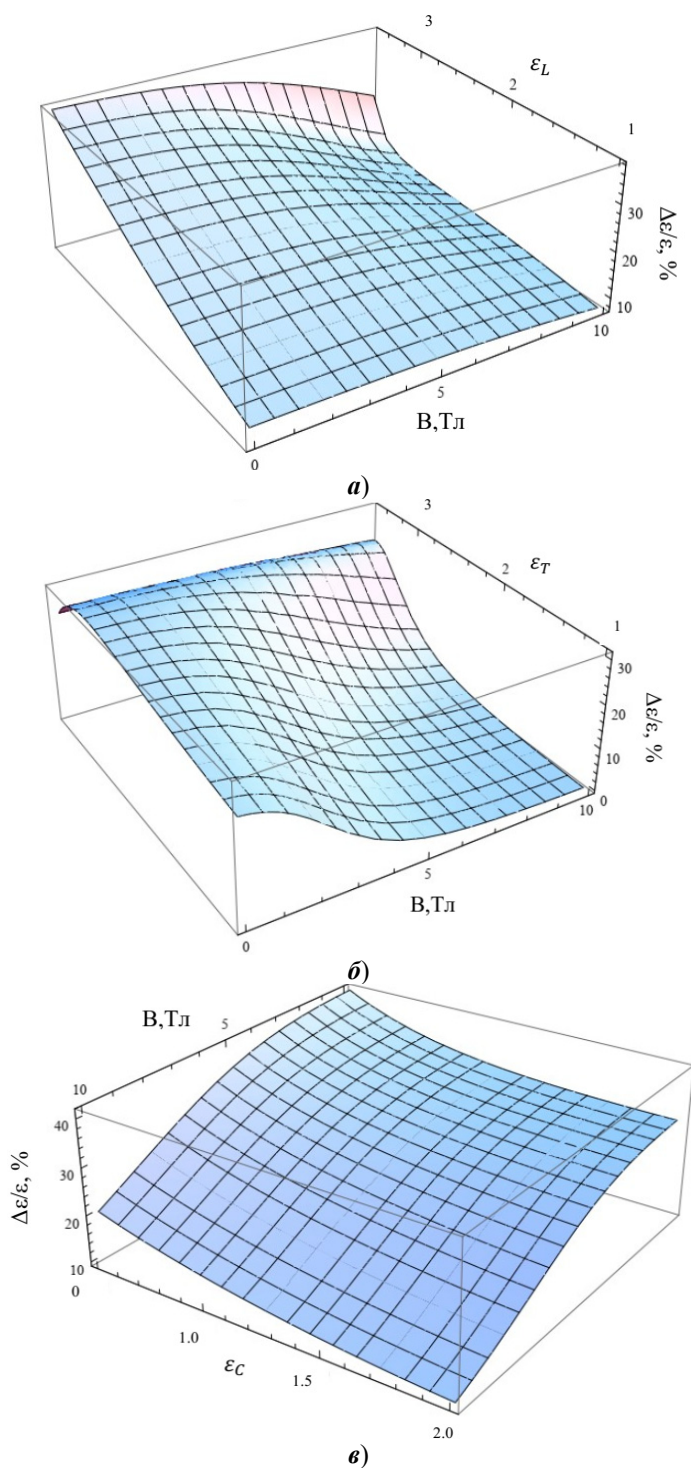
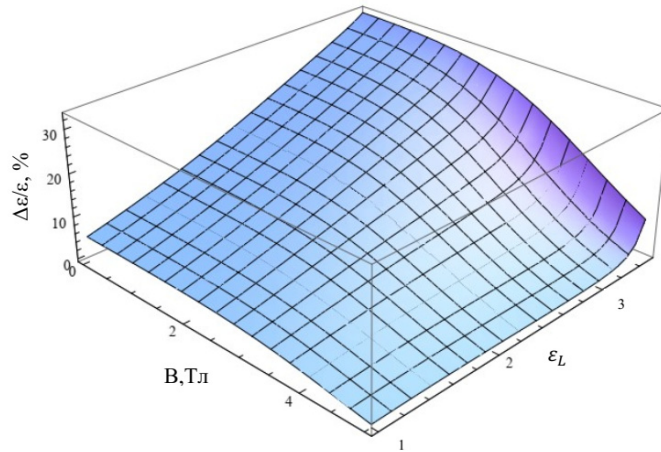
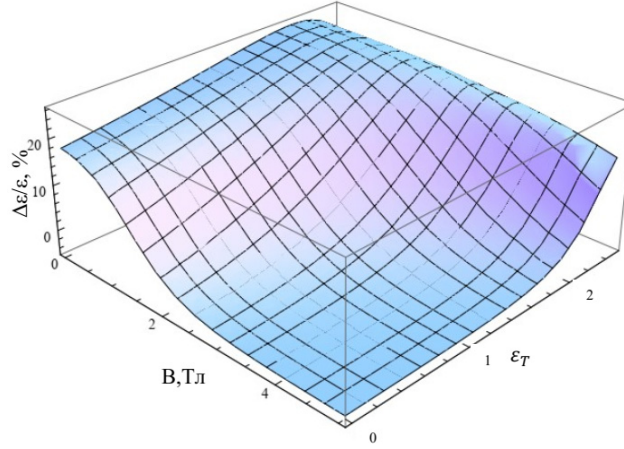


