

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 101  
Январь 2023***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

**Москва – 2023**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

*Институт проблем управления*

*им. В.А. Трапезникова*

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

***Выпуск 101***

**Москва – 2023**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Новиков Д.А., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галяев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Кульба В.В. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Поляк Б.Т. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербakov П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фургат И.Б. (ИПМ РАН).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

### *Системный анализ*

---

**Краснов Д.В.**

*Построение редуцированных наблюдателей  
состояния для систем с аффинными возмущениями..* 6

### *Математическая теория управления*

---

**Берлин Л.М., Галяев А.А., Кравцова С.К.**

*О классе двух переключений управления в задаче  
быстродействия двух несинхронных осцилляторов ...* 24

### *Анализ и синтез систем управления*

---

**Жуков П.И., Фомин А.В., Глущенко А.И.**

*Алгоритмическая устойчивость и сложность  
процесса неявной адаптации сеточной модели  
нестационарной теплопроводности к нагреваемому  
веществу .....* 39

### *Управление в социально-экономических системах*

---

**Гераськин М.И., Иванова М.В.**

*Моделирование взаимодействий институтов рынка  
жилья на основе степенных, экспоненциальных  
и логарифмических функций издержек.....* 64

### *Управление техническими системами и технологическими процессами*

---

**Третьякова Е.А.**

*Моделирование гидроудара в аксиально-плунжерном  
насосе .....* 86

**Яковлев И.А., Елизарова А.В., Саитова Г.А.**

*Определение архитектуры нейронной сети в задаче  
прогнозирования состояния заряда аккумулятора .....* 97



***Управление подвижными объектами и навигация***

---

**Кокунько Ю.Г.**

*Синтез генератора задающих воздействий  
для системы управления мобильным роботом.....* 123

***Технические и программные средства управления***

---

**Тутуров А.А.**

*Графический интерфейс системы поддержки  
принятия решений для управления космическим  
аппаратом .....* 140

## ПОСТРОЕНИЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С АФФИННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Краснов Д. В.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Объектом исследования являются линейные одноканальные системы с аффинными параметрическими и внешними возмущениями, представленные в так называемой треугольной форме «вход – выход». Относительный порядок по управлению равен размерности вектора состояния и не меняется при переходе к канонической форме «вход – выход» в предположении о гладкости внешних возмущений. Известно, что для таких систем только по измерениям выходной переменной можно построить наблюдатель смешанных переменных и восстановить линейные комбинации переменных состояния и внешних воздействий с заданной точностью. Полученных оценок достаточно для синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание выходной переменной заданного сигнала. В работе рассматривается важный практический случай, когда при некотором наборе датчиков выходная (регулируемая) переменная не измеряется. Нужно построить редуцированный наблюдатель состояния для ее оценивания, чтобы перейти к построению наблюдателя смешанных переменных. Вначале рассматриваются мотивирующие примеры систем второго порядка с различными измерениями и различными каналами действия внешних возмущений. Показано, что при измерении обеих переменных состояния с помощью кусочно-линейных корректирующих воздействий наблюдателя состояния можно восстановить внешние возмущения по их влиянию на систему (т.е. без использования динамического генератора возмущений). Формулируются условия, при которых этот принцип можно также использовать в системе с внешними возмущениями и неполными измерениями для восстановления неизмеряемой переменной состояния. Полученные результаты распространяются на конечномерные одноканальные системы произвольного порядка с аффинными возмущениями, в которых выходная переменная не измеряется. Формализованы условия существования и метод синтеза редуцированного наблюдателя с кусочно-линейным корректирующим воздействием, дающим оценку выходной переменной. Разработанный подход не требует идентификации внешних возмущений и решает задачу наблюдения выходной переменной с любой заданной точностью.

Ключевые слова: линейные системы, возмущения, редуцированный наблюдатель состояния, кусочно-линейная коррекция.

---

<sup>1</sup> Дмитрий Валентинович Краснов, научный сотрудник (dim93kr@mail.ru).

## **1. Введение**

В управляемых системах автоматического управления обычно предполагается наличие полного комплекта измерительных устройств. Это дает возможность реализации программного управления и различных законов управления по обратной связи, обеспечивающих в замкнутой системе требуемые показатели переходных процессов. Однако на практике установка полного комплекта датчиков не всегда возможна. Более того, разработчики часто намерено сокращают количество датчиков для того чтобы удешевить и упростить конструкцию готового изделия. В таких случаях для формирования управляющих сигналов используют специальные алгоритмы, с помощью которых в реальном времени решается проблема восстановления неизмеряемых переменных состояния. Эти построения базируются на одном из разделов математической теории автоматического управления – теории динамических наблюдателей состояния. Данная теория в настоящее время хорошо разработана применительно к линейным и квазилинейным объектам автоматического управления в условиях определенности.

Как известно, классический полноразмерный наблюдатель состояния строится как копия математической модели объекта управления и имеет такую же размерность. Для наблюдаемых и параметрически определенных систем наблюдатели с линейными корректирующими воздействиями дают асимптотические оценки переменных состояния. При наличии шумов в измерениях полноразмерный наблюдатель может также выполнять функции фильтра Калмана. Если шумы в измерениях отсутствуют, то для упрощения алгоритма и сокращения времени счета используют редуцированные наблюдатели состояния: их размерность меньше, чем динамический порядок объекта управления [16].

Построение классических полноразмерных и, особенно, редуцированных наблюдателей состояния требует точного знания динамической модели объекта управления и ее параметров. Случаи параметрической неопределенности, а также действия на объект управления внешних возмущений требуют специального рассмотрения и использования наблюдателей с нелиней-

ными корректирующими воздействиями. Как правило, задача наблюдения неизмеряемых переменных состояния в узкой постановке (т.е. без ввода динамических генераторов возмущения идентификаторов неизвестных параметров [12]) имеет решение, если возмущения действуют на объект управления только по определенным каналам. В математической модели объекта управления должны быть уравнения, на которые возмущения не действуют непосредственно.

В данной работе рассматриваются проблемы наблюдения переменных состояния линейных одноканальных систем автоматического управления с аффинным вхождением параметрических и внешних возмущений. Предполагается, что модель объекта представлена в так называемой треугольной (по составу переменных в каждом уравнении) форме «вход – выход». Цель управления – с помощью обратной связи обеспечить заданное поведение выходной переменной (поддержание заданного уровня или отслеживание заданного сигнала). В типовом, наиболее изученном случае предполагается, что все параметрические неопределенности и внешние возмущения являются согласованными, т.е. действуют по одному каналу с управлением, выходная (регулируемая) переменная измеряется. Для систем указанной структуры это означает наблюдаемость и управляемость инвариантно по отношению к внешним возмущениям. Для таких систем в рамках различных подходов [9, 10, 13–15] разработаны методы синтеза динамической обратной связи, включая построение полноразмерного наблюдателя состояния с неизвестным входом. При этом не принципиально, имеются ли в системе датчики других переменных состояния. Для восстановления и переменных состояния, и согласованных возмущений достаточно измерений только выходной переменной [9].

В реальных системах, как правило, возмущения не являются согласованными, что приводит к частичной потере наблюдаемости переменных состояния, без знания которых нельзя сформировать обратную связь. Классический подход состоит в расширении пространства состояний с помощью экзогенных динамических моделей, имитирующих внешние возмущения [11, 12]. Тогда с помощью наблюдателя повышенной размерно-

сти можно получить оценки и неизмеряемых переменных состояния, и внешних возмущений. Однако составление адекватной экзогенной модели не всегда возможно и сильно сужает класс допустимых возмущений.

Для систем, где возмущения полагаются гладкими функциями времени, предложен универсальный подход, не требующий индивидуального оценивания возмущений [7]. Он состоит в переходе к координатному базису смешанных переменных (линейных комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных) и канонической форме «вход – выход» с согласованными неопределенностями, действующими по входу. Такое представление сводит проблему синтеза следящей системы к применению известных методов с построением полно-размерного наблюдателя смешанных переменных по измерениям только выходной переменной (или ошибки слежения).

Заметим, что измерение именно выходной переменной является необходимым условием для реализации указанного универсального подхода. В данной работе рассматривается мало изученный в теории, но распространенный в практических приложениях случай, когда в системе с несогласованными, но гладкими возмущениями, комплект датчиков не полный и выходная (регулируемая) переменная по тем или иным причинам не может быть измерена [3]. Для того чтобы использовать преимущества универсального подхода к построению инвариантной системы слежения, требуется предварительно восстановить выходную переменную.

В данной работе для указанного класса линейных систем сформулированы условия существования физически реализуемого редуцированного наблюдателя выходной переменной. Задача рассматривается в узкой постановке, т.е. проблема дополнительной идентификации внешних возмущений не ставится и не решается. Тем не менее, методологической основой для данного исследования являются способы оценивания внешних возмущений по их воздействию на объект управления, не требующие составления динамических моделей внешних возмущений. В данных наблюдателях используются кусочно-линейные корректирующие воздействия, которые обеспечивают заданную

точность оценочных сигналов при выполнении определенных условий [4, 7, 8]. В разделе 2 приводятся мотивирующие примеры линейных систем второго порядка при действии возмущений с детальным описанием условий применимости указанного метода для оценивания неизмеряемых переменных вектора состояния. В разделе 3 представлен основной результат. Для рассматриваемого класса одноканальных систем формализованы условия, при которых можно восстановить неизмеряемую выходную переменную в узкой постановке с помощью редуцированного наблюдателя с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. В качестве примеров выполнения или не выполнения сформулированных условий рассмотрены математические модели однозвенных манипуляторов с различными наборами датчиков.

## 2. Мотивирующие примеры

Для пояснения используемого метода вначале рассмотрим линейную динамическую систему второго порядка, представленную в форме «вход – выход» следующего вида:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \eta_1(t), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \eta_2(t) + bu, \end{aligned}$$

$$(2) \quad a_{12} \neq 0, \quad b = \text{const} \neq 0,$$

где  $x = (x_1, x_2)^T \in X \subset R^2$  – вектор состояния;  $X$  – открытая ограниченная область изменения переменных состояния в процессе регулирования;  $x_1(t)$  – регулируемый выход;  $a_{ij}$ ,  $b$  – известные константы;  $\eta_i(t)$  – внешние неконтролируемые возмущения;  $u$  – управление (вход), которое полагается известной функцией времени.

Обратим внимание, что в стандартных построениях модель одноканальных систем «вход – выход» является канонической (в случае системы (1) это означает, что  $a_{11} = 0$  и  $a_{12} = 1$ ). С одной стороны, использование канонического представления позволяет вводить для различных систем универсальные законы управления. С другой стороны, представление в каноническом виде не отражает уникальных свойств конкретного объекта. Далее

будет показано, что рассмотрение более полной формы «вход – выход» при определенных условиях может дать дополнительные преимущества при решении задачи наблюдения, когда регулируемая выходная переменная не измеряется.

В данной работе вопросы синтеза обратной связи не детализируются. Управление  $u$  полагается известной функцией времени. Все внутренние и внешние сигналы в замкнутой системе (1) полагаются ограниченными вместе со своими производными в процессе управления:

$$(3) \quad \begin{aligned} |\eta_i(t)| &\leq H_i, |\dot{\eta}_i(t)| \leq \bar{H}_i, \quad i=1,2, \\ |x_i(t)| &\leq X_i, |\dot{x}_i(t)| \leq \bar{X}_i, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

где  $T$  – время регулирования,  $X_i$ ,  $\bar{X}_i$ ,  $H_i$ ,  $\bar{H}_i$  – известные константы.

Рассмотрим мотивирующие примеры – различные варианты измерений в системе (1) и условия физической реализуемости соответствующих наблюдателей переменных состояния и внешних возмущений.

**Пример 1.** Если в системе (1) обе переменные состояния  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  измеряются, то можно восстановить и оба внешних возмущения с помощью двух автономных наблюдателей первого порядка:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + v_1, \\ \dot{z}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + bu + v_2, \end{aligned}$$

где  $z_i \in R$  – переменные состояния наблюдателя,  $v_i \in R$  – его корректирующие воздействия,  $i = 1, 2$ . С учетом (1), (4) система относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_i = x_i - z_i \in R$  примет следующий вид

$$(5) \quad \dot{\varepsilon}_i = \eta_i(t) - v_i, \quad i=1,2.$$

Синтез наблюдателя (4) заключается в выборе параметров кусочно-линейных корректирующих воздействий

$$(6) \quad v_i = m_i \text{sat}(l_i \varepsilon_i) = \begin{cases} m_i \text{sign}(\varepsilon_i), & |\varepsilon_i| > 1/l_i, \\ m_i l_i \varepsilon_i, & |\varepsilon_i| \leq 1/l_i, \end{cases} \quad m_i, l_i = \text{const} > 0,$$

стабилизирующих с заданной точностью ошибки наблюдения и их производные

$$(7) \quad |\varepsilon_i(t)| \leq \delta_i \Rightarrow |\dot{\varepsilon}_i(t)| \leq \Delta_i \Rightarrow \eta_i(t) \approx v_i(t) \pm \Delta_i, \quad i=1,2, \quad t_0 < t \leq T.$$

Из выражений (7) следует, что оценочными сигналами для внешних возмущений являются корректирующий воздействия наблюдателей. Учитывая, что вектор состояния измеряется, в системах (4), (5) установим начальные значения:

$$z_i(0) = x_i(0) \Rightarrow \varepsilon_i(0) = 0 \Leftrightarrow |\varepsilon_i(0)| \leq 1/l_i, \quad i=1,2.$$

Обеспечим  $|\varepsilon_i(t)| \leq 1/l_i$  при  $t \in [0, T]$  выбором амплитуд  $m_i$ ,  $i=1, 2$ , корректирующих воздействий (6) на основе неравенств, полученных с помощью второго метода Ляпунова на основе представления замкнутой системы (5)–(6) вне линейных зон, т.е. при  $|\varepsilon_i(t)| > 1/l_i$ :

$$(8) \quad m_i > H_i \Rightarrow \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i(\eta_i - m_i \text{sign}(\varepsilon_i)) \leq |\varepsilon_i|(H_i - m_i) < 0, \quad i=1,2.$$

При выполнении условий (8) ошибки наблюдения не выйдут из линейных зон  $|\varepsilon_i(t)| \leq 1/l_i$ , в которых уравнения (5)–(6) и их производные принимают вид

$$\dot{\varepsilon}_i = \eta_i(t) - m_i l_i \varepsilon_i, \quad \ddot{\varepsilon}_i = \dot{\eta}_i(t) - m_i l_i \dot{\varepsilon}_i, \quad i=1,2.$$

Из данных уравнений следует, что переменные состояния  $\varepsilon_i(t)$ ,  $\dot{\varepsilon}_i(t)$  сойдутся в заданные области (7) за конечное время  $t_0 : 0 \leq t_0 < T$  при выполнении условий

$$l_i \geq H_i / (m_i \delta_i) \Rightarrow \varepsilon_i \dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_i(\eta_i(t) - m_i l_i \varepsilon_i) \leq |\varepsilon_i|(H_i - m_i l_i |\varepsilon_i|) < 0;$$

$$(9) \quad l_i \geq \bar{H}_i / (m_i \Delta_i) \Rightarrow \dot{\varepsilon}_i \ddot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon}_i(\dot{\eta}_i(t) - m_i l_i \dot{\varepsilon}_i) \leq |\dot{\varepsilon}_i|(\bar{H}_i - m_i l_i |\dot{\varepsilon}_i|) < 0, \quad i=1,2.$$

Одновременное выполнение условий (8)–(9) обеспечит решение поставленной задачи оценивания возмущений (7).

**Пример 2.** Рассмотрим варианты, когда в системе (1) измеряется только одна переменная состояния и в правой части дифференциального уравнения для измеряемой переменной внешнее возмущение отсутствует.

Если в системе (1)–(2) измеряется только выходная переменная  $x_1(t)$  и  $\eta_1(t) \equiv 0$ , то тогда, аналогично (4), можно восстановить другую переменную состояния  $x_2(t)$  с помощью редуцированного наблюдателя, построенного на основе первого уравнения системы (1) в виде

$$(10) \quad \dot{z}_1 = a_{11}x_1 + v_1, \quad v_1 = m_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1), \quad \varepsilon_1 = x_1 - z_1, \quad \dot{\varepsilon}_1 = a_{12}x_2 - v_1.$$



После анализа виртуальной системы

$$|\varepsilon_1| > 1/l_1 : \dot{\varepsilon}_1 = a_{12}x_2 - m_1 \text{sign}(\varepsilon_1);$$

$$|\varepsilon_1| \leq 1/l_1 : \dot{\varepsilon}_1 = a_{12}x_2 - m_1 l_1 \varepsilon_1, \quad \ddot{\varepsilon}_1 = a_{12}\dot{x}_2 - m_1 l_1 \dot{\varepsilon}_1$$

получим неравенства для выбора параметров наблюдателя (10) аналогично (8)–(9) в виде

$$(11) \quad m_1 > |a_{12}| X_2, \quad l_1 \geq \frac{|a_{12}|}{m_1} \max \left\{ \frac{X_2}{\delta_1}, \frac{\bar{X}_2}{\Delta_1} \right\},$$

что обеспечивает

$$|\varepsilon_1(t)| \leq \delta_1 \Rightarrow |\dot{\varepsilon}_1(t)| = |a_{12}x_2 - v_1| \leq \Delta_1$$

и, следовательно,

$$(12) \quad a_{12}x_2 \approx v_1 \pm \Delta_1 \Rightarrow x_2(t) \approx v_1 / a_{12}, \quad t_0 < t \leq T.$$

Таким образом, показано, что методика оценивания внешних возмущений, представленная в первом примере, применена для восстановления неизмеряемой переменной состояния  $x_2(t)$ . Ее оценкой является корректирующее воздействие редуцированного наблюдателя (10), построенного на основе дифференциального уравнения измеряемой переменной  $x_1(t)$ , на которое возмущение не действует. Заметим, что второе уравнение системы (2), которое зависит от возмущения, не использовалось в явном виде для решения задачи наблюдения, поэтому дополнительная идентификация  $\eta_2(t) \neq 0$  не потребовалась. Основное ограничение данного подхода состоит в том, что на этапе проектирования надо получить оценки  $X_2, \bar{X}_2$  (3), необходимые для настройки наблюдателя (10), с учетом конкретного закона управления и допустимой области начальных значений переменных состояния.

Следует отметить, что в данном случае стандартный редуцированный наблюдатель, который строится на основе дифференциального уравнения неизмеряемой переменной [16], в узкой постановке физически нереализуем, так как второе уравнение системы (1) находится под воздействием внешнего неконтролируемого возмущения.

