

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 692.23:004.94

DOI: 10.22227/1997-0935.2025.2.193-214

Обоснование комбинации стандартных значений характеристик материалов слоев в составе ограждающей конструкции на основе квадратичной оптимизации

Янис Айгарсович Олехнович, Антон Евгеньевич Радаев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ);
г. Санкт-Петербург, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Актуальность исследования определяется особенностями конструктивных и организационно-технологических решений, формируемых в процессе разработки современных строительных проектов, заключающимися в использовании ограниченного состава технологических ресурсов (строительных материалов, машин и оборудования), обуславливающего дискретность значений характеристик вышеупомянутых решений. Цель исследования — разработка инструментальных средств для обоснования комбинации стандартных значений характеристик материалов, используемых для устройства слоев ограждающей конструкции, с применением средств квадратичной оптимизации.

Материалы и методы. Разработаны математические модели оптимизации толщин материалов, используемых в качестве слоев ограждающей конструкции в составе жилого здания, базирующиеся на дискретных и бинарных неизвестных переменных, а также на критериях средневзвешенной (по толщине слоев) температуры, общей толщины и сопротивления теплопередаче конструкции. Математические модели имеют квадратичную структуру целевой функции и линейную структуру непрямых ограничений, однако наличие ограничений дискретности (бинарности) неизвестных переменных существенно затрудняет процесс реализации моделей ввиду отсутствия подходящих стандартных (доступных в современных программных средах математического моделирования) вычислительных алгоритмов. В этой связи принято решение разработать пользовательский вычислительный алгоритм, заключающий в себе преимущества метода ветвей и границ, используемого для определения оптимальных значений неизвестных переменных, в отношении которых заданы требования дискретности или бинарности, а также метода внутренней точки, применяемого для установления оптимального решения модели квадратичной оптимизации без учета вышеупомянутых требований.

Результаты. Разработанные математические модели реализованы с использованием предложенного вычислительного алгоритма на практическом примере для решения задачи обоснования комбинации стандартных значений характеристик материалов в отношении рассматриваемой ограждающей конструкции. Полученные результаты позволили сформировать зависимости значений отдельных теплотехнических показателей конструкции от требуемого значения ее толщины.

Выводы. На основе анализа результатов реализации разработанных математических моделей с использованием предложенного вычислительного алгоритма на практическом примере сделан вывод о высокой практической значимости вышеупомянутых инструментальных средств.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: многослойное стеновое ограждение, толщина материала, сопротивление теплопередаче, математическая модель, квадратичная оптимизация, метод ветвей и границ, метод внутренней точки

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Олехнович Я.А., Радаев А.Е. Обоснование комбинации стандартных значений характеристик материалов слоев в составе ограждающей конструкции на основе квадратичной оптимизации // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 2. С. 193–214. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.2.193-214

Автор, ответственный за переписку: Янис Айгарсович Олехнович, olehnovich_yaa@spbstu.ru.

Justification of the combination of standard values of material characteristics of layers in the building envelope on the basis of quadratic optimization

Yanis A. Olekhnovich, Anton E. Radaev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (SPbPU); St. Petersburg, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The relevance of the research is determined by the features of the design and organizational-and-technological solutions formed in the process of developing modern construction projects, consisting in the use of a limited composition of technological resources (building materials, machines and equipment), which determines the discreteness of the values of the characteristics of the above-mentioned solutions. The purpose of the study is to develop tools to justify the combination of standard values of the characteristics of materials used for the device of layers of the enclosing structure, using quadratic optimization tools.

Materials and methods. Mathematical models for optimization of the thickness for the materials used as layers of the enclosing structure in a residential building are developed, based on discrete and binary unknown variables, as well as on the criteria of the weighted average (by the thickness of layers) temperature, total thickness and thermal resistance of the structure. The mathematical models have a quadratic structure of the objective function and a linear structure of indirect constraints, but the presence of constraints related to the discreteness (bigness) of unknown variables significantly complicates the process of the models' implementation due to the lack of suitable standard (available in modern software environments for mathematical modelling) computational algorithms. In this regard, it was decided to develop a user computational algorithm that includes the advantages of the branch and bound method used to determine the optimal values of unknown variables for which discreteness or binary requirements are specified, as well as the interior point method used to determine the optimal solution of the quadratic optimization model without taking into account the above requirements.

Results. To practically verify the developed mathematical models, the proposed computational algorithm was applied to justify the selection of standard material characteristics for the given enclosure structure. The resulting data enabled the establishment of dependencies between the thermal performance indicators of the structure and the required thickness of its layers.

Conclusions. Based on the analysis of the results obtained from using the developed mathematical models and computational algorithm, the significant practical value of the proposed tools was confirmed.

KEYWORDS: multilayer wall envelope, material thickness, thermal resistance, mathematical model, quadratic optimization, branch and bound method, interior point method

FOR CITATION: Olekhnovich Ya.A., Radaev A.E. Justification of the combination of standard values of material characteristics of layers in the building envelope on the basis of quadratic optimization. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2025; 20(2):193-214. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.2.193-214 (rus.).

Corresponding authors: Yanis A. Olekhnovich, olehnovich_yaa@spbstu.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемые на сегодняшний день тенденции к ужесточению требований в отношении временных и стоимостных показателей реализации отечественных строительных проектов обуславливают наличие следующих особенностей процесса строительства:

- использование стандартных конструктивных решений, разрабатываемых на этапе проектирования объекта строительства, посредством анализа ограниченного числа возможных вариантов;
- применение стандартных технологических схем для строительных работ с учетом возможностей организации-застройщика, а также информации, содержащейся в проектной и организационно-технологической документации;
- использование стандартных вариантов технологических ресурсов — строительных материалов, оборудования и машин, характеризующихся серийностью (массовостью) производства, и, как следствие, относительно невысокой себестоимостью.

Вышеперечисленные особенности определяют высокую значимость учета дискретности характеристик конструктивных решений, формируемых в процессе разработки строительных проектов при решении соответствующих прикладных задач, в частности конструктивных решений, применяемых по отношению к стеновым ограждениям в составе объектов жилищного строительства, непосредственно определяющих показатели эффективности соответствующих строительных проектов. Тем не менее результаты предварительного анализа существующих научных

разработок в области обоснования характеристик конструктивных решений для стеновых ограждений в составе объектов строительства засвидетельствовали отсутствие эффективного учета дискретного характера вышеупомянутых характеристик, что, в свою очередь, обуславливает относительно невысокую практическую значимость соответствующих инструментальных средств. Указанное обстоятельство определило целесообразность проведения исследования, цель которого заключается в разработке инструментальных средств для обоснования комбинации стандартных значений характеристик материалов, используемых в качестве слоев ограждающей конструкции в составе жилых зданий, с применением средств квадратичной оптимизации. В рамках исследования были поставлены следующие задачи:

1. Провести обзор и сравнительный анализ научных подходов к обоснованию характеристик конструктивных решений для ограждающих конструкций жилых зданий.
2. Разработать математические модели для обоснования стандартных значений характеристик материалов, используемых в качестве слоев ограждающей конструкции.
3. Реализовать разработанные модели на практическом примере.

Объектом исследования является ограждающая конструкция, содержащая некоторое количество слоев, каждый из которых состоит из однородного материала, (далее — стеновое ограждение) в составе жилого здания. Предмет исследования — физические и теплотех-

нические характеристики материалов, используемых в качестве слоев ограждающей конструкции.

На начальных этапах исследования произведен обзор и сравнительный анализ научных разработок, относящихся по тематике исследования — инструментальных средств (моделей, методик, алгоритмов), предложенных зарубежными и отечественными авторами [1–25]. По результатам выполнения указанной процедуры сделаны следующие выводы:

1. Научные разработки, применяемые для решения задачи обоснования характеристик конструктивных решений, формируемых по отношению к стекловым ограждениям в составе жилых зданий, могут быть классифицированы по основным признакам:

- по объекту анализа: разработки, посвященные анализу отдельных слоев стеклового ограждения [14, 18–22, 24, 25]; разработки, предусматривающие анализ комбинаций слоев стеклового ограждения [23]; разработки, предполагающие анализ конструктивных решений, формируемых в отношении жилых зданий, в том числе в части соответствующих стекловых ограждений [1–13, 15–17];

- по способу учета требований принадлежности фактических значений расчетных характеристик к ограниченным наборам стандартных значений (далее — требования дискретности): разработки, предполагающие неявный учет требований дискретности в рамках процедуры вычисления характеристик объекта анализа посредством округления соответствующих расчетных значений до ближайших стандартных значений с учетом заданных ограничений в отношении показателей энергетической и экономической эффективности жилого здания [14, 18–25]; разработки, предусматривающие непосредственный учет требований дискретности в рамках процедуры вычисления характеристик объекта анализа [1–13, 15–17];

- по разновидности средств математического моделирования, применяемых в рамках процедуры расчета: разработки, предполагающие применение аналитических моделей — формул, выведенных с учетом определенных допущений, для непосредственного расчета характеристик объекта анализа [18, 20, 21, 24, 25]; разработки, предусматривающие создание математических моделей для оптимизации характеристик объекта анализа с последующей реализацией упомянутых моделей с использованием определенных вычислительных алгоритмов [1–17, 19, 22, 23];

- по категории вычислительных алгоритмов, используемых для реализации математических моделей оптимизации: разработки, предполагающие применение детерминированных алгоритмов квадратичной оптимизации [23]; разработки, предусматривающие использование детерминированных алгоритмов целочисленной линейной [14, 19, 22] и нелинейной [5, 6] оптимизации; разработки, в рамках которых рассматривается применение стохастических алгоритмов целочисленной нелинейной оптимизации — алгоритмов роевого интеллекта, а также

генетических алгоритмов [2, 4, 10, 12, 13, 15]; разработки, предусматривающие совместное применение генетических алгоритмов (для реализации моделей оптимизации) и нейронных сетей (для формирования прогнозных зависимостей значений критериев оптимизации от значений неизвестных переменных) [1, 3, 7–9, 11, 16, 17].

2. Основными недостатками, обуславливающими относительно невысокую практическую значимость вышеописанных научных разработок, являются:

- существенная ограниченность состава допустимых вариантов конструктивных решений для рассматриваемого стеклового ограждения [20, 21];
- последовательный (основанный на правилах приоритетности) характер учета ограничений для значений показателей энергетической и экономической эффективности в рамках процедуры аналитического (формульного) расчета характеристик конструктивного решения для рассматриваемого стеклового ограждения [24, 25];

- трудность обеспечения надлежащего уровня адекватности математических взаимосвязей между значениями критериев оптимизации и значениями неизвестных переменных, обусловленная особенностями применяемых процедур статистической обработки данных [14, 19, 22], а также реализуемых процессов формирования и обучения нейронных сетей [1, 3, 7–9, 11, 16, 17];

- наличие существенных отклонений наиболее предпочтительных значений характеристик конструктивного решения от расчетных значений, полученных посредством округления результатов реализации математической модели без учета требований дискретности до ближайших стандартных значений [14, 18–25];

- относительно невысокая эффективность вычислительного алгоритма, обусловленная наличием большого количества целочисленных переменных [5, 6], а также зависимостью результатов работы алгоритма от начальных значений неизвестных переменных и режимов работы генераторов случайных чисел [1–4, 7–13, 15–17].

