

Сужение множества Парето на основе информации о нечетком отношении предпочтения второго порядка. Описание алгоритма *

О. В. Басков

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Рассматривается задача многокритериального выбора в случае, когда предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), задаются нечетким бинарным отношением второго порядка. Предлагается алгоритм сужения множества Парето на основе нечетких квантов информации о предпочтениях ЛПР. Приводится пример его применения.

Ключевые слова: сужение множества Парето, аксиоматический подход, нечеткие множества.

DOI 10.14357/20718594220305

Введение

Задачи принятия решений часто возникают в различных областях. Для их решения разработано множество методов [1, 2], когда предлагается тот или иной способ выбора некоторых считающихся «наилучшими» вариантов. Обычно при этом выполняется принцип Эджворта – Парето, согласно которому выбираемые варианты должны быть оптимальными по Парето. Вопрос обоснованности применения этого принципа был впервые рассмотрен в работе [3]. В ней был предложен набор аксиом, принятие которых гарантирует справедливость принципа Эджворта – Парето. В то же время нарушение хотя бы одной из этих аксиом может привести к выбору не оптимального по Парето варианта. Таким образом, данными аксиомами описываются границы применимости этого принципа и всех методов, на него опирающихся.

Дальнейшее развитие аксиоматического подхода было направлено на сужение множества Парето [4]. Если согласиться с тем, что любая попытка дать математическое определение понятия «наилучшего» варианта, по сути, является не чем иным, как собственно выбором за лицо, принимающее решение (ЛПР), то окажется, что способов логического обоснования «наилучшего» выбора не существует в принципе. Однако есть возможность формально доказать, что при определенных достаточно разумных предположениях некоторые варианты выбираться не должны, и исключить их из рассмотрения аналогично тому, как принцип Эджворта – Парето отсеивает решения, не являющиеся оптимальными по Парето. Очевидно, что исходной информации, основанной лишь на критериях, недостаточно для сужения множества Парето. Требуются дополнительные сведения, характеризующие предпочтения

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №20-07-00298а.

✉ Басков Олег Владимирович. E-mail: o.baskov@spbu.ru

ЛПР. Их удобно моделировать с помощью бинарного отношения.

Предпочтение одного парето-оптимального варианта другому всегда связано с компромиссом, а любой компромисс направлен на преодоление неопределенности. Общепринятым математическим инструментом для обработки неопределенности является теория нечетких множеств [5]. В последнее время многие методы принятия решений развиваются в направлении использования нечетких множеств первого и даже второго порядка [6-8]. Есть примеры, показывающие, что методы, основанные на нечетких множествах второго порядка, позволяют достигнуть лучших результатов по сравнению с методами, опирающимися на нечеткие множества первого порядка или четкие множества [9]. В связи с этим актуальной представляется задача обобщения аксиоматического подхода к сужению множества Парето на основе неполной или неточной информации, моделируемой при помощи нечетких бинарных отношений второго порядка.

В работе описывается алгоритм, предназначенный для учета последовательно выявляемой информации о предпочтениях ЛПР в терминах нечеткого отношения второго порядка и сужения области поиска «наилучших» вариантов. Даны основные определения и обозначения из теории нечетких множеств. Изложен аксиоматический подход к задаче многокритериального выбора. Рассмотрен алгоритм сужения множества Парето и приведен пример его применения.

1. Краткие сведения о нечетких множествах

Нечеткое множество A над универсальным множеством X – это множество пар $A = \{(x, u) | x \in X, u \in [0; 1]\}$, где u описывает степень принадлежности элемента x множеству A [5]. Нечеткое множество полностью определяется своей функцией принадлежности $\mu_A(x)$, сопоставляющей каждому элементу $x \in X$ его степень принадлежности $u = \mu_A(x)$ рассматриваемому нечеткому множеству A .

Нечеткое множество A над множеством вещественных чисел R называется нечетким числом, если оно [10]:

– нормальное: $\mu_A(u) = 1$ хотя бы для одного $x \in R$;

– выпуклое: $\mu_A(v) \geq \min\{\mu_A(u); \mu_A(w)\}$ для любой тройки чисел $u < v < w$;

– полунепрерывное сверху: все множества α -уровня $A_\alpha = \{u \in R | \mu_A(u) \geq \alpha\}$ являются замкнутыми при любых $\alpha \in (0; 1]$;

– ограниченное: его суппорт $A_0 = \{u \in R | \mu_A(u) > 0\}$ является ограниченным множеством.