Обратим внимание, что при измерениях  $x_1(t)$  и  $\eta_1(t) \equiv 0$  в системе (1) возмущение  $\eta_2(t)$  действует по одну каналу

с управлением  $u$  (т.е. является согласованным) и не влияет на возможность восстановить  $x_2(t)$ . Это означает, что с помощью указанной методики можно восстановить с заданной точностью и переменную  $u$  состояния  $x_2(t)$ , и возмущение  $\eta_2(t) \neq 0$  без наличия его динамической модели, если использовать полно-размерный наблюдатель второго порядка

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{z}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}z_2 + v_1, \\ \dot{z}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}z_2 + bu + v_2. \end{aligned}$$

С учетом (1), (13) система относительно ошибок наблюдения  $\varepsilon_i = x_i - z_i \in R$  принимает вид

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &= a_{12}\varepsilon_2 - v_1, \quad v_1 = m_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1), \\ \dot{\varepsilon}_2 &= a_{22}\varepsilon_2 + \eta_2(t) - v_2, \quad v_2 = m_2 \text{sat}(l_2 v_1 / a_{12}), \\ m_i, l_i &= \text{const} > 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Выбором параметров корректирующих воздействий в системе (14) последовательно, сверху вниз, обеспечивается стабилизация ошибок наблюдения и их производных:

$$(15) \quad \begin{aligned} |\varepsilon_1(t)| \leq \delta_1 &\Rightarrow |\dot{\varepsilon}_1(t)| = |a_{12}\varepsilon_2 - v_1| \leq \Delta_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\varepsilon_2(t)| \leq \delta_2 &\Rightarrow |\dot{\varepsilon}_2(t)| = |a_{22}\varepsilon_2 + \eta_2 - v_2| \leq \Delta_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_2(t) \approx z_2(t) \pm \delta_2, \quad \eta_2(t) \approx v_2(t) \pm (|a_{22}|\delta_2 + \Delta_2). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда измеряется только  $x_2(t)$  и  $\eta_2(t) \equiv 0$ . Условием наблюдаемости регулируемой переменной  $x_1(t)$  является требование  $a_{21} \neq 0$ . Тогда можно восстановить  $x_1(t)$  с помощью корректирующего воздействия редуцированного наблюдателя, построенного на основе второго уравнения системы (1) в виде, аналогичном (10), а именно:

$$(16) \quad \dot{z}_2 = a_{22}x_2 + bu + v_2, \quad v_2 = m_2 \text{sat}(l_2 \varepsilon_2).$$

Виртуальная система относительно ошибки наблюдения  $\varepsilon_2 = x_2 - z_2$  при использовании редуцированного наблюдателя (16) примет следующий вид:

$$\varepsilon_2 = x_2 - z_2, \quad \dot{\varepsilon}_2 = a_{21}x_1 - v_2.$$

Выполнение условий, аналогичных (12), обеспечит

$$x_1(t) \approx v_2 / a_{21}, \quad t_0 < t \leq T.$$

Кроме того, с помощью полноразмерного наблюдателя, аналогичного (13), можно восстановить и  $x_1(t)$ , и  $\eta_1(t) \neq 0$ .

**Пример 3.** Если в системе (1) измеряется только  $x_1(t)$ , но  $\eta_1(t) \neq 0$ , то в узкой постановке, т.е. без ввода динамической модели  $\eta_1(t)$ , решить задачу оценивания по отдельности переменной  $x_2(t)$  и внешних возмущений нельзя.

И, наоборот, если только  $x_2(t)$  измеряется, но  $\eta_2(t) \neq 0$ , то даже при  $a_{21} \neq 0$  в узкой постановке решить задачу оценивания по отдельности и  $x_1(t)$ , и  $\eta_1(t) \neq 0$  не представляется возможным.

В следующем разделе представленные результаты используются для формализации условий наблюдаемости выходной регулируемой переменной одноканальной системы произвольного порядка.

### 3. Основной результат

Рассмотрим линейную конечномерную систему произвольного порядка с аффинными возмущениями, представимую в треугольной форме «вход – выход»

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= a_{i1}x_1 + \dots + a_{i,i+1}x_{i+1} + \eta_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t), \quad i = \overline{1, n-1}; \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + \eta_n(x, t) + bu, \end{aligned}$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in X \subset R^n$  – вектор состояния;  $x_1 \in R$  – регулируемый выход;  $u \in R$  – управление;  $a_{ij}$ ,  $b$  – известные константы; аддитивные члены  $\eta_i$  содержат все неопределенности модели объекта и внешние возмущения. Предполагается, что не все уравнения системы (17) содержат неопределенные члены и есть уравнения, в которых все параметры известны. Треугольный состав аргументов функций  $\eta_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , означает, что при приведении системы (17) к каноническому виду выход  $x_1$  от входа  $u$  с ненулевым коэффициентом усиления будет отделен  $n$  интеграторами. Другими словами, относительный порядок системы (17) при приведении ее к каноническому виду не изменится и останется равным  $n$  [7, 12].

Следует отметить, что матрица коэффициентов системы (17) не является треугольной. Здесь термин «треугольная

система» имеет следующий смысл: все  $a_{ij} = 0$ , где  $j = i + 2, i + 3, \dots, n$ . При этом элементы  $a_{ij}$ , где  $i \geq j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , могут принимать любые значения (и нулевые, и ненулевые). В контексте решаемой проблемы необходимо, чтобы  $a_{i1} \neq \vec{0}$ , т.е. в первом столбце матрицы коэффициентов системы должны быть ненулевые элементы.

Для треугольных систем вида (17) выполнение условий

$$(18) \ a_{i,i+1} \neq 0, \ i = \overline{1, n-1}; \ b \neq 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы при отсутствии возмущений система (17)–(18) была наблюдаема относительно выхода, а выход управляем относительно входа. Без детализации закона управления будем полагать, что в процессе управления все внутренние и внешние сигналы в замкнутой системе (17) ограничены, для границ их изменения используются обозначения, аналогичные (3).

В узкой постановке, когда идентификация неизвестных параметров и построение генераторов внешних возмущений не предусмотрены или невозможны, имеются два варианта синтеза обратной связи в системе (17)–(18), обеспечивающей отслеживание выходной переменной  $x_1(t)$  заданного сигнала  $g(t)$ .

Первый вариант [7]: при выполнении условий  $\eta_i \in C^{n-i}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , и  $g(t) \in C^n$  система (17) представима в каноническом базисе смешанных переменных относительно ошибки слежения  $x_1(t) - g(t)$ . Для оценивания смешанных переменных достаточно измерений  $x_1(t)$  и  $g(t)$ , при этом с помощью динамической обратной связи можно обеспечить

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = g(t).$$

Второй вариант [2]: если функции  $\eta_i(t)$ ,  $\dot{g}(t)$  не являются гладкими, то при измерении  $x_1, \dots, x_n$  и  $g(t)$  с помощью статической обратной связи можно обеспечить заданную точность ошибки слежения. При неполном комплекте датчиков возможность оценивания переменных состояния, необходимых для синтеза обратной связи, зависит от структуры наблюдаемости системы (17) относительно измеряемых переменных и от отсутствия возмущений  $\eta_j(t) \equiv 0$  в конкретных  $j$ -х уравнениях.

Пусть для системы (17)–(18) применяется первый вариант синтеза обратной связи, но при этом регулируемая переменная  $x_1(t)$  не измеряется. Сформулируем условия ее наблюдаемости в узкой постановке независимо от внешних возмущений, опираясь на мотивирующие примеры 2 и 3.

**Лемма.** Если в системе (17)–(18) найдется хотя бы одно  $i$ -е уравнение,  $i = 2, \dots, n$ , такое что:

- 1)  $\eta_i(t) \equiv 0, a_{i1} \neq 0$ ;
- 2)  $x_{i+1}(t)$  измеряется ( $x_{n+1}(t) \equiv 0$ );
- 3)  $x_i(t)$  измеряется или наблюдается независимо от возмущений;
- 4) для всех  $j = 2, \dots, i-1$  выполняются условия: или  $x_j(t)$  измеряется (или наблюдается независимо от возмущений), или  $a_{ij} = 0$ ,

то тогда для оценивания  $x_1(t)$  можно построить физически реализуемый редуцированный наблюдатель состояния.

**Доказательство.** Условия, сформулированные в лемме, продиктованы треугольным видом рассматриваемой системы (17)–(18). В самом простом случае, когда в  $i$ -м уравнении ( $i = 2, \dots, n$ ) выполняются первые два условия леммы,  $x_i(t)$  измеряется, а также измеряются переменные  $x_2(t), \dots, x_{i-1}(t)$  (или  $a_{i2} = 0, \dots, a_{i,i-1} = 0$ ), то тогда оценку  $x_1(t)$  можно получить с помощью корректирующего воздействия наблюдателя первого порядка, построенного на основе  $i$ -го уравнения системы (17) аналогично (16). Если  $i \neq n$ , то этот наблюдатель имеет вид

$$\dot{z}_i = a_{i2}x_2 + \dots + a_{i,i+1}x_{i+1} + v_i, \quad z_i \in R,$$

если  $i = n$ , то тогда

$$\dot{z}_i = a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}x_i + bu + v_i, \quad z_i \in R.$$

В обоих случаях относительно ошибки слежения  $\varepsilon_i = x_i - z_i$  получим виртуальную систему

$$\dot{\varepsilon}_i = a_{i1}x_1 - v_i, \quad v_i = m_i \text{sat}(l_i \varepsilon_i), \quad m_i, l_i = \text{const} > 0.$$

При выполнении условий, аналогичных (11), за конечное время обеспечивается стабилизация ошибки слежения и ее производной, а корректирующее воздействие с заданной точностью воспроизводит неизмеряемую переменную  $x_1(t)$ :

$$|\varepsilon_i(t)| \leq \delta_i \Rightarrow |\dot{\varepsilon}_i(t)| = |a_{i1}x_1 - v_i| \leq \Delta_i \Rightarrow x_1(t) \approx v_i / a_{i1}, \quad t_0 < t \leq T.$$

Условия построения физически реализуемых наблюдателей для неизмеряемых переменных, требуемых для восстановления  $x_1(t)$ , аналогичны сформулированным в лемме. Например, если в системе (17)–(18)  $x_2(t)$  измеряется, то при выполнении условий  $\eta_j(t) \equiv 0$ ,  $a_{j1} = 0$ ,  $j = 2, \dots, k$ ,  $k \leq i - 1$ , на основе  $j$ -х уравнений можно построить физически реализуемый наблюдатель для оценивания  $x_3(t)$ , ...,  $x_{k+1}(t)$  аналогично (13)–(15) и т.п.

Лемма доказана.

Как следствие из леммы, выделим некоторые частные случаи системы (17)–(18), в которых используемый подход к оцениванию выходной неизмеряемой переменной  $x_1(t)$  неприменим при любом составе измеряемых переменных:

– если все  $\eta_i(t) \neq 0$ ,  $i = 2, \dots, n$ , то тогда независимо от наличия ненулевых элементов в первом столбце матрицы коэффициентов системы  $a_{i1} \neq 0$  в узкой постановке восстановить  $x_1(t)$  нельзя;

– если система (17)–(18) является канонической и нейтральной, т.е. все  $a_{ij} = 0$ ,  $i \geq j$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то тогда независимо от наличия уравнений без неопределенностей, где  $\eta_i(t) \equiv 0$ , восстановить  $x_1(t)$  нельзя.

Заметим, что в случае стандартной канонической системы при действии возмущений, а именно

$$\dot{x}_i = x_{i+1} + \eta_i(x_1, x_2, \dots, x_i, t), \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + \eta_n(x, t) + bu,$$

условия, при выполнении которых для оценивания  $x_1(t)$  можно построить физически реализуемый редуцированный наблюдатель состояния, имеют вид:  $\eta_n(t) \equiv 0$ ,  $a_{n1} \neq 0$ ;  $x_n(t)$  измеряется или наблюдается независимо от возмущений; для всех  $j = 2, \dots, n - 1$  выполняются условия: или  $x_j(t)$  измеряется (или наблюдается независимо от возмущений), или  $a_{nj} = 0$ .

Если условия леммы выполнены и оценка  $x_1(t)$  может быть получена, то тогда для второго варианта синтеза системы слежения условия построения физически реализуемых наблюдателей для остальных неизмеряемых переменных относительно измеряемых (наблюдаемых) переменных проверяются анало-

гично. В частности, если  $\eta_1(t) \equiv 0$ , то тогда имеется возможность оценивания  $x_2(t)$ ; если при этом  $\eta_2(t) \equiv 0$ , то и  $x_3(t)$  и т.д.

В качестве примера применимости предлагаемого подхода рассмотрим две системы вида (17)–(18), которые описывают уравнения движений однозвенного манипулятора с учетом динамики исполнительного устройства – двигателя постоянного тока (ДПТ).

При эластичном типе сочленения манипулятора с валом ДПТ имеем динамическую систему 5-го порядка вида [17]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \bar{a}_{21}(x_3 - x_1) - \bar{a}_{22} \sin x_1 + \eta(t), \\ (19) \quad \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= -a_{43}(x_3 - x_1) - a_{44}x_4 + a_{45}x_5, \\ \dot{x}_5 &= -\bar{a}_{54}x_4 - \bar{a}_{55}x_5 + bu, \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2$  – угловые положение и скорость манипулятора;  $x_3, x_4$  – угловые положение и скорость вала ДПТ;  $x_5$  – ток якоря;  $u$  – напряжение питания якорной цепи;  $a_{ij}, b$  – конструктивные параметры (черта сверху означает, что данный параметр точно не известен);  $\eta(t) \neq 0$ .

Как видим, в системе (19) условия леммы выполнены при  $i = 4$  и измерениях  $x_3(t), x_4(t), x_5(t)$ , тогда наблюдатель первого порядка, построенный на основе четвертого уравнения системы (19), даст оценку  $x_1(t)$ . Минимальный набор для оценивания  $x_1(t)$  – датчики  $x_3(t), x_5(t)$ , тогда наблюдатель второго порядка, построенный на основе третьего и четвертого уравнений системы (19), даст оценки  $x_4(t)$ , и  $x_1(t)$ .

Измерения  $x_3(t), x_5(t)$  являются минимальным набором при отсутствии датчика  $x_1(t)$  и для второго варианта синтеза, так как на основе первого уравнения системы (19) можно построить редуцированный наблюдатель для оценивания  $x_2(t)$ . Общий порядок наблюдателя при этом равен трем. Если  $x_1(t)$  измеряется, то при дополнительных измерениях  $x_3(t)$  с помощью наблюдателя третьего порядка можно получить оценки остальных переменных инвариантно к возмущениям.

При жестком типе сочленения манипулятора с валом двигателя учитываемую динамику исполнительного устройства можно сократить и в качестве уравнений движения рассматривать систему третьего порядка вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ (20) \quad \dot{x}_2 &= \bar{c}_{21} \sin x_1 - \bar{c}_{22} x_2 + \bar{c}_{23} x_3 + \eta(t), \\ \dot{x}_3 &= -\bar{c}_{32} x_2 - \bar{c}_{33} x_3 + bu, \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2$  – угловые положение и скорость манипулятора;  $x_3$  – ток якоря;  $c_{ij}, b$  – конструктивные параметры (черта сверху означает, что данный параметр точно не известен);  $\eta(t) \neq 0$ .

Как видим, в системе (20) условия леммы не выполнены. Если регулируемая переменная  $x_1(t)$  не измеряется, то в узкой постановке нельзя получить ее оценку по измерениям  $x_2(t), x_3(t)$ . Даже при отсутствии неопределенностей, а именно  $c_{21}, c_{22}, c_{23}, \eta(t) = 0$ , с помощью наблюдателя первого порядка можно восстановить  $c_{21} \sin x_1$ . Но при этом нельзя однозначно определить положение манипулятора, так как данная функция не является монотонной и не имеет обратной на всей области определения.

Таким образом, для первого варианта синтеза системы слежения на основе модели объекта (20) требуется датчик  $x_1(t)$ . Для второго варианта синтеза следящей системы минимальный набор состоит из двух датчиков  $x_1(t), x_3(t)$ , при этом на основе первого уравнения системы (20) можно построить редуцированный наблюдатель для оценивания  $x_2(t)$ .

Пример построения редуцированного наблюдателя для многозвенного манипулятора, движения которого описываются матричными уравнениями типа (20), представлен в работе [5].

Результаты моделирования замкнутых систем (19), (20) с различными комплектами датчиков и с соответствующими редуцированными наблюдателями подтвердили их работоспособность [1, 6, 7].



## Литература

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВ Д.В. *Синтез системы слежения для однозвенного бездатчикового манипулятора при воздействии негладких возмущений* // Проблемы управления. – 2022. – №3. – С. 3–15.
2. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №1. – С. 40–66.
3. БУСУРИН В.И., МЕДВЕДЕВ В.М., КАРАБИЦКИЙ А.С. *Особенности модульного построения систем контроля и диагностики инерциальных систем управления* // Труды МАИ. – 2017. – №92. – С. 19.
4. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями* // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №7. – С. 37–68.
5. КРАСНОВ Д.В. *Синтез наблюдателя пониженного порядка для полноприводной электромеханической системы* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 31–48.
6. КРАСНОВ Д.В., АНТИПОВ А.С. *Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвенным манипулятором в условиях неопределенности* // Проблемы управления. – 2021. – №4. – С. 23–33.
7. КРАСНОВ Д.В., УТКИН А.В. *Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 69. – С. 29–49.
8. КРАСНОВА С.А. *Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 76. – С. 6–25.
9. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. *Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO систем при действии внешних*

- несогласованных возмущений* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 22–30.
10. МАЛИКОВ А.И. *Синтез наблюдателей состояния и неизвестных входов для нелинейных липшицевых систем с неопределенными возмущениями* // Автоматика и телемеханика. – 2018. – №3. – С. 21–43.
  11. НИКИФОРОВ В.О. *Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений*. – СПб.: Наука, 2003. – 282 с.
  12. УОHEM У.М. *Линейные многомерные системы управления. Геометрический подход*. – М.: Наука, 1980. – 376 с.
  13. УТКИН В.А., УТКИН А.В. *Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №9. – С. 62–81.
  14. ФОМИЧЕВ В.В., ВЫСОЦКИЙ А.О. *Каскадный метод построения наблюдателей для систем с неопределенностью* // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, №11. – С. 1533–1539.
  15. LEVANT A. *Robust exact differentiation via sliding mode technique* // Automatica. – 1998. – Vol. 34, Iss. 3. – P. 379–384.
  16. LUENBERGER D.B. *Observers of multivariable systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1966. – Vol. 11, No. 2. – P. 190–197.
  17. SPONG M., HUTCHINSON S., VIDYASAGAR M. *Robot Modeling and Control*. – New York: Wiley, 2005. – 496 p.

