

УДК 517.956:512.812

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-2

Операторы дифференциальной симметрии первого порядка канонических дифференциальных уравнений

А. И. Фомин¹, В. И. Титаренко²²Государственный университет управления, Москва, Россия¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Симметрия играет важную роль в механике и теоретической физике. Основными моделями в этих науках служат дифференциальные уравнения и системы уравнений. Поэтому изучение симметрий дифференциальных уравнений имеет не только теоретический, но и практический смысл. Канонические дифференциальные уравнения второго порядка являются одним из основных уравнений математической физики. В статье ставится задача описания операторов дифференциальной симметрии первого порядка канонических уравнений и образованных такими операторами алгебр Ли. *Материалы и методы.* Приведен краткий обзор общей теории дифференциальных замен зависимых переменных. Такие замены порождают операторы дифференциальной симметрии, а операторы первого порядка, в частности, образуют алгебры Ли относительно коммутатора. В общем виде описаны используемые понятия, введены канонические уравнения и инварианты Лапласа. *Результаты.* Сформулирована и доказана теорема о необходимых и достаточных условиях, при выполнении которых линейный дифференциальный оператор первого порядка является оператором дифференциальной симметрии канонического уравнения. Показано, как теорема применяется для описания множества операторов дифференциальной симметрии уравнений Эйлера – Пуассона. Установлен общий вид коммутатора операторов дифференциальной симметрии первого порядка и доказывается, что алгебра Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнений Эйлера – Пуассона изоморфна алгебре Ли матриц второго порядка. Найдены операторы дифференциальной симметрии канонических уравнений с постоянными коэффициентами, а также канонических уравнений вида $(\partial_{xy} + f(y)\partial_x + \varphi(x)\partial_y)v = 0$.

Алгебры Ли таких операторов оказываются разрешимыми четырехмерными алгебрами Ли с одномерным центром. *Выводы.* Полученные результаты представляются достаточно значимыми. Но основным результатом является теорема 1, которая может быть использована для описания алгебр Ли дифференциальной симметрии операторов первого порядка в других, не затронутых в этой статье, интересных случаях.

Ключевые слова: линейный дифференциальный оператор, операторы дифференциальной симметрии, алгебры Ли дифференциальной симметрии, каноническое дифференциальное уравнения

Для цитирования: Фомин А. И., Титаренко В. И. Операторы дифференциальной симметрии первого порядка канонических дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 13–28. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-2

Differential symmetry operators first order canonical differential equations

A.I. Fomin¹, V.I. Titarenko²

© Фомин А. И., Титаренко В. И., 2025. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

²State University of Management, Moscow, Russia¹fomin45@mail.ru, ²vera_xmel@mail.ru

Abstract. *Background.* Symmetries play an important role in mechanics and theoretical physics. The main models in these sciences are differential equations and systems of equations. Therefore, the study of symmetries of differential equations has not only theoretical, but also practical meaning. Canonical second-order differential equations are one of the basic equations of mathematical physics. The article sets the task of describing first-order differential symmetry operators of canonical equations and Lie algebras formed by such operators. *Materials and methods.* The introduction to this work is devoted to a brief overview of the general theory of differential substitutions of dependent variables. Such substitutions generate differential symmetry operators, and first-order operators, in particular, form Lie algebras with respect to the commutator. Paragraph 2 describes in general terms the concepts that are directly used in this article. Canonical equations and Laplace invariants are introduced. *Results.* In section 3, we formulate and prove a theorem on necessary and sufficient conditions under which a linear differential operator of the first order is an operator of differential symmetry of a canonical equation. In section 4, the theorem is used to describe the set of differential symmetry operators of the Euler-Poisson equations. In section 5, we establish the general form of the commutator of first-order differential symmetry operators and prove that the Lie algebra of first-order differential symmetry operators of the Euler-Poisson equations is isomorphic to the Lie algebra of second-order matrices. Section 6 contains the differential symmetry operators of canonical equations with constant coefficients, as well as canonical equations of the form. The Lie algebras of such operators turn out to be solvable four-dimensional Lie algebras with a one-dimensional center. *Conclusions.* The results obtained seem to be quite significant. But the main result is Theorem 1, which can be used to describe Lie algebras of differential symmetry of first-order operators in other interesting cases not covered in this paper.

Keywords: linear differential operator, differential symmetry operators, Lie algebras of differential symmetry, canonical differential equations

For citation: Fomin A.I., Titarenko V.I. Differential symmetry operators first order canonical differential equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):13–28. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-2

Введение

Разным аспектам теории симметрий дифференциальных уравнений посвящено немало фундаментальных трудов [1–6]. Особый тип симметрий составляют дифференциальные симметрии однородных линейных систем дифференциальных уравнений [7, 8]. Такие симметрии порождаются линейными дифференциальными заменами зависимых переменных, сохраняющими множество решений уравнения. Дифференциальные замены задаются линейными дифференциальными операторами (ЛДО), которые называются операторами дифференциальной симметрии уравнения или системы уравнений и образуют ассоциативные алгебры дифференциальной симметрии [8]. Операторы симметрии первого порядка составляют особое подмножество операторов симметрии, потому что коммутатор таких операторов является оператором того же типа. Следовательно, операторы дифференциальной симметрии однородных линейных систем дифференциальных уравнений образуют алгебры Ли. А действие алгебр Ли на решениях дифференциального уравнения открывает возможности применения теории представлений алгебр Ли.

Дифференциальные замены зависимых переменных, приводящие к операторам дифференциальной симметрии, являются частным случаем более общих замен, связывающих решения разных однородных линейных систем дифференциальных уравнений. Замены порождают ЛДО, которые в общей теории дифференциальных гомоморфизмов однородных линейных систем дифференциальных уравнений [9] называются линейными дифференциальными трансляторами. Трансляторы реализуют дифференциальные гомоморфизмы некоторых специальных фактормодулей над кольцами скалярных ЛДО. Особое значение для алгебр дифференциальной симметрии имеют дифференциальные изоморфизмы, с помощью которых устанавливаются изоморфизмы алгебр дифференциальной симметрии уравнений.