Перечисленные выше недостатки имеющихся научных разработок, относящихся к тематике исследования, позволили сделать вывод о необходимости дополнительной научной проработки вопросов учета требований дискретности при обосновании характеристик конструктивных решений для стекловых ограждений в составе жилых зданий, а также определили целесообразность разработки математических моделей обоснования стандартных значений характеристик материалов, используемых для устройства слоев стеклового ограждения. Подробное описание моделей представлено в следующем разделе работы.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Разработанные на промежуточных этапах исследования математические модели обоснования стан-

дартных значений характеристик материалов, используемых для устройства слоев стенового ограждения, базируются на следующих основных положениях:

1. Объектом рассмотрения является внешнее (разделяющее внешнюю среду и внутридомовое пространство) многослойное (определенное совокупностью сопряженных друг с другом слоев) стеновое ограждение в составе жилого здания (рис. 1).

2. Каждый отдельный слой в составе рассматриваемого стенового ограждения изготовлен из однородного строительного материала, характеризующегося определенными толщиной и теплопроводностью.

3. Для устройства каждого отдельного слоя в составе стенового ограждения используются стандартные варианты (модели) строительных материалов, каждый из которых устанавливается уникальным значением толщины материала слоя.

4. Стеновое ограждение предназначено в том числе для обеспечения совместно с другими структурными элементами проектных значений теплотехнических показателей, в частности суммарного сопротивления теплопередаче слоев в составе стенового ограждения.

5. Необходимо выявить оптимальную толщину материала каждого отдельного слоя в составе стенового ограждения для обеспечения максимального значения средневзвешенной (по толщине слоев) температуры конструкции при соответствии сопротивления теплопередаче и общей толщины слоев стенового ограждения заданным значениям.

Табл. 1 содержит описание исходных данных и неизвестных переменных, необходимых для построения математических моделей. В табл. 2 приведено описание соответствующих расчетных характеристик.

Математическая модель с дискретными неизвестными переменными (п. 2.1.1 табл. 1) определяется следующими выражениями:

- в обобщенной форме записи:

$$\Theta(\{\delta_s\}) \rightarrow \min; \quad (1)$$

$$\delta_s \in \{\delta_{sk}\}, s = 1, 2, \dots, S; \quad (2)$$

$$\delta(\{\delta_s\}) = \delta_{req}; \quad (3)$$

$$R^{\min} \leq R(\{\delta_s\}) \leq R^{\max}; \quad (4)$$

- в развернутой форме записи:

$$\left\{ \sum_{s=1}^S \left(R_{int} + \sum_{s'=1}^s \frac{\delta_{s'}}{\lambda_{s'}} + \frac{\delta_s}{2 \cdot \lambda_s} \right) \cdot \delta_s \rightarrow \min; \quad (5) \right.$$

$$\delta_s \in \{\delta_{sk}\}, s = 1, 2, \dots, S; \quad (6)$$

$$\sum_{s=1}^S \delta_s = \delta_{req}; \quad (7)$$

$$R_{req} \cdot (1 - \sigma_R^{\max}) \leq R_{int} + \sum_{s=1}^S \frac{\delta_s}{\lambda_s} + R_{ext} \leq R_{req} \cdot (1 + \sigma_R^{\max}). \quad (8)$$

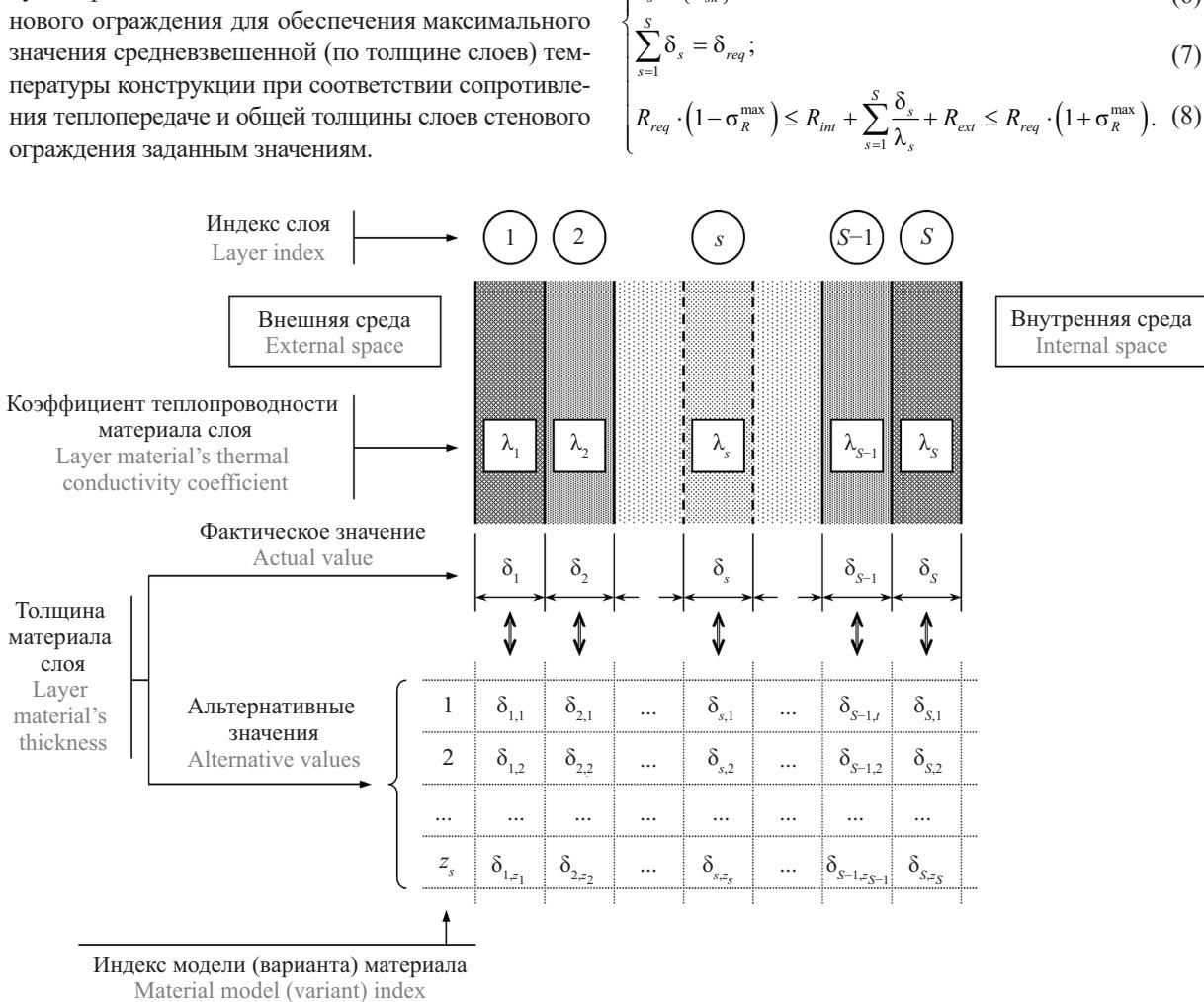


Рис. 1. Схематическое описание рассматриваемого стенового ограждения

Fig. 1. Schematic description of the considered wall envelope

Табл. 1. Исходные данные и неизвестные переменные, необходимые для построения математических моделей

Table 1. Initial data and unknown variables required for creation of mathematical models

Номер Number	Наименование элемента исходных данных/категории неизвестных переменных Name of source data element/category of unknown variables	Единица измерения Measure unit	Обозначение/ выражение Designation/ expression
1	Исходные данные Source data		
1.1	Агрегированные исходные данные Aggregated source data		
1.1.1	Общее количество слоев в составе стенового ограждения Total number of layers within the wall envelope	ед. unit	S
1.1.2	Сопротивление теплопередаче стенового ограждения Thermal resistance of the wall envelope	на внутренней поверхности on the inner surface $\text{m}^2 \cdot \text{°C}/\text{Bt}$ $\text{m}^2 \cdot \text{°C}/\text{W}$	R_{int}
1.1.3		на внешней поверхности on the outer surface $\text{m}^2 \cdot \text{°C}/\text{Bt}$ $\text{m}^2 \cdot \text{°C}/\text{W}$	R_{ext}
1.1.4	Требуемое значение толщины стенового ограждения Required value of the thickness for the wall envelope	m m	δ_{req}
1.1.5	Требуемое значение сопротивления теплопередаче стенового ограждения Required value of thermal resistance for the wall envelope	$\text{m}^2 \cdot \text{°C}/\text{Bt}$ $\text{m}^2 \cdot \text{°C}/\text{W}$	R_{req}
1.1.6	Максимальное относительное отклонение фактического значения сопротивления теплопередаче стенового ограждения от требуемого значения Maximum relative deviation of the wall envelope's thermal resistance actual value from the required value	—	σ_R^{\max}
1.1.7	Температура внутреннего воздуха Indoor air temperature	$^{\circ}\text{C}$	t_{int}
1.1.8	Температура наружного воздуха Outdoor air temperature	$^{\circ}\text{C}$	t_{ext}
1.1.9	Коэффициент, учитывающий неравномерность материала стенового ограждения Coefficient taking into account the non-uniformity of the material of the wall envelope	—	r
1.2	Индексы Indexes		
1.2.1	Индекс слоя стенового ограждения* Wall envelope's layer index*	—	$s = 1, 2, \dots, S$
1.2.2	Индекс альтернативного (стандартного) значения толщины материала слоя стенового ограждения** Index of alternative (standard) value of the thickness for the material within the layer of the wall envelope**	—	$k = 1, 2, \dots, z_s$
1.3	Исходные данные, задаваемые для каждого слоя с индексом s ($s = 1, 2, \dots, S$) в составе стенового ограждения Initial data specified for each layer with an index s ($s = 1, 2, \dots, S$) as part of the wall envelope		
1.3.1	Наименование материала, используемого в качестве слоя Name of the material used as layer	—	—
1.3.2	Количество альтернативных (стандартных) значений толщины материала, используемого в качестве слоя The number of alternative (standard) values of thickness for the material used as layer	ед. unit	z_s
1.3.3	Коэффициент теплопроводности материала, используемого в качестве слоя Thermal conductivity coefficient of the material used as layer	$\text{Bt}/(\text{m} \cdot \text{°C})$ $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{°C})$	λ_s
1.4	Исходные данные, задаваемые для каждого альтернативного значения с индексом k ($k = 1, 2, \dots, z_s$) толщины материала в рамках каждого слоя с индексом s ($s = 1, 2, \dots, S$) в составе стенового ограждения Initial data specified for each alternative value with an index k ($k = 1, 2, \dots, z_s$) for the thickness of the material within each layer with an index s ($s = 1, 2, \dots, S$) as part of the wall envelope		

Номер Number	Наименование элемента исходных данных/категории неизвестных переменных Name of source data element/category of unknown variables	Единица измерения Measure unit	Обозначение/ выражение Designation/ expression
1.4.1	Альтернативное (стандартное) значение толщины материала, используемого в качестве слоя** Alternative (standard) value for the thickness of the material used as layer**	м m	δ_{sk}
2	Неизвестные переменные Unknown variables		
2.1	Неизвестные переменные, учитываемые для каждого слоя с индексом s ($s = 1, 2, \dots, S$) в составе стенового ограждения Unknown variables taken into account for each layer with index s ($s = 1, 2, \dots, S$) as part of the wall envelope		
2.1.1	Фактическое значение толщины материала, используемого в качестве слоя Actual value for the thickness of the of the material used as layer	м m	δ_s
2.2	Неизвестные переменные, учитываемые для каждого альтернативного значения с индексом k ($k = 1, 2, \dots, z_s$) толщины материала в рамках каждого слоя с индексом s ($s = 1, 2, \dots, S$) в составе стенового ограждения Unknown variables taken into account for each alternative value with an index k ($k = 1, 2, \dots, z_s$) for the thickness of the material within each layer with an index s ($s = 1, 2, \dots, S$) as part of the wall envelope		
2.2.1	Индикатор соответствия фактического значения толщины слоя альтернативному значению*** Indicator describing compliance of the layer thickness's actual value with alternative value***	—	y_{sk}

Примечание: * — индексация слоев ограждающей конструкции производится по принципу: возрастание значений индекса соответствует направлению устройства слоев от внутренней среды (относительно стенового ограждения) к внешней среде; ** — значения элемента исходных данных должны удовлетворять условию $\delta_{sk=1} < \delta_{sk=2} < \dots < \delta_{sk=z_s}$; *** — каждая неизвестная переменная данной категории является бинарной ($y_{sk} \in \{0; 1\}$) и формируется по следующему принципу: если фактическое значение толщины материала, используемого в качестве слоя с индексом s в составе стенового ограждения, соответствует альтернативному (стандартному) значению с индексом k ; в противном случае $y_{sk} = 0$.