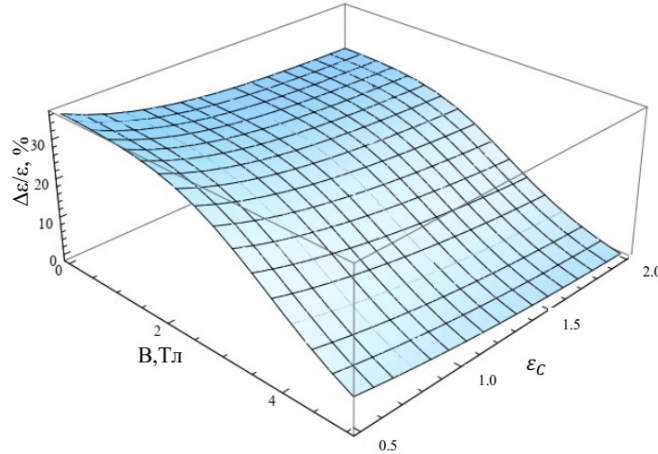
Рис. 2. Зависимость относительного изменения диэлектрической проницаемости квазиуменьшенной структуры с InSb КТ от величины внешнего магнитного поля B и параметров диссипативного туннелирования для случая $\vec{e}_\lambda \uparrow \uparrow \vec{B}$ при $E_i = 4$ мэВ; $\bar{R}_0 = 75$ нм; $\hbar\omega = 1$ мэВ: **а** – $\varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_C^* = 1$; **б** – $\varepsilon_L^* = 1, \varepsilon_C^* = 1$; **в** – $\varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_L^* = 1$



a)



б)



в)

Рис. 3. Зависимость относительного изменения диэлектрической проницаемости квазиульмерной структуры с InSb КТ от величины внешнего магнитного поля B и параметров диссипативного тунnelирования для случая $\vec{e}_\lambda \perp \vec{B}$ при $E_i = 4$ мЭВ;

$$\bar{R}_0 = 75 \text{ нм}; \hbar\omega = 1 \text{ мЭВ: } \mathbf{a} - \varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_C^* = 1; \mathbf{б} - \varepsilon_L^* = 1, \varepsilon_C^* = 1; \mathbf{в} - \varepsilon_T^* = 1, \varepsilon_L^* = 1$$

Заключение

В рамках модели потенциала нулевого радиуса в адиабатическом приближении теоретически исследовано влияние 1D-диссипативного туннелирования на ФДЭ, связанный с возбуждением примесных комплексов $A^+ + e$ в квазиульмерной структуре во внешнем магнитном поле. Показано, что в этом случае возможно эффективное управление ФДЭ за счет модификации электронного адиабатического потенциала во внешнем магнитном поле, а также волновой функции квазистационарного A^+ -состояния при варьировании таких параметров диссипативного туннелирования, как частота фононной моды, температура и константа взаимодействия с контактной средой. Такая модификация приводит к изменению поляризуемости электронных состояний в КТ и, как следствие, заметному изменению диэлектрической проницаемости квазиульмерной структуры.