## CONSTRUCTION OF REDUCED STATE OBSERVERS FOR SYSTEMS WITH AFFINE DISTURBANCES

**Dmitry Krasnov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (dim93kr@mail.ru)

*Abstract: The object of study is linear single-channel systems with affine parametric and external disturbances, presented in the so-called triangular form "input-output". The relative degree in control is equal to the dimension of the state vector and does not change upon transition to the canonical form "input-output" under the assumption of smoothness of external disturbances. It is known that for such systems, only by measuring the output variable, it is possible to construct an observer*

*of mixed variables and restore linear combinations of state variables and external influences with a given accuracy. The estimates obtained are sufficient for the synthesis of dynamic feedback, which provides tracking of the output variable of a given signal. The paper considers an important practical case when, for a certain set of sensors, the output (adjustable) variable is not measured. It is necessary to design a reduced state observer for its evaluation in order to proceed to the construction of a mixed variables observer. First, motivating examples of second-order systems with different dimensions and different channels of action of external disturbances are considered. It is shown that when measuring both state variables with the help of piecewise linear corrective actions of the state observer, it is possible to restore external disturbances by their influence on the system (i.e., without using a dynamic disturbance generator). Conditions are formulated under which this principle can also be used in a system with external disturbances and incomplete measurements to restore an unmeasured state variable. The results obtained are extended to finite-dimensional single-channel systems of arbitrary order with affine disturbances, in which the output variable is not measured. The conditions of existence and the method of synthesis of a reduced observer with a piecewise-linear corrective action, which gives an estimate of the output variable, are formalized. The developed approach does not require the identification of external disturbances and solves the problem of observing the output variable with any given accuracy.*

Keywords: linear systems, disturbances, reduced state observer, piecewise-linear correction.

УДК 62.50

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.1

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

*Поступила в редакцию 10.12.2022.  
Опубликована 31.01.2023.*

## О КЛАССЕ ДВУХ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДВУХ НЕСИНХРОННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ <sup>1</sup>

Берлин Л. М. <sup>2</sup>, Галяев А. А. <sup>3</sup>, Кравцова С. К. <sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматривается задача быстрогодействия в системе, состоящей из двух несинхронных осцилляторов. Исследуемая постановка имеет ряд отличительных особенностей, таких как, например, то, что каждый из осцилляторов системы управляется единым ограниченным скалярным управлением, целью которого является разгон первого осциллятора из состояния покоя в заданное положение. В терминальный момент фазовые координаты второго осциллятора снова становятся равными нулю. Оптимальное управление в данной задаче имеет релейный вид, поэтому ключевыми являются решения с различным количеством переключений управления. Базовым является случай с тремя переключениями, так как в данном классе управления достаточно использовать решение системы уравнений динамики. Для большего количества неизвестных моментов переключения известны необходимые условия оптимальности, позволяющие рассматривать произвольные классы управления. При различных вырождениях указанных классов происходит изменение количества переключений управления. Интерес представляет класс двух переключений, для значений параметров которого выписаны функциональные зависимости. Проведено математическое моделирование для иллюстрации полученных аналитических результатов.*

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, релейное управление, осцилляторы.

### 1. Введение

Задачи с недостатком ресурса управления, когда размерность вектора управления меньше или значительно меньше размерности пространства состояний физической системы, имеют широкое применение на практике. Колебательные системы, такие как

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта молодёжной научной школы «Методы оптимизации и планирования движения управляемых объектов».

<sup>2</sup> Леонид Михайлович Берлин, математик (berlin.lm@phystech.edu).

<sup>3</sup> Андрей Алексеевич Галяев, д.т.н., г.н.с (galaev@ipu.ru).

<sup>4</sup> Софья Константиновна Кравцова, техник (kravtsovasofja@mail.ru).

механические системы [4, 8, 10] или квантовые осцилляторы [11], управляемые одной внешней силой, являются примерами подобных систем. Движение балки Тимошенко, которое описывается динамикой управляемой системы, состоящей из  $N$  осцилляторов, совершающих вынужденные колебания под действием скалярной и ограниченной силы, по энергетическому критерию было рассмотрено в работе [10]. Задача быстрогодействия для платформы с осцилляторами, которая может описывать малые перемещения платформы с упругими звеньями или сосуда с жидкостью, исследуется в [4]. Задача синтеза оптимального управления по критерию максимума изменения энергии колебаний системы осцилляторов за заданное время с управлением по частоте приводится в [6]. Ввиду трудности нахождения аналитического решения задач управления отдельный интерес представляет синтез асимптотически оптимального управления для системы, состоящей из произвольного числа линейных осцилляторов при общем ограниченном управлении, который получен в [8].

Исследуются задачи оптимального управления при помощи принципа максимума Понтрягина, началом разработки которого послужил в 50-х годах XX века семинар по теории колебаний и автоматическому управлению Л.С. Понтрягина и М.А. Айзермана, где, в частности, рассматривалась задача оптимального быстрогодействия одиночным осциллятором [9], для которой В.Г. Болтянский осуществил синтез оптимального управления [3]. В свою очередь, для систем осцилляторов зачастую необходимо, чтобы одна из подсистем как можно быстрее пришла в требуемое положение, тогда как другие подсистемы должны остаться в состоянии покоя в терминальный момент. Задача быстрогодействия системы уже многих маятников исследовалась Ф.Л. Черноусько в [5], где и была отмечена существенная аналитическая сложность получения решения, а само решение для двух осцилляторов было предложено только в частном случае отношения частот. При поиске решения задачи оптимального управления ключевым вопросом является исследование достижимости и управляемости. Для системы двух несинхронных осцилляторов с ограниченным

и скалярным управлением показана сильная достижимость и глобальная управляемость [1].

Настоящая работа является продолжением исследования системы, состоящей из двух несинхронных осцилляторов, и направлена на математическое описание класса двух переключений управления, который зачастую наблюдается при различных типах вырождений классов с большим числом переключений управления. Такая ситуация возникает, например, когда либо обнуляется крайний интервал в случае управления с тремя переключениями, либо становится равным нулю любой внутренний интервал в классе четырёх переключений.

Структура работы по исследованию класса двух переключений в задаче быстрогодействия для двух несинхронных осцилляторов включает в себя 3 раздела. В разделе 1 обсуждается постановка задачи оптимального управления, приводятся полученные авторами ранее необходимые условия экстремума в заданном и произвольном классе переключений управления. В разделе 2 формулируются и доказываются функциональные зависимости для класса двух переключений. Раздел 3 посвящен иллюстрации полученных результатов, в частности, математическому моделированию множества достижимости первого осциллятора и критерия задачи.

## **2. Постановка и решение задачи оптимального управления**

Рассматривается система из двух несинхронных осцилляторов (т.е. имеющих различные собственные частоты колебаний:  $\omega_1 \neq \omega_2$ ). Управление  $u(t)$  входит симметрично в уравнения для импульсов осцилляторов. Динамика такой линейной управляемой системы описывается следующими уравнениями:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{q}_1(t) = p_1(t), \\ \dot{p}_1(t) = -\omega_1^2 q_1(t) + u(t), \\ \dot{q}_2(t) = p_2(t), \\ \dot{p}_2(t) = -\omega_2^2 q_2(t) + u(t), \end{cases} \quad x = (q_1, p_1, q_2, p_2)^\top \in \mathbb{R}^4.$$

Система (1) может быть переписана в матричной форме

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Стоит отметить, что число ненулевых компонент вектора управления  $B$  меньше размерности системы и само управление ограничено значением  $\varepsilon$ , которое является параметром задачи:

$$(3) \quad u(t) \in [-\varepsilon, \varepsilon] = U.$$

В начальный момент времени фазовые координаты осцилляторов совпадают с началом координат фазовой плоскости, т.е. их координаты и импульсы равны нулю. В терминальный момент фазовые координаты второго осциллятора становятся равными нулю, в то время как первый осциллятор переводится в состояние  $(q_1^{T_0}, p_1^{T_0})$ , которое также является параметром задачи. Явный вид граничных условий выглядит следующим образом:

$$(4) \quad x(0) = x_0 = (0, 0, 0, 0)^T,$$

$$(5) \quad x(T_0) = x_{T_0} = (q_1^{T_0}, p_1^{T_0}, 0, 0)^T,$$

где за  $T_0$  обозначено общее время движения системы из начального состояния в конечное, которое выбрано в качестве критерия задачи:

$$(6) \quad T_0 = \int_0^{T_0} dt \rightarrow \min_{u \in U}.$$

Для задачи (1)–(6) в работах [2, 7] получен релейный вид оптимального управления

$$(7) \quad u^*(t) = \varepsilon(C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t))$$

и определены следующие величины: момент переключения управления  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, K-1$ ,  $K \in \mathbb{N}$ , когда управление меняет знак на противоположный, и длительность интервала управления  $\tau_n$ ,  $n = 1, \dots, K$ , в течение которого управление сохраняет знак после достижения соответствующего момента переключения.

Определение 1. Класс  $K-1$  переключения соответствует решению, в котором оптимальное управление имеет  $K-1$  переключения.

Решение системы (1) с условиями (4)–(5), принимая во внимание не только количество переключений  $K-1$ , но и знак управления на первом интервале, выписывается в виде

$$(8) \quad \begin{cases} 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left( \omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left( \omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = \\ = (-1)^{K-1} + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T_0} \omega_1^2}{\varepsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left( \omega_1 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left( \omega_1 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = \\ = (-1)^k \frac{p_1^{T_0} \omega_1}{\varepsilon}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \cos \left( \omega_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \cos \left( \omega_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = (-1)^{K-1}, \\ 2 \sum_{j=1}^K (-1)^{j+1} \sin \left( \omega_2 \sum_{i=j}^K \tau_i \right) - \sin \left( \omega_2 \sum_{i=1}^K \tau_i \right) = 0, \end{cases}$$

где дополнительный параметр  $k$ , равный 0 или 1, соответствует начальному управлению  $\varepsilon$  и  $-\varepsilon$  соответственно. Доказана следующая теорема.

**Теорема 1** Необходимые условия экстремума. *Любое решение задачи (1)–(6) в классе релейных управлений (7) удовлетворяет системе (8) и уравнениям*

$$(9) \quad \det \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_i) & \cos(\omega_1 t_{i+1}) & \cos(\omega_1 t_{i+2}) & \cos(\omega_1 t_{i+3}) \\ \sin(\omega_1 t_i) & \sin(\omega_1 t_{i+1}) & \sin(\omega_1 t_{i+2}) & \sin(\omega_1 t_{i+3}) \\ \cos(\omega_2 t_i) & \cos(\omega_2 t_{i+1}) & \cos(\omega_2 t_{i+2}) & \cos(\omega_2 t_{i+3}) \\ \sin(\omega_2 t_i) & \sin(\omega_2 t_{i+1}) & \sin(\omega_2 t_{i+2}) & \sin(\omega_2 t_{i+3}) \end{pmatrix} = 0,$$

$$i = 1, \dots, K-4.$$

В следующей главе будет подробно рассмотрен класс двух переключений управления ( $K-1=2$ ).

### 3. Класс двух переключений

Класс двух переключений охватывает все решения задачи оптимального управления (1)–(6), в которых оптимальное управление представлено кусочно-постоянной функцией (см. рис. 1).

Система (8) для различных конечных состояний первого осциллятора ( $p_1^{T_0}, q_1^{T_0}$ ) и двух переключений управления записывается в следующем виде:



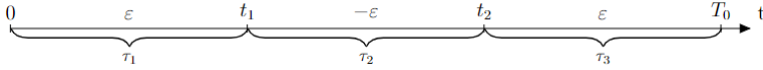


Рис. 1. Связь переменных  $\tau$  и  $t$  при начальном управлении

$$(10) \quad \begin{cases} \cos(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\cos(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) + 2\cos(\omega_1\tau_3) = \\ = 1 + (-1)^{k+1} \frac{q_1^{T_0} \omega_1^2}{\varepsilon}, \\ \sin(\omega_1(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\sin(\omega_1(\tau_2 + \tau_3)) + 2\sin(\omega_1\tau_3) = \\ = (-1)^k \frac{p_1^{T_0} \omega_1}{\varepsilon}, \\ \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) + 2\cos(\omega_2\tau_3) = 1, \\ \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) + 2\sin(\omega_2\tau_3) = 0. \end{cases}$$

Если полученную систему (10) из четырёх уравнений рассматривать относительно неизвестных  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $q_1^{T_0}$ ,  $p_1^{T_0}$ , то, неявно разрешив эти уравнения, можно построить кривую на фазовой плоскости первого осциллятора, соответствующую классу двух переключений, что и будет показано в разделе, посвящённом моделированию. Для этого в следующей лемме приводится параметрическая зависимость  $\tau_2(\tau_1)$  и  $\tau_3(\tau_1)$ , используя последние два уравнения системы (10), которые не содержат  $q_1^{T_0}$ ,  $p_1^{T_0}$ .

**Лемма 1.** В классе двух переключений функциональные зависимости для длительностей интервалов управления  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  выглядят следующим образом:

$$(11) \quad \left[ \begin{cases} \tau_3 = \tau_1 + \frac{2\pi z_1}{\omega_2}, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2}{\omega_2} \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \frac{2\pi z_4}{\omega_2}, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_3 = -\tau_1 + \frac{2\pi z_2}{\omega_2}, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2\pi z_8}{\omega_2}, \quad z_8 \in \mathbb{Z}. \end{cases} \right.$$

**Доказательство.**

Рассматриваются отдельно последние два уравнения системы (10):

$$(12) \quad \begin{cases} \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) = 1 - 2\cos(\omega_2\tau_3), \\ \sin(\omega_2(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_3)) = -2\sin(\omega_2\tau_3). \end{cases}$$

Представленные уравнения возводятся в квадрат и суммируются, что приводит к следующему равенству:

$$(13) \quad \begin{aligned} 1 - 4\cos(\omega_2\tau_3) + 4 &= 1 + 4 - 4\cos(\omega_2\tau_1), \\ \cos(\omega_2\tau_3) &= \cos(\omega_2\tau_1), \\ \cos(\omega_2\tau_3) - \cos(\omega_2\tau_1) &= 0, \\ -2\sin\left(\frac{\omega_2\tau_3 + \omega_2\tau_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_2\tau_3 - \omega_2\tau_1}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Откуда следуют два периодических решения уравнения (13):

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_2\tau_3 = \omega_2\tau_1 + 2\pi z_1, & z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2\tau_3 = -\omega_2\tau_1 + 2\pi z_2, & z_2 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

которые для проверки подставляются в последние два уравнения системы (10):

$$(15) \quad \begin{cases} \omega_2\tau_3 = \omega_2\tau_1 + 2\pi z_1, & z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(\omega_2(2\tau_1 + \tau_2)) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 + \tau_1)) + 2\cos(\omega_2\tau_1) = 1, \\ \sin(\omega_2(2\tau_1 + \tau_2)) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 + \tau_1)) + 2\sin(\omega_2\tau_1) = 0, \\ \omega_2\tau_3 = -\omega_2\tau_1 + 2\pi z_2, & z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(\omega_2\tau_2) - 2\cos(\omega_2(\tau_2 - \tau_1)) + 2\cos(\omega_2\tau_1) = 1, \\ \sin(\omega_2\tau_2) - 2\sin(\omega_2(\tau_2 - \tau_1)) - 2\sin(\omega_2\tau_1) = 0. \end{cases}$$

Дальнейшая проверка решений (14) с целью исключения посторонних корней будет продолжена после нахождения дополнительных функциональных зависимостей, для чего складываются квадраты двух последних уравнений системы (10):

$$(16) \quad 2 + \cos(\omega_2(\tau_1 + \tau_2)) - 2\cos(\omega_2\tau_2) - \cos(\omega_2\tau_1) = 0.$$

Дальнейшие преобразования направлены на разделение переменных в уравнении (16).

$$\begin{aligned} 2 + \cos(\omega_2\tau_1)\cos(\omega_2\tau_2) - \sin(\omega_2\tau_1)\sin(\omega_2\tau_2) - 2\cos(\omega_2\tau_2) &= \cos(\omega_2\tau_1), \\ \cos(\omega_2\tau_2)(\cos(\omega_2\tau_1) - 2) + 2 - \cos(\omega_2\tau_1) &= \sin(\omega_2\tau_1)\sin(\omega_2\tau_2), \\ (\cos(\omega_2\tau_1) - 2)(\cos(\omega_2\tau_2) - 1) &= \sin(\omega_2\tau_1)\sin(\omega_2\tau_2). \end{aligned}$$

Можно оставить с одной стороны слагаемые, зависящие только от  $\tau_1$ , а с другой стороны – от  $\tau_2$ , выполнив деление последнего равенства на  $(\cos(\omega_2\tau_1) - 2)$  и на  $\sin(\omega_2\tau_2)$ :

$$(17) \quad \begin{aligned} \frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{\cos(\omega_2\tau_1) - 2} &= \frac{\cos(\omega_2\tau_2) - 1}{\sin(\omega_2\tau_2)}, \\ \frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{\cos(\omega_2\tau_1) - 2} &= -\frac{1 - \cos(\omega_2\tau_2)}{\sin(\omega_2\tau_2)}, \\ \frac{\sin(\omega_2\tau_1)}{\cos(\omega_2\tau_1) - 2} &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_2\tau_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Деление определяет ещё одно возможное решение

$$(18) \quad \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}.$$

Из (17) следует выражение для  $\tau_2$ :

$$(19) \quad \frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}.$$

Требуется проверить решения (18) и (19) на наличие посторонних корней путём подстановки в систему (15).

Случай  $\omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}$ :

$$(20) \quad \left[ \begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{z_3} \cos(2\omega_2 \tau_1) - 2(-1)^{z_3} \cos(\omega_2 \tau_1) + 2\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ (-1)^{z_3} \sin(2\omega_2 \tau_1) - 2(-1)^{z_3} \sin(\omega_2 \tau_1) + 2\sin(\omega_2 \tau_1) = 0, \end{cases} \right. \\ \left. \begin{cases} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi z_3, \quad z_3 \in \mathbb{Z}, \\ (-1)^{z_3} - 2(-1)^{z_3} \cos(\omega_2 \tau_1) + 2\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ 2(-1)^{z_3} \sin(\omega_2 \tau_1) - 2\sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{cases} \right.$$

Далее каждая система из совокупности (20) рассматривается по отдельности.