Note: * — indexing of layers within the enclosing structure is carried out according to the principle: increasing index values correspond to the direction of the arrangement of layers from the internal environment (relative to the wall envelope) to the external environment; ** — the values of the source data element must satisfy the condition $\delta_{sk=1} < \delta_{sk=2} < \dots < \delta_{sk=z_s}$; *** — each unknown variable of this category is binary ($y_{sk} \in \{0; 1\}$) and is formed in accordance with the following principle: if $y_{sk} = 1$ the actual value for the thickness of the material used as the layer with index s as part of the wall envelope corresponds to the alternative (standard) value with the index k ; otherwise $y_{sk} = 0$.

Табл. 2. Расчетные характеристики, учитываемые в рамках математических моделей

Table 2. Calculated characteristics taken into account within mathematical models

Номер Number	Наименование расчетной характеристики Name of calculated characteristic	Единица измерения Measure unit	Выражение Expression
1	Расчетные характеристики, вычисляемые для каждого слоя с индексом s ($s = 1, 2, \dots, S$) в составе стенового ограждения Calculated characteristics enumerated for each layer with index s ($s = 1, 2, \dots, S$) within wall envelope		
1.1	Предельно допустимое значение толщины материала, используемого в качестве слоя Limit value of the thickness for the material used as layer	минимальное minimal м m	$\delta_s^{\min} = \min_k \{\delta_{sk}\}$
1.2		максимальное maximal м m	$\delta_s^{\max} = \max_k \{\delta_{sk}\}$
1.3	Сопротивление теплопередаче на внутренней поверхности слоя Thermal resistance on the inner surface of the layer	определенное переменными п. 2.1.1 табл. 1 determined by the variables of item 2.1.1 of Table 1 м ² ·°C/Bт м ² ·°C/W	$R_{int,s} = \begin{cases} R_{int}, s = 1; \\ R_{int} + \sum_{s'=1}^{s-1} \frac{\delta_{s'}}{\lambda_{s'}}, s > 1 \end{cases}$

Продолжение табл. 2 / Continuation of the Table 2

Номер Number	Наименование расчетной характеристики Name of calculated characteristic	Единица измерения Measure unit	Выражение Expression
1.4	Сопротивление теплопередаче на внутренней поверхности слоя Thermal resistance on the inner surface of the layer	определяемое переменными п. 2.2.1 табл. 1 determined by the variables of item 2.2.1 of Table 1	$m^2 \cdot ^\circ C/Bt$ $m^2 \cdot ^\circ C/W$
1.5	Сопротивление теплопередаче на внешней поверхности слоя Thermal resistance on the outer surface of the layer	определяемое переменными п. 2.1.1 табл. 1 determined by the variables of item 2.1.1 of Table 1	$m^2 \cdot ^\circ C/Bt$ $m^2 \cdot ^\circ C/W$
1.6		определяемое переменными п. 2.2.1 табл. 1 determined by the variables of item 2.2.1 of Table 1	$m^2 \cdot ^\circ C/Bt$ $m^2 \cdot ^\circ C/W$
1.7	Среднее в слое сопротивление теплопередаче Average thermal resistance in a layer		$R_s = \frac{R_{int\ s} + R_{ext\ s}}{2}$
1.8	Количество альтернативных (стандартных) значений толщины материала слоя, соответствующих фактическому значению Number of layer material thickness's alternative (standard) values corresponding to the actual value	ед. unit	$y_s = \sum_{k=1}^{z_s} y_{sk}$
2	Агрегированные расчетные характеристики Aggregated calculated characteristics		
2.1	Предельно допустимое значение сопротивления теплопередаче стенового ограждения	минимальное minimal	$R^{\min} = R_{req} \cdot (1 - \sigma_R^{\max})$
2.2	Limit value of thermal resistance of the wall envelope	максимальное maximal	$R^{\max} = R_{req} \cdot (1 + \sigma_R^{\max})$
2.3	Фактическое значение толщины стенового ограждения Actual value of the wall envelope's thickness	определенное переменными п. 2.1.1 табл. 1 determined by the variables of item 2.1.1 of Table 1	m m
2.4		определенное переменными п. 2.2.1 табл. 1 determined by the variables of item 2.2.1 of Table 1	m m
2.5	Фактическое значение сопротивления теплопередаче стенового ограждения Actual value of the wall envelope's thermal resistance		$R = R_{ext\ s} + R_{ext}$
2.6	Относительное отклонение фактического значения сопротивления теплопередаче стенового ограждения от требуемого значения Relative deviation of the wall envelope's thermal resistance actual value from the required value	—	$\sigma_R = \frac{R - R_{req}}{R_{req}}$
2.7	Интегральный показатель сопротивления теплопередаче стенового ограждения Integral indicator of the wall envelope's thermal resistance		$\Theta = \sum_{s=1}^S R_s \cdot \delta_s$

Номер Number	Наименование расчетной характеристики Name of calculated characteristic	Единица измерения Measure unit	Выражение Expression
2.8	Средневзвешенная (по толщине слоев) температура стенового ограждения* Weighted average (by the thickness of layers) temperature of the wall envelope*	°C	$\bar{t} = t_{int} - \frac{t_{int} - t_{ext}}{R} \cdot r \cdot \frac{\Theta}{\delta}$

Примечание: * — расчетная характеристика непосредственно не учитывается в структуре математических моделей и вычисляется на основе результатов их реализации в рамках процедуры оценки качества получаемого решения.

Note: * — the calculated characteristic is not directly taken into account in the structure of mathematical models and is calculated on the basis of the results of their implementation within the procedure of the quality assessment for the obtained solution.

Математическая модель с бинарными неизвестными переменными (п. 2.2.1 табл. 1) определяется следующими выражениями:

- в обобщенной форме записи:

$$\Theta(\{y_{sk}\}) \rightarrow \max; \quad (9)$$

$$y_{sk} \in \{0; 1\}, s = 1, 2, \dots, S; k = 1, 2, \dots, z_s; \quad (10)$$

$$y_s(\{y_{sk}\}) = 1, s = 1, 2, \dots, S; \quad (11)$$

$$\delta(\{y_{sk}\}) = \delta_{req}; \quad (12)$$

$$R^{\min} \leq R(\{y_{sk}\}) \leq R^{\max}; \quad (13)$$

- в развернутой форме записи:

$$\sum_{s=1}^S \left(R_{int} + \sum_{s'=1}^{s-1} \frac{\sum_{k=1}^{z_s} \delta_{s'k} \cdot y_{s'k}}{\lambda_{s'}} + \frac{\sum_{k=1}^{z_s} \delta_{sk} \cdot y_{sk}}{2 \cdot \lambda_s} \right) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{z_s} \delta_{sk} \cdot y_{sk} \rightarrow \min; \quad (14)$$

$$y_{sk} \in \{0; 1\}, s = 1, 2, \dots, S; k = 1, 2, \dots, z_s; \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{z_s} y_{sk} = 1, s = 1, 2, \dots, S; \quad (16)$$

$$\sum_{s=1}^S \sum_{k=1}^{z_s} \delta_{sk} \cdot y_{sk} = \delta_{req}; \quad (17)$$

$$R_{req} \cdot (1 - \sigma_R^{\max}) \leq R_{int} + \sum_{s=1}^S \frac{\sum_{k=1}^{z_s} \delta_{sk} \cdot y_{sk}}{\lambda_s} + \quad (18)$$

$$+ R_{ext} \leq R_{req} \cdot (1 + \sigma_R^{\max}).$$

Описание структурных элементов математических моделей представлено в табл. 3.

Важно отметить, что выражения (14), (17), (18) получены на основе соответственно выражений (5), (7), (8) посредством замены дискретных переменных $\{\delta_s\}$ на бинарные переменные $\{y_{sk}\}$ согласно выражению:

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{z_s} \delta_{sk} \cdot y_{sk}; s = 1, 2, \dots, S. \quad (19)$$

Как видно из выражений (5)–(8), (14)–(18), каждая из представленных математических моделей описывается квадратичной (относительно неизвестных переменных) структурой целевой функции, а также линейной структурой непрямых ограничений. Тем не менее

наличие в структуре математической модели, определяемой выражениями (5)–(8), прямых ограничений, исключающих непрерывный характер значений неизвестных переменных (выражение (6)), исключает возможность применения для реализации модели с дискретными неизвестными переменными стандартных вычислительных алгоритмов, доступных в современных программных средах математического моделирования; при этом наличие в структуре математической модели, определяемой выражениями (14)–(18), аналогичных прямых ограничений (выражение (15)) обуславливает трудность эффективной реализации модели с бинарными неизвестными переменными с использованием стандартных вычислительных алгоритмов, к которым относятся следующие:

- детерминированные алгоритмы нелинейной целочисленной оптимизации, каждый из которых предполагает совместное применение метода ветвей и границ и определенного метода нелинейной оптимизации при произвольной структуре целевой функции, обладающей свойством дифференцируемости¹;

- стохастические алгоритмы нелинейной целочисленной оптимизации, соответствующие эвристическим методам эволюционного развития [26].

Указанное обстоятельство определило целесообразность разработки специального вычислительного алгоритма, заключающего в себе преимущества метода ветвей и границ, используемого для определения оптимальных значений неизвестных переменных, в отношении которых заданы ограничения (требования) дискретности или бинарности, а также метода внутренней точки, применяемого для определения оптимального решения модели квадратичной оптимизации без учета ограничений (требований) дискретности или бинарности значений неизвестных переменных.