В этой статье изучаются операторы и алгебры дифференциальной симметрии первого порядка канонических гиперболических уравнений второго порядка для функций двух переменных (гл. 3, пар. 3.1 в [10]). К уравнениям этого типа приводит множество задач механики и математической физики. Исследование частных случаев таких уравнений и связанных с ними краевых задач занимались Эйлер, Лаплас, Пуассон и другие великие и выдающиеся математики. Гораздо меньшее внимание уделялось изучению дифференциальных связей между решениями канонических уравнений, в частности связей между решениями одного и того же уравнения, порождающих операторы дифференциальной симметрии. Главным достижением в этом направлении можно считать исследование предложенных Лапласом дифференциальных замен зависимых переменных нулевого и первого порядка [11]. Результатом этих исследований стало построение на основе преобразований Лапласа каскадного метода интегрирования некоторых типов канонических уравнений (гл. 3, пар. 3.2 в [12]).

С точки зрения общей теории [9] дифференциальные замены переменных, представляющие преобразования Лапласа, порождают дифференциальные изоморфизмы канонических уравнений [13]. Более того, в [14] доказано, что все дифференциальные изоморфизмы канонических уравнений первого порядка являются композициями преобразований Лапласа нулевого и первого порядка. Дифференциальные гомоморфизмы между каноническими уравнениями, которые не являются изоморфизмами, конечно, существуют. Например, дифференциальные связи между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу, изученные в работах [15, 16], приводят именно к гомоморфизмам первого порядка. Общие уравнения, которым должны удовлетворять коэффициенты линейного дифференциального транслятора первого порядка, реализующего дифференциальный гомоморфизм пары канонических уравнений, получены в работе [17]. Но конкретные примеры гомоморфизмов, кроме [16], неизвестны.

1. Общие понятия об операторах дифференциальной симметрии, канонические уравнения

Обращаясь к операторам дифференциальной симметрии, опишем в самой общей форме понятия теории дифференциальных симметрий, которые будут использованы в этой работе. Пусть P – скалярный или матричный линейный дифференциальный оператор; V – линейное функциональное пространство; $Pv=0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение

(однородная система уравнений); V_P – подпространство решений уравнения. ЛДО a_1 такой, что $a_1 V_P \subseteq V_P$, называется оператором внешней дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$. Если существует такой ЛДО b_1 , что справедливо равенство $Pa_1 = b_1 P$, то ЛДО a_1 называется оператором внутренней дифференциальной симметрии. Различие между операторами внешней и внутренней дифференциальной симметрии пропадает, если для оператора P и пространства V выполняется теорема о нулях ЛДО (в [8] было использовано название «Теорема о делении ЛДО»). Суть теоремы о нулях заключается в том, что если ЛДО G обращается в нуль на решениях уравнения $Pv=0$, то существует ЛДО L такой, что верно равенство $G = LP$. В случае оператора дифференциальной симметрии $G = Pa_1$, а $L = b_1$.

В этой работе предполагается, что все функции определены в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, являются комплекснозначными и вещественно аналитическими. Каноническое гиперболическое уравнение второго порядка имеет вид

$$v_{xy} + a(x, y)v_x + b(x, y)v_y + c(x, y)v = (\partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c)v = Pv = 0. \quad (1)$$

Функции $h = a_x + ab - c$, $k = b_y + ab - c$ не изменяются в результате невырожденных замен зависимых переменных: $v \rightarrow u = \lambda v$, $\lambda(x, y) \neq 0$ в Ω (гл. 3, пар. 3.1 в [10]). Такие преобразования называются преобразованиями Лапласа нулевого порядка, а функции h и k называются инвариантами Лапласа. Для оператора $P = \partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c$ с вещественно аналитическими коэффициентами справедлива локальная теорема о нулях (теорема 4.1 в [8]). Поэтому в данном случае операторы внешней и внутренней дифференциальной симметрии уравнения $Pv=0$ совпадают. Алгебру Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнения $Pv=0$ с коммутатором $[a_1, \tilde{a}_1] = a_1 \cdot \tilde{a}_1 - \tilde{a}_1 \cdot a_1$ обозначим символом L .

2. Формулировка и доказательство основной теоремы

Теорема 1. ЛДО $a_1 = X\partial_x + Y\partial_y + Z \in L$ тогда и только тогда, когда справедливы равенства: $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, $Z_y = a_x X + (aY)_y$, $Z_x = b_y Y + (bX)_x$, $(hX)_x + (hY)_y = 0$, $(kX)_x + (kY)_y = 0$. При этом оператор b_1 в определяющем равенстве $Pa_1 = b_1 P$ имеет вид $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$.

Доказательство. При умножении скалярных ЛДО главные символы перемножаются. Поэтому ЛДО b_1 в определяющем равенстве $Pa_1 = b_1 P$ должен иметь вид $b_1 = \tilde{X}\partial_x + \tilde{Y}\partial_y + \tilde{Z}$, и должны выполняться равенства $\tilde{X} = X$, $\tilde{Y} = Y$. Приравниваем в равенстве $Pa_1 = b_1 P$ коэффициенты при одинаковых производных второго порядка. Выполнив очевидные преобразования, получим равенства: $X_y = 0$, $Y_x = 0$, $X_x + Y_y + Z = \tilde{Z}$. Следовательно, $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$. Приравняв коэффициенты при производных первого порядка и свободные члены, получим равенства

$$aX_x + Z_y + aZ = Xa_x + Ya_y + \tilde{Z}a, \quad bY_y + Z_x + bZ = Xb_x + Yb_y + \tilde{Z}b, \quad (2)$$

$$Z_{xy} + aZ_x + bZ_y + cZ = Xc_x + Yc_y + \tilde{Z}c. \quad (3)$$

Подставим в равенства (2) выражение $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$ и получим

$$Z_y = a_x X + (aY)_y, \quad Z_x = b_y Y + (bX)_x. \quad (4)$$

Выражения $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$, $Z_y = a_x X + (aY)_y$, $Z_x = b_y Y + (bX)_x$ подставим в (3). Сокращая и преобразуя, найдем: $Z_{xy} + ((ab - c)X)_x + ((ab - c)Y)_y = 0$. Подставляя в последнее равенство выражения $Z_{xy} = (Z_y)_x = (a_x X)_x + (a_x Y)_y$ и $Z_{xy} = (Z_x)_y = (b_y Y)_y + (b_y X)_x$, докажем необходимость равенств $(hX)_x + (hY)_y = 0$, $(kX)_x + (kY)_y = 0$. От последних равенств, используя (4) и $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$, можно перейти к (3). А из (4), снова используя $\tilde{Z} = X_x + Y_y + Z$, получить (2). Равенства коэффициентов при производных второго и третьего порядка в определяющем равенстве тоже можно восстановить, используя условия теоремы.