Первая система для нечётных  $z_3 = 2z_5 + 1, \quad z_5 \in \mathbb{Z}$ :

$$(21) \quad \begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_5 + 1), \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ -\cos(2\omega_2 \tau_1) + 4\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ -\sin(2\omega_2 \tau_1) + 4\sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{cases}$$

$\omega_2 \tau_1 = \pi z_6, \quad z_6 \in \mathbb{Z}$ , является решением последнего уравнение системы (21), но не удовлетворяет остальным.

Первая система для чётных  $z_3 = 2z_5, \quad z_5 \in \mathbb{Z}$ :

$$(22) \quad \begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_5), \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ \cos(2\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin(2\omega_2 \tau_1) = 0, \end{cases}$$

решением которой является

$$(23) \quad \omega_2 \tau_1 = \pi z_7, \quad z_7 \in \mathbb{Z}.$$

Вторая система для нечётных  $z_3 = 2z_8 + 1$ ,  $z_8 \in \mathbb{Z}$ :

$$(24) \quad \begin{cases} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_8 + 1), \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \\ 2\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ -4\sin(\omega_2 \tau_1) = 0 \end{cases}$$

решений не имеет.

Вторая система для чётных  $z_3 = 2z_8$ ,  $z_8 \in \mathbb{Z}$ :

$$(25) \quad \begin{cases} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = \pi(2z_8), \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \\ 1 - 2\cos(\omega_2 \tau_1) + 2\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ 2\sin(\omega_2 \tau_1) - 2\sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{cases}$$

выполнена тождественно.

Проверка (19) для первой системы:

$$(26) \quad \begin{cases} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right) + \pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \cos\left(2\omega_2 \tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) - \\ - 2\cos\left(\omega_2 \tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) + \\ + 2\cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin\left(2\omega_2 \tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) - \\ - 2\sin\left(\omega_2 \tau_1 + 2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) + \\ + 2\sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{cases}$$

Используя вспомогательные равенства

$$(27) \quad \begin{aligned} \cos\left(2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) &= \frac{4 - 4\cos(\omega_2 \tau_1) + \cos(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4\cos(\omega_2 \tau_1)}, \\ \sin\left(2\arctg\left(\frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)}\right)\right) &= \frac{4\sin(\omega_2 \tau_1) - \sin(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4\cos(\omega_2 \tau_1)} \end{aligned}$$

можно показать, что уравнения системы (26) выполнены тождественно.

Проверка решения (19) для второй системы:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\omega_2 \tau_2}{2} = \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + \pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \cos \left( 2 \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) \right) - \\ - 2 \cos \left( 2 \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) - \omega_2 \tau_1 \right) + \\ + 2 \cos(\omega_2 \tau_1) = 1, \\ \sin \left( 2 \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) \right) - \\ - 2 \sin \left( 2 \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) - \omega_2 \tau_1 \right) - \\ - 2 \sin(\omega_2 \tau_1) = 0. \end{array} \right.$$

Преобразования для последнего уравнения системы (28):

$$(29) \quad \frac{4\sin(\omega_2 \tau_1) - \sin(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4\cos(\omega_2 \tau_1)} (1 - 2\cos(\omega_2 \tau_1)) + \\ + 2\sin(\omega_2 \tau_1) \left( \frac{4 - 4\cos(\omega_2 \tau_1) + \cos(2\omega_2 \tau_1)}{5 - 4\cos(\omega_2 \tau_1)} - 1 \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} 2\sin(\omega_2 \tau_1) - 5\sin(2\omega_2 \tau_1) + 2\sin(3\omega_2 \tau_1) &= 0, \\ 2\sin(\omega_2 \tau_1) - 10\sin(\omega_2 \tau_1)\cos(\omega_2 \tau_1) + 6\sin(\omega_2 \tau_1)\cos^2(\omega_2 \tau_1) - \\ - 2\sin^3(\omega_2 \tau_1) &= 0, \\ \sin(\omega_2 \tau_1) (2 - 10\cos(\omega_2 \tau_1) + 6\cos^2(\omega_2 \tau_1) - 2\sin^2(\omega_2 \tau_1)) &= 0, \\ \sin(\omega_2 \tau_1)\cos(\omega_2 \tau_1) (10 + 8\cos(\omega_2 \tau_1)) &= 0. \end{aligned}$$

$$(30) \quad \left[ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_1 = \pi z_9, \quad z_9 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_1 = \frac{\pi}{2} + \pi z_{10}, \quad z_{10} \in \mathbb{Z}. \end{array} \right.$$

Только первое решение из совокупности (30) удовлетворяет третьему уравнению системы (28), которое после преобразований принимает вид

$$(31) \quad \cos(2\omega_2 \tau_1) - 2\cos(3\omega_2 \tau_1) + 2\cos(\omega_2 \tau_1) - 8\sin^2(\omega_2 \tau_1) = 1.$$

Все результаты объединяются в единую совокупность

$$(32) \quad \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2 \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \tau_2 = \frac{2\pi z_5}{\omega_2}, \quad z_5 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_1 = \frac{\pi z_7}{\omega_2}, \quad z_7 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_2 = \frac{2\pi z_8}{\omega_2}, \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_2 = 2 \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \\ \tau_1 = \frac{\pi z_9}{\omega_2}, \quad z_9 \in \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Для каждой из систем можно отметить, что последняя система является частным случаем всей совокупности, поэтому справедливы следующие упрощения:

$$(33) \quad \left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = \omega_2 \tau_1 + 2\pi z_1, \quad z_1 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2 \arctg \left( \frac{\sin(\omega_2 \tau_1)}{2 - \cos(\omega_2 \tau_1)} \right) + 2\pi z_4, \quad z_4 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \omega_2 \tau_3 = -\omega_2 \tau_1 + 2\pi z_2, \quad z_2 \in \mathbb{Z}, \\ \omega_2 \tau_2 = 2\pi z_8, \quad z_8 \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

которое и заканчивает доказательство леммы.

В следующей главе приводится иллюстрация полученных теоретических результатов.

#### 4. Моделирование

Рассматривается задача оптимального управления (1)–(6) с параметрами

$$(34) \quad \varepsilon = 0,4, \quad \omega_1 = 1, \quad \omega_2 = 1,4.$$

Ранее для некоторых конечных состояний первого осциллятора  $(q_1^{T_0}, p_1^{T_0})$  рассматривались различные управления, в том числе с тремя и четырьмя переключениями, где фазовая плоскость

первого осциллятора была размечена соответствующими классами переключений [7].

Используя утверждение леммы 1, можно, фиксируя различные значения  $\tau_1$ , вычислить длительности  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  и построить множество достижимости для первого осциллятора в классе двух переключений с релейным управлением, подставляя вычисленные длительности интервалов в первые два уравнения системы (10). После указанных операций требуется сравнить значение критерия для различного количества переключений.

Для исследуемого множества на фазовой плоскости первого осциллятора только четыре кривые, найденные по лемме 1, могут считаться оптимальными среди рассматриваемых классов. (см. рис. 2)

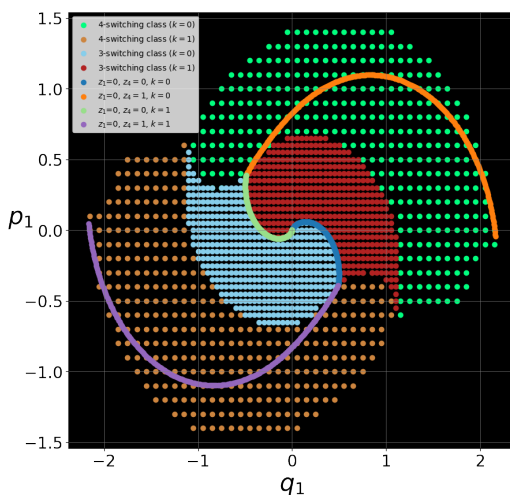


Рис. 2. Фазовая плоскость первого осциллятора

Различными цветами на рис. 2 обозначены классы трёх и четырёх переключений с различными управлениями на начальном интервале. Обнуление крайнего интервала управления в классе трёх переключений приводит к зелёной и голубой кривым класса двух переключений, которые разделяют классы трёх переключений. Обнуление внутреннего интервала управления в классе

четырёх переключений приводит к классу двух переключений, показанных оранжевой и фиолетовой кривой.

Для иллюстрации множества достижимости каждой точке исследуемой фазовой плоскости первого осциллятора будет поставлен в соответствие критерий задачи. Для удобства весь класс трёх переключений выделен красным цветом, четырёх – зелёным. (см. рис. 3)

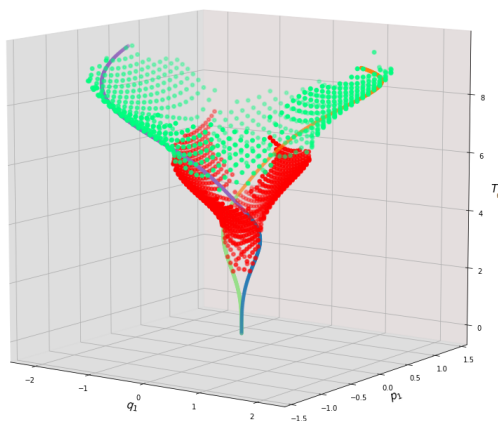


Рис. 3. Зависимость критерия задачи от конечных состояний первого осциллятора

## 5. Выводы

В работе рассмотрена задача оптимального управления двумя несинхронными осцилляторами. Релейный вид оптимального управления определяется количеством переключений управляющего воздействия. Подробно рассмотрен класс двух переключений, который получается при различных вырождениях последующих классов и обнулении длительностей интервалов управления. Для указанного класса получены функциональные зависи-



мости между переменными и параметрами задачи, что позволило провести математическое моделирование для иллюстрации приведённых аналитических результатов.

### Литература

1. БЕРЛИН Л.М., ГАЛЯЕВ А.А., ЛЫСЕНКО П.В. *Геометрический подход к задаче оптимального скалярного управления двумя несинхронными осцилляторами* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2022. – Т. 215. – С. 40–51.
2. БЕРЛИН Л.М., ГАЛЯЕВ А.А. *Условия экстремума при ограниченном скалярном управлении двумя несинхронными осцилляторами в задаче быстрогодействия* // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. – 2022. – Т. 505, №1. – С. 86–91.
3. БОЛТЯНСКИЙ В.Г. *Математические методы оптимального управления*. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
4. КАЮМОВ О.Р. *Оптимальное по быстродействию перемещение платформы с осцилляторами* // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85, №6. – С. 699–718.
5. ЧЕРНОУСЬКО Ф.Л., АКУЛЕНКО Л.Д., СОКОЛОВ Б.Н. *Управление колебаниями*. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
6. ANDRESEN B., SALAMON P., HOFFMANN K.H., TSIRLIN A.M. *Optimal processes for controllable oscillators* // Automation and Remote Control – 2018. – Vol. 79. – P. 2103–2113.
7. BERLIN L.M., GALYAEV A.A., LYSSENKO P.V. *Time-optimal control problem of two non-synchronous oscillators* // Mathematics – 2022. – Vol. 10, No. 19. – P. 3552.
8. FEDOROV A.K., OVSEEVICH A.I. *Asymptotic control theory for a system of linear oscillators* // Mosc. Math. J. – 2016. – Vol. 16. – P. 561–598.
9. PESCH H.J., PLAIL M. *The Maximum Principle of optimal control: A history of ingenious ideas and missed opportunities* // Control Cybern. – 2009. – Vol. 38. – P. 973–995.
10. SALOBUTINA E.O. *Regimes of more and more frequent switchings in the optimal control problem of oscillations of  $n$  oscillators* // J. Math. Sci. – 2008. – Vol. 151. – P. 3603–3610.

11. ZHAO Y., CHEN G.H. *Two oscillators in a dissipative bath* // Phys. A: Stat. Mech. Appl. – 2003. – Vol. 317. – P. 13–40.

## ABOUT TWO-SWITCHING CONTROL CLASS IN THE TIME-OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF TWO NON-SYNCHRONOUS OSCILLATORS

**Leonid Berlin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, mathematician (berlin.lm@phystech.edu).

**Andrey Galyaev**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Sciences, corresponding member of RAS (galyaev@ipu.ru).

**Sofia Kravtsova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, technician (kravtsovasofja@mail.ru).

*Abstract: The time-optimal control problem in a system consisting of two non-synchronous oscillators is considered. The studied formulation has a number of distinctive features, such as, for example, that each of the oscillators is controlled by a common bounded scalar control and the goal is to accelerate the first oscillator from rest to a given position in the shortest time. At the terminal moment the phase coordinates of the second oscillator become zero again. The optimal control is a relay mode, so solutions with different numbers of control switchings are the key. The basic one is the three-switching control class and for a larger number of unknown switching moments the necessary optimality conditions are known. The two-switching control class obtained by degeneracies is of interest, where functional dependences are written out for the values of interval durations. Mathematical modeling was carried out to illustrate the obtained analytical results.*

**Keywords:** Pontryagin's maximum principle, relay control, oscillators.

УДК 517.9

ББК 32.96

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

*Поступила в редакцию 17.01.2023.*

*Дата опубликования 31.01.2023.*

# АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И СЛОЖНОСТЬ ПРОЦЕССА НЕЯВНОЙ АДАПТАЦИИ СЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ К НАГРЕВАЕМОМУ ВЕЩЕСТВУ<sup>1</sup>

Жуков П. И.<sup>2</sup>, Фомин А. В.<sup>3</sup>

(Старооскольский технологический институт  
им. А.А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСиС»,  
Старый Оскол)

Глуценко А. И.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается процесс адаптации численной модели нестационарной теплопроводности, реализованной при помощи методов конечных разностей. Для классического представления данных моделей в большинстве приложений и задач уже доказана алгоритмическая устойчивость, но в данном случае рассматривается задача, связанная с параметрической адаптацией уравнения нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу, выполненной при помощи решения смежной вариационной задачи. Основа данного подхода предполагает замену теплофизических параметров рассматриваемого уравнения на свободно настраиваемые параметры и их коррекцию («обучение модели») методом стохастического градиента. Чтобы избежать попадания в области неустойчивости при «обучении», необходимы ограничения на введенные настраиваемые параметры. В данной работе такие ограничения получены на основании доказанных условий устойчивости классической конечно-разностной модели нестационарной теплопроводности. В результате численного эксперимента было установлено, что предлагаемые ограничения позволяют в среднем увеличить количество устойчивых начальных условий на 14%, увеличить количество попаданий в устойчивые траектории на 61%. Также было проведено аналитическое сравнение порядков роста алгоритмической сложности классической и модифицированной модели. В результате расчетов было установлено, что обе модели имеют порядок роста  $O(n^4)$ , что было подтверждено численным экспериментом.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (МД.1787.2022.4).

<sup>2</sup> Пётр Игоревич Жуков, аспирант (Zhukov.petr86@yandex.ru).

<sup>3</sup> Андрей Вячеславович Фомин, к.т.н., доцент (verner444@yandex.ru).

<sup>4</sup> Антон Игоревич Глуценко, д.т.н., в.н.с. (aiglush@ipr.ru).

**Ключевые слова:** сеточная модель, нестационарная теплопроводность, адаптация, градиентный метод, алгоритмическая сложность, вычислительная устойчивость.

## 1. Введение

Глобальный тренд на цифровизацию промышленности [12, 16] привел к росту популярности неклассических подходов к управлению, таких как Advanced Process Control (APC) [14, 20]. В основе таких систем лежит идея построения надсистем оптимизации [9, 11, 17], связывающих локальные контура управления с некоторыми предиктивными моделями [14, 18], которые агрегируют информацию, обрабатывают её и выдают эффективные уставки обратно в упомянутые локальные контура.

Примером объектов, для которых особенно актуально применение подобных подходов, являются нагревательные печи, осуществляющие высокотемпературный нагрев. В контексте непрерывного производства чаще всего применяют проходные многозонные печи (рис. 1), где нагрев происходит в процессе движения заготовки от посада к выдаче. Особую популярность такие печи получили в металлургии и тяжелом машиностроении.

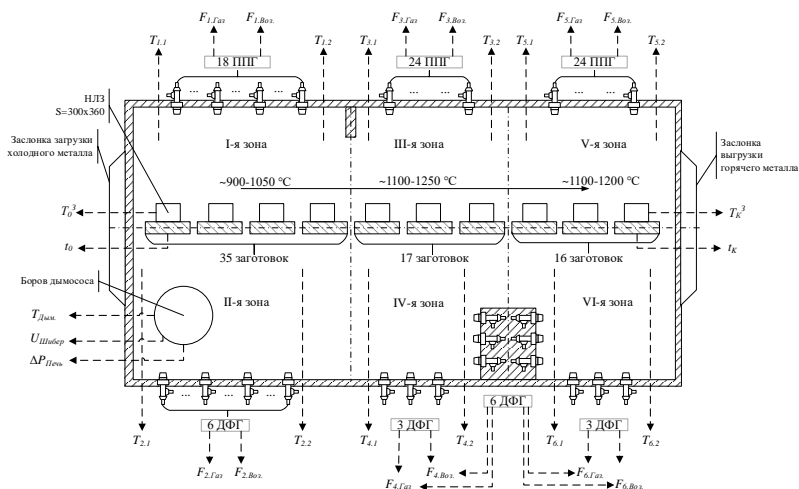


Рис. 1. Обобщенная схема многозонной проходной печи

Такого рода объекты крайне энергоемки [9, 13] из-за своего объема и температурных уставок, поэтому для них актуальна проблема повышения их энергоэффективности. Однако из-за общей нестационарности процесса нагрева без применения предиктивных моделей реализация управления, являющегося оптимальным как с точки зрения прогрева заготовок, так и с точки зрения расхода теплоносителя, является весьма нетривиальной задачей.

Одной из основных предиктивных моделей в контексте надсистемы оптимизации должна служить математическая модель нагрева заготовок, которая способна работать в режиме опережения реального времени и прогнозировать итоговую температуру заготовки еще до того, как процесс нагрева завершится. Используя подобную систему, возможно решать обратные или квазиобратные задачи и получать более оптимальные кривые нагрева (графики уставок по температуре для зон печи в различные моменты времени в соответствии с технологическими допусками).

Подобная предиктивная модель может быть построена при помощи методов машинного обучения [6, 21] или при решении некоторой краевой задачи [8, 19]. Последний подход в данном случае является «классическим», и чаще всего краевая задача ставится на базе уравнения нестационарной теплопроводности

$$(1) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(a \cdot \nabla T),$$

где  $a$  – это коэффициент температуропроводности,  $\nabla T$  – градиент температуры по пространству,  $T$  – температура заготовки.