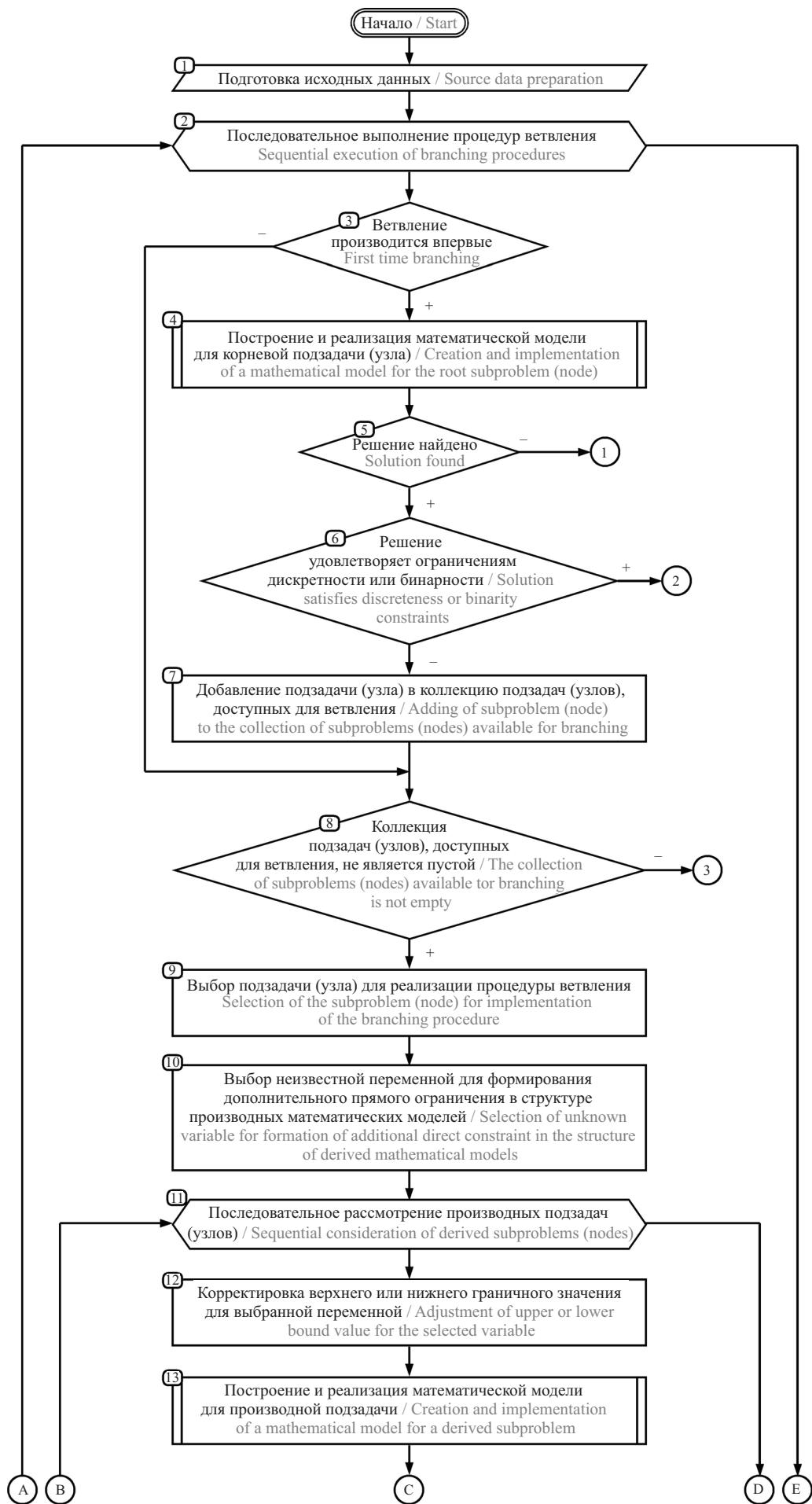
Структура разработанного вычислительного алгоритма, обеспечивающего реализацию математических моделей обоснования стандартных значений характеристик материалов, используемых для устройства слоев стенового ограждения, представлена на рис. 2. Основными особенностями вышеупомянутого вычислительного алгоритма, применяемого по отношению

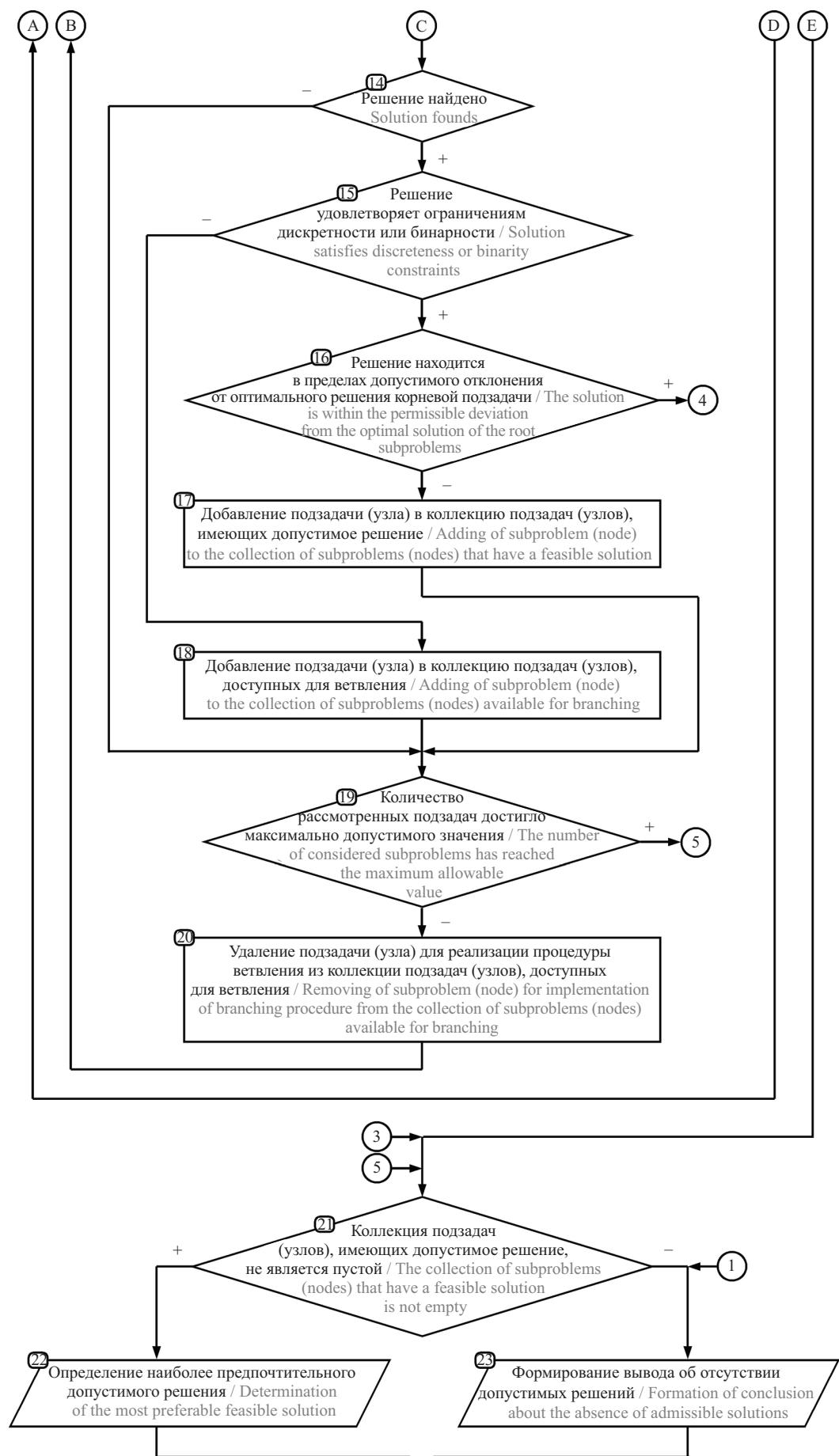
¹ Solver Technology — Mixed-Integer and Constraint Programming / Frontline Systems, Inc. 2024. URL: <https://www.solver.com/mixed-integer-constraint-technology>

Табл. 3. Описание структурных элементов математических моделей

Table 3. Description of the structural elements of the mathematical models

Номер выражения как структурного элемента модели Number of expression as a structural element of the model				Описание Description
модель с дискретными переменными model with discrete variables	модель с бинарными переменными model with binary variables	обобщенная форма записи generalized notation	развернутая форма записи extended notation	
1	5	9	14	Целевая функция, предполагающая минимизацию интегрального показателя сопротивления теплопередаче стенового ограждения (числитель вычитаемого в выражении для средневзвешенной температуры стенового ограждения) Objective function, which assumes the minimization of integral indicator of the wall envelope's thermal resistance (numerator of the subtrahend in the expression for the wall envelope's weighted average temperature)
2	6	–	–	Прямые ограничения, определяющие дискретность (принадлежность к ограниченному набору стандартных значений) значения каждой из неизвестных переменных (толщины материала слоя стенового ограждения) Direct constraints that determine the discreteness (belonging to a limited set of standard values) of the each unknown variable's value (thickness of the material within the wall envelope)
–	–	10	15	Прямые ограничения, определяющие бинарность (соответствие либо нулю, либо единице) значения каждой из неизвестных переменных (толщины материала слоя стенового ограждения) Direct constraints that determine the binarity (correspondence to either zero or one) of the each unknown variable's value (thickness of the material within the wall envelope)
–	–	11	16	Непрямые ограничения, определяющие соответствие фактического значения толщины материала в составе каждого отдельного слоя стенового ограждения единственному из альтернативных (стандартных) значений для упомянутого слоя Indirect constraints that determine the correspondence of the actual value of the thickness for the material within each individual layer of the wall envelope to the only one of the alternative (standard) values for the mentioned-above layer
3	7	12	17	Непрямое ограничение, определяющее соответствие фактического значения толщины стенового ограждения требуемому значению Indirect constraint that determines correspondence of the actual value of the wall envelope's thickness to the required value
4	8	13	18	Непрямое ограничение, определяющее нахождение фактического значения сопротивления теплопередаче стенового ограждения в пределах допустимого отклонения от требуемого значения Indirect constraint that determines the location of actual value of the wall envelope's thermal resistance within the permissible deviation from the required value





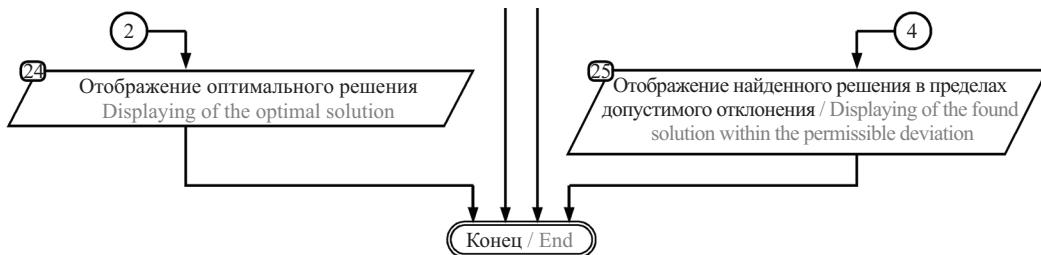


Рис. 2. Блок-схема, описывающая структуру разработанного алгоритма реализации математических моделей
Fig. 2. Block diagram describing the structure of the developed algorithm for implementation of mathematical models

к каждой из разработанных математических моделей, являются следующие:

1. Реализация в рамках корневой подзадачи производной математической модели (блок 2 схемы на рис. 2) без учета ограничений, исключающих непрерывный характер значений неизвестных переменных. Вышеупомянутая производная математическая модель определяется следующими выражениями:

- в случае наличия в исходной модели требований дискретности — выражениями (5), (7), (8), а также выражением:

$$\delta_s^{\min} \leq \delta_s \leq \delta_s^{\max}, s = 1, 2, \dots, S, \quad (20)$$

определяющим прямые ограничения для непрерывных переменных;

- в случае наличия в исходной модели требований бинарности — выражениями (14), (16), (17), (18).

2. Реализация каждой из производных математических моделей в составе соответствующих подзадач (блоки 2 и 13 схемы на рис. 2) с использованием метода внутренней точки, предполагающего формирование системы уравнений, описывающей условия Куна – Таккера, и последующее ее решение с использованием алгоритмов прогноза и коррекции.