3. Операторы дифференциальной симметрии первого порядка уравнений Эйлера – Пуассона

В общем случае уравнения Эйлера – Пуассона $E(\beta, \beta')$ имеют вид (гл. 3, пар. 3.2 в [10]):

$$P_{(\beta, \beta')} v = \left(\partial_{xy} - \frac{\beta'}{x-y} \partial_x + \frac{\beta}{x-y} \partial_y \right) v = 0. \quad (5)$$

Теорема 2. Если $|\beta'(1-\beta)| + |\beta(1-\beta')| \neq 0$, то операторы дифференциальной симметрии первого порядка уравнения (5) $a_1 = a_{\beta, \beta'} \in L(\beta, \beta')$ имеют вид

$$a_1 = a_{\beta, \beta'} = \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \partial_x + \left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) \partial_y + \frac{c_1}{2} (\beta x + \beta' y) + \rho, \quad (6)$$

где c_1, c_2, c_3, ρ – любые числа (произвольные постоянные).

Если $\beta = \beta' = 0$ или $\beta = \beta' = 1$, то операторы дифференциальной симметрии первого порядка уравнения (5) $a_{0,0}$ и $a_{1,1}$ задаются равенствами:

$$a_{0,0} = X(x) \partial_x + Y(y) \partial_y + \rho$$

и

$$a_{1,1} = X(x) \left(\partial_x + \frac{1}{x-y} \right) + Y(y) \left(\partial_y - \frac{1}{x-y} \right) + \rho. \quad (7)$$

В равенствах (7) функции $X(x)$, $Y(y)$ могут быть любыми.

Доказательство. $a = -\frac{\beta'}{x-y}, \quad b = \frac{\beta}{x-y}, \quad c = 0, \quad h = \frac{\beta'(1-\beta)}{(x-y)^2},$
 $k = \frac{\beta(1-\beta')}{(x-y)^2}.$ Если $|\beta'(1-\beta)| + |\beta(1-\beta')| \neq 0$, то условия $(hX)_x + (hY)_y = 0,$

$(kX)_x + (kY)_y = 0$ эквивалентны равенству $\left(\frac{X(x)}{(x-y)^2}\right)_x + \left(\frac{Y(y)}{(x-y)^2}\right)_y = 0.$

Дифференцируя и умножая на $(x-y)^3$, получим уравнение $(x-y)(X' + Y') = 2(X - Y)$. Дифференцируем два раза по переменной x , а потом дважды по переменной y . Получим уравнения и равенства: $X'' + X'' + (x-y)X''' = 2X'', \quad -Y'' - Y'' + (x-y)Y''' = -2Y'', \quad X''' = 0, \quad Y''' = 0,$
 $X(x) = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3, \quad Y(y) = \tilde{c}_1 \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_2 y + \tilde{c}_3.$ Подставим полученные выражения в уравнение $(x-y)(X' + Y') = 2(X - Y)$. Получим равенства: $(c_2 + \tilde{c}_2)x + (\tilde{c}_1 - c_1)xy - (c_2 + \tilde{c}_2)y = 2c_2x - 2\tilde{c}_2y + 2(c_3 - \tilde{c}_3), \quad \tilde{c}_1 - c_1 = 0,$
 $c_2 + \tilde{c}_2 = 2c_2, \quad -(c_2 + \tilde{c}_2) = -2\tilde{c}_2, \quad 2(c_3 - \tilde{c}_3) = 0; \quad \tilde{c}_1 = c_1, \quad \tilde{c}_2 = c_2, \quad \tilde{c}_3 = c_3.$ Используя (4), найдем Z :

$$\begin{aligned} Z_x &= b_y Y + (bX)_x = \frac{\beta}{(x-y)^2} \left(\left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) - \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \right) + \\ &+ \frac{\beta}{(x-y)} (c_1 x + c_2) = \frac{\beta}{(x-y)^2} \left(\frac{c_1}{2} (y^2 - x^2) + c_2 (y - x) - (y - x)(c_1 x + c_2) \right) = \\ &= \frac{\beta}{(y-x)} \frac{c_1}{2} (y-x) = \frac{c_1}{2} \beta. \end{aligned}$$

Аналогично: $Z_y = a_x X + (aY)_y = \frac{c_1}{2} \beta'$, следовательно,

$$Z(x, y) = \frac{c_1}{2} (\beta x + \beta' y) + \rho.$$

В особых случаях $|\beta'(1-\beta)| + |\beta(1-\beta')| = 0$ оба инварианта Лапласа равны нулю. Поэтому равенства $(hX)_x + (hY)_y = 0, \quad (kX)_x + (kY)_y = 0$ выполняются и функции $X(x), Y(y)$ могут быть любыми. А само равенство (7) является прямым следствием следующего общего утверждения.

Лемма 1. Если $h = k$, т.е. $\beta = \beta'$, и выполняется равенство $(hX)_x + (hY)_y = 0$, то ЛДО $a_1 \in L$ имеет вид

$$a_1 = X(x)(\partial_x + b(x, y)) + Y(y)(\partial_y + a(x, y)) + \rho, \quad (8)$$

где ρ – любое число.

Доказательство. По условию $a_x + ab - c = b_y + ab - c$, поэтому $a_x = b_y$. Функции a_x, b_y в равенствах (4) можно поменять местами. Получим равенства: $Z_x = (Y(y)a(x, y) + X(x)b(x, y))_x$, $Z_y = (X(x)b(x, y) + Y(y)a(x, y))_y$. Следовательно, $Z(x, y) = X(x)b(x, y) + Y(y)a(x, y) + \rho$, и справедливы равенства (8) и (7).