Среди часто встречающихся видов нечетких чисел необходимо отметить треугольные и трапециевидные. Функция принадлежности трапециевидного нечеткого числа A полностью определяется четырьмя параметрами:

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0, & u < a, u \geq d, \\ \frac{u-a}{b-a}, & a \leq u < b, \\ 1, & b \leq u < c, \\ \frac{d-u}{d-c}, & c \leq u < d, \end{cases}$$

поэтому в качестве обозначения таких чисел можно использовать запись $(a; b; c; d)$. Треугольные нечеткие числа задаются тремя параметрами $(a; b; d)$. Они являются частным случаем трапециевидных нечетких чисел, в которых $c = b$. Более подробно основные классы нечетких чисел описаны в [11].

Операции над нечеткими числами вводятся с помощью принципа расширения Заде [12]. В соответствии с ним функции принадлежности минимума $A \wedge B$ и максимума $A \vee B$ двух нечетких чисел A и B выражаются формулами:

$$\mu_{A \wedge B}(u) = \sup_{\min\{v; w\}=u} \min\{\mu_A(v); \mu_B(w)\},$$

$$\mu_{A \vee B}(u) = \sup_{\max\{v; w\}=u} \min\{\mu_A(v); \mu_B(w)\}.$$

Дополнение до единицы нечеткого числа A над $[0; 1]$ определяется как нечеткое число $\neg A$ с функцией принадлежности $\mu_{\neg A}(u) = \mu_A(1 - u)$.

Для минимума и максимума конечного набора нечетких чисел в работе [13] приводятся удобные для вычислений формулы. В частности, если два трапециевидных нечетких числа $A = (a_1; b_1; c_1; d_1)$ и $B = (a_2; b_2; c_2; d_2)$ связаны соотношениями

$$a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2, d_1 \leq d_2, \quad (1)$$

то их минимум, максимум и дополнение до единицы вычисляются по правилам:

$$A \wedge B = (\min\{a_1; a_2\}; \min\{b_1; b_2\}; \min\{c_1; c_2\}; \min\{d_1; d_2\}),$$

$$A \vee B = (\max\{a_1; a_2\}; \max\{b_1; b_2\}; \max\{c_1; c_2\}; \max\{d_1; d_2\}), \\ \neg A = (1 - d_1; 1 - c_1; 1 - b_1; 1 - a_1).$$

Для произвольного, не обязательно конечно-го, набора нечетких чисел свойства операций инфимума, супремума и дополнения до единицы были изучены в [14].

На множестве нечетких чисел вводится отношение порядка $A \sqsubseteq B$, если $A \wedge B = A$ и $A \vee B = B$. В силу нормальности и выпуклости нечетких чисел два приведенных условия эквивалентны и могут быть заменены на одно из них [15]. Отметим, что для трапециевидных нечетких чисел неравенство $A \sqsubseteq B$ эквивалентно соотношениям (1).

Множество вещественных чисел может быть вложено во множество нечетких чисел, если каждому числу $\delta \in R$ сопоставить нечеткое число $\tilde{\delta}$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{\delta}}(u) = \begin{cases} 1, & u = \delta, \\ 0, & u \neq \delta. \end{cases}$$

Легко убедиться, что введенные с помощью принципа расширения Заде операции над нечеткими числами, согласованы с операциями над вещественными числами в смысле указанного вложения.

Нечеткое множество второго порядка K над универсальным множеством X определяется функцией принадлежности $\mu_K(x, u)$, которая каждому элементу $x \in X$ и первичной степени принадлежности $u \in [0; 1]$, ставит в соответствие вторичную степень принадлежности $v = \mu_K(x, u) \in [0; 1]$ [16]. Когда элемент $x_0 \in X$ фиксирован, $\mu_K(x_0, u)$ может рассматриваться как функция принадлежности нечеткого множества первого порядка. Мы ограничимся нечеткими множествами второго порядка, в которых эти функции задают нечеткие числа над $[0; 1]$. Они будут называться нечеткими степенями принадлежности элементов $x_0 \in X$ и обозначаться $\mu_K(x_0, \cdot)$. Тогда нечеткое множество второго порядка может быть представлено набором пар $K = \{(x, A)\}$, где $x \in X$, а нечеткое число A дает нечеткую степень принадлежности соответствующего элемента множеству K .

Теоретико-множественные операции над нечеткими множествами второго порядка естественным образом определяются через минимума, максимума и дополнения нечетких сте-

пеней принадлежности элементов. Так, слиянием $A \sqcap B$ и соединением $A \sqcup B$ двух нечетких множеств второго порядка A и B называются нечеткие множества второго порядка, нечеткие степени принадлежности элементов которых вычисляются по законам:

$$\mu_{A \sqcap B}(x, \cdot) = \mu_A(x, \cdot) \wedge \mu_B(x, \cdot), \\ \mu_{A \sqcup B}(x, \cdot) = \mu_A(x, \cdot) \vee \mu_B(x, \cdot).$$

Дополнение $\bar{A}$ нечеткого множества второго порядка дается формулой $\mu_{\bar{A}}(x, \cdot) = \neg \mu_A(x, \cdot)$.