3. Выполнение процедуры выбора подзадачи для реализации очередной процедуры ветвления подзадач (блок 9 схемы на рис. 2) согласно выражению:

$$t^* : UB_{t^*} = \min_{t \in T^y} \{UB_t\}, \quad (21)$$

где t, t^* — индекс текущей и наиболее предпочтительной производной подзадачи (узла) соответственно; T^y — множество индексов, доступных для ветвления производных подзадач, в рамках каждой из которых получено оптимальное решение, не удовлетворяющее ограничениям дискретности или бинарности.

4. Выполнение процедуры выбора переменной в рамках оптимального решения выбранной подзадачи для реализации процедуры ветвления (блок 10 схемы на рис. 2) в соответствии с выражением:

- в случае наличия в исходной модели требований дискретности:

$$\begin{aligned} v^* : \xi_{v^*} &= \max_{v \in V^{nd}} \{\xi_v\} = \\ &= \max_{v \in V^{nd}} \left\{ \frac{\min(x_v - \delta_{s=v, k_v^*}, \delta_{s=v, k_v^* + 1} - x_v)}{x_v} \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

где v, v^* — индекс текущей и наиболее предпочтительной для реализации ветвления неизвестной переменной соответственно; ξ_{v^*}, ξ_v — значение относительного показателя недискретности для текущей и наиболее предпочтительной для реализации ветвления неизвестной переменной соответственно; V^{nd} — множество индексов неизвестных переменных, значения которых для оптимального решения, найденного в процессе реализации математической модели производной подзадачи (выбранной для выполнения процедуры ветвления), не удовлетворяют ограничениям дискретности/бинарности; x_v — значение текущей переменной в оптимальном решении, найденном в процессе реализации математической модели производной подзадачи, выбранной для выполнения процедуры ветвления; k_v^* — значение индекса интервала между смежными альтернативными значениями толщины слоя (дискретными значениями переменной), в пределах которого находится значение переменной x_v ;

$$k_v^* : \delta_{s=v, k_v^*} < x_v < \delta_{s=v, k_v^* + 1}; \quad (23)$$

$$k_v^* \in \{1; 2; \dots; z_{s=v} - 1\}; \quad (24)$$

- в случае наличия в исходной модели требований бинарности:

$$v^* : \Delta_{v^*} = \max_{v \in V^{nd}} \{\Delta_v\} = \max_{v \in V^{nd}} \{\min(x_v, 1 - x_v)\}, \quad (25)$$

где Δ_{v^*}, Δ_v — значение абсолютного показателя небинарности для текущей и наиболее предпочтительной для реализации ветвления неизвестной переменной соответственно.

5. Выполнение процедур корректировки верхнего и нижнего граничного значения для неизвестной переменной, выбранной для ветвления (блок 12 схемы на рис. 2), в соответствии с выражениями:

- в случае наличия в исходной модели требований дискретности:

$$x_{v^*}^{\max} = \delta_{s=v^*, k_v^*}; \quad (26)$$

$$x_{v^*}^{\min} = \delta_{s=v^*, k_v^* + 1}; \quad (27)$$

где $x_{v^*}^{\max}, x_{v^*}^{\min}$ — соответственно верхнее и нижнее граничное значение неизвестной переменной, выбранной для ветвления;

- в случае наличия в исходной модели требований бинарности:

$$x_{v^*}^{\max} = 0; \quad (28)$$

$$x_{v^*}^{\min} = 1. \quad (29)$$

6. Остановка алгоритма в случае нахождения для производной математической модели текущей подзадачи оптимального решения, удовлетворяющего требованиям дискретности или бинарности, обеспечивающего нахождение соответствующего значения целевой функции в пределах допустимого отклонения от значения целевой функции, соответствующего оптимальному решению для производной математической модели корневой подзадачи (блок 16 схемы на рис. 2), согласно выражению (основному условию остановки алгоритма):

$$\frac{UB_t - LB}{UB_t} \leq \psi^{\max}, \quad (30)$$

где UB_t — значение целевой функции, соответствующее оптимальному значению производной математической модели текущей подзадачи с индексом t , удовлетворяющему требованиям дискретности или бинарности; LB — значение целевой функции,

соответствующее оптимальному решению производной математической модели корневой подзадачи; ψ^{\max} — задаваемое максимально допустимое значение показателя вышеупомянутого относительного отклонения.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

На заключительных этапах исследования для объективной оценки практической значимости разработанных математических моделей была произведена их реализация на практическом примере для решения задачи обоснования комбинации стандартных значений характеристик материалов, используемых для устройства слоев стенового ограждения — плиточного фасада по железобетонному основанию. Значения элементов исходных данных, используемые при реализации математических моделей, приведены в табл. 4, а также строках 1–13 табл. 5.

Реализация каждой из математических моделей (см. выражения (5)–(8), (14)–(18)) осуществлялась с помощью разработанного вычислительного алгоритма (см. рис. 2) и включала проведение серии экспериментов. Эти эксперименты выполнялись с варьированием значения требуемой толщины стенового ограждения (п. 1.1.4 табл. 1) от 0,221 м (сумма ми-

Табл. 4. Значения элементов агрегированных исходных данных, используемые в процессе реализации математических моделей на практическом примере

Table 4. Values of aggregated source data elements used for implementation of the mathematical models on practical example

Номер Number	Наименование элемента исходных данных Name of source data element	Обозначение Designation	Единица измерения Measure unit	Значение Value
1	Общее количество слоев в составе стенового ограждения Total number of layers within the wall envelope	S	ед. unit	5
2	Сопротивление теплопередаче на внутренней поверхности стенового ограждения Thermal resistance on the inner surface of the wall envelope	R_{int}	$\text{m}^2 \cdot \text{°C/Bt}$ $\text{m}^2 \cdot \text{°C/W}$	0,115
3	Сопротивление теплопередаче на внешней поверхности стенового ограждения Thermal resistance on the outer surface of the wall envelope	R_{ext}	$\text{m}^2 \cdot \text{°C/Bt}$ $\text{m}^2 \cdot \text{°C/W}$	0,043
4	Требуемое значение толщины стенового ограждения Required value of the thickness for the wall envelope	δ_{req}	m m	2,988
5	Требуемое значение сопротивления теплопередаче стенового ограждения Required value of thermal resistance for the wall envelope	R_{req}	$\text{m}^2 \cdot \text{°C/Bt}$ $\text{m}^2 \cdot \text{°C/W}$	0,01
6	Максимальное относительное отклонение фактического значения сопротивления теплопередаче стенового ограждения от требуемого значения Maximum relative deviation of the wall envelope's thermal resistance actual value from the required value	σ_R^{\max}	—	20
7	Температура внутреннего воздуха Indoor air temperature	t_{int}	$^{\circ}\text{C}$	-1,3
8	Температура наружного воздуха Outdoor air temperature	t_{ext}	$^{\circ}\text{C}$	0,115
9	Коэффициент, учитывающий неравномерность материала стенового ограждения Coefficient taking into account the non-uniformity of the material of the wall envelope	r	—	0,92

Табл. 5. Значения элементов исходных данных в разрезе отдельных слоев стенового ограждения, используемые в процессе реализации математических моделей на практическом примере**Table 5.** Values of source data elements related to certain layers of the wall envelope, used for implementation of the mathematical models on practical example

Номер Number	Наименование элемента исходных данных/результата реализации модели Name of the element related to source data/model implementation results	Обозначение Designation	Единица измерения Measure unit	Значение для слоя с индексом <i>s</i> Value for the layer with index <i>s</i>					
				1	2	3	4	5	
1	Наименование материала слоя Name of layer material	—	—	Гипсовая штукатурка Gypsum plaster	Железобетон Reinforced concrete	Минераловатные плиты Mineral wool boards for plaster facade	Клеевой состав по армирующей сетке Adhesive composition for reinforcing mesh	Керамическая облицовочная плитка Ceramic facing tiles	
2	Количество альтернативных (стандартных) значений толщины материала, используемого в качестве слоя Number of alternative (standard) values of the thickness for the material used as layer	z_s	ед. unit	5	10	8	4	4	
3	Коэффициент теплопроводности материала, используемого в качестве слоя Thermal conductivity coefficient of the material used as layer	λ_s	Вт/(м·°C) W/(m·°C)	0,3	2,04	0,039	0,8	1,05	
4	Альтернативное (стандартное) значение толщины материала слоя, соответствующее индексу <i>k</i> Layer material thickness's alternative (standard) value corresponding to index <i>k</i>	1	$\delta_{sk=1}$	м m	0,01	0,15	0,05	0,005	0,006
5		2	$\delta_{sk=2}$	м m	0,015	0,2	0,08	0,006	0,008
6		3	$\delta_{sk=3}$	м m	0,02	0,25	0,1	0,008	0,01
7		4	$\delta_{sk=4}$	м m	0,025	0,3	0,15	0,012	0,012
8		5	$\delta_{sk=5}$	м m	0,03	0,35	0,2	—	—
9		6	$\delta_{sk=6}$	м m	—	0,4	0,3	—	—
10		7	$\delta_{sk=7}$	м m	—	0,45	0,4	—	—
11		8	$\delta_{sk=8}$	м m	—	0,5	0,5	—	—
12		9	$\delta_{sk=9}$	м m	—	0,55	—	—	—
13		10	$\delta_{sk=10}$	м m	—	0,6	—	—	—
14	Оптимальное значение толщины материала слоя Optimal value of layer material's thickness	не отвечающее требованиям дискретности/ бинарности not meeting discreteness/ binarity requirements	δ_s^{0opt}	м m	0,01	0,599	0,096	0,005	0,006
15		отвечающее требованиям дискретности/ бинарности meeting discreteness/ binarity requirements	δ_s^{opt}	м m	0,01	0,5	0,1	0,005	0,006