Отметим, что при значениях параметров $\beta = \beta' = \alpha/2$ и переменных $x = \xi, y = -\eta$ уравнения (5) принимают вид гиперболических уравнений

Эйлера – Пуассона – Дарбу (ЭПД) $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\alpha}{2(\xi + \eta)} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0$. В работах

[15, 16] изучались линейные дифференциальные соотношения первого порядка между решениями уравнений ЭПД. В частности, получены формулы, которые показывают, что представленные там операторы дифференциальной симметрии первого порядка имеют вид (6) [15, с. 178; 16, с. 35].

4. Алгебры Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнений Эйлера – Пуассона

Теорема 3. Если $|\beta'(1 - \beta)| + |\beta(1 - \beta')| \neq 0$, то алгебра Ли $L(\beta, \beta')$ изоморфна алгебре Ли матриц второго порядка $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$. Алгебры $L(0, 0)$ и $L(1, 1)$ являются прямыми суммами двух бесконечномерных алгебр Ли одномерных векторных полей на вещественной прямой и числового центра.

Доказательство. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 2. Коммутатор ЛДО $a_1 = X(x)\partial_x + Y(y)\partial_y + Z(x, y)$ и $\tilde{a}_1 = \tilde{X}(x)\partial_x + \tilde{Y}(y)\partial_y + \tilde{Z}(x, y)$ находится по формуле

$$[a_1, \tilde{a}_1] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\partial_x + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\partial_y + ((X\tilde{Z}_x - \tilde{X}Z_x) + (Y\tilde{Z}_y - \tilde{Y}Z_y)). \quad (9)$$

Если при этом $h = k$, то формула (9) принимает вид

$$[a_1, \tilde{a}_1] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)(\partial_x + b(x, y)) + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)(\partial_y + a(x, y)). \quad (10)$$

Доказательство. Применив равенства $X_y = \tilde{X}_y = 0, Y_x = \tilde{Y}_x = 0$, найдем

$$[a_1, \tilde{a}_1] = a_1\tilde{a}_1 - \tilde{a}_1a_1 = ((X\tilde{X}_x + X\tilde{Z} + Z\tilde{X}) - (\tilde{X}X_x + \tilde{X}Z + \tilde{Z}X))\partial_x + ((Y\tilde{Y}_y + Y\tilde{Z} + Z\tilde{Y}) - (\tilde{Y}Y_y + \tilde{Y}Z + \tilde{Z}Y))\partial_y + ((X\tilde{Z}_x + Y\tilde{Z}_y) - (\tilde{X}Z_x + \tilde{Y}Z_y)).$$

Сокращая, получим (9). Формула (10) следует из леммы 1 и формулы (9).

Пусть $|\beta'(1 - \beta)| + |\beta(1 - \beta')| \neq 0$, ЛДО $a_1, \tilde{a}_1$ имеют вид (6) с коэффициентами c_1, c_2, c_3, ρ и $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\rho}$ соответственно. Применим формулу (9), получим

$$[a_1, \tilde{a}_1] = \left(\left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) (\tilde{c}_1 x + \tilde{c}_2) - \left(\tilde{c}_1 \frac{x^2}{2} + \tilde{c}_2 x + \tilde{c}_3 \right) (c_1 x + c_2) \right) \partial_x +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) (\tilde{c}_1 y + \tilde{c}_2) - \left(\tilde{c}_1 \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_2 y + \tilde{c}_3 \right) (c_1 y + c_2) \right) \partial_y + \\
 & + \left(c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \right) \frac{\tilde{c}_1}{2} \beta - \left(\tilde{c}_1 \frac{x^2}{2} + \tilde{c}_2 x + \tilde{c}_3 \right) \frac{c_1}{2} \beta + \left(c_1 \frac{y^2}{2} + c_2 y + c_3 \right) \frac{\tilde{c}_1}{2} \beta' - \\
 & - \left(\tilde{c}_1 \frac{y^2}{2} + \tilde{c}_2 y + \tilde{c}_3 \right) \frac{c_1}{2} \beta' = \left(\frac{c_2 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_2}{2} x^2 + (c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1) x + (c_3 \tilde{c}_2 - \tilde{c}_3 c_2) \right) \partial_x + \\
 & + \left(\frac{c_2 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_2}{2} y^2 + (c_3 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_3) y + (c_3 \tilde{c}_2 - c_2 \tilde{c}_3) \right) \partial_y + \\
 & + \frac{c_2 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 c_1}{2} (\beta x + \beta' y) + \frac{c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1}{2} (\beta + \beta'), \\
 & [a_1, \tilde{a}_1] = (c_2 \tilde{c}_1 - c_1 \tilde{c}_2) \left(\frac{x^2 \partial_x + y^2 \partial_y + \beta x + \beta' y}{2} \right) \partial_x + \\
 & + (c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1) (x \partial_x + y \partial_y + (\beta + \beta')/2) + (c_3 \tilde{c}_2 - \tilde{c}_3 c_2) (\partial_x + \partial_y). \quad (11)
 \end{aligned}$$

В линейном пространстве $L = L_{\beta, \beta'}$ выберем в качестве базисных векторов ЛДО $e_1 = (x^2 \partial_x + y^2 \partial_y + \beta x + \beta' y)/2$, $e_2 = x \partial_x + y \partial_y + (\beta + \beta')/2$, $e_3 = \partial_x + \partial_y$, $e_4 = 1$. Из (6) следует, что разложение ЛДО $a_{\beta, \beta'}$ по этому базису имеет такой вид:

$$a_{\beta, \beta'} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 - c_2 ((\beta + \beta')/2) e_4 + \rho e_4.$$

Пусть $\hat{\rho} = \rho - c_2 ((\beta + \beta')/2)$. Равенство (11) показывает, что коммутатор $[a_1, \tilde{a}_1]$ в координатной форме имеет вид

$$[a_1, \tilde{a}_1] = ((c_2 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 c_1), (c_3 \tilde{c}_1 - \tilde{c}_3 c_1), (c_3 \tilde{c}_2 - \tilde{c}_3 c_2), 0). \quad (12)$$