Наконец, включение множеств $A \sqsubseteq B$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mu_A(x, \cdot) \sqsubseteq \mu_B(x, \cdot)$ для всех элементов $x \in X$. Свойства этих операций приведены в [15].

Нечеткими отношениями второго порядка называются нечеткие множества второго порядка над декартовым произведением $X \times X$. Нечеткое отношение второго порядка P называется:

- иррефлексивным, если $\mu_P(x, x, \cdot) = \tilde{0}$ для всех $x \in X$;
- асимметричным, если $\mu_P(x, y, \cdot) = \tilde{0}$ для всех пар $x, y \in X$, для которых $\mu_P(y, x, \cdot) \neq \tilde{0}$;
- транзитивным, если $\mu_P(x, z, \cdot) \sqsupseteq \mu_P(x, y, \cdot) \wedge \mu_P(y, z, \cdot)$ для всех троек $x, y, z \in X$.

Основные свойства нечетких отношений рассмотрены в [14].

2. Задача многокритериального выбора. Принцип Эджворта-Парето

Задача многокритериального выбора задается множеством возможных вариантов X , числовым векторным критерием $f: X \mapsto R^m$ и бинарным отношением предпочтения $\succ_X$ на множестве X [4]. Множество возможных вариантов X описывает допустимые решения. Каждый возможный вариант $x \in X$ оценивается по нескольким числовым критериям $f_1(x), \dots, f_m(x)$, из которых можно составить возможный вектор $y = (f_1(x), \dots, f_m(x)) = f(x)$. Каждый критерий отражает некоторые характеристики имеющихся вариантов. Не умаляя общности, будем предполагать, что ЛПП заинтересовано в максимизации каждого из критериев.

Обычно варианта, оптимального сразу по всем критериям, не существует. Поэтому ЛПР должно быть готово пойти на компромисс, когда вариант с лучшими значениями более важных критериев предпочитается варианту с лучшими значениями по менее важным критериям. Для описания предпочтений ЛПР используется бинарное отношение $\succ_X$: будем говорить, что $x_1 \succ_X x_2$, если ЛПР из этих двух вариантов выбирает x_1 и не выбирает x_2 .

Зачастую предпочтения не могут быть выражены в жесткой форме « x_1 , безусловно, лучше x_2 », но лишь с неполной уверенностью: « x_1 , по-видимому, лучше x_2 ». В случае серьезных сомнений ЛПР может вообще отказаться высказывать «жесткие» суждения, что приведет к потере важной информации. Чтобы этого не допустить, мы позволяем ЛПР указывать степень уверенности в готовности пойти на описываемый компромисс. В таком случае отношение предпочтения становится нечетким. Можно рассматривать предпочтение как лингвистическую переменную [12] и предложить ЛПР варианты ее значений в словесной форме, например, как в Табл. 1 статьи [17]. В ней каждому словесному значению сопоставляется некоторое трапециевидное нечеткое число над $[0;1]$.

Таким образом, для пары вариантов $x_1, x_2 \in X$ можно определить нечеткую степень уверенности $\mu_{\succ_X}(x_1, x_2, \cdot)$ в том, что первый вариант лучше второго, и сделать отношение предпочтения нечетким бинарным отношением второго порядка.

Цель ЛПР – выбрать один или несколько вариантов из множества X , т.е. найти множество выбираемых («наилучших») вариантов $C(X)$, которому намеренно не дается математическое определение, поскольку таковое, по сути, будет производить выбор вместо ЛПР. Кроме того, каждое ЛПР имеет свои представления о том, какие варианты считать «лучшими», так что определения, подходящего на все случаи жизни, в принципе не существует. Поэтому вместо того, чтобы искать само множество выбираемых вариантов $C(X)$, мы постулируем некоторые разумные предположения о поведении ЛПР в процессе принятия решений и на их основе отсеим варианты, которые заведомо не должны быть выбранными. Тем самым будет получена оценка сверху для множества выбираемых вариантов. Сужение области поиска

Табл. 1. Лингвистические термы для степени уверенности

Лингвистический терм	Нечеткое число
Очень низкая	$A_{VL} = (0; 0; 0,02; 0,07)$
Низкая	$A_L = (0,04; 0,1; 0,18; 0,23)$
Довольно низкая	$A_{FL} = (0,17; 0,22; 0,36; 0,42)$
Средняя	$A_M = (0,32; 0,41; 0,58; 0,65)$
Довольно высокая	$A_{FH} = (0,58; 0,63; 0,8; 0,86)$
Высокая	$A_H = (0,72; 0,78; 0,92; 0,97)$
Очень высокая	$A_{VH} = (0,93; 0,98; 1; 1)$
Абсолютная	$\tilde{1} = (1; 1; 1; 1)$

«наилучших» решений должно помочь ЛПР осуществить окончательный выбор.