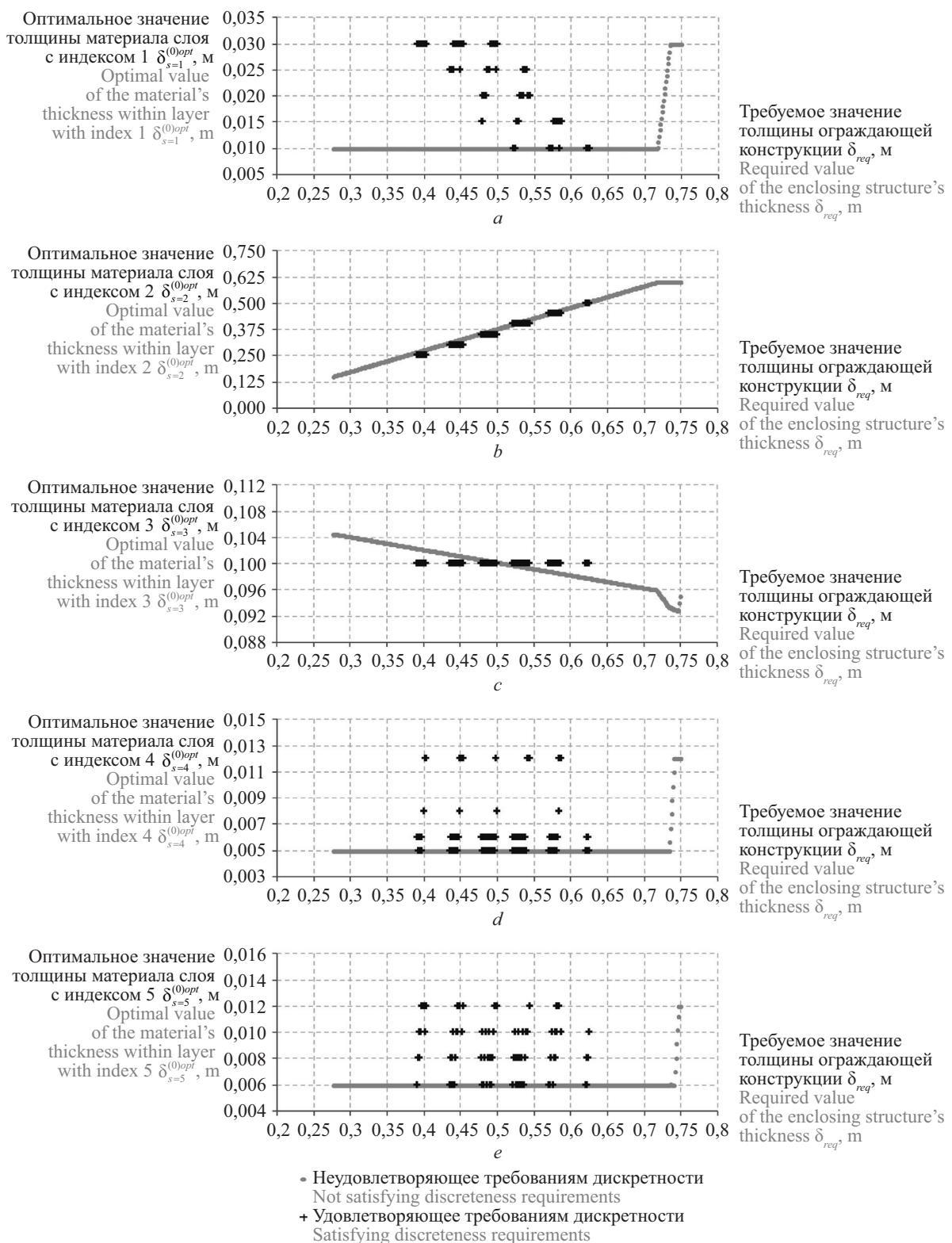


Рис. 3. Графики зависимостей оптимальных значений толщины материала слоя с индексом 1 (a); 2 (b); 3 (c); 4 (d) и 5 (e) от требуемого значения толщины конструкции

Fig. 3. Plots for dependences of the optimal values of the thickness of the layer material with index 1 (a); 2 (b); 3 (c); 4 (d) and 5 (e) on the required value of the structure's thickness

нимальных стандартных толщин слоев) до 1,154 м (сумма максимальных стандартных толщин слоев) с шагом 0,001 м (минимальная разница между по-

следовательными стандартными толщинами слоя в упорядоченном ряду) при фиксированных значениях остальных исходных данных, представленных

в табл. 4 и п. 1–13 табл. 5. Каждый вычислительный эксперимент соответствовал определенному значению требуемой толщины конструкции.

Из проведенных 934 экспериментов для каждой математической модели в 474 экспериментах удалось найти оптимальное решение без учета дискретности или бинарности (решение для корневой модели), причем из них 92 эксперимента привели к оптимальному решению с учетом требований дискретности или бинарности.

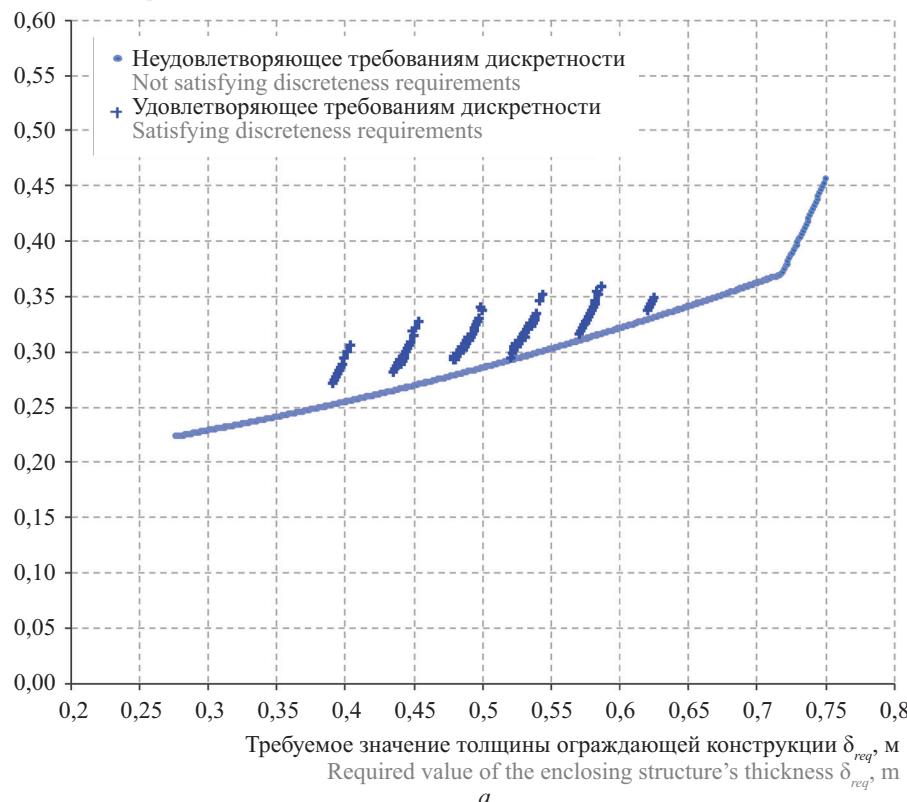
Результаты, полученные для модели с дискретными переменными (выражения (5)–(8)), совпали с аналогичными результатами для модели с бинарными переменными (выражения (14)–(18)): абсолютные разницы значений переменных в оптимальных решениях этих моделей оказались незначительными, варьируясь (по экспериментам) от $1,39 \cdot 10^{-16}$ м до $2,26 \cdot 10^{-4}$ м и составляя в среднем $4,12 \cdot 10^{-7}$ м. При этом длительность каждого отдельного эксперимента, выполненного в отношении модели с дискретными неизвестными переменными, оказалась в среднем на $-30,816\%$ меньше аналогичной длительности для модели с бинарными неизвестными переменными. Данное обстоятельство, обусловленное, в первую очередь, существенно большим (в сравнении с моделью, определяемой выражениями (5)–(8)) количеством неизвестных переменных в составе модели, определяемой выражениями (14)–(18), позволило сделать

вывод об относительно высокой эффективности процесса реализации (с использованием предложенного вычислительного алгоритма) модели с дискретными неизвестными переменными относительно процесса реализации модели с бинарными переменными (с использованием предложенного алгоритма или существующих стандартных алгоритмов, характеризующихся схожими показателями трудоемкости).

На основе этих вычислительных экспериментов, в которых были найдены оптимальные решения с учетом и/или без учета требований дискретности (бинарности), были сформированы следующие зависимости:

- зависимость оптимального значения толщины материала каждого отдельного слоя стенового ограждения (пп. 2.1.1, 2.2.1 табл. 1) для решения, удовлетворяющего или неудовлетворяющего требованиям дискретности (бинарности) от требуемого значения ее толщины;
- зависимость значения интегрального показателя сопротивления теплопередаче стенового ограждения (п. 2.7 табл. 2) в оптимальном решении, удовлетворяющем или неудовлетворяющем требованиям дискретности (бинарности), от требуемого значения ее толщины;
- зависимость значения средневзвешенной (по толщине слоев) температуры стенового ограждения (п. 2.8 табл. 2) в оптимальном решении, удовлетворяющем

Интегральный показатель термического сопротивления ограждающей конструкции для оптимального решения $\Theta^{(0)opt}$, $\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}/\text{Вт}$
Integral indicator of the enclosing structure's thermal resistance
for the optimal solution $\Theta^{(0)opt}$, $\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}/\text{W}$



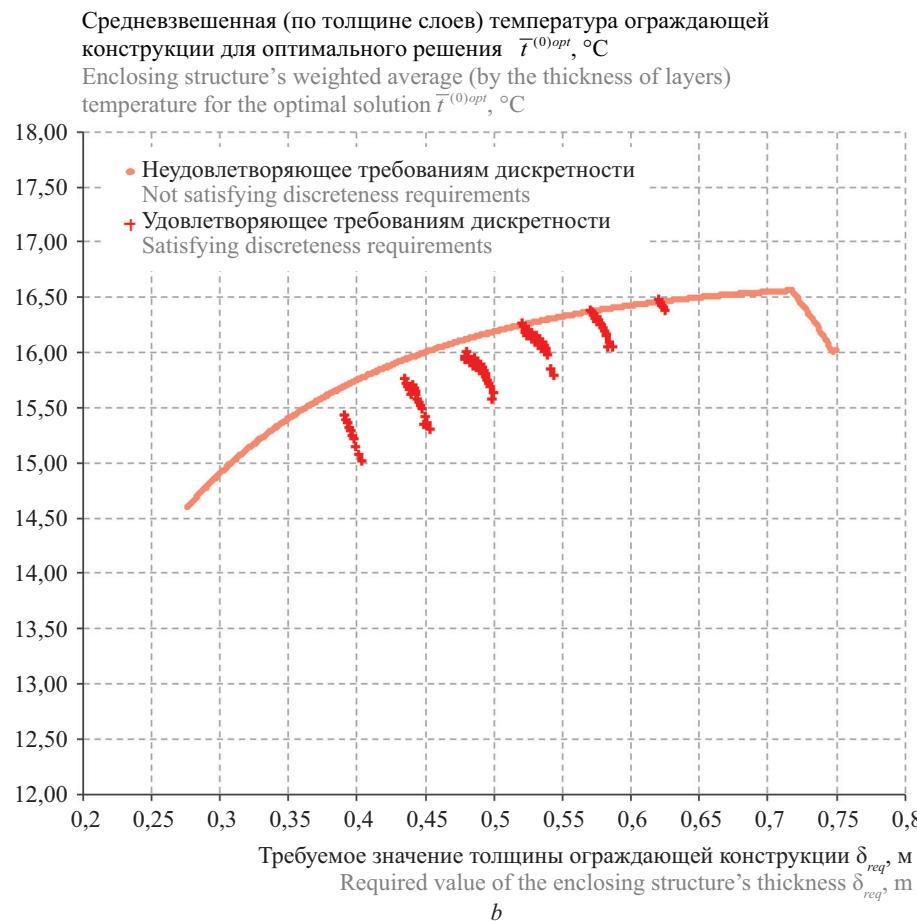


Рис. 4. Графики зависимостей значений интегрального показателя сопротивления теплопередаче (а) и средневзвешенной (по толщине слоев) температуры конструкции (б), соответствующих оптимальному решению, от требуемого значения ее толщины

Fig. 4. Plots for dependences of the enclosing structure's integral indicator of thermal resistance (a) and weighted average (by the thickness of layers) temperature (b) for the optimal solution on the required value of the structure's thickness

или неудовлетворяющем требованиям дискретности (бинарности), от требуемого значения ее толщины.

Графическое описание вышеперечисленных зависимостей, соответствующих результатам реализации модели с дискретными неизвестными переменными, представлено на рис. 3, 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основе результатов выполнения вычислительных экспериментов, определяемых в том числе содержимым рис. 3, 4, были сделаны следующие выводы:

1. Оптимальные значения толщин материалов отдельных слоев в составе стенового ограждения, а также соответствующие им значения теплотехнических показателей определены для требуемых значений толщины конструкции:

- в диапазоне от 0,276 до 0,749 м — для оптимального решения, полученного без учета требований дискретности (бинарности);

- в диапазоне от 0,392 до 0,625 м — для оптимального решения, полученного с учетом требований дискретности (бинарности).