В качестве базиса в линейном пространстве матриц второго порядка выберем матрицы:

$$e'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, e'_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e'_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отображение $a_1 = a_{\beta, \beta'} = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \hat{\rho} e_4 \rightarrow c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + c_3 e'_3 + \hat{\rho} e'_4$ является изоморфизмом линейных пространств операторов симметрии и матриц второго порядка. В координатной форме это отображение имеет вид

$$\varphi: a_1 = (c_1, c_2, c_3, \hat{\rho}) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} + \hat{\rho} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} + \hat{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\rho} & 0 \\ 0 & \hat{\rho} \end{pmatrix}.$$

Вычислим коммутатор матриц $\varphi(a_1)$ и $\varphi(\tilde{a}_1)$ и сравним результат вычислений с равенством (12). Матрица $\begin{pmatrix} \hat{\rho} & 0 \\ 0 & \hat{\rho} \end{pmatrix}$ перестановочна с другими матрицами, поэтому при вычислении коммутатора матриц ее можно не учитывать. Получим:

$$\begin{aligned} [\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)] &= \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{c}_2}{2} & -\tilde{c}_3 \\ \frac{\tilde{c}_1}{2} & \frac{\tilde{c}_2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{\tilde{c}_2}{2} & -\tilde{c}_3 \\ \frac{\tilde{c}_1}{2} & \frac{\tilde{c}_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{2} & -c_3 \\ \frac{c_1}{2} & \frac{c_2}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{c_2\tilde{c}_2}{4} - \frac{c_3\tilde{c}_1}{2} & \frac{c_2\tilde{c}_3}{2} - \frac{c_3\tilde{c}_2}{2} \\ -\frac{c_1\tilde{c}_2}{4} + \frac{c_2\tilde{c}_1}{4} & -\frac{c_1\tilde{c}_3}{2} + \frac{c_2\tilde{c}_2}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\tilde{c}_2c_2}{4} - \frac{\tilde{c}_3c_1}{2} & \frac{\tilde{c}_2c_3}{2} - \frac{\tilde{c}_3c_2}{2} \\ -\frac{\tilde{c}_1c_2}{4} + \frac{\tilde{c}_2c_1}{4} & -\frac{\tilde{c}_1c_3}{2} + \frac{\tilde{c}_2c_2}{4} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{c_3\tilde{c}_1 - \tilde{c}_3c_1}{2} & -(c_3\tilde{c}_2 - \tilde{c}_3c_2) \\ \frac{c_2\tilde{c}_1 - c_1\tilde{c}_2}{2} & \frac{c_3\tilde{c}_1 - \tilde{c}_3c_1}{2} \end{pmatrix} = \varphi([a_1, \tilde{a}_1]). \end{aligned}$$

Равенство $\varphi([a_1, \tilde{a}_1]) = [\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)]$ показывает, что отображение φ является изоморфизмом алгебр Ли.

Рассмотрим особые случаи (7). Так как в этих случаях $h=k=0$, то можно применить лемму 2 и формулу (10). Если $\beta=\beta'=0$, то $a=0$, $b=0$, поэтому верно равенство

$$[a_{0,0}, \tilde{a}_{0,0}] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\partial_x + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\partial_y. \quad (13)$$

Если $\beta=\beta'=1$, то $a = -\frac{1}{x-y}$, $b = \frac{1}{x-y}$, и справедливо равенство

$$[a_{1,1}, \tilde{a}_{1,1}] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\left(\partial_x + \frac{1}{x-y}\right) + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\left(\partial_y - \frac{1}{x-y}\right). \quad (14)$$

В теореме 2 было показано, что функции $X(x)$, $Y(y)$ в (10) могут быть любыми. Из (7) следует, что в особых случаях множество операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнения (5) является прямой суммой двух функциональных линейных пространств и одномерного числового пространства. А формулы (13), (14) показывают, что коммутатор операторов симметрии вида $(X(x), Y(y), \rho)$ находится по формуле

$$[(X(x), Y(y), \rho), (\tilde{X}(x), \tilde{Y}(y), \tilde{\rho})] = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x, Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y, 0).$$

То есть функциональные составляющие прямой суммы коммутируют по правилу коммутации векторных полей $X(x)\partial_x$, $\tilde{X}(x)\partial_x$ и $Y(y)\partial_y$, $\tilde{Y}(y)\partial_y$:

$$[X(x)\partial_x, \tilde{X}(x)\partial_x] = X\partial_x(\tilde{X}\partial_x) - \tilde{X}\partial_x(X\partial_x) = (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)\partial_x,$$

$$[Y(y)\partial_y, \tilde{Y}(y)\partial_y] = Y\partial_y(\tilde{Y}\partial_y) - \tilde{Y}\partial_y(Y\partial_y) = (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)\partial_y$$

5. Другие примеры применения теоремы 1

Теорема 4. Операторы дифференциальной симметрии первого порядка канонического уравнения $(\partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c)v = Pv = 0$ с постоянными коэффициентами a, b, c $a_1 = a_1(a, b, c) \in L = L(a, b, c)$ имеют вид

$$a_1 = (c_1x + c_2)(\partial_x + b) + (-c_1y + c_3)(\partial_y + a) + \rho, \quad (15)$$

здесь c_1, c_2, c_3, ρ – любые числа. Множество L совпадает с коммутантом первого порядка оператора P : $L = \text{com } P = \{a_1 : Pa_1 = a_1P\}$. Справедливы равенства: $[L, L] = L^1 = c_2(\partial_x + b) + c_3(\partial_y + a)$, $\dim L^1 = 2$, $[L, L^1] = L^1$, $[L^1, L^1] = 0$. Следовательно, L является разрешимой алгеброй Ли. Алгебра L изоморфна подалгебре Ли алгебры верхних треугольных матриц четвертого порядка, у которых верхняя строка имеет вид $(c_1, c_3, 0, \rho)$, четвертый столбец имеет вид транспонированной строки $(\rho, 0, c_2, c_1)$, а остальные элементы равны нулю.