Список литературы

1. Кревчик В. Д., Левашов А. В. Фотодиэлектрический эффект, связанный с возбуждением комплекса $A^+ + e$ в квазиульмерных структурах // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2007. № 3. С. 77–92.
2. Krevchik V. D., Razumov A. V., Semenov M. B. Photoinduced Modulation of the Dielectric Permittivity in a System of Interacting Quantum Dots in an External Electric Field // Technical Physics. 2023. Vol. 68, № 4. P. 81–92.
3. Кревчик В. Д., Разумов А. В., Семенов М. Б. Фотоиндуцированная модуляция диэлектрической проницаемости в системе взаимодействующих квантовых точек во внешнем электрическом поле // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 122–143.
4. Екимов А. И., Онущенко А. А., Эфрос Ал. Л. Квантование энергетического спектра дырок в адиабатическом потенциале электрона // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1986. Т. 43, № 6. С. 292–294.
5. Кревчик В. Д., Левашов А. В. Энергетический спектр комплекса $A^+ + e$ в квантовой точке в адиабатическом приближении // Физика твердого тела. 2006. Т. 48, № 3. С. 548–550.
6. Кревчик В. Д., Разумов А. В., Будянский П. С. Особенности фотодиэлектрического эффекта, связанного с возбуждением примесных комплексов $A^+ + e$ в квазиульмерных структурах во внешнем магнитного поле // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2015. № 4. С. 111–144.
7. Кревчик В. Д., Грунин А. Б., Зайцев Р. В. Анизотропия магнитооптического поглощения комплексов «квантовая точка – примесный центр» // Физика и техника полупроводников. 2002. Т. 36, № 10. С. 1225–1232.
8. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М. : Наука, 1966. Т. 2. С. 296.
9. Кревчик В. Д., Жуковский В. Ч., Дахновский Ю. И. [и др.]. Изучение управляемости диссипативного туннелирования в системах взаимодействующих квантовых молекул // Вестник Московского государственного университета. Серия 3: Физика. Астрономия. 2007. № 2. С. 10–14.
10. Кревчик В. Д., Разумов А. В., Будянский П. С. Влияние магнитного поля на рекомбинационное излучение, связанное с A^+ -центрами в квантовых точках // Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2015. № 3. С. 125–143.

References

1. Krevchik V.D., Levashov A.V. Photodielectric effect associated with excitation of the $A^+ + e$ complex in quasi-zero-dimensional structures. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2007;(3):77–92. (In Russ.)
2. Krevchik V.D., Razumov A.V., Semenov M.B. Photoinduced Modulation of the Dielectric Permittivity in a System of Interacting Quantum Dots in an External Electric Field. *Technical Physics.* 2023;68(4):81–92.
3. Krevchik V.D., Razumov A.V., Semenov M.B. Photoinduced modulation of permittivity in a system of interacting quantum dots in an external electric field. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2023;(2):122–143. (In Russ.)
4. Ekimov A.I., Onushchenko A.A., Efros A.L. Quantization of the energy spectrum of holes in the adiabatic potential of an electron. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Notes to the Journal of experimental and theoretical physics.* 1986;43(6):292–294. (In Russ.)
5. Krevchik V.D., Levashov A.V. Energy spectrum of the $A^+ + e$ complex in a quantum dot in the adiabatic approximation. *Fizika tverdogo tela = Solid-state physics.* 2006;48(3):548–550. (In Russ.)
6. Krevchik V.D., Razumov A.V., Budyanskiy P.S. Features of the photodielectric effect associated with the excitation of impurity complexes $A^+ + e$ in quasi-zero-dimensional structures in an external magnetic field. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2015;(4):111–144. (In Russ.)
7. Krevchik V.D., Grunin A.B., Zaytsev R.V. Anisotropy of magneto-optical absorption of “quantum dot – impurity center complexes”. *Fizika i tekhnika poluprovodnikov = Physics and technology of semiconductors.* 2002;36(10):1225–1232. (In Russ.)
8. Beytman G., Erdeyi A. *Vysshie transsendentnye funktsii = Higher transcendental functions.* Moscow: Nauka, 1966;2:296. (In Russ.)
9. Krevchik V.D., Zhukovskiy V.Ch., Dakhnovskiy Yu.I. et al. Study of controllability of dissipative tunneling in systems of interacting quantum molecules. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 3: Fizika. Astronomiya = Bulletin of Moscow State University. Series 3: Physics. Astronomy.* 2007;(2):10–14. (In Russ.)
10. Krevchik V.D., Razumov A.V., Budyanskiy P.S. Effect of magnetic field on recombination radiation associated with A^+ centers in quantum dots. *Izvestiya vuzov. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences.* 2015;(3):125–143. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Дмитриевич Кревчик
 доктор физико-математических наук,
 профессор, заведующий кафедрой
 физики, декан факультета
 информационных технологий
 и электроники, Пензенский
 государственный университет
 (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: physics@pnzgu.ru

Vladimir D. Krevchik
 Doctor of physical and mathematical
 sciences, professor, head of the
 sub-department of physics, dean of the
 faculty of information technology
 and electronics, Penza State University
 (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Алексей Викторович Разумов

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры общей физики
и методики обучения физике,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: razumov_alex@mail.ru

Aleksey V. Razumov

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department of general
physics and methods of teaching physics,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Борисович Семенов

доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
физики, Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: Misha29.02.2@gmail.com

Mikhail B. Semenov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, professor of the
sub-department of physics, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 23.01.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 03.03.2025

Принята к публикации / Accepted 26.03.2025