Так как сужение будет производиться на основе информации о предпочтениях ЛПР, которая может быть нечеткой, оценка сверху для множества выбираемых вариантов также окажется нечетким множеством второго порядка. Более того, само множество $C(X)$ может быть нечетким множеством второго порядка, если ЛПР не вполне уверено в своем выборе.

Приведем аксиомы, накладывающие некоторые разумные ограничения на поведение ЛПР.

Аксиома 1. Для всех $x_1, x_2 \in X$ выполнено $\mu_{C(X)}(x_2, \cdot) \sqsubseteq \neg \mu_{\succ_X}(x_1, x_2, \cdot)$.

Данная аксиома постулирует простой принцип: не нужно выбирать вариант, если есть более предпочтительная альтернатива. Если x_1 предпочтительнее x_2 с некоторой степенью уверенности A , то вариант x_2 не должен принадлежать множеству выбираемых вариантов $C(X)$ с этой степенью уверенности A .

Аксиома 2. Существует такое иррефлексивное транзитивное нечеткое бинарное отношение второго порядка $\succ$ над R^m , что $\mu_{\succ_X}(x_1, x_2, \cdot) = \mu_{\succ}(f(x_1), f(x_2), \cdot)$ для всех $x_1, x_2 \in X$.

Эта аксиома преследует две цели. Во-первых, к отношению предпочтения предъявляется требование транзитивности. Во-вторых, индуцированное на множестве возможных векторов отношение предпочтения распространяется на множество всех векторов критериального пространства R^m , что позволяет рассуждать не только о возможных вариантах,

но и о произвольных гипотетических с любыми значениями критериев.

Аксиома 3. Для всех $y^1, y^2 \in R^m : y^1 = y^2 + \alpha e^i$, где $\alpha > 0$, а e^i – некоторый орт пространства R^m , $\mu_{\succ}(y^1, y^2, \cdot) = \tilde{1}$.

Здесь постулируется желание максимизировать каждый из критериев. Благодаря требованию транзитивности отношения предпочтения из предыдущей аксиомы, отсюда будет следовать, что если два вектора различаются по нескольким критериям, и по каждому из них первый вектор имеет большие значения, чем второй, то предпочтение обязано отдаваться первому вектору. Математически это записывается с использованием отношения Парето $\geq$: $y^1 \geq y^2$ означает, что $y_i^1 \geq y_i^2$ покомпонентно для всех $i = 1, \dots, m$, и $y_j^1 > y_j^2$ хотя бы для одного индекса j . Тогда из $y^1 \geq y^2$ должно следовать $\mu_{\succ}(y^1, y^2, \cdot) = \tilde{1}$. Это высказывание составляет содержание аксиомы Парето [18].

Аксиома 4. Для всех $y^1, y^2, z \in R^m$ и $\alpha > 0$ справедливо $\mu_{\succ}(y^1, y^2, \cdot) = \mu_{\succ}(\alpha y^1 + z, \alpha y^2 + z, \cdot)$.

Данная аксиома постулирует инвариантность отношения предпочтения относительно положительного линейного преобразования. Это означает, что при сравнении пары вариантов абсолютные значения критериев не должны играть роли, предпочтения должны определяться исключительно разностями между значениями критериев.

При выполнении Аксиом 1 – 3 справедлив нечеткий принцип Эджворта – Парето, согласно которому любое множество выбираемых вариантов $C(X)$ удовлетворяет включению $C(X) \subseteq P_f(X)$, где $P_f(X) = \{x \in X : \nexists x^* \in X : f(x^*) \geq f(x)\}$ – множество Парето [18].

Множество Парето содержит такие варианты, что никакой другой не приводит к большему значению ни по одному из критериев без потерь по какому-то другому критерию. Хотя множество Парето является четким множеством, его можно рассматривать и как нечеткое множество второго порядка, в котором нечеткие степени принадлежности принимают лишь два значения $\tilde{0}$ и $\tilde{1}$.