Доказательство. В данном случае $h = k = ab - c = \text{const}$. Уравнение $(hX)_x + (hY)_y = 0$ принимает вид $(X(x))_x = -(Y(y))_y$. В последнем равенстве слева стоит функция переменной x , справа функция переменной y . Переменные независимы, поэтому равенство возможно только тогда, когда обе части равны одной и той же константе: $(X(x))_x = -(Y(y))_y = c_1$. Интегрируя, найдем: $X(x) = c_1x + c_2$, $Y(y) = -c_1y + c_3$. Применим лемму 1, получим равенство (15).

В соответствии с теоремой 1 оператор b_1 в равенстве $Pa_1 = b_1P$ задается формулой $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$. ЛДО a_1 запишем в стандартном виде $a_1 = (c_1x + c_2)\partial_x + (-c_1y + c_3)\partial_y + (c_1x + c_2)b + (-c_1y + c_3)a + \rho$. Получим равенство

$$b_1 = (c_1x + c_2)\partial_x + (-c_1y + c_3)\partial_y + c_1 - c_1 + (c_1x + c_2)b + (-c_1y + c_3)a + \rho = a_1.$$

Значит, оператор a_1 перестановочен с оператором P , следовательно, $L = \text{com } P$.

Фиксируем в линейном пространстве L естественный базис: $e_1 = x(\partial_x + b) - y(\partial_y + a)$, $e_2 = \partial_x + b$, $e_3 = \partial_y + a$, $e_4 = 1$. Из равенства (15) следует, что в этом базисе ЛДО $a_1 \in L$ имеет вид $a_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \rho e_4$. Предположим, что ЛДО $\tilde{a}_1$ имеет такой же вид, как и a_1 , с коэффициентами $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4$. Применим формулу (10), получим равенства:

$$\begin{aligned}
[a_1, \tilde{a}_1] &= (X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x)(\partial_x + b) + (Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y)(\partial_y + a) = \\
&= ((c_1x + c_2)\tilde{c}_1 - (\tilde{c}_1x + \tilde{c}_2)c_1)(\partial_x + b) + ((-c_1y + c_3)(-\tilde{c}_1) - (-\tilde{c}_1y + \tilde{c}_3)(-c_1)) \times \\
&\times (\partial_y + a) = (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1)(\partial_x + b) + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3)(\partial_y + a), \\
[a_1, \tilde{a}_1] &= (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1)e_2 + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3)e_3. \tag{16}
\end{aligned}$$

Равенство (16) показывает, что справедливо включение $[L, L] = L^1 \subseteq \subseteq \{\alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 : \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}\}$. Полагая в формуле (16) $\tilde{c}_1 = 0$, получим:

$$[a_1, \tilde{a}_1] = (-\tilde{c}_2c_1)(\partial_x + b) + (\tilde{c}_3c_1)(\partial_y + a) = c_1(-\tilde{c}_2 e_2 + \tilde{c}_3 e_3). \tag{17}$$

Следовательно, $L^1 = \{c_2 e_2 + c_3 e_3 : c_2, c_3 \in \mathbb{C}\} = c_2(\partial_x + b) + c_3(\partial_y + a)$. Кроме того, $[L^1, L^1] = 0$. Следовательно, L – разрешимая алгебра Ли [18, с. 103, 104].

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Отображение $\varphi: a_1 = (c_1, c_2, c_3, \rho) \rightarrow C$ является линейным изоморфизмом пространства L на подалгебру матриц вида C алгебры Ли верхних треугольных матриц. Пусть $\tilde{a}_1 = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{\rho})$, $\varphi(\tilde{a}_1) = \tilde{C}$. Коммутатор матриц C и $\tilde{C}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
[\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)] &= [C, \tilde{C}] = C\tilde{C} - \tilde{C}C = \\
&= \begin{pmatrix} c_1\tilde{c}_1 & c_1\tilde{c}_3 & 0 & c_1\tilde{\rho} + \rho\tilde{c}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2\tilde{c}_1 \\ 0 & 0 & 0 & c_1\tilde{c}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{c}_1c_1 & \tilde{c}_1c_3 & 0 & \tilde{c}_1\rho + \rho c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_2c_1 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_1c_1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Сравнив полученное равенство с равенством (16), убедимся, что справедливо равенство $\varphi([a_1, \tilde{a}_1]) = [\varphi(a_1), \varphi(\tilde{a}_1)]$. Значит, φ – изоморфизм алгебр Ли.

Теорема 5. Предположим, что каноническое уравнение имеет вид $Pv = (\partial_{xy} + f(y)\partial_x + \varphi(x)\partial_y)v = 0$, где функции $\varphi(x)$, $f(y)$ не обращаются в нуль ни в какой точке области Ω . ЛДО $a_1 \in L$ имеют вид

$$a_1 = (c_1\Phi(x) + c_2)\frac{1}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) + (-c_1F(y) + c_3)\frac{1}{f(y)}(\partial_y + f(y)) + \rho, \quad (18)$$

где c_1, c_2, c_3, ρ – любые числа; $\Phi(x)$, $F(y)$ – фиксированные первообразные функций $\varphi(x)$ и $f(y)$ соответственно. Справедливы равенства:

$$[L, L] = L^1 = c_2\frac{1}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) + c_3\frac{1}{f(y)}(\partial_y + f(y)), \quad \dim L^1 = 2, \quad [L, L^1] = L^1,$$

$[L^1, L^1] = 0$. L является разрешимой алгеброй Ли, изоморфной алгебре Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка канонического уравнения с постоянными коэффициентами (теорема 4).

Доказательство. Здесь $h = f_x + f(y)\varphi(x) = \varphi f$, $k = \varphi_y + \varphi(x)f(y) = \varphi f$, $h = k = \varphi f$. Равенства $(hX)_x + (hY)_y = 0$, $(kX)_x + (kY)_y = 0$ принимают вид

$$(\varphi(x)f(y)X)_x + (\varphi(x)f(y)Y)_y = f(y)(\varphi(x)X(x))_x + \varphi(x)(f(y)Y(y))_y = 0.$$

Разделим на $\varphi(x)f(y) \neq 0$, получим равенства:

$$\frac{(\varphi(x)X(x))_x}{\varphi(x)} + \frac{(f(y)Y(y))_y}{f(y)} = 0, \quad \frac{(\varphi(x)X(x))_x}{\varphi(x)} = -\frac{(f(y)Y(y))_y}{f(y)} = c_1 = \text{const},$$

$$(\varphi X)_x = c_1\varphi, \quad (fY)_y = -c_1f,$$

$$X(x) = \frac{1}{\varphi(x)}c_1 \int \varphi(x)dx = \frac{1}{\varphi(x)}(c_1\Phi(x) + c_2), \quad Y(y) = \frac{1}{f(y)}(-c_1F(y) + c_3).$$

Применив формулу (8), получим равенство (18).