Граничные условия определяются, исходя из контекста моделируемой области, но для высокотемпературного нагрева в проходных печах чаще всего применяют условия 3-го рода:

$$(2) \quad \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial l} = \kappa(U(t) - T) + \varepsilon \cdot \sigma([U(t)]^4 - [T]^4).$$

Здесь  $U(t)$  – это температура нагревающей среды;  $\kappa$  – коэффициент теплообмена;  $l$  – нормаль к поверхности нагреваемого вещества;  $\lambda$  – теплопроводность нагреваемого материала;  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана.

Как правило, построение модели на основании (1) и (2) происходит при помощи сеточных преобразований и получения модели конечных разностей (МКР) и, как для любой численной модели, для неё необходим анализ устойчивости получаемого решения. На сегодняшний день устойчивость базовых численных методов для разностных схем доказана и приводится, например, в работе [2]. Тем не менее, задача анализа разностных схем всё ещё является крайне актуальной из-за обилия различных приложений, в том числе и неклассических [1, 7, 10].

В работе [5] рассматривается одно из таких неклассических приложений метода конечных разностей, основанное на решении смежной вариационной задачи для устранения проблемы параметрической адаптации численного решения (1)–(2) к нагреваемому веществу. Основной идеей, предлагаемой в [5], является замена теплофизических параметров уравнения (1) на некоторые безразмерные величины и их дальнейшая оптимизация. Поскольку данное решение предполагает замены в структуре дифференциального уравнения, то становятся актуальными вопросы сохранения устойчивости численного решения предлагаемой смежной вариационной задачи.

Предполагается, что существуют такие ограничения на введенные настраиваемые безразмерные величины, которые позволяют без приведения этих величин к размерностям исходных физических параметров сохранить устойчивость модифицированной модели, гарантированную исходной МКР, и обеспечивают сходимость такого модифицированного решения к решению дифференциального уравнения. Основной целью данной работы является получение таких ограничений.

## **2. Анализ критериев устойчивости модифицированной модели**

Пусть имеется уравнение нестационарной теплопроводности в двумерном представлении:

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda(T)}{\rho(T) \cdot c(T)} \cdot \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right],$$

где  $\lambda(T)$  – функция теплопроводности от температуры;  $\rho(T)$  – функция плотности от температуры;  $c(T)$  – функция теплоемкости от температуры.

На основании (3) строится модель конечных разностей (МКР) в виде системы с покоординатным расщеплением:

$$(4) \quad \begin{cases} \rho(T) \cdot c(T) \cdot \left[ \frac{T_{x,y}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \lambda(T) \cdot \left[ \frac{T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right], \\ \rho(T) \cdot c(T) \cdot \left[ \frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \lambda(T) \cdot \left[ \frac{T_y^{n+1} - 2 \cdot T_y^{n+1} + T_{y-1}^{n+1}}{h_y^2} \right]. \end{cases}$$

где  $h_x$  – шаг сетки вдоль Ох;  $h_y$  – шаг сети вдоль Оу;  $\tau$  – шаг вдоль временной оси.

Решение МКР (4) сводится к решению двух СЛАУ, где  $x \in [1, N_x]$ ,  $y \in [1, N_y]$ , которое может быть обобщено в виде

$$(5) \quad \begin{cases} A_x \cdot T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} - B_x \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + C_x \cdot T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}} = F_x, \\ A_y \cdot T_{y+1}^{n+1} - B_y \cdot T_y^{n+1} + C_y \cdot T_{y-1}^{n+1} = F_y. \end{cases}$$

Уравнения в системе (5) называются трехточечными разностными уравнениями второго порядка. Известно, что их можно привести к двухточечному виду, уменьшив при этом порядок. Для этого введем два коэффициента  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$(6) \quad \begin{cases} T_x^{n+\frac{1}{2}} = \alpha_x \cdot T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_x, \\ T_y^{n+1} = \alpha_y \cdot T_{y+1}^{n+1} + \beta_y. \end{cases}$$

Теперь уменьшим индекс в (6) на единицу, получим решение относительно  $x - 1$  и  $y - 1$ , и подставим в соответствующие уравнения системы (5):

$$(7) \quad \begin{cases} A_x \cdot T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} - B_x \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + C_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + C_x \cdot \beta_{x-1} = F_x, \\ A_y \cdot T_{y+1}^{n+1} - B_y \cdot T_y^{n+1} + C_y \cdot \alpha_{y-1} T_y^{n+1} + C_y \cdot \beta_{y-1} = F_y. \end{cases}$$

Таким образом было уменьшено количество неизвестных, и теперь можно свернуть уравнения системы (7) до вида (8), который эквивалентен уравнениям системы (6):

$$(8) \quad \begin{cases} T_x^{n+\frac{1}{2}} = \frac{A_x}{B_x - C_x \cdot \alpha_{x-1}} T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{C_x \cdot \beta_{x-1} - F_x}{B_x - C_x \cdot \alpha_{x-1}}, \\ T_y^{n+1} = \frac{A_y}{B_y - C_y \cdot \alpha_{y-1}} T_{y+1}^{n+1} + \frac{C_y \cdot \beta_{y-1} - F_y}{B_y - C_y \cdot \alpha_{y-1}}. \end{cases}$$

Согласно системе (4), значение всех коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $F$  известно в каждый момент времени и может быть найдено по следующим соотношениям:

$$(9) \quad \begin{aligned} A_l &= C_l = \frac{\lambda(T)}{h_l^2}; B_l = \frac{2 \cdot \lambda(T)}{h_l^2} + \frac{\rho(T) \cdot c(T)}{\tau}; \\ F_l &= -\frac{\rho(T) \cdot c(T)}{\tau} \cdot T_l^n, \end{aligned}$$

где  $l = x$  для первого уравнения систем (4)–(8), а  $l = y$  для второго уравнения систем (4)–(8).

Соотнеся (8) и (6), можно определить формулы для расчета коэффициентов  $\alpha_l$  и  $\beta_l$  для всех  $l$ , кроме  $l = 1$  (в этом случае значения коэффициентов получаются из левых граничных условий). Пространственные сети в случае (4) являются локально одномерными и рассчитываются слева направо для получения прогоночных коэффициентов (прямая прогонка) и справа налево – для расчета температур в узлах (обратная прогонка). Система (8) используется для нахождения  $T_l$  для всех  $l$ , кроме  $l = N_x$  и  $l = N_y$  – для них температура находится из правого граничного условия задачи.

Описанный выше подход является численным методом, что подразумевает алгоритмическое решение, для которого требуется ряд условий устойчивости:

- 1) отсутствие ситуаций с делением на ноль;
- 2) отсутствие быстрого роста погрешностей округления при больших размерностях систем.

Согласно [2], для прямой прогонки достаточными условиями устойчивости являются

$$(10) \quad \begin{cases} B_l - C_l \cdot \alpha_{l-1} > 0, & l = \overline{1, [N_x | N_y] - 1}; \\ |\alpha_l| < 1, \end{cases}$$

Также в работе [2] приводится доказанная теорема о достаточном условии корректности и устойчивости на основании (10):



$$(11) |B_l| > |A_l| + |C_l|, \forall l = 2, [N_x | N_y] - 1, |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_l| < 1.$$

Разворачивая условие корректности, получим неравенство следующего вида:

$$(12) \left| \frac{2 \cdot \lambda(T)}{h_l^2} + \frac{\rho(T) \cdot c(T)}{\tau} \right| > \left| \frac{\lambda(T)}{h_l^2} \right| + \left| \frac{\lambda(T)}{h_l^2} \right|.$$

В нестационарной форме  $h_l$  и  $\tau$  являются положительными величинами, не равными нулю, так же как и параметры  $\lambda$ ,  $\rho$  и  $c$ . Таким образом, выполнение (12) гарантируется физическим обоснованием ряда величин и на практике выполняется всегда. Отсюда следует, что МКР с прямой и обратной прогонкой абсолютно устойчива и не требует дополнительных ограничений.

Теперь рассмотрим модель, предложенную в работе [5], как альтернативное решение проблемы параметрической адаптации МКР прямого решения к нагреваемому веществу. Модель предполагает модификацию конечно-разностной системы (4) до вида:

$$(13) \begin{cases} \overrightarrow{\omega_x^{(n)}} \cdot \left[ \frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \overrightarrow{\varphi_x^{(n)}} \cdot \left[ \frac{T_{x+1}^{n+1} - 2 \cdot T_x^{n+1} + T_{x-1}^{n+1}}{h_x^2} \right], \\ \overrightarrow{\omega_y^{(n)}} \cdot \left[ \frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \overrightarrow{\varphi_y^{(n)}} \cdot \left[ \frac{T_{y+1}^{n+1} - 2 \cdot T_y^{n+1} + T_{y-1}^{n+1}}{h_y^2} \right]. \end{cases}$$

При этом введенные настраиваемые вектора покрывают собой всю временную ось  $n \in [1, N]$ :

$$(14) \begin{aligned} \overrightarrow{\omega_l^{(n)}} &= [\omega_l^{(1)} \quad \omega_l^{(2)} \quad \omega_l^{(3)} \quad \dots \quad \omega_l^{(N)}], \\ \overrightarrow{\varphi_l^{(n)}} &= [\varphi_l^{(1)} \quad \varphi_l^{(2)} \quad \varphi_l^{(3)} \quad \dots \quad \varphi_l^{(N)}]. \end{aligned}$$

При классическом решении (4) параметры  $\lambda$ ,  $\rho$  и  $c$  восстанавливались путем аппроксимации дискретных значений соответствующих величин из справочной литературы. У данного подхода имеется ряд недостатков, которые более детально изложены в упомянутой ранее работе [5]. Данная замена (13) позволяет перейти от параметрической адаптации к нагреваемому веществу посредством внешних моделей аппроксимации к решению вариационной задачи:

$$(15) \begin{cases} \{u_1(n), u_1(n+1), \dots, u_1(N)\}, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_1(T_x^{(n)}, u_1(n)_i))^2 \rightarrow \min, \\ \{u_2(n), u_2(n+1), \dots, u_2(N)\}, \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_2(T_y^{(n)}, u_2(n)_i))^2 \rightarrow \min, \end{cases}$$

где  $u_1(n) = \{\varphi_x^{(n)}, \omega_x^{(n)}\}$ ,  $u_2(n) = \{\varphi_y^{(n)}, \omega_y^{(n)}\}$ ;  $y_i$  – это некоторая эталонная температура уже нагретого вещества, например, измеренная пирометром после выгрузки заготовки из печи;  $V$  – количество наблюдений в выборке вариаций.

Суть подхода заключается в решении смежной задачи, когда расчетная температура находится методом прямого решения на основе систем (4)–(8), а затем выполняется коррекция параметров путем решения обратной задачи (15) методом градиентного спуска.

Основная проблема предложенного подхода заключается в том, что обратная задача накладывает ограничение на прямую задачу. В частности, это касается ограничений, которые гарантируют устойчивость предложенной процедуры. Рассмотрим эту проблему детальнее.

Оптимизационная задача (15) – это смежная вариационная задача, при которой, через МКР для прямого решения получают значения функций  $g_1(\bullet)$  и  $g_2(\bullet)$ , а при решении обратной задачи – коррекции  $\varphi$  и  $\omega$ .

В локально-одномерном виде (15) решается псевдопараллельно, т.е. происходит коррекция сначала параметра  $\varphi$ , затем  $\omega$  с учетом предыдущего значения  $\varphi$ . В таком случае форма плоскости ошибки будет иметь  $N^2$ -мерный вид, при этом нельзя однозначно сказать, является ли решаемая задача выпуклой или нет, так как для этого нет аналитических уравнений, только алгоритмы численного решения. Следовательно, применение методов градиентного спуска приведет к нахождению субоптимального значения [15], которое будет находиться в допустимом диапазоне оценки некоторой метрики, например, абсолютной средней ошибки.

Другими словами, задача (15) при обратном решении является задачей машинного обучения, для которой характерна в том числе проблема локальных минимумов, и чтобы избежать её,

предполагалось инициализировать параметры  $\varphi$  и  $\omega$  в области вещественных чисел с отрицательной частью  $\mathbb{R}_1 \in (-D_{\max} + t_k; +D_{\max} - t_k)$ , где  $D_{\max}$  – это программные ограничения хранения вещественных чисел,  $t_k$  – параметр коррекции окна инициализации.

При условии  $(\varphi, \omega) \in \mathbb{R}_1$ , очевидно, нарушается устойчивость, так как в отрицательной полуплоскости множества не выполняется неравенство (12). Для того чтобы проиллюстрировать это, перепишем его с учетом сделанных замен:

$$(16) \quad \left| \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{h_l^2} + \frac{\omega_l^{(n)}}{\tau} \right| > \left| \frac{\varphi_l^{(n)}}{h_l^2} \right| + \left| \frac{\varphi_l^{(n)}}{h_l^2} \right|.$$

Условие положительности второго слагаемого левой части неравенства не выделялось как необходимое при рассмотрении (12), так как оно автоматически выполняется по физическим соображениям (плотность, временной шаг или теплоемкость не могут быть отрицательными). Для того чтобы неравенство (16) выполнялось, необходимо наложить ограничение на параметр  $\omega$ :

$$(17) \quad \begin{cases} \omega_l^{(n)} \neq 0, \\ \frac{\omega_l^{(n)}}{\tau} > 0. \end{cases}$$

Поскольку шаг по времени ( $\tau$ ) не может быть отрицательным по определению, то условия (17) выполняются всегда при  $\omega_l^{(n)} > 0$ .

Очевидно, что для того чтобы устойчивость модифицированной МКР гарантировалась устойчивостью классической МКР, необходимо выполнение (16), однако сделанные замены в (13) с условием (17) могут нарушить процесс сходимости конечно-разностного решения к решению дифференциального уравнения. Опираясь на данное предположение, была выдвинута следующая гипотеза.

**Гипотеза №1.** Существуют такие ограничения для  $\tau$ ,  $h_l$ ,  $\varphi_l^{(n)}$ , включая смещения  $\omega_l^{(n)}$ ,  $\varphi_l^{(n)}$  относительно друг друга, при которых устойчивость модифицированной МКР прямого решения гарантируется доказанной устойчивостью классической МКР и эквивалентна ей.

### 3. Анализ сходимости модифицированной МКР прямого решения

Опираясь на работы [3, 4], можно предположить, что достаточным условием сходимости прямого конечно-разностного решения к решению дифференциального уравнения для задачи нестационарной теплопроводности является соблюдение следующего неравенства:

$$(18) \quad \tau < \frac{\rho \cdot c \cdot h_l^2}{2 \cdot \lambda}.$$

Произведем эквивалентные (13) замены  $\varphi$  и  $\omega$  в (18) и получим условие вида

$$(19) \quad \tau < \frac{\omega_l^{(n)} \cdot h_l^2}{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}.$$

Теперь перенесем всё в левую часть и сравним с нулем:

$$(20) \quad \frac{\tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} - \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2}{2 \cdot \varphi_l^{(n)}} < 0.$$

Рассмотрим следующие ситуации, при которых выполняется данное условие:

$$(21) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \varphi_l^{(n)} < 0, \\ \tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} - \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2 > 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \varphi_l^{(n)} > 0, \\ \tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} - \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2 < 0. \end{array} \right. \end{cases}$$

Для условий  $2 \cdot \varphi_l^{(n)} < 0$  и  $2 \cdot \varphi_l^{(n)} > 0$  вторые неравенства соответствующих систем истины при  $|\tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)}| < |\omega_l^{(n)} \cdot h_l^2|$ . Но для  $2 \cdot \varphi_l^{(n)} < 0$  требуется  $\omega_l^{(n)} < 0$ , что противоречит (17).

Пусть  $2 \cdot \varphi_l^{(n)} = \omega_l^{(n)}$ , тогда неравенство  $\tau \cdot 2 \cdot \varphi_l^{(n)} < \omega_l^{(n)} \cdot h_l^2$  будет зависеть только от  $\tau$  и  $h_l^2$ , которые всегда положительны, поэтому знак модуля можно опустить. Опираясь на вышеизложенное, получим условие следующего вида:

$$(22) \quad |2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot \tau| < |\omega_l^{(n)} \cdot h_l^2| \Big|_{2 \cdot \varphi_l^{(n)} = \omega_l^{(n)}} \Rightarrow \frac{t_{\max}}{N} < \frac{X^2}{L^2} \Rightarrow \frac{L^2 \cdot t_{\max} - N \cdot X^2}{N \cdot L^2} < 0.$$

Здесь  $L = [N_x|N_y]$  – количество шагов по пространству в зависимости от приложения к модели ( $Ox$  или  $Oy$  соответственно);  $N$  – количество шагов по времени;  $X$  – линейный размер по пространству;  $t_{max}$  – общее модельное время.

Сравнивая (22) с нулем, получаем комбинированное решение наподобии (21), при этом знаменатель  $N \cdot L^2 > 0$  всегда, так как количество узлов сетей всегда положительное число. Исходя из этого, единственным условием выполнения неравенства (22) служит  $L^2 \cdot t_{max} - N \cdot X^2 < 0$ . Модель на основе предлагаемого решения должна быть постоянна по своей структуре, а это значит, что количества  $L$  и  $N$  не могут изменяться в процессе её работы, тогда пусть  $t_{max} = X^2$  и получаем, что обязательным условием выполнения неравенства становится (22) становится  $L^2 < N$ . В действительности чаще всего  $t_{max} \gg X^2$ , что приводит к тому, что  $N \gg L^2$ , величина кратности разницы между  $N$  и  $L^2$  при этом будет зависеть от  $t_{max}$ ,  $X^2$ ,  $\varphi_l^{(n)}$ ,  $\omega_l^{(n)}$ . Важно упомянуть, что  $t_{max}$  и  $X$  – это внешние по отношению к модели параметры, они являются входными данными и определяют часть граничных условий задачи, поэтому рассматривать их как настраиваемые нельзя. Таким образом, условие вида  $N \gg L^2$  может не соблюдаться при определенных значениях  $t_{max}$ ,  $X^2$ . При этом известно, что временные затраты на численное решение будут расти с ростом  $N$  и  $L$ , что может привести к невозможности получения результата в режиме реального времени. Опираясь на данный факт, была выдвинута следующая гипотеза.

**Гипотеза №2.** Существует такое смещение  $\omega_l^{(n)}$  относительно  $\varphi_l^{(n)}$ , при котором условие сходимости (22) выполняется при нестрогом неравенстве вида  $N \geq L^2$  вместо строго  $N > L^2$  и не зависит от  $t_{max}$  и  $X^2$ .