Нечеткий принцип Эджворта–Парето дает оценку сверху для множества выбираемых вариантов. При наличии дополнительной информации о предпочтениях ЛПР эта оценка может быть улучшена. Таким образом, нахождение более точной оценки в пределах множества Парето представляет собой его сужение.

3. Алгоритм сужения множества Парето

Предпочтение одного варианта из множества Парето другому всегда сопряжено с компромиссом, поскольку один из них обязательно лучше, по крайней мере, по одному из критериев, а другой лучше по какому-то другому или другим критериям. Поэтому информации в форме критериев недостаточно для окончательного выбора среди парето-оптимальных вариантов. Предположим, что ЛПР может решить, какие критерии для него являются более важными по сравнению с другими. Для начала можно спросить ЛПР: «Представляется ли для вас некий критерий более важным, чем другой?» В случае положительного ответа (он будет означать, что первый критерий важнее второго) можно задать следующий вопрос: «Какой максимальной величиной по второму критерию вы готовы пожертвовать ради увеличения первого критерия не менее чем на единицу?» Если ЛПР согласится пожертвовать величиной α по менее важному второму критерию ради увеличения более важного первого критерия на единицу с некоторой степенью уверенности A , то благодаря Аксиоме 4 мы получим соотношение $(1; -\alpha) \succ (0; 0)$. Это приводит к следующему определению.

Определение. Пара (u, A) из вектора $u \in R^m$ и нечеткого числа A над $[0; 1]$ образует квант нечеткой информации, если вектор u содержит хотя бы одну положительную и хотя бы одну отрицательную компоненты, и $\mu_{\succ}(u, 0, \cdot) \supseteq A$.

Положительные компоненты вектора u показывают, какой минимальный прирост ЛПР желает достичь по более важным критериям в результате осуществления компромисса. Отрицательные компоненты u содержат максимально допустимые величины потерь, на которые ЛПР согласно пойти ради увеличения более важных критериев. Нечеткое число A позволяет выразить неуверенность в описываемом компромиссе.

Естественно, что упомянутый способ выявления квантов информации не является единственно возможным. Более подробные сведения о квантах и способах их получения содержатся в [4].

Предположим, что множество возможных вариантов X конечно, и задан набор квантов информации $(u^1, A_1), \dots, (u^p, A_p)$. Опишем алгоритм сужения множества Парето, учитывающий эту информацию и включающий следующие этапы (инициализация: полагаем $G_0 = \{(e^1, \tilde{1}), \dots, (e^m, \tilde{1})\}$).

Первый этап состоит из p шагов. На каждом шаге $s = 1, \dots, p$ элементы множества G_{s-1} разбиваются на три группы:

$$P_s = \{(g, B) \in G_{s-1} \mid \langle g, u^s \rangle > 0\},$$

$$Z_s = \{(g, B) \in G_{s-1} \mid \langle g, u^s \rangle = 0\},$$

$$N_s = \{(g, B) \in G_{s-1} \mid \langle g, u^s \rangle < 0\}.$$

Здесь $\langle y, z \rangle = \sum_{i=1}^m y_i z_i$ обозначает скалярное

произведение векторов $y, z \in R^m$. Производится проверка, что $\exists (g, B) \in P_s : B = \tilde{1}$. Если это не так, алгоритм завершается с ошибкой из-за противоречивости представленного набора квантов [19]. Далее составляется следующее множество $G_s = P_s \cup Z_s \cup N'_s \cup D_s$, где

$$N'_s = \{(g, B \wedge \neg A_p) \mid (g, B) \in N_s\},$$

$$D_s = \{(d^{ij}, B_i \wedge B_j) \mid d^{ij} = \langle g^i, u^s \rangle g^j - \langle g^j, u^s \rangle g^i, (g^i, B^i) \in P_s, (g^j, B^j) \in N_s\},$$

и начинается очередная итерация.

Второй этап. Для каждого возможного варианта $x \in X$ вычисляется нечеткое число

$$\mu_N(x, \cdot) = \bigwedge_{x' \in X \setminus \{x\}} \bigvee_{(g, B) \in G_p : \langle g, f(x) \rangle > \langle g, f(x') \rangle} B, \quad (2)$$

которое как раз и дает искомую оценку сверху на нечеткую степень принадлежности варианта x множеству выбираемых вариантов $C(X)$.

Корректность алгоритма обосновывается Теоремой 1, доказательство которой приведено в [20].

Теорема 1. Пусть задан набор квантов информации $(u^1, A_1), \dots, (u^p, A_p)$. Тогда каким бы ни было множество выбираемых вариантов

$C(X)$, имеет место включение $C(X) \subseteq N(X)$, где множество $N(X)$ задано функцией принадлежности (2).