2. Зависимости полученных без учета требований дискретности (бинарности) оптимальных значений толщин материалов отдельных слоев в составе стенового ограждения от требуемого значения ее толщины являются кусочно-линейными; характер изменения вышеупомянутых оптимальных значений толщин слоев позволяет выделить интервалы изменения требуемого значения толщины конструкции, в рамках каждого из которых происходит изменение оптимальных толщин не более чем у двух отдельных слоев конструкции (при этом оптимальные значения толщин остальных слоев не претерпевают изменений):

- интервал от 0,276 до 0,716 м — линейное увеличение оптимальной толщины несущего слоя (с индексом 2) от значения 0,151 м до максимально допустимого значения при одновременном линейном уменьшении оптимальной толщины теплоизоляционного слоя (с индексом 3) от значения 0,1045 м до значения 0,096 м;

- интервал от 0,717 до 0,734 м — линейное увеличение оптимальной толщины внутреннего слоя (с индексом 1) от минимально допустимого значения до максимального допустимого значения при даль-

нейшем линейном уменьшении оптимальной толщины теплоизоляционного слоя (с индексом 3) от значения 0,096 до значения 0,0934 м;

- интервал от 0,735 до 0,741 м — линейное увеличение оптимальной толщины kleевого слоя (с индексом 4) от минимально допустимого значения до максимального допустимого значения при дальнейшем линейном уменьшении оптимальной толщины теплоизоляционного слоя (с индексом 3) от значения 0,0934 до значения 0,0931 м;

- интервал от 0,742 до 0,746 м — линейное увеличение оптимальной толщины наружного слоя (с индексом 5) от минимально допустимого значения до максимального допустимого значения при дальнейшем (достаточно малом) линейном уменьшении оптимальной толщины теплоизоляционного слоя (с индексом 3) от значения 0,0931 до значения 0,093 м;

- интервал от 0,746 до 0,749 м — линейное увеличение оптимальной толщины теплоизоляционного слоя (с индексом 3) от 0,093 до 0,095 м.

3. Зависимости значений теплотехнических показателей — интегрального показателя сопротивления теплопередаче, средневзвешенной (по толщине слоев) температуры конструкции, соответствующих оптимальным значениям толщин материалов слоев, указанным в п. 2 выводов, являются кусочно-нелинейными; характер изменения вышеупомянутых значений теплотехнических показателей позволяет выделить следующие интервалы изменения требуемого значения толщины конструкции:

- интервал от 0,276 до 0,716 м — нелинейный ускоряющийся рост интегрального показателя сопротивления теплопередаче от значения 0,224 до значения 0,371 $\text{м}^3 \cdot \text{°C/Bt}$, нелинейный тормозящийся рост средневзвешенной (по толщине слоев) температуры конструкции от значения 14,611 до значения 16,571 $^{\circ}\text{C}$;

- интервал от 0,717 до 0,749 м — нелинейный ускоряющийся рост интегрального показателя сопротивления теплопередаче от значения 0,371 до значения 0,457 $\text{м}^3 \cdot \text{°C/Bt}$, нелинейный ускоряющийся спад средневзвешенной (по толщине слоев) температуры конструкции от значения 16,571 до значения 16,032 $^{\circ}\text{C}$.

4. Зависимости полученных с учетом требований дискретности (бинарности) оптимальных значений толщин материалов отдельных слоев стекового ограждения, а также соответствующих значений теплотехнических показателей конструкции от требуемого значения ее толщины характеризуются относительно малым количеством точек, являются фрагментарными и не имеют явно выраженной тенденции, что обусловлено особенностями формирования оптимального решения для математических моделей, базирующихся на дискретных или бинарных переменных.

5. Наиболее предпочтительная комбинация стандартных, полученных без учета требований дискретности (бинарности) толщин слоев, толщин ма-

териалов слоев соответствует наибольшему расчетному значению средневзвешенной (по толщине слоев) температуры конструкции, составляющему 16,571 $^{\circ}\text{C}$, при требуемом значении толщины конструкции, соответствующем 0,716 м (упомянутые значения толщин материалов слоев указаны в строке 14 табл. 5).

6. Наиболее предпочтительная комбинация стандартных, полученных с учетом требований дискретности (бинарности) толщин слоев, толщин материалов слоев соответствует наибольшему расчетному значению средневзвешенной (по толщине слоев) температуры конструкции, составляющему 16,472 $^{\circ}\text{C}$, при требуемом значении толщины конструкции, соответствующем 0,621 м (упомянутые значения толщин материалов слоев указаны в строке 15 табл. 5).

Таким образом, результаты проведенных вычислительных экспериментов образуют основу для формирования конструктивных решений по отношению к стековым ограждениям в составе жилых зданий с учетом ограниченного количества вариантов (моделей) строительных материалов, что подтверждает практическую ценность разработанных математических моделей.

В процессе выполнения исследования получены следующие результаты:

- Проведен обзор и сравнительный анализ научных работ по обоснованию характеристик конструктивных решений, применяемых к ограждающим конструкциям в жилищном строительстве. Анализ показал недостаточную проработку вопросов учета требований дискретности при решении задач обоснования характеристик таких конструкций.

- Разработаны математические модели для обоснования стандартных значений характеристик материалов, применяемых в слоях ограждающей конструкции, с учетом показателей средневзвешенной температуры, общей толщины и термического сопротивления. Эти модели включают квадратичную целевую функцию и линейные непрямые ограничения.

- Создан алгоритм для реализации этих математических моделей, основанный на сочетании метода ветвей и границ и метода внутренней точки для поиска оптимальных значений переменных, ограниченных по дискретности или бинарности.

- Произведена практическая реализация разработанных моделей, что позволило подтвердить их высокую практическую значимость на основе полученных данных.

На основе результатов, полученных в рамках исследования, были сделаны следующие выводы:

- задача определения комбинации стандартных значений толщин материалов, используемых в качестве слоев стекового ограждения, может быть эффективно решена с использованием средств квадратичной оптимизации;

- для учета ограничений дискретности или бинарности неизвестных переменных в составе ма-

тематических моделей квадратичной оптимизации целесообразно использовать метод ветвей и границ со специфическими правилами реализации процедур ветвления.

На дальнейших этапах исследования планируется реализация разработанных математических моде-

лей (с использованием созданного алгоритма) по отношению к альтернативным вариантам стекового ограждения — вентилируемый фасад по железобетонному или кирпичному основанию, штукатурный фасад по железобетонному или кирпичному основанию и т.д.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Yu W., Li B., Jia H., Zhang M., Wang D. Application of multi-objective genetic algorithm to optimize energy efficiency and thermal comfort in building design // Energy and Buildings. 2015. Vol. 88. Pp. 135–143. DOI: 10.1016/j.enbuild.2014.11.063
2. Benaddi F.Z., Boukhattem P., Tabares-Velasco P.C. Multi-objective optimization of building envelope components based on economic, environmental, and thermal comfort criteria // Energy and Buildings. 2024. Vol. 305. P. 113909. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.113909
3. Liu Y., Li T., Xu W., Wang Q., Huang H., He B.J. Building information modelling-enabled multi-objective optimization for energy consumption parametric analysis in green buildings design using hybrid machine learning algorithms // Energy and Buildings. 2023. Vol. 300. P. 113665. DOI: 10.1016/j.enbuild.2023.113665
4. Delgarm N., Sajadi B., Delgarm S. Multi-objective optimization of building energy performance and indoor thermal comfort: A new method using artificial bee colony (ABC) // Energy and Buildings. 2016. Vol. 131. Pp. 42–53. DOI: 10.1016/j.enbuild.2016.09.003
5. He L., Zhang L. A bi-objective optimization of energy consumption and investment cost for public building envelope design based on the ϵ -constraint method // Energy and Buildings. 2022. Vol. 266. P. 112133. DOI: 10.1016/j.enbuild.2022.112133
6. Karmellos M., Kiprakis A., Mavrotas G. A multi-objective approach for optimal prioritization of energy efficiency measures in buildings: Model, software and case studies // Applied Energy. 2015. Vol. 139. Pp. 131–150. DOI: 10.1016/j.apenergy.2014.11.023
7. Yang H., Xu Z., Shi Y., Tang W., Liu Ch., Yunusa-Kaltungo A. et al. Multi-objective optimization designs of phase change material-enhanced building using the integration of the Stacking model and NSGA-III algorithm // Journal of Energy Storage. 2023. Vol. 68. P. 107807. DOI: 10.1016/j.est.2023.107807
8. Asadi E., Gameiro da Silva M., Antunes C.H., Dias L., Glicksman L. Multi-objective optimization for building retrofit: A model using genetic algorithm and artificial neural network and an application // Energy and Buildings. 2014. Vol. 81. Pp. 444–456. DOI: 10.1016/j.enbuild.2014.06.009
9. Hosamo H.H., Tingstveit M.S., Nielsen H.K., Svennevig P.R., Svidt K. Multiobjective optimization of building energy consumption and thermal comfort based on integrated BIM framework with machine learning-NS-
GA II // Energy and Buildings. 2022. Vol. 277. P. 112479. DOI: 10.1016/j.enbuild.2022.112479
10. Rosso F., Ciancio V., Dell'Olmo J., Salata F. Multi-objective optimization of building retrofit in the Mediterranean climate by means of genetic algorithm application // Energy and Buildings. 2020. Vol. 216. P. 109945. DOI: 10.1016/j.enbuild.2020.109945
11. Wu C., Pan H., Luo Zh., Liu Ch., Huang H. Multi-objective optimization of residential building energy consumption, daylighting, and thermal comfort based on BO-XGBoost-NSGA-II // Building and Environment. 2024. Vol. 254. P. 111386. DOI: 10.1016/j.buildenv.2024.111386
12. Ouanes S., Sriti L. Regression-based sensitivity analysis and multi-objective optimisation of energy performance and thermal comfort: Building envelope design in hot arid urban context // Building and Environment. 2023. Vol. 248. P. 111099. DOI: 10.1016/j.buildenv.2023.111099
13. Wong B., Wu Zh., Gan V., Chan C., Cheng J. Parametric building information modelling and optimality criteria methods for automated multi-objective optimisation of structural and energy efficiency // Journal of Building Engineering. 2023. Vol. 75. P. 107068. DOI: 10.1016/j.jobe.2023.107068
14. Radaev A.E., Gamayunova O.S., Bardina G.A. Optimization of energy efficiency design characteristics for construction projects // AlfaBuild. 2021. No. 5 (20). P. 2003. DOI: 10.57728/ALF.20.3. EDN RZOJPY.
15. Yang J., Wu H., Xu X., Huang G., Cen J., Liang Y. Regional climate effects on the optimal thermal resistance and capacitance of residential building walls // Energy and Buildings. 2021. Vol. 244. P. 111030. DOI: 10.1016/j.enbuild.2021.111030
16. Sánchez-Zabala V.F., Gómez-Acebo T. Building energy performance metamodels for district energy management optimisation platforms // Energy Conversion and Management: X. 2024. Vol. 21. P. 100512. DOI: 10.1016/j.ecmx.2023.100512
17. Shi Y., Chen P. Energy retrofitting of hospital buildings considering climate change: An approach integrating automated machine learning with NSGA-III for multi-objective optimization // Energy and Buildings. 2024. Vol. 319. P. 114571. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114571
18. Huang J., Lv H., Gao T., Feng W., Chen Y., Zhou T. Thermal properties optimization of envelope in energy-saving renovation of existing public buildings // Energy and Buildings. 2014. Vol. 75. Pp. 504–510. DOI: 10.1016/j.enbuild.2014.02.040