Рассмотрим (22) с учетом  $2 \cdot \varphi_l^{(n)} \neq \omega_l^{(n)}$ , тогда неравенство примет следующий вид:

$$(23) \quad \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot L^2 \cdot t_{max} - \omega_l^{(n)} \cdot N \cdot X^2}{N \cdot L^2} < 0.$$

Аналогичным образом, опираясь на решение (21) и тот факт, что  $(N, L) \in \mathbb{N}$ , можем заключить, что знаменатель никогда не будет меньше нуля, тогда условие (23) будет истинно только при соблюдении условия (24):

$$(24) \quad 2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot L^2 \cdot t_{\max} - \omega_l^{(n)} \cdot N \cdot X^2 < 0.$$

Выразим (24) относительно  $N$ , чтобы получить неравенство относительно шагов вдоль временной оси ( $\omega_l^{(n)} > 0$ ):

$$(25) \quad \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)} \cdot L^2 \cdot t_{\max}}{\omega_l^{(n)} \cdot X^2} < N \Rightarrow \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}} \cdot \frac{t_{\max}}{X^2} \cdot L^2 < N$$

Прологарифмируем правую и левую часть условия (25) по основанию 10:

$$(26) \quad \lg \left( \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}} \cdot \frac{t_{\max}}{X^2} \cdot L^2 \right) < \lg(N).$$

Представим правую часть (26) в виде сумм логарифмов:

$$(27) \quad \lg \left( \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}} \right) + \lg \left( \frac{t_{\max}}{X^2} \right) + \lg(L^2) < \lg(N).$$

Предположим, что  $\lg(L^2) = \lg(N)$ , и выразим (27) относительно первого слагаемого правой части:

$$(28) \quad \lg \left( \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}} \right) < -\lg \left( \frac{t_{\max}}{X^2} \right).$$

Используя неравенство (28), имеется возможность определить начальные условия инициализации параметров  $\varphi_l^{(n)}$  и  $\omega_l^{(n)}$ , а также определить их смещения относительно друг друга, при котором (22) выполняется с нестрогим условием на количество шагов по временной и пространственной сети  $N \geq L^2$ .

Вместо самих значений  $t_{\max}$  и  $X$  получим их оценки, для этого пусть  $t_{\max} \in (t_1, t_2)$ , где  $t_1$  и  $t_2$  — это некоторый известный диапазон, в который заключены значения  $t_{\max}$  всей условной выборки входных данных, такой же диапазон имеется и для  $X^2 \in (X_1^2, X_2^2)$ . Тогда условие (28) можно переписать в следующем виде:

$$(29) \quad \lg \left( \frac{2 \cdot \varphi_l^{(n)}}{\omega_l^{(n)}} \right) < -\lg \left( \frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)} \right).$$

Воспользуемся свойствами логарифма и перепишем (29) в виде:

$$(30) \quad \lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) - \lg(\omega_l^{(n)}) < -\lg \left( \frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)} \right).$$

Поскольку левая часть логарифмического неравенства (30) может быть вычислена в момент инициализации модели, из (30) можно получить порядок величины смещения областей значений  $\omega_l^{(n)}$  относительно  $\varphi_l^{(n)}$ :

$$(31) \quad \begin{aligned} -\lg(\omega_l^{(n)}) &< -\lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) - \lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) \Big|_{\times(-1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lg(\omega_l^{(n)}) &> \lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) + \lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}). \end{aligned}$$

Можно предположить, что для выполнения (31) параметр  $\omega_l^{(n)}$  должен принадлежать некоторой области (32), чтобы гарантировать выполнение условия (22) при  $N \geq L^2$ :

$$(32) \quad \omega_l^{(n)} \in \left[ 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) + 1}; (+D_{\max} - t_{\kappa}) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) + 1} \right).$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что первичная инициализация параметров должна быть выполнена в соответствии с системой

$$(33) \quad \begin{cases} \varphi_l^{(n)} \in (0; +D_{\max} - t_{\kappa}), \\ \omega_l^{(n)} \in \left[ 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) + 1}; (+D_{\max} - t_{\kappa}) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) + 1} \right]. \end{cases}$$

Таким образом предполагается, что сходимость модифицированной МКР прямого решения к решению дифференциального уравнения гарантируется доказанной сходимостью классической МКР и эквивалентна ей при соблюдении следующих условий:

$$(34) \quad \begin{aligned} \varphi_l^{(n)} &> 0, \quad \omega_l^{(n)} > 0, \quad N \geq L^2, \\ \omega_l^{(n)} &\in \left[ 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) + 1}; (+D_{\max} - t_{\kappa}) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{(t_2 - t_1)}{(X_2^2 - X_1^2)}\right) + 1} \right]. \end{aligned}$$

Порядок роста временных затрат на получение численного решения модифицированной или классической МКР зависит от количества шагов по пространственным и временной сетям. На основании условий (34) было сделано предположение, что

классическая МКР и модифицированная с условиями (34) имеют одинаковый порядок роста временных затрат. Проверим его.

#### 4. Анализ порядка роста временных затрат

Выдвигается предположение, согласно которому порядок роста временных затрат модифицированной МКР равен порядку роста классической МКР, а сами временные затраты процесса «обучения» МКР зависят только от размеров исходных данных для обучения.

Для того чтобы доказать данное предположение, проведем оценку алгоритмической сложности и определим порядок роста временных затрат для классической МКР. При использовании неявной разностной схемы с прямой и обратной прогонкой обобщенный алгоритм для одного запуска модели будет иметь следующий вид (рис. 2).

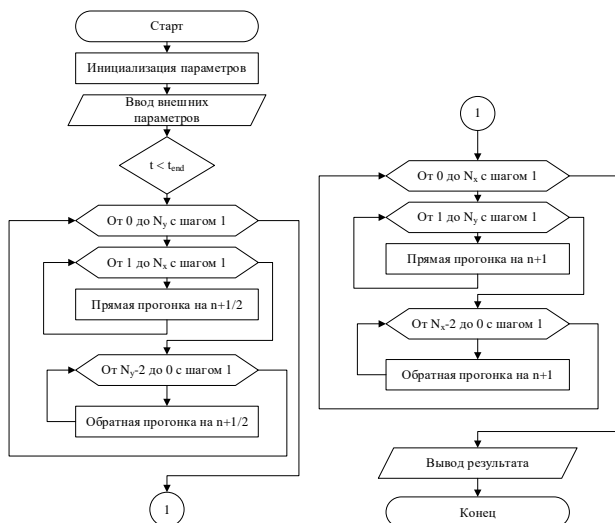


Рис. 2. Обобщенный алгоритм единичного запуска классической МКР

Согласно этому алгоритму, можно представить функцию временной сложности  $f(\bullet)$  в следующем виде:



$$(35) \quad f(N_x, N_y, N) = \sum_{t=0}^N \left( \sum_{j=0}^{N_y} \left[ \sum_{i=1}^{N_x} 1 + \sum_{i=N_x-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^{N_x} \left[ \sum_{j=1}^{N_y} 1 + \sum_{j=N_y-2}^0 1 \right] \right)$$

Упростим (35) до следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^N \left( \sum_{j=0}^{N_y} \left[ \sum_{i=1}^{N_x} 1 + \sum_{i=N_x-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^{N_x} \left[ \sum_{j=1}^{N_y} 1 + \sum_{j=N_y-2}^0 1 \right] \right) \Rightarrow \\ (36) \quad & \Rightarrow \sum_{t=0}^N \left( \sum_{j=0}^{N_y} [2 \cdot N_x - 1] + \sum_{i=0}^{N_x} [2 \cdot N_y - 1] \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \sum_{t=0}^N \left( [2 \cdot N_x N_y + 2 \cdot N_x - N_y - 1] + [2 \cdot N_y N_x + 2 \cdot N_y - N_x - 1] \right). \end{aligned}$$

Раскрыв последнюю сумму в (36), получим вид функции  $f(\bullet)$ , приближенно оценивающий временную сложность конечно-разностной модели:

$$(37) \quad f(N_x, N_y, N) = (4 \cdot N_x N_y + N_x + N_y - 2)(N + 1).$$

Пусть имеет место равномерная сеть, где  $N_x = N_y = n$ , тогда (37) примет вид полинома 2-й степени:

$$\begin{aligned} (38) \quad & f_1(n, N) = (4 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 2)(N + 1); \\ & f_1(n, N) \in O(n^2, N). \end{aligned}$$

Функция (38) относится к асимптотическому классу роста  $O(n^2, N)$ . Теперь рассмотрим алгоритм конечно-разностной модели, в структуре единичного запуска которой находится алгоритм коррекции (рис. 3).

Рассмотрим функцию приближенной временной сложности:

$$(39) \quad f_2(N_x, N_y, N) = \sum_{t=0}^{t_{end}} \left( \sum_{j=0}^{N_y} \left[ \sum_{i=1}^{N_x} 1 + \sum_{i=N_x-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^{N_x} \left[ \sum_{j=1}^{N_y} 1 + \sum_{j=N_y-2}^0 1 \right] + \sum_{i=N}^0 2 \right).$$

Часть функции (39) упрощается в (36), поэтому сразу приведем её к конечному виду с раскрытием последней суммы, предполагая, что  $N_x = N_y = n$ :

$$(40) \quad f_2(N_x, N_y, N) = (4 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 2 \cdot N)(N + 1).$$

Важно заметить, что в действительности функции сложности (38) и (40) будут иметь отличные от представленных коэффициенты, но не порядок сложности, так как все процедуры алгоритма были упрощены до единичных.

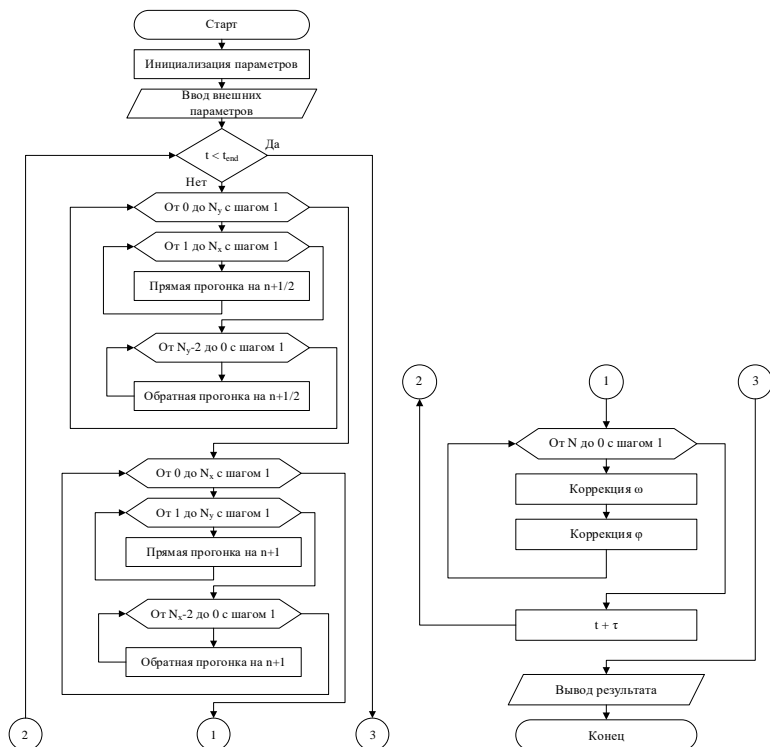


Рис. 3. Обобщенный алгоритм единичного запуска модифицированной МКР (с коррекцией параметров)

Пусть имеется общее требование для выбора количества шагов по пространственным и временным сетям:

$$(41) \quad N, N_x, N_y \in \mathbb{N}.$$

Для устойчивой модели по условию (22) минимальным требованием на  $N$  является:

$$(42) \quad N = L^2 \Rightarrow_{L=N_x=N_y=n} N = n^2.$$

Подставим (42) в (38) и в (40) и раскроем скобки:

$$(43) \begin{cases} f_1(n) = 4 \cdot n^4 + 2 \cdot n^3 + 2 \cdot n^2 + 2 \cdot n - 2, \\ f_2(n) = 6 \cdot n^4 + 2 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 2 \cdot n. \end{cases}$$

Как видно из анализа функций  $f_1(n)$  и  $f_2(n)$ , они принадлежат к одному классу роста  $O(n^4)$ . Таким образом, предлагаемая модификация алгоритма не приводит к росту алгоритмической сложности модели.

Таким образом, можно сделать вывод, что существенное влияние на алгоритмическую сложность будет оказывать только количество этих единичных включений алгоритма в процессе «обучения» МКР (рис. 4).

Таким образом, функция алгоритмической сложности будет иметь вид:

$$(44) f_3(V) = \sum_{i=1}^V i \Rightarrow \frac{V(V+1)}{2} \approx \frac{1}{2} V^2; f_3(V) \in \Theta(V^2).$$

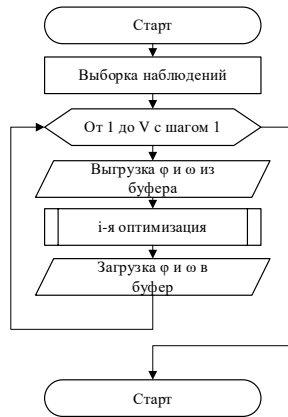


Рис. 4. Обобщенный алгоритм «обучения» МКР

На основании (43), можно сделать вывод, что предлагаемый подход не увеличивает порядок роста алгоритмической сложности самого единичного включения модели. Рост временных затрат обусловлен необходимостью множественного включения модели при решении оптимизационной задачи. Согласно (44),

временные затраты процесса оптимизации из-за множественного включения являются классом роста  $n^2$ .

## 5. Численный эксперимент

Для того чтобы подтвердить сделанные выше предположения и гипотезы, был проведен численный эксперимент. Для этого применена написанная на С# модель МКР в двух вариациях: классическая с параметрической адаптацией при помощи регрессионных уравнений и модифицированная с настройкой введенных параметров  $\varphi$  и  $\omega$ . Для начала тестировалась модифицированная МКР с настройкой  $\varphi$  и  $\omega$  со сделанными выше предположениями, касающимися ограничений устойчивости.

Моделировался нагрев заготовок в шестизонной проходной печи нагрева. В качестве входных данных использовались сведения, полученные с действующего объекта одного из металлургических комбинатов Белгородской области. Входной массив разбивался на обучающее и тестовое подмножество в соотношении 85 к 15 при общем объеме 6097 записей, представляющих пространственный набор данных.

Для проведения тестов на устойчивость модифицированная модель была представлена в трех вариациях: 1) М1 – модель без ограничений и смещений; 2) М2 – модель только с ограничением  $N \geq L^2$ ; 3) М3 – модель со смещениями и со всеми ограничениями.

Предполагалось запустить три модели с фиксированным шагом по пространству ( $N_x = N_y = 25$ ) и различным шагом по времени ( $N_{M1} = 50$ ,  $N_{M2} = N_{M3} = 625$ ), при этом в случае модели М3 инициализировать параметры  $\omega$  со смещением.

Всего было проведено 60 запусков, в процессе тестирования были выделены две отметки: 200 и 400 эпох обучения. Результаты пусков модели приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты тестов на устойчивость

	Общее кол-во запусков	Успешно прошли 200 эпох обучения	Успешно прошли 400 эпох обучения	Неустойчивые запуски
М1	60	30	6	30
М2	60	45	34	15
М3	60	47	38	13

Как можно заметить, в результате введения ограничений процент запусков моделей, завершивших полный цикл в 400 эпох обучения, увеличивается значительно по сравнению с моделью без каких-либо ограничений (рис.5). При этом общее количество устойчивых пусков возросло, но по-прежнему существуют такие пуски моделей, при которых возникает аварийное завершение работы программы обучения.

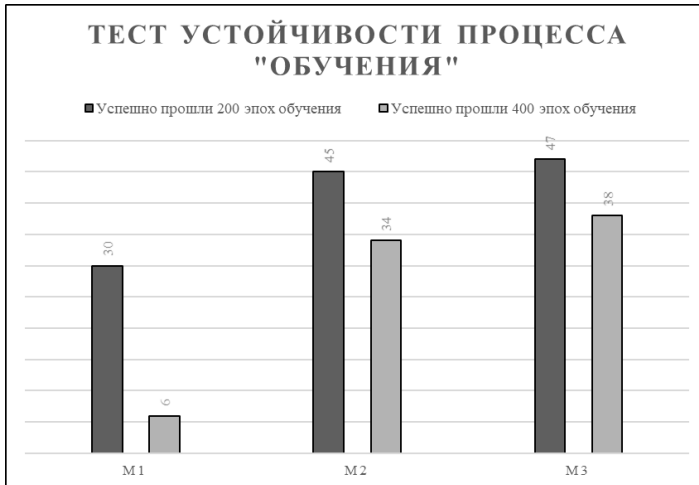


Рис. 5. Сравнительная гистограмма теста на устойчивость

Предполагается, что помимо сделанных ранее предположений, существуют также дополнительные ограничения, которые не были учтены при переходе к смежной вариационной задаче.

Таким образом, следование ограничениям, предлагаемым в данной работе, повышает процент устойчивых запусков, но не решает проблему устойчивости целиком. Согласно таблице 2, количество устойчивых траекторий, для которых наблюдаются «удачные» начальные условия и стабильный процесс обучения, увеличилось, в среднем, на 61%, при этом количество устойчивых («удачных») начальных условий при сделанных ограничениях, увеличилось, в среднем, на 14%.

Таблица 2. Результаты тестов на устойчивость

	Процент успешно устойчивых прогонов от устойчивых запусков	Общий процент устойчивых запусков
M1	20 %	50 %
M2	76 %	57 %
M3	81 %	64 %

Порядка 36% остающихся неустойчивыми запусков возникают при нарушении условия неотрицательности  $\varphi$  ввиду отсутствия строгих ограничений на сами функции коррекции параметра. Требуется такая модификация используемого оптимизатора (стохастического градиентного спуска), чтобы параметр  $\varphi$  мог асимптотически приближаться к нулю, но не пересекать его.

Для проверки предположения о том, что модифицированная МКР имеет такой же порядок алгоритмической сложности, как и классическая МКР, было решено провести эксперимент с двумя моделями: 1) МК – классическая МКР без решения обратной задачи; 2) ММ – модифицированная МКР с решением обратной задачи и коррекцией  $\varphi$  и  $\omega$ . Тестировалось время в секундах на единственный запуск модели (1 набор входных данных – 1 выход) при разных значениях  $N$ ,  $N_x$  и  $N_y$  (таблица 3).

Таблица 3. Результаты тестов временных затрат

	$N = 100,$ $L = 10$	$N = 625,$ $L = 25$	$N = 10000,$ $L = 100$
МК	0,05 с	2,1545 с	92 с
ММ	0,08 с	3,345 с	134 с
Соотношение	62,5	64,40956652	68,65671642

Как можно заметить, модифицированная МКР имеет большие временные затраты, чем модель классическая, однако соотношение показывает, что время расчета растет пропорционально. Наблюдаемая погрешность является следствием полуручного анализа времени без привлечения специализированных программных средств оценки процессорного времени.