В линейном пространстве L ЛДО

$$e_1 = \frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) - \frac{F(y)}{f(y)}(\partial_y + f(y)), \quad e_2 = \frac{1}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)),$$

$$e_3 = \frac{1}{f(y)}(\partial_y + f(y)), \quad e_4 = 1$$

образуют базис. Равенство (18) запишем в виде

$$a_1 = c_1 \left(\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)}(\partial_x + \varphi(x)) - \frac{F(y)}{f(y)}(\partial_y + f(y)) \right) + c_2 \frac{\partial_x + \varphi(x)}{\varphi(x)} + c_3 \frac{\partial_y + f(y)}{f(y)} + \rho,$$

$$a_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + \rho e_4.$$

Находим коммутатор ЛДО a_1 и $\tilde{a}_1$:

$$\begin{aligned}
X\tilde{X}_x - \tilde{X}X_x &= \frac{c_1\Phi(x) + c_2}{\varphi(x)} \left(\frac{\tilde{c}_1\Phi(x) + \tilde{c}_2}{\varphi(x)} \right)_x - \frac{\tilde{c}_1\Phi(x) + \tilde{c}_2}{\varphi(x)} \left(\frac{c_1\Phi(x) + c_2}{\varphi(x)} \right)_x = \\
&= \frac{1}{\varphi} \left[(c_1\Phi + c_2) \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi^2} (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2) + \tilde{c}_1 \right) - (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2) \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi^2} (c_1\Phi + c_2) + c_1 \right) \right] = \\
&= \frac{1}{\varphi} \left[-\frac{\varphi_x}{\varphi^2} \{ (c_1\Phi + c_2)(\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2) - (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2)(c_1\Phi + c_2) \} + \right. \\
&\quad \left. + (c_1\Phi + c_2)\tilde{c}_1 - (\tilde{c}_1\Phi + \tilde{c}_2)c_1 \right] = \frac{c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1}{\varphi}.
\end{aligned}$$

Аналогично, $Y\tilde{Y}_y - \tilde{Y}Y_y = \frac{\tilde{c}_3c_1 - c_3\tilde{c}_1}{f(y)}$. Применим (10), получим:

$$\begin{aligned}
[a_1, \tilde{a}_1] &= (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1) \frac{1}{\varphi(x)} (\partial_x + \varphi(x)) + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3) \frac{1}{f(y)} (\partial_y + f(y)), \\
[a_1, \tilde{a}_1] &= (c_2\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2c_1)e_2 + (c_1\tilde{c}_3 - \tilde{c}_1c_3)e_3. \quad (19)
\end{aligned}$$

Сравнив равенство (19) с равенством (16), убедимся, что отображение

$$\begin{aligned}
\chi: c_1 \left(\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)} (\partial_x + \varphi(x)) - \frac{F(y)}{f(y)} (\partial_y + f(y)) \right) + c_2 \frac{\partial_x + \varphi(x)}{\varphi(x)} + c_3 \frac{\partial_y + f(y)}{f(y)} + \rho \rightarrow \\
\rightarrow c_1 (x(\partial_x + b) - y(\partial_y + a)) + c_2(\partial_x + b) + c_3(\partial_y + a) + \rho
\end{aligned}$$

является изоморфизмом алгебр Ли операторов дифференциальной симметрии первого порядка уравнения $Pv = (\partial_{xy} + f(y)\partial_x + \varphi(x)\partial_y)v = 0$ и канонического уравнения $(\partial_{xy} + a\partial_x + b\partial_y + c)v = Pv = 0$ с постоянными коэффициентами.

Однако, в отличие от теоремы 4, множество операторов дифференциальной симметрии первого порядка из теоремы 5 не совпадает с коммутантом соответствующего оператора. Оператор $b_1 = X\partial_x + Y\partial_y + X_x + Y_y + Z$ в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\varphi(x)} (c_1\Phi(x) + c_2)\partial_x + \frac{1}{f(y)} (-c_1F(y) + c_3)\partial_y + \left(\frac{1}{\varphi(x)} (c_1\Phi(x) + c_2) \right)_x + \\
&\quad + \left(\frac{1}{f(y)} (-c_1F(y) + c_3) \right)_y + (c_1\Phi(x) + c_2) + (-c_1F(y) + c_3) + \rho, \\
b_1 &= \frac{1}{\varphi(x)} (c_1\Phi(x) + c_2)\partial_x + \frac{1}{f(y)} (-c_1F(y) + c_3)\partial_y - \\
&\quad - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} (c_1\Phi(x) + c_2) - \frac{f'(y)}{f^2(y)} (-c_1F(y) + c_3) + (c_1\Phi(x) + c_2) + (-c_1F(y) + c_3) + \rho.
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978. 400 с.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М. : Наука, 1983. 280 с.
3. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям / пер. с англ. И. Г. Щербак ; под ред. А. Б. Шабата. М. : Мир, 1989. 637 с.
4. Бочаров А. В., Вербовецкий А. М., Виноградов А. М. [и др.]. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / под ред. А. М. Виноградова и И. С. Красильщика. М. : Факториал Пресс, 2005. 380 с.
5. Фушчич В. И., Никитин А. Г. Симметрия уравнений квантовой механики. М. : Наука, 1990. 400 с.
6. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М. : Наука, 1979. 320 с.
7. Желобенко Д. П. Трансвекторные алгебры в теории представлений и динамические симметрии // Теоретико-групповые методы в физике. М. : Наука, 1986. Т. 2. С. 5–21.
8. Fomin A. I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations // Russian journal of mathematical physics. 1997. Vol. 5, № 2. P. 189–210.
9. Fomin A. I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations // Russian journal of mathematical physics. 2012. Vol. 19, № 2. P. 159–181.
10. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям с частными производными. М. : Издательство иностр. лит-ры, 1957. 444 с.
11. Laplace P. S. Recherches sur le calcul integral aux differences partielles // Memoires de l'Academie royale des Sciences de Paris. 1773. Vol. 77. P. 341–408 [перепечатано: Oeuvres completes. Paris: Gauthier–Villars, 1893. Vol. 9. P. 5–68].
12. Darouboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. 2 ed. Paris : Gauthier–Villars, 1915. Vol. 2.
13. Фомин А. И. Преобразования Лапласа как дифференциальные изоморфизмы // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XLIV–XLVIII междунар. науч.-практ. конф. М. : Интернаука, 2016. № 8-12 (35). С. 5–12.
14. Фомин А. И. Титаренко В. И. Дифференциальные изоморфизмы первого порядка канонических гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 118–125.
15. Аксёнов А. В. Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу // Доклады РАН. 2001. Т. 381, № 2. С. 176–179.
16. Аксёнов А. В. Линейные дифференциальные соотношения между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу // Современная математика и её приложения. 2004. Т. 12. С. 3–37.
17. Фомин А. И., Титаренко В. И. Система определяющих уравнений для линейных дифференциальных трансляторов первого порядка семейства канонических гиперболических уравнений // Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии : сб. ст. по материалам XL междунар. науч.-практ. конф. М. : Интернаука, 2016. № 4 (32). С. 15–27.
18. Кириллов А. А. Элементы теории представлений. М. : Наука, 1972. 336 с.