Рассмотрим работу алгоритма на следующем примере. Пусть ЛПР необходимо выбрать представителя на олимпиаду по математическому моделированию. Каждый кандидат, фамилия и имя которого обозначены буквой, прошел тесты по математике, физике и информатике. Результаты тестов сведены в Табл. 2. Итак, множество возможных вариантов $X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$. Три критерия являются оценки по каждому из тестов. Естественно, все критерии желательно максимизировать. Можно заметить, что множество Парето $P_f(X) = \{A, B, C, E, F, G\}$. Кандидат D не является парето-оптимальным решением, поскольку по каждому тесту он набрал меньше, чем, например, кандидат E.

Теперь зададим вопрос ЛПР, какой из трех предметов представляется для него более важным для олимпиады по математическому моделированию. Предположим, что ЛПР считает, что математика и физика важнее, чем информатика. Спросим тогда, сколькими баллами по информатике ЛПР готово пожертвовать ради увеличения результатов тестов по математике и физике на единицу. В случае сомнений разрешим описать степень уверенности одним из термов, приведенных в Табл. 1. Пусть ЛПР согласен уступить три балла с довольно высокой степенью уверенности. Тогда мы можем описать этот компромисс квантом нечеткой информации (u^1, A_1) , где $u^1 = (1; 1; -3)$ и $A_1 = A_{FH}$.

Проследим работу алгоритма. Начинаем с $G_0 = \{(e^1, \tilde{1}), \dots, (e^m, \tilde{1})\}$. На первом этапе эти векторы разбиваются на три множества:

Табл. 2. Результаты тестирования кандидатов

Кандидат	Математика	Физика	Информатика
A	86	92	85
B	91	87	88
C	94	85	99
D	83	88	85
E	91	90	86
F	87	94	82
G	95	86	97

$P_1 = \{(e^1, \tilde{1}), (e^2, \tilde{1})\}$, $N_1 = \{(e^3, \tilde{1})\}$ и $Z_1 = \emptyset$. Во множество G_1 включаем пары из P_1 и Z_1 , пары из N_1 включаем с уменьшенными степенями принадлежности $\neg A_1$, и дополнительно вычисляем элементы множества D_1 , перебирая все возможные комбинации пар из P_1 и N_1 :

$$g^1 = \langle e^1, u^1 \rangle e^3 - \langle e^3, u^1 \rangle e^1 = (3; 0; 1), B_1 = \tilde{1};$$

$$g^2 = \langle e^2, u^1 \rangle e^3 - \langle e^3, u^1 \rangle e^2 = (0; 3; 1), B_2 = \tilde{1}.$$

Таким образом, $G_1 = \{(e^1, \tilde{1}), (e^2, \tilde{1}), (e^3, \neg A_{FH}), (g^1, \tilde{1}), (g^2, \tilde{1})\}$. Для проведения второго этапа алгоритма удобно выписать скалярные произведения $\langle g^i, f(x) \rangle$ найденных векторов $(g^i, B_i) \in G_1$ и возможных векторов $f(x_j)$, $x_j \in X$. Их можно рассматривать как новые критерии. Результаты приведены в Табл. 3.

Из Табл. 3 видно, что кандидат А имеет лучший результат, чем F, лишь по третьему новому критерию $\langle e^3, f(x) \rangle$. Поскольку вектор e^3 имеет степень принадлежности $\neg A_{FH}$ во множестве G_1 , мы можем сделать вывод, что $\mu_{C(X)}(A, \cdot) \sqsubseteq \neg A_{FH}$, т. е. кандидат А не должен выбираться с довольно высокой степенью уверенности. Тоже можно сказать и про кандидата С, поскольку в сравнении с G он также выигрывает лишь по третьему новому критерию. Таким образом, суженное множество Парето имеет вид:

$$\{(A, \neg A_{FH}), (B, \tilde{1}), (C, \neg A_{FH}), (E, \tilde{1}), (F, \tilde{1}), (G, \tilde{1})\}.$$

Предположим далее, что ЛПР считает математику важнее физики и с довольно высокой степенью уверенности согласно пожертвовать

одним баллом по физике ради увеличения оценки по математике на единицу. Тогда мы получаем второй квант (u^2, A_2) , где $u^2 = (1; -1; 0)$ и $A_2 = A_{FH}$.

Одним из преимуществ предложенного алгоритма является то, что при получении дополнительной информации не обязательно перезапускать его с самого начала. Первые шаги остаются без изменений, и нам нужно лишь провести дополнительную итерацию первого этапа и пересчитать второй этап.