Таким образом, проведенный эксперимент подтверждает сделанное ранее предположение о равенстве классов роста алгоритмической сложности между модифицированной МКР и классической.

## **6. Заключение**

В результате проведенного численного эксперимента было установлено, что сделанные ранее предположения об ограничениях (34) позволяют повысить алгоритмическую устойчивость модифицированной численной модели, представленной в работе [5]. При этом сделанные в работе предположения об эквивалентности устойчивости классической МКР нестационарной теплопроводности и модифицированной МКР не подтвердились в полной мере.

Данный факт может свидетельствовать о необходимости введения дополнительных ограничений на процесс решения смежной вариационной задачи или введения дополнительных переменных.

Сделанные предположения относительно алгоритмической сложности подтвердились. Модель только прямого решения обладает тем же порядком роста временных затрат, что и модель со смежным решением обратной задачи. Различие во времени (см. таблицу 3) объясняется разницей коэффициентов уравнений алгоритмической сложности.

В ходе дальнейших исследований предполагается более глубоко изучить результаты экспериментов на устойчивость и рассмотреть возможность введения в модель «виртуального» шага по времени ( $\tau_v$ ) для обеспечения выполнения условия (18). Также в качестве альтернативы предполагается введение ограничений на процесс коррекции параметров с целью обеспечения соблюдения условий (34).

### Литература

1. БУЛАНОВ С.Г. *Анализ устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений на основе преобразования разностных схем* // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2019. – Т. 20, №9. – С. 542–549.
2. ВЕРЖБИЦКИЙ В.М. *Основы численных методов*. – Москва-Берлин: Директ-Медиа, 2021. – 849 с.
3. ДЕГТЯРЁВ С.Л. *Об устойчивости разностных схем с переменными весами для одномерного уравнения теплопроводности* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34, №8–9. – С. 1316–1322.
4. ДЕГТЯРЕВ С.Л. *Устойчивость локально неявных разностных схем для двумерного нестационарного уравнения теплопроводности* // Препринты ИПМ им. МВ Келдыша. – 1994. – №76. – С. 1–24.
5. ЖУКОВ П.И., ФОМИН А.В., ГЛУЩЕНКО А.И. *Неявная адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 100. – С. 78–106.
6. ЖУКОВ П.И., ГЛУЩЕНКО А.И., ФОМИН А.В. *Модель для прогнозирования температуры заготовки по ретроспекции ее нагрева на основе бустинга структуры* // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Информационные технологии. – 2020. – Т. 18, №4. – С. 11–27.
7. МАТУС П.П. *Критерий устойчивости разностных схем для нелинейных дифференциальных задач* // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57, №6. – С. 821–829.
8. ОЖЕРЕЛКОВА Л.М., САВИН Е.С. *Температурная зависимость нестационарной теплопроводности твердых тел* // Russian Technological Journal. – 2019. – Т. 7, №2. – С. 49–60.
9. ПАРСУНКИН Б.Н., АНДРЕЕВ С.М., МУХИНА Е.Ю. *Экстремально-оптимизирующее автоматизированное управление нагревом непрерывнолитых заготовок в печах проходного типа* // Вестник Череповецкого государственного университета. – 2021. – №5 (104). – С. 22–34.



10. ФРОЛОВ А.Ю., ДРУЖИНИНА О.В. *Устойчивость разностных схем численного решения обобщенной системы уравнений Максвелла в задачах моделирования Z-пинчей* // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2020. – Т. 25, №3. – С. 5–13.
11. BARBASOVA T.A., FILIMONOVA A.A., ZAKHAROV A.V. *Energy-saving oriented approach based on model predictive control system* // IEEE Int. Russian Automation Conference. – IEEE, 2019. – P. 243-252.
12. BELYAEV A.M., IVANOV I.N., BELYAEV E.D. *Digital Technologies in Russian Metallurgy* // Institute of Scientific Communications Conference. – Springer, Cham, 2021. – P. 1817–1824.
13. FENG Y., WU M., CHEN L., CHEN X., CAO W., DU S., PEDRYCZ W. *Hybrid intelligent control based on condition identification for combustion process in heating furnace of compact strip production* // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2021. – Vol.69, No. 3. – P. 2790–2800
14. HADJISKI M., DELIISKI N. *Advanced Process Control of Distributed Parameter Plants by Integration First Principle Modeling and Case-Based Reasoning: Part 1: Framework of DPP Control with Initial Uncertainty* // Int. Conf. Automatics and Informatics – 2020 (ICAI–2020). – IEEE, 2020. – P. 1–6.
15. HARVEY N. J., LIAW C., PLAN Y., RANDHAWA S. *Tight analyses for non-smooth stochastic gradient descent* // Conference on Learning Theory. – PMLR, 2019. – P. 1579–1613.
16. SCHULTE M. *Steel Production Efficiency Improvements by Digitalization* // REWAS 2022: Developing Tomorrow's Technical Cycles. – 2022. – Vol. 1. – P. 487–488.
17. SHCHERBAKOV M.V., GLOTOV A.V., CHEREMISINOV S.V. *Proactive and predictive maintenance of cyber-physical systems* // Cyber-Physical Systems: Advances in Design & Modelling. – Springer, Cham, 2020. – P. 263-278.
18. VASILYEVA N., FEDOROVA E., KOLESNIKOV A. *Big data as a tool for building a predictive model of mill roll wear* // Symmetry. – 2021. – Vol. 13, No. 5. – P. 859–870.

19. YU B., HU P., SAPUTRA A. A., GU Y. *The scaled boundary finite element method based on the hybrid quadtree mesh for solving transient heat conduction problems* // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol. 89. – P. 541–571.
20. ZANOLI S. M., BARBONI L., COCCHIONI F., PEPE C. *Advanced process control aimed at energy efficiency improvement in process industries.* // IEEE Int. Conf. on Industrial Technology (ICIT–2018). – IEEE, 2018. – P. 57–62.
21. ZANOLI S. M., PEPE C., MOSCOLONI E., ASTOLFI G. *Data Analysis and Modelling of Billets Features in Steel Industry* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 19. – P. 7333.

## ALGORITHMIC STABILITY AND COMPLEXITY OF IMPLICIT ADAPTATION OF NONSTATIONARY THERMAL CONDUCTIVITY MESH MODEL TO HEATED SUBSTANCE

**Petr Zhukov**, STI NUST “MISIS”, Stary Oskol, postgraduate student (Zhukov.petr86@yandex.ru).

**Andrey Fomin**, STI NUST “MISIS”, Stary Oskol, Candidate of Technical Sciences, docent (verner444@yandex.ru)

**Anton Glushchenko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Sciences, docent (aiglush@ipu.ru).

*Abstract: This paper deals with the process of adaptation of a numerical model of nonstationary thermal conductivity implemented with the help of finite difference methods. The algorithmic stability has already been proved for the classical representation of these models in most applications and problems, but in this case we consider a problem related to the parametric adaptation of the equation of nonstationary heat conduction to the heated substance implemented by solving of the related variational problem. The basis of this approach implies replacement of thermophysical parameters of the equation in question by freely adjustable parameters and their adaptation ("model training") by a stochastic gradient method. Optimization of algorithmic equations that do not have an analytical form is associated with unstable initial conditions and "training" trajectories. To avoid falling into these regions we need to impose restrictions on the adjustable parameters. In this paper, such constraints are derived on the basis of proven stability conditions for the classical finite-difference model of non-stationary thermal conductivity. As a result of the numerical experiments, it is shown that the proposed constraints allow one to increase, on average, the number of stable initial conditions by 13%, as well as the number of experiments when stable trajectories are achieved - by 61%. In addition to this result, an analytical*

*comparison of the growth orders of algorithmic complexity of the classical model and the modified one is also made. As a result of the calculations, it is found that both models have a growth order of  $O(n^4)$ , which is confirmed by numerical experiments.*

Keywords: mesh model, nonstationary thermal conductivity, adaptation, gradient descent method, algorithmic complexity, computational stability.

УДК 519.63

ББК 22.193

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.3

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

*Поступила в редакцию 01.12.2022.  
Опубликована 31.01.2023.*

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ИНСТИТУТОВ РЫНКОВ ЖИЛЬЯ НА ОСНОВЕ СТЕПЕННЫХ, ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИЗДЕРЖЕК**

**Гераськин М. И.<sup>1</sup>, Иванова М. В.<sup>2</sup>**

*(Самарский национальный исследовательский  
университет имени академика С. П. Королёва, Самара)*

*Представлена система условий оптимальности агентов рынка жилья (риелтора, банка и страховщика) при степенных, экспоненциальных и логарифмических функциях издержек, соответствующих различным типам эффекта масштаба. Представлены результаты численных экспериментов, демонстрирующие характер взаимозависимостей цен на этом рынке при различных видах функций. В отличие от исследования системы «риелтор – банк – страховщик» на основе линейных функций издержек данная работа представляет следующие выводы: во-первых, в случае, когда все агенты имеют вогнутые функции издержек, цена недвижимости, процентная ставка по ипотечному кредиту и тариф страхования ниже, чем в случае, когда агенты имеют выпуклые функции издержек; во-вторых, рост ставки внутрисистемной комиссии приводит к росту цены того агента, который платит комиссию, и снижению цены того агента, который ее получает; в-третьих, увеличение ставки комиссии ведет к более резкому снижению цены агента в том случае, когда он имеет выпуклую функцию издержек, а контрагент – вогнутую, чем в противном случае. При сравнении эффективности применения разных типов функций издержек было выявлено, что логарифмические и экспоненциальные функции дают большую точность, чем степенные.*

Ключевые слова: оптимальная стратегия, риелтор, банк, страховщик.

### **1. Введение**

Исследуется роль системы «риелтор – банк – страховщик» в процессе ценообразования на рынке жилья. В случае степенных, экспоненциальных и логарифмических функций издержек этих агентов рынка цены на жилье могут изменяться более или менее резко в результате повышения процентных ставок банковских кредитов и страховых тарифов. В свою очередь, изме-

---

<sup>1</sup> Михаил Иванович Гераськин, д.э.н., профессор (innovation@ssau.ru).

<sup>2</sup> Мария Владимировна Иванова, студент 2 курса магистратуры (ivanova.maria.ami@gmail.com).

нение цен жилья также приводит к изменениям цен банковских и страховых услуг [13, 16, 17].

В системе агенты рынка жилья взаимодействуют между собой. При приобретении жилья у покупателя есть два варианта: использование собственных наличных сбережений или средств ипотечного кредита. Во втором случае банк может предложить кредит по сниженной ставке, но необходимым условием для этого будет являться страхование покупателем объекта залога кредита. Поэтому рассматриваемые товар (недвижимость) и услуги (ипотечный кредит и страхование) могут являться комплексными, требующими их одновременного совместного использования. Более того, эти блага усиливают полезность от их одновременного потребления [14].

В децентрализованной системе агенты принимают решения независимо друг от друга, стремясь максимизировать собственную прибыль индивидуально [18]. В централизованной системе для выполнения условия индивидуальной рациональности, т.е. когда агентам выгодно участие в рассматриваемой системе, необходимо перераспределение прибыли или выручки.

При моделировании оптимальных стратегий фирм исследователи зачастую базируются на линейных функциях издержек [2, 3, 7], что, как правило, снижает адекватность модели, поскольку реальные процессы не линейны; применение степенных функций [1] делает модели более точными. В нашей работе ставится цель расширить диапазон видов функций издержек, обогащая инструментарий исследования и позволив приблизить результаты моделирования к реальной экономике.

## 2. Методы

Рассмотрим функции прибыли агентов децентрализованной системы «риелтор – банк – страховщик» в общем виде [15]:

$$(1) \quad \pi_k = A_k Q_k^{B_k+1} [(1 - \alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}] - C_k(Q_k), \quad k = 1, 2, 3, \\ \bar{\gamma}_k = (1 + u_k) \gamma_k,$$

где  $A_k, B_k$  – коэффициенты функции спроса  $k$ -го агента вида  $p_k = A_k Q_k^{B_k}$ ,  $A_k > 0$ ,  $B_k < 0$ ,  $|B_k| < 1$ ,  $Q_k > 0$ , и введены следующие обозначения  $k = 1$  – риелтор,  $k = 2$  – банк,  $k = 3$  – страхов-

щик;  $\gamma_k$  – отношение цены товара (услуги)  $k$ -го агента внутри системы к цене вне этой системы, т.е. в случае свободной конкуренции;  $C_k(Q_k)$  – функция издержек  $k$ -го агента;  $u_k^3$  – коэффициент распределения выручки  $k$ -го агента;  $Q_k$  – объем продаж  $k$ -го агента системы;  $\alpha_k$  – коэффициент внутрисистемного оборота  $k$ -го агента (доля продаж агента внутри системы к его общему объему продаж).

В статье [15] эта функция рассмотрена для случая линейных функций издержек:

$$C_k = c_k Q_k,$$

где  $c_k$  – предельные издержки  $k$ -го агента.

Далее будем рассматривать функцию (1) с учетом нелинейной зависимости издержек от объема продаж, т.е. с учетом эффекта расширения масштаба. Обозначим рассматриваемые случаи функций издержек следующим образом:

- степенная функция  $t = 1$ ,
- логарифмическая функция  $t = 2$ ,
- экспоненциальная функция  $t = 3$ .

Тогда в этих случаях зависимости издержек от объемов продаж примут вид

$$C_{k1} = c_{k1} Q_k^{\rho_k}, C_{k2} = c_{k2} \ln Q_k + d_{k2}, C_{k3} = c_{k3} e^{\delta_{k3} Q_k}.$$

При  $t = 1$  функция (1) имеет вид

$$(2) \quad \pi_k = A_k Q_k^{B_k+1} [(1 - \alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}] - c_{k1} Q_k^{\rho_k},$$

где  $\rho_k$  – коэффициент масштаба  $k$ -го агента, при  $\rho_k \in (1, 2)$  имеет место отрицательный эффект масштаба (выпуклая функция), при  $\rho_k \in (0, 1)$  – положительный эффект масштаба (вогнутая функция).

При  $t = 2$  функция (1) имеет вид

$$(3) \quad \pi_k = A_k Q_k^{B_k+1} [(1 - \alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}] - c_{k2} \ln Q_k - d_{k2}.$$

При  $t = 3$  функция (1) имеет вид

---

<sup>3</sup> В частности:  $u_1$  – доля товарооборота риелтора, перераспределяемая между ним и банком;  $u_2 = u_{21} + u_{23}$  – доля дохода банка, перераспределяемая с риелтором и страховщиком,  $u_{21}$  – доля дохода банка, перераспределяемая между ним и риелтором;  $u_{23}$  – доля дохода банка, перераспределяемая между ним и страховщиком;  $u_3$  – доля товарооборота страховщика, перераспределяемая между ним и банком.

$$(4) \pi_k = A_k Q_k^{B_k+1} [(1 - \alpha_k)^{B_k+1} + \bar{\gamma}_k \alpha_k^{B_k+1}] - c_{k3} e^{\delta_{k3} Q_k}.$$

Тогда задачи агентов в децентрализованной системе представляются в виде

$$\max_{Q_k > 0, \alpha_k \in (0;1)} \pi_k,$$

где агенты находят оптимальные объемы продаж и оптимальные доли продаж внутри системы.

### 3. Теоретический анализ модели

Для нахождения оптимального объема продаж и оптимального коэффициента внутрисистемного оборота проанализируем целевые функции (2)–(4). Рассмотрим случай со степенной зависимостью издержек от объема продаж и запишем условие максимума первого порядка (индекс  $k$  опущен):

$$\pi'_Q = A(B+1)Q^B [(1 - \alpha)^{B+1} + \bar{\gamma} \alpha^{B+1}] - c\rho Q^{\rho-1} = 0,$$

$$\pi'_\alpha = A(B+1)Q^{B+1} [-(1 - \alpha)^B + \bar{\gamma} \alpha^B] = 0.$$

Так как  $Q > 0$ , то из второго уравнения следует:

$$-(1 - \alpha)^B + \bar{\gamma} * \alpha^B = 0,$$

тогда если обозначить  $\bar{\gamma}^{-\frac{1}{B}} \equiv \phi$ , то оптимальная доля внутрисистемного оборота вычисляется по формуле

$$\alpha^* = \frac{\phi}{1+\phi}.$$

Подставим в первое уравнение  $\alpha^* = \frac{\phi}{1+\phi}$ , получим уравнение, решение которого определяет оптимальный объем  $Q^*$ :

$$(6) A(B+1)Q^{*B} \left[ \left(1 - \frac{\phi}{1+\phi}\right)^{B+1} + \bar{\gamma} \left(\frac{\phi}{1+\phi}\right)^{B+1} \right] - c\rho Q^{*\rho-1} = 0.$$

Представленные выше формулы справедливы в случае, когда агенты взаимодействуют друг с другом, т.е.  $\gamma > 1$ . Но в случае  $\gamma = 1$  агенты системы не взаимодействуют и  $\alpha^* = 0$ .

Таким образом, оптимальный объем продаж находится из уравнения (6), а оптимальный коэффициент внутрисистемного оборота – из следующего выражения:

$$(7) \alpha^* = \begin{cases} 0, & \text{при } \gamma = 1, \\ \frac{\phi}{1+\phi}, & \text{при } \gamma > 1. \end{cases}$$

Матрица Гессе для целевой функции (2) имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} \pi''_{QQ} & \pi''_{Q\alpha} \\ \pi''_{\alpha Q} & \pi''_{\alpha\alpha} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы рассчитываются следующим образом:

$$\pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2},$$

$$\pi''_{Q\alpha} = \pi''_{\alpha Q} = A(B+1)^2Q^B[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}],$$

$$\pi''_{\alpha\alpha} = A(B+1)BQ^{B+1}[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}].$$

Целевая функция (2) примет максимальное значение при соблюдении следующих условий:

– определитель первого порядка матрицы Гессе:

$$(8) \quad \pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0$$

– определитель второго порядка матрицы Гессе:

$$(9) \quad \pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - (\pi''_{Q\alpha})^2 = (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2})[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0.$$

В статье [15] было доказано, что

$$A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] < 0.$$

Тогда если  $\rho > 1$ , эффект расширения масштаба отрицательный, то  $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > 0$ , поэтому

$$A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0,$$

значит, условие (8) выполняется.