References

1. Ovsyannikov L.V. *Gruppovoy analiz differentsial'nykh uravneniy* = Group analysis of differential equations. Moscow: Nauka, 1978. (In Russ.)

2. Ibragimov N.Kh. *Gruppy preobrazovaniy v matematicheskoy fizike = Transformations groups in mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1983. (In Russ.)
3. Olver P. *Prilozhenie grupp Li k differentsial'nym uravneniyam = Application of groups to differential equations*. Transl. from Engl. by I.G. Shcherbak. Moscow: Mir, 1989:637. (In Russ.)
4. Bocharov A.V., Verbovetskiy A.M., Vinogradov A.M. et al. *Simmetrii i zakony sokhraneniya uravneniy matematicheskoy fiziki = Symmetry and laws of preserving the equations of mathematical physics*. Moscow: Faktorial, 1997. (In Russ.)
5. Fushchich V.I., Nikitin A.G. *Simmetriya uravneniy kvantovoy mekhaniki = Symmetry of the equations of quantum mechanics*. Moscow: Nauka, 1990. (In Russ.)
6. Malkin I.A., Man'ko V. I. *Dinamicheskie simmetrii i kogerentnye sostoyaniya kvantovoykh system = Dynamic symmetries and coherent conditions of quantum systems*. Moscow: Nauka, 1990. (In Russ.)
7. Zhelobenko D.P. Transmoteur algebras in the theory of representations and dynamic symmetry. *Teoretiko-grupповые методы в физике = Theoretical and group methods in physics*. Moscow: Nauka, 1986;2:5–21. (In Russ.)
8. Fomin A.I. Differential symmetry algebras for linear homogeneous differential equations. *Russian journal of mathematical physics*. 1997;5(2):189–210.
9. Fomin A.I. Differential Homomorphisms of Linear Homogeneous Systems of Differential Equations. *Russian journal of mathematical physics*. 2012;19(2):159–181.
10. Triкоми F. *Leksii po uravneniyam s chastnymi proizvodnymi = Lectures on equations with private derivatives*. Moscow: Izdatel'stvo inostr. lit-ry, 1957. (In Russ.)
11. Laplace P.S. Recherches sur le calcul integral aux differences partielles. *Memoires de l'Academie royale des Sciences de Paris*. 1773;77:341–408 [perepechatano: Oeuvres completes. Paris: Gauthier–Villars, 1893;9:5–68].
12. Darouboux G. *Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal*. 2 ed. Paris: Gauthier–Villars, 1915;2.
13. Fomin A.I. Laplace transformations as differential isomorphisms. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XLIV–XLVIII mezhdunar. nauch.-prakt. konf. = Scientific discussion: issues of mathematics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 44th–48th international scientific and practical conference*. Moscow: Internauka, 2016;(8-12):5–12. (In Russ.)
14. Fomin A.I., Titarenko V.I. Differential isomorphisms of the first order of canonical hyperbolic equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(1):118–125. (In Russ.)
15. Aksenov A.V. Symmetry and the ratio between the solutions of the class of Euler - Poisson - Darbu. *Doklady RAN = Reports of the Russian Academy of Sciences*. 2001;381(2):176–179. (In Russ.)
16. Aksenov A.V. Linear differential relationships between the solutions of the class of Euler - Poisson - Darbu. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya = Modern mathematics and its applications*. 2004;12:3–37. (In Russ.)
17. Fomin A.I., Titarenko V.I. The system of determining equations for linear differential translators of the first order of the family of canonical hyperbolic equations. *Nauchnaya diskussiya: voprosy matematiki, fiziki, khimii, biologii: sb. st. po materialam XL mezhdunar. nauch.-prakt. konf. = Scientific discussion: issues of mathematics, physics, chemistry, biology: proceedings of the 40th international scientific and practical conference*. Moscow: Internauka, 2016;(4):15–27. (In Russ.)
18. Kirillov A.A. *Elementy teorii predstavleniy = Elements of the theory of representations*. Moscow: Nauka, 1972. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Александр Иванович Фомин

кандидат физико-математических наук,
доцент, независимый исследователь
(Россия, г. Москва)

E-mail: fomin45@mail.ru

Aleksandr I. Fomin

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, independent
researcher (Moscow, Russia)

Вера Ивановна Титаренко

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и информатики, Институт
информационных систем,
Государственный университет
управления (Россия, г. Москва,
Рязанский проспект, 99)

E-mail: vera_xmel@mail.ru

Vera I. Titarenko

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics
and computer science, Institute
of Information Systems, State University
of Management (99 Ryazanskiy avenue,
Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 29.10.2024

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 06.03.2025

Принята к публикации / Accepted 20.04.2025