Итак, на втором шаге первого этапа векторы из множества G_1 разбиваются на три группы в зависимости от знака их скалярного произведения на новый квант u^2 :

$$P_2 = \{(e^1, \tilde{1}), (g^1, \tilde{1})\}, N_2 = \{(e^2, \tilde{1}), (g^2, \tilde{1})\},$$

$$Z_2 = \{(e^3, \neg A_{FH})\}.$$

Новое множество G_2 включает в себя все пары из $P_2 \cup Z_2$, векторы из N_2 со степенями принадлежности, уменьшенными до $\neg A_{FH}$, а также следующие векторы из D_2 :

$$g^3 = \langle e^1, u^2 \rangle e^2 + \langle e^2, u^2 \rangle e^1 = (1; 1; 0), B_3 = \tilde{1},$$

$$g^4 = \langle e^1, u^2 \rangle g^2 + \langle g^2, u^2 \rangle e^1 = (3; 3; 1), B_4 = \tilde{1},$$

$$g^5 = \langle g^1, u^2 \rangle e^2 + \langle e^2, u^2 \rangle g^1 = (3; 3; 1), B_5 = \tilde{1},$$

$$g^6 = \langle g^1, u^2 \rangle g^2 + \langle g^2, u^2 \rangle g^1 = (9; 9; 6), B_6 = \tilde{1}.$$

Если мы теперь проведем второй этап алгоритма, то окажется, что только кандидат G сохранит степень принадлежности $\tilde{1}$. Суженное множество Парето примет вид:

$$\{(A, \neg A_{FH}), (B, \neg A_{FH}), (C, \neg A_{FH}), (E, \neg A_{FH}), (F, \neg A_{FH}), (G, \tilde{1})\}.$$

Табл. 3. Значения новых критериев, учитывающие квант информации

Кандидат	$\langle e^1, f(x) \rangle$	$\langle e^2, f(x) \rangle$	$\langle e^3, f(x) \rangle$	$\langle g^1, f(x) \rangle$	$\langle g^2, f(x) \rangle$
A	86	92	85	343	361
B	91	87	88	361	349
C	94	85	99	381	354
D	83	88	85	334	349
E	91	90	86	359	356
F	87	94	82	343	364
G	95	86	97	382	355

Таким образом, мы можем порекомендовать ЛПР не выбирать кандидата D, а также с довольно высокой степенью уверенности не выбирать A, B, C, E и F. Вероятно, с учетом этого ЛПР выберет кандидата G в качестве представителя на олимпиаде.

Заключение

Предложен алгоритм сужения множества Парето, имеющий аксиоматическое обоснование, благодаря которому можно четко обозначить границы его применимости. Алгоритм основывается на информации о предпочтениях ЛПР, представленных нечетким бинарным отношением второго порядка. Использование нечетких отношений дает возможность обрабатывать неточную информацию. Несомненным достоинством представленного алгоритма является и тот факт, что он может работать с последовательно поступающей информацией, продолжая сужение круга поиска «наилучших» вариантов по мере ее получения.

Литература

1. Miettinen K. Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer. 1999. 300 p.
2. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer. 2005. 1085 p.
3. Noghin V. D. A Logical Justification of the Edgeworth – Pareto Principle. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2002. No.42(7). P.915–920.
4. Noghin V. D. Reduction of the Pareto set: an axiomatic approach. Springer, 232 p.
5. Zadeh L. A. 1965. Fuzzy sets. Information and Control. 2018. No.8(3). P.199–249.
6. Chen T. Y. An interval type-2 fuzzy PROMETHEE method using a likelihood-based outranking comparison approach. Information Fusion. 2015. No.25. P.105–120.
7. Dymova L., Sevastjanov P., Tikhonenko A. An interval type-2 fuzzy extension of the TOPSIS method using alpha cuts. Knowledge-Based Systems. 2015. No.83. P.116–127.
8. Qin J., Liu X. Type-2 Fuzzy Decision-Making Theories, Methodologies and Applications. Springer. 2019. 271 p.
9. Shukla A. K., Muhuri P. K. General type-2 fuzzy decision making and its application to travel time selection. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems. 2019. No.36. P.5227–5244.
10. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Springer. 2013. 281 p.
11. Ногин В. Д., Басков О. В. Нечеткие множества второго порядка и их применение в принятии решений. Общие понятия. Искусственный интеллект и принятие решений. 2021, №1. С. 3–14.
12. Zadeh L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Information Sciences. 1975. No.8(3). P.199–249.
13. Karnik N. N., Mendel J. M. Operations on type-2 fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems. 2002. No.122. P.327–348.
14. Hu B. Q., Wang C. Y. On type-2 fuzzy relations and interval-valued type-2 fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems. 2014. No.236. P.1–32.
15. Mitsumoto M., Tanaka K. Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2. Information and Control. 1976. No.31. P.312–340.
16. Mendel J. M., John R. Type-2 Fuzzy Sets Made Simple. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2002. No.10(2). P.117–127.
17. Zhang W. R. Knowledge representation using linguistic fuzzy relations. PhD Diss., University of South Carolina. 1986.
18. Baskov O. V., Noghin V. D. The Edgeworth – Pareto principle in the case of IT2F preference relation. Journal of Physics: Conference Series. 2021. No.1801. P.1–5.
19. Baskov O. V. Consistency of information about type-2 fuzzy preference relation (unpubl.)
20. Басков О. В. Сужение множества Парето на основе информации о нечетком отношении предпочтения второго порядка. Математическое обоснование алгоритма // Искусственный интеллект и принятие решений. 2022. №4 (в печати).