19. Гамаюнова О.С. Методика обоснования теплотехнических характеристик стеновых конструкций жилых зданий : дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2021. 166 с. EDN CJHWXK.
20. Иванова В.Р., Жидко Е.А. Сравнение вариантов утеплителя для реконструкции жилого дома методом анализа иерархий // Информационные технологии в строительных, социальных и экономических системах. 2019. № 3–4 (17–18). С. 183–188. EDN THYVAJ.
21. Иванова И.Б., Романов М.А. Выбор проектного решения на основе системы показателей с использованием метода парных сравнений // Социально-экономическое управление: теория и практика. 2019. № 1 (36). С. 80–82. EDN UQDZZK.
22. Радаев А.Е., Гамаюнова О.С., Бардина Г.А. Использование средств оптимизационного моделирования для обоснования характеристик энергоэффективного конструктивного решения // Строительство и техногенная безопасность. 2022. № 27 (79). С. 5–25. EDN EXVSFS.
23. Радаев А.Е., Гамаюнова О.С. Обоснование характеристик многослойной стеновой конструкции с использованием средств квадратичного программирования // Строительство и техногенная безопасность. 2021. № 22 (74). С. 111–127. DOI: 10.37279/2413-1873-2021-22-111-127. EDN ORVFEF.
24. Резанов Е.М., Петров П.В. Повышение эффективности утепления стен зданий с учетом регулирования отпускаемой тепловой энергии // Известия Транссиба. 2019. № 4 (40). С. 77–86. EDN DWXNDX.
25. Петров П.В., Кулагин В.А., Резанов Е.М., Стариков А.П. Совершенствование технологии теплоизоляции зданий // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. 2023. Т. 16. № 2. С. 187–197. EDN IXBHRM.
26. Deep K., Singh K.P., Kansal M.L., Mohan C. A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems // Applied Mathematics and Computation. 2009. Vol. 212. Issue 2. Pp. 505–518. DOI: 10.1016/j.amc.2009.02.044

Поступила в редакцию 14 августа 2024 г.

Принята в доработанном виде 14 декабря 2024 г.

Одобрена для публикации 24 декабря 2024 г.

О Б А Т О Р АХ: Янис Айгарсович Олехнович — старший преподаватель, Высшая школа промышленно-гражданского и дорожного строительства, Инженерно-строительный институт; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ); 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; РИНЦ ID: 820961, Scopus: 57212393243, ResearcherID: AAE-4749-2020, ORCID: 0000-0001-9578-7245; olehnovich_yaa@spbstu.ru;

Антон Евгеньевич Радаев — кандидат технических наук, кандидат экономических наук, доцент, доцент Высшей школы промышленно-гражданского и дорожного строительства Инженерно-строительного института; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (СПбПУ); 195251, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29; РИНЦ ID: 650856, Scopus: 57196054199, ResearcherID: R-6085-2016, ORCID: 0000-0002-0840-6828; radaev_ae@spbstu.ru.

Вклад авторов:

Олехнович Я.А. — формулирование целей и задач исследования, обзор литературы, участие в разработке математических моделей и алгоритма, подготовка данных для вычислительных экспериментов.

Радаев А.Е. — участие в разработке математических моделей и алгоритма, анализ результатов вычислительных экспериментов, научное редактирование текста.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Yu W., Li B., Jia H., Zhang M., Wang D. Application of multi-objective genetic algorithm to optimize energy efficiency and thermal comfort in building design. *Energy and Buildings*. 2015; 88:135–143. DOI: 10.1016/j.enbuild.2014.11.063
2. Benaddi F.Z., Boukhattem P., Tabares-Velasco P.C. Multi-objective optimization of building envelope components based on economic, environmental, and thermal comfort criteria. *Energy and Buildings*. 2024; 305:113909. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.113909
3. Liu Y., Li T., Xu W., Wang Q., Huang H., He B.J. Building information modelling-enabled multi-objective optimization for energy consumption parametric analysis in green buildings design using hybrid machine learning algorithms. *Energy and Buildings*. 2023; 300:113665. DOI: 10.1016/j.enbuild.2023.113665
4. Delgarm N., Sajadi B., Delgarm S. Multi-objective optimization of building energy performance and indoor thermal comfort: A new method using artificial bee colony (ABC). *Energy and Buildings*. 2016; 131:42–53. DOI: 10.1016/j.enbuild.2016.09.003
5. He L., Zhang L. A bi-objective optimization of energy consumption and investment cost for public building envelope design based on the ϵ -constraint method. *Energy and Buildings*. 2022; 266:112133. DOI: 10.1016/j.enbuild.2022.112133

6. Karmellos M., Kiprakis A., Mavrotas G. A multi-objective approach for optimal prioritization of energy efficiency measures in buildings: Model, software and case studies. *Applied Energy*. 2015; 139:131-150. DOI: 10.1016/j.apenergy.2014.11.023
7. Yang H., Xu Z., Shi Y., Tang W., Liu Ch., Yonusa-Kaltungo A. et al. Multi-objective optimization designs of phase change material-enhanced building using the integration of the Stacking model and NSGA-III algorithm. *Journal of Energy Storage*. 2023; 68:107807. DOI: 10.1016/j.est.2023.107807
8. Asadi E., Gameiro da Silva M., Antunes C.H., Dias L., Glicksman L. Multi-objective optimization for building retrofit: A model using genetic algorithm and artificial neural network and an application. *Energy and Buildings*. 2014; 81:444-456. DOI: 10.1016/j.enbuild.2014.06.009
9. Hosamo H.H., Tingstveit M.S., Nielsen H.K., Svennevig P.R., Svidt K. Multiobjective optimization of building energy consumption and thermal comfort based on integrated BIM framework with machine learning-NSGA II. *Energy and Buildings*. 2022; 277:112479. DOI: 10.1016/j.enbuild.2022.112479
10. Rosso F., Ciancio V., Dell'Olmo J., Salata F. Multi-objective optimization of building retrofit in the Mediterranean climate by means of genetic algorithm application. *Energy and Buildings*. 2020; 216:109945. DOI: 10.1016/j.enbuild.2020.109945
11. Wu C., Pan H., Luo Zh., Liu Ch., Huang H. Multi-objective optimization of residential building energy consumption, daylighting, and thermal comfort based on BO-XGBoost-NSGA-II. *Building and Environment*. 2024; 254:111386. DOI: 10.1016/j.buildenv.2024.111386
12. Ouanes S., Sriti L. Regression-based sensitivity analysis and multi-objective optimisation of energy performance and thermal comfort: Building envelope design in hot arid urban context. *Building and Environment*. 2023; 248:111099. DOI: 10.1016/j.buildenv.2023.111099
13. Wong B., Wu Zh., Gan V., Chan C., Cheng J. Parametric building information modelling and optimality criteria methods for automated multi-objective optimisation of structural and energy efficiency. *Journal of Building Engineering*. 2023; 75:107068. DOI: 10.1016/j.jobe.2023.107068
14. Radaev A.E., Gamayunova O.S., Bardina G.A. Optimization of energy efficiency design characteristics for construction projects. *AlfaBuild*. 2021; 5(20):2003. DOI: 10.57728/ALF.20.3. EDN RZOJPY.
15. Yang J., Wu H., Xu X., Huang G., Cen J., Liang Y. Regional climate effects on the optimal thermal resistance and capacitance of residential building walls. *Energy and Buildings*. 2021; 244:111030. DOI: 10.1016/j.enbuild.2021.111030
16. Sánchez-Zabala V.F., Gomez-Acebo T. Building energy performance metamodels for district energy management optimisation platforms. *Energy Conversion and Management*: X. 2024; 21:100512. DOI: 10.1016/j.ecmx.2023.100512
17. Shi Y., Chen P. Energy retrofitting of hospital buildings considering climate change: An approach integrating automated machine learning with NSGA-III for multi-objective optimization. *Energy and Buildings*. 2024; 319:114571. DOI: 10.1016/j.enbuild.2024.114571
18. Huang J., Lv H., Gao T., Feng W., Chen Y., Zhou T. Thermal properties optimization of envelope in energy-saving renovation of existing public buildings. *Energy and Buildings*. 2014; 75:504-510. DOI: 10.1016/j.enbuild.2014.02.040
19. Gamayunova O.S. *Procedure for determination of the thermal characteristics for wall structures of residential buildings : dis. ... cand. tech. sciences*. St. Petersburg, 2021; 166. EDN CJHWXK. (rus.).
20. Ivanova V.R., Zhidko E.A. A comparison of insulation options for reconstruction of residential house method of analysis of hierarchies. *Information Technologies in Construction, Social and Economic Systems*. 2019; (3-4):(17-18):183-188. EDN THYVAJ. (rus.).
21. Ivanova I.B., Romanov M.A. Selection of the design solution based on the system of indicators using the method of pair comparisons. *Social and Economic Management: Theory and Practice*. 2019; 1(36):80-82. EDN UQDZZK. (rus.).
22. Radaev A.E., Gamayunova O.S., Bardina G.A. Use of optimization modeling tools to justify the characteristics of energy efficient structural solution. *Construction and Industrial Safety*. 2022; 27(79):5-25. EDN EXVSFS. (rus.).
23. Radaev A.E., Gamayunova O.S. Determination of the characteristics for a multilayer wall's structure with application of quadratic programming tools. *Construction and Industrial Safety*. 2021; 22(74):111-127. DOI: 10.37279/2413-1873-2021-22-111-127. EDN ORVFEF. (rus.).
24. Rezanov E.M., Petrov P.V. Increasing the efficiency of warming of building walls taking into account the regulation of the released heat energy. *Journal of Transsib Railway Studies*. 2019; 4(40):77-86. EDN DWXNDX. (rus.).
25. Petrov P.V., Kulagin V.A., Rezanov E.M., Starikov A.P. Improvement of technology of thermal insulation of buildings. *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. 2023; 16(2):187-197. EDN IXBHRM. (rus.).
26. Deep K., Singh K.P., Kansal M.L., Mohan C. A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems. *Applied Mathematics and Computation*. 2009; 212(2):505-518. DOI: 10.1016/j.amc.2009.02.044

Received August 14, 2024.

Adopted in revised form on December 14, 2024.

Approved for publication on December 24, 2024.

BIO NOTES: **Yanis A. Olekhnovich** — senior lecturer, Graduate School of Industrial, Civil and Road Construction, Institute of Civil Engineering; **Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU)**; 29 Polytechnic st., St. Petersburg, 194356, Russian Federation; ID RSCI: 820961, Scopus: 57212393243, ResearcherID: AAE-4749-2020, ORCID: 0000-0001-9578-7245; olehnovich_yaa@spbstu.ru;

Anton E. Radaev — Candidate of Technical Sciences, Candidate of Economic Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Graduate School of Industrial of Civil and Road Construction, Institute of Civil Engineering; **Peter the Great St.Petersburg Polytechnic University (SPbPU)**; 29 Polytechnic st., St. Petersburg, 194356, Russian Federation; ID RSCI: 650856, Scopus: 57196054199, ResearcherID: R-6085-2016, ORCID: 0000-0002-0840-6828; radaev_ac@spbstu.ru.

Contribution of the authors:

Yanis A. Olekhnovich — formulation of the aim and tasks of the research, literature review, participation in the development of mathematical models and algorithm, preparation of data for computational experiments.

Anton E. Radaev — participation in the development of mathematical models and algorithm, analysis of the results of computational experiments, scientific text editing.

The authors declare no conflict of interest.