Басков Олег Владимирович. Кандидат физико-математических наук. Доцент. Санкт-Петербургский государственный университет. Области исследований: теория принятия решений, теория нечетких множеств. E-mail: o.baskov@spbu.ru

Pareto Set Reduction Based on Information about a Type-2 Fuzzy Preference Relation. Algorithm Description

O. V. Baskov

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia

Abstract. A multicriteria choice problem is considered in a case when preferences of a decision maker are expressed with a type-2 fuzzy binary relation. An algorithm for Pareto set reduction based on fuzzy quanta of information about preferences of the decision maker is presented. An example of its application is also discussed.

Keywords: multicriteria choice, Pareto set reduction, axiomatic approach, fuzzy sets.

DOI 10.14357/20718594220305

References

1. Miettinen K. 1999. Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer: 300 p.
2. Figueira J., Greco S., Ehrgott M. 2005. Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys. Springer: 1085 p.
3. Noghin V. D. 2002. A Logical Justification of the Edgeworth – Pareto Principle. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 42(7):915–920.
4. Noghin V. D. 2018. Reduction of the Pareto set: an axiomatic approach. Springer, 232 p.
5. Zadeh L. A. 1965. Fuzzy sets. Information and Control. 8(3):199–249.
6. Chen T. Y. 2015. An interval type-2 fuzzy PROMETHEE method using a likelihood-based outranking comparison approach. Information Fusion. 25:105–120.
7. Dymova L., Sevastjanov P., Tikhonenko A. 2015. An interval type-2 fuzzy extension of the TOPSIS method using alpha cuts. Knowledge-Based Systems. 83:116–127.
8. Qin J., Liu X. 2019. Type-2 Fuzzy Decision-Making Theories, Methodologies and Applications. Springer: 271 p.
9. Shukla A. K., Muhuri P. K. 2019. General type-2 fuzzy decision making and its application to travel time selection. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 36:5227–5244.
10. Bede B. 2013. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Springer: 281 p.
11. Noghin V. D., Baskov O. V. 2021. Type-2 fuzzy sets and their application in decision-making summary. General concepts. *Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii* [Artificial intelligence and decision-making] 1:3–14.
12. Zadeh L. A. 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Information Sciences. 8(3):199–249.
13. Karnik N. N., Mendel J. M. 2002. Operations on type-2 fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems. 122:327–348.
14. Hu B. Q., Wang C. Y. 2014. On type-2 fuzzy relations and interval-valued type-2 fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems. 236:1–32.
15. Mitsumoto M., Tanaka K. 1976. Some Properties of Fuzzy Sets of Type 2. Information and Control. 31:312–340.
16. Mendel J. M., John R. 2002. Type-2 Fuzzy Sets Made Simple. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 10(2):117–127.
17. Zhang W. R. 1986. Knowledge representation using linguistic fuzzy relations. PhD Diss., University of South Carolina.
18. Baskov O. V., Noghin V. D. 2021. The Edgeworth – Pareto principle in the case of IT2F preference relation. Journal of Physics: Conference Series. 1801:1–5.
19. Baskov O. V. Consistency of information about type-2 fuzzy preference relation (unpubl.)
20. Baskov O. V. 2022. Pareto set reduction based on information about a type-2 fuzzy preference relation. *Iskusstvennyi intellekt i prinyatie reshenii* [Artificial intelligence and decision-making] (in press).

Baskov Oleg V. Candidate of physical and mathematical sciences. Associate professor. Saint Petersburg State University. Research areas: decision making, fuzzy set theory. E-mail: o.baskov@spbu.ru