Если  $\rho < 1$ , эффект расширения масштаба положительный, то  $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0$ , поэтому условие (8) верно, если

$$c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}].$$

В статье [15] было доказано, что

$$(A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}])[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0.$$

Тогда если  $\rho < 1$ , эффект расширения масштаба положительный, то  $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < 0$ , поэтому

$$(A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2})[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0,$$

следовательно, условие (9) выполняется.

Если  $\rho > 1$ , эффект расширения масштаба отрицательный, то  $c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > 0$ , поэтому условие (9) верно, если

$$c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2) / [(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}].$$



Обозначим:  $x = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] < 0$ ,  
 $y = (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] -$   
 $-A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2)/[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] > 0$ .

Тогда представим варианты эффекта масштаба для  $C(Q) = cQ^\rho$  в таблице 1.

Таблица 1. Условия максимума для степенной функции издержек

Условия	$\rho > 1$	$\rho < 1$
$\pi''_{QQ} < 0$	$\forall \rho > 1, \forall Q > 0$	$\forall \rho, Q: c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} > x$
$\pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - (\pi''_{Q\alpha})^2 > 0$	$\forall \rho, Q: c\rho(\rho-1)Q^{\rho-2} < y$	$\forall \rho < 1, \forall Q > 0$

Для случая логарифмической зависимости издержек при проведении аналогичных преобразований для формулы (3) производная прибыли по  $\alpha$  остается неизменной, а производная по  $Q$  дает уравнение для нахождения оптимального объема продаж  $Q^*$ :

$$(10) \pi'_Q = A(B+1)Q^B[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - \frac{c}{Q} = 0.$$

При расчете элементов матрицы Гессе для целевой функции (3) вторая производная по  $Q\alpha$ , равная второй производной по  $\alpha Q$ , и вторая производная по  $\alpha\alpha$  остаются неизменными, а вторая производная по  $QQ$  примет вид

$$\pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] + \frac{c}{Q^2}.$$

Целевая функция (3) примет максимальное значение при соблюдении следующих условий:

– определитель первого порядка матрицы Гессе:

$$(11) \pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] + \frac{c}{Q^2} < 0,$$

– определитель второго порядка матрицы Гессе:

$$(12) \pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - (\pi''_{Q\alpha})^2 =$$

$$= (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] + \frac{c}{Q^2})[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0.$$

Тогда так как  $\frac{c}{Q^2} > 0$ , то условие (11) верно, если

$$|A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]| > \frac{c}{Q^2}.$$

При этом условие (12) будет соблюдаться:

$$(A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] + \frac{c}{Q^2})[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0.$$

Для случая экспоненциальной зависимости издержек при проведении аналогичных преобразований для формулы (4) производная прибыли по  $\alpha$  остается неизменной, по  $Q$  дает уравнение для нахождения оптимального объема продаж  $Q^*$ :

$$(13) \pi'_Q = A(B+1)Q^B[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\delta e^{\delta Q} = 0.$$

При расчете элементов матрицы Гессе для целевой функции (4) вторая производная по  $Q\alpha$ , равная второй производной по  $\alpha Q$ , и вторая производная по  $\alpha\alpha$  остаются неизменными, а вторая производная по  $QQ$  примет вид:

$$\pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\delta^2 e^{\delta Q}.$$

Целевая функция (4) примет максимальное значение при соблюдении следующих условий:

– определитель первого порядка матрицы Гессе:

$$(14) \pi''_{QQ} = A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\delta^2 e^{\delta Q} < 0,$$

– определитель второго порядка матрицы Гессе:

$$(15) \pi''_{QQ}\pi''_{\alpha\alpha} - (\pi''_{Q\alpha})^2 = (A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\delta^2 e^{\delta Q})[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}] - A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2 > 0.$$

Тогда так как  $c\delta^2 e^{\delta Q} > 0$ , условие (14) будет соблюдаться:

$$A(B+1)BQ^{B-1}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] - c\delta^2 e^{\delta Q} < 0.$$

Чтобы условие (15) было верным, необходимо, чтобы

$$c\delta^2 e^{\delta Q} < A^2(B+1)^2B^2Q^{2B}[(1-\alpha)^{B+1} + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}] -$$

$$\frac{A^2(B+1)^4Q^{2B}[-(1-\alpha)^B + \bar{\gamma}\alpha^{B+1}]^2}{[(1-\alpha)^{B-1} + \bar{\gamma}\alpha^{B-1}]}.$$

Очевидно, что для логарифмической функции элемент матрицы Гессе, зависящий от функции издержек (аналог  $cr(\rho-1)Q^{\rho-2}$ ) имеет вид  $\frac{c}{Q^2}$ , а для экспоненциальной  $c\delta^2 e^{\delta Q}$ . Поэтому по аналогии представим таблицу 2 с вариантами эффекта масштаба для логарифмической и экспоненциальной функций издержек.

Таблица 2. Условия максимума для логарифмической и экспоненциальной функций издержек

Условия	Экспоненциальная функция	Логарифмическая функция
$\pi''_{qq} < 0$	$\forall Q > 0$	$\forall Q: \frac{c}{Q^2} <  x $
$\pi''_{qq}\pi''_{\alpha\alpha} - (\pi''_{q\alpha})^2 > 0$	$\forall Q: c\delta^2 e^{\delta Q} < y$	$\forall Q > 0$

#### 4. Результаты численных экспериментов

Проведем анализ возможных типов функций издержек для реальных агентов рынков жилья, ипотечного кредитования и ипотечного страхования. Было проведено сравнение точности аппроксимации с помощью степенной, логарифмической и экспоненциальной функций издержек.

Важно отметить, что для степенной функции в случае, если эмпирические данные не позволяют сформировать аппроксимирующую зависимость при помощи одной степенной функции, используются две степенные функции с различными коэффициентами эффекта масштаба.

На рис. 1 представлена зависимость себестоимости строительства от количества условных однокомнатных квартир (площадью 35 кв. м) для ГК «ПИК» [6] по 23 отчетным периодам (полугодиям) за 2007–2020 гг.; объем продаж риелтора рассчитан путем деления общей выручки фирмы на среднюю стоимость однокомнатной квартиры [9]. Все графики построены на основе данных таблицы 3.

Таблица 3. Данные о количестве проданных агентами рынка товаров и услуг и их себестоимости по периодам

№	Период	Количество однокомнат- ных квартир, шт.	Себестоимость строительных работ, млн \$	Объем выданных банком креди- тов, млн \$	Операционные расходы банка на выдачу кредитов, млн \$	Период	Объем страхования имущества, млн \$	Операционные расходы страховщика на выдачу полисов, млн \$
1	I полугодие 2009	5 865	151,44	7 833,08	156,62	1-й кв-л 2013	119,37	23,63
2	II п-е 2009	16 476	382,78	8 139,48	178,76	2-й кв-л 2013	135,33	29,09
3	I п-е 2010	9 262	240,79	8 527,54	201,35	3-й кв-л 2013	128,41	28,46
4	II п-е 2010	14 046	317,90	10 562,03	259,73	4-й кв-л 2013	128,41	21,73
5	I п-е 2011	14 299	302,54	9 583,78	238,77	1-й кв-л 2014	107,18	24,98
6	II п-е 2011	14 864	278,22	12 339,00	270,00	3-й кв-л 2014	123,21	30,36
7	I п-е 2012	9 578	181,21	14 957,14	325,83	4-й кв-л 2014	136,63	34,31
8	II п-е 2012	31 788	641,06	18 149,21	403,69	1-й кв-л 2015	121,98	22,59
9	I п-е 2013	15 156	284,60	20 423,81	416,21	2-й кв-л 2015	142,59	27,13
10	II п-е 2013	23 146	427,83	24 904,76	507,14	3-й кв-л 2015	144,58	28,69
11	I п-е 2014	17 244	336,52	29012,70	511,55	4-й кв-л 2015	160,75	32,80
12	II п-е 2014	18 800	381,57	36028,57	587,26	1-й кв-л 2016	121,80	23,15
13	I п-е 2015	11 805	212,02	37769,84	608,15	2-й кв-л 2016	135,41	27,34
14	II п-е 2015	15 400	319,65	40549,21	686,05	3-й кв-л 2016	141,62	28,21
15	I п-е 2016	9 565	212,56	41866,67	680,91	4-й кв-л 2016	162,34	34,26

Таблица 3 (продолжение).

16	II п-е 2016	18 585	419,41	45141,27	731,77	1-й кв-л 2017	122,18	22,73
17	I п-е 2017	17 335	488,29	43665,08	853,90	2-й кв-л 2017	125,88	27,34
18	II п-е 2017	62 623	1840,94	50644,44	927,53	3-й кв-л 2017	136,33	28,64
19	I п-е 2018	41 985	1219,97	50703,95	868,46	4-й кв-л 2017	150,53	35,19
20	II п-е 2018	57 587	1820,16	57982,29	1094,97	1-й кв-л 2018	117,75	22,78
21	I п-е 2019	32 482	1314,86			2-й кв-л 2018	135,23	30,98
22	II п-е 2019	71 413	1937,97			3-й кв-л 2018	139,65	32,90
23	I п-е 2020	45 423	1645,29			1-й кв-л 2019	134,69	31,01
24	II п-е 2020	75 671	2100,37			2-й кв-л 2019	149,90	36,50
25	I п-е 2021	50 727	2274,00			3-й кв-л 2019	169,44	47,19
26	II п-е 2021	77 963	2235,52			4-й кв-л 2019	192,81	54,99
27						1-й кв-л 2020	149,89	37,15
28						2-й кв-л 2020	139,48	33,72
29						3-й кв-л 2020	182,45	50,45
30						4-й кв-л 2020	201,03	50,55

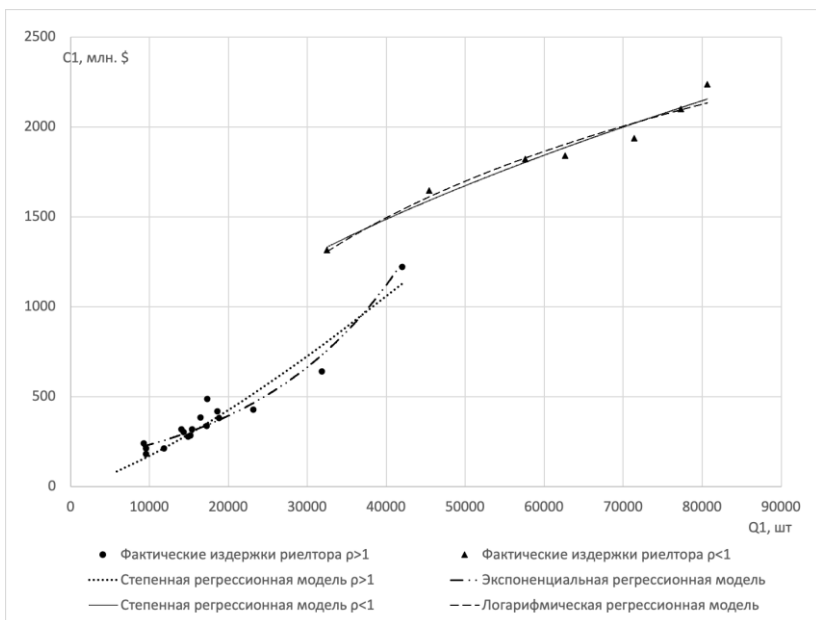


Рис. 1. Зависимость издержек риелтора от объема продаж квартир

Модель степенной функции издержек риелтора, рассчитанная методом наименьших квадратов, имеет вид:

$$C_1(Q) = \begin{cases} 1000,1Q_1^{1,33}, & t = 2007 - 2016 \text{ гг.}, \\ 5000000Q_1^{0,5228}, & t = 2017 - 2021 \text{ гг.} \end{cases}$$

Кривая издержек имеет характерный S-образный вид [19]. Однако в отличие от классической формы [19] при малых объемах продаж в 2007–2016 гг. кривая показывает отрицательный эффект расширения масштаба ( $\rho > 1$ ), в то же время при больших объемах продаж в 2017–2020 гг. можно наблюдать положительный эффект расширения масштаба ( $\rho < 1$ ). В первом случае средние издержки растут быстрее, чем объем продаж, а во втором случае средние издержки растут медленнее.

Также модель функции издержек риелтора можно представить при помощи логарифмической и экспоненциальной функции, тогда она примет вид:

$$C_1(Q) = \begin{cases} 100000000e^{0,00005Q_1}, t = 2007 - 2016 \text{ гг.}, \\ 900000000 \ln Q_1 - 8000000000, t = 2017 - 2021 \text{ гг.} \end{cases}$$

На рис. 2 представлена зависимость операционных издержек Сбербанка, которые относятся к обслуживанию ипотечных кредитов, от количества выданных ипотечных кредитов [10] по 20 отчетным периодам (полугодиям) за 2009–2018 гг. При этом объем кредитов, которые были выданы Сбербанком, рассчитан на основе доли ипотечных кредитов Сбербанка в общей сумме ипотечных кредитов, выданных в России за соответствующие периоды [11].

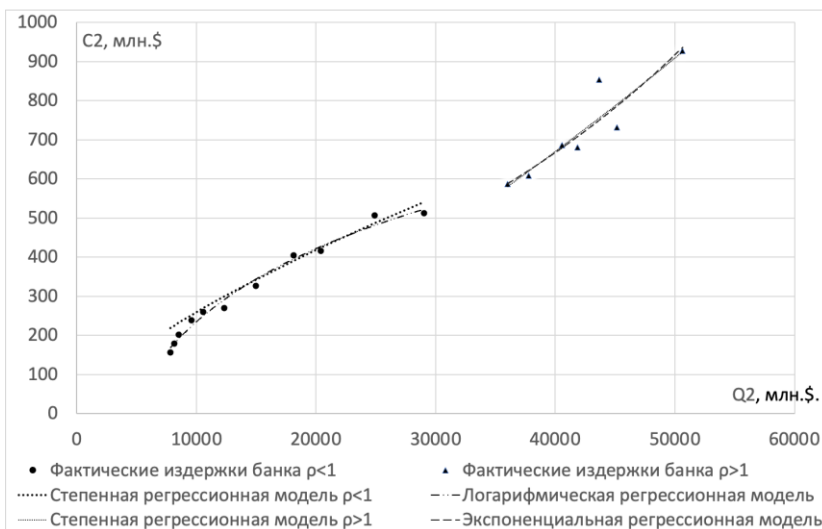


Рис. 2. Зависимость издержек банка от объема выданных кредитов

Модель функции издержек банка также имеет вид S-образной кривой с переменным эффектом расширения масштаба:

$$C_2(Q) = \begin{cases} 0,045Q_2^{0,69}, t = 2009 - 2014 \text{ гг.}, \\ 0,0003Q_2^{1,3662}, t = 2015 - 2018 \text{ гг.} \end{cases}$$

В 2009–2014 гг. эффект расширения масштаба от реализации услуг банком положительный ( $\rho < 1$ ), а при больших объемах продаж в 2017–2020 гг. наблюдается отрицательный эффект расширения масштаба ( $\rho < 1$ ). В первом случае средние издержки растут медленнее, чем объем продаж, а во втором средние издержки растут быстрее.

Также модель функции издержек банка можно представить при помощи логарифмической и экспоненциальной функции, тогда она примет вид

$$C_2(Q) = \begin{cases} 270,04 \ln Q_2 - 2252,9, & t = 2009 - 2014 \text{ гг.}, \\ 186,64 e^{0,00003 Q_2}, & t = 2015 - 2018 \text{ гг.} \end{cases}$$

На рис. 3 представлена зависимость аквизиционных издержек страховщика, которые относятся к обслуживанию операций по страхованию имущества, от объемов страхования имущества для ОАО «Ресо-Гарантия» [5, 8] по 23 отчетным периодам (кварталам) за 2013–2020 гг.; информация об объемах страхования имущества взята из статистики рейтингового агентства «РИА рейтинг» [4] и из отчетности ЦБ РФ [12].

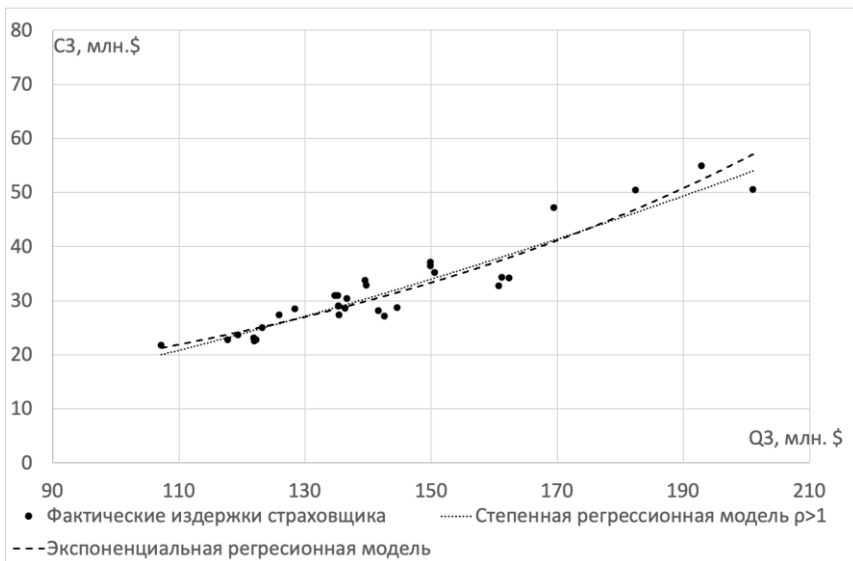


Рис. 3. Зависимость издержек страховщика от объемов страхования имущества



Модель функции издержек страховщика характеризуется отрицательным эффектом расширения масштаба ( $\rho > 1$ ). Степенная функция издержек принимает вид

$$C_3(Q) = 0,0125Q_3^{1,5786}.$$

Экспоненциальная функция издержек принимает вид

$$C_3(Q) = 6,8722e^{0,0105Q_3}.$$

В таблице 2 представлены коэффициенты для оценки адекватности представленных регрессионных моделей.

Таблица 2. Статистические оценки регрессионных моделей

Агент	Регрессионная модель	Коэффициент детерминации	Критерий Фишера (расчетный)	Табличное значение критерия Фишера (при уровне значимости 0,05)
Риелтор	$C_1(Q) = 1000,1Q_1^{1,33}$	$R^2 = 0,9222$	$F = 190,18$	$F = 2,30$
	$C_1(Q) = 100000000e^{0,000005Q_1}$	$R^2 = 0,9562$	$F = 346,81$	$F = 2,30$
	$C_1(Q) = 5000000Q_1^{0,5228}$	$R^2 = 0,9656$	$F = 140,35$	$F = 4,88$
	$C_1(Q) = 900000000 \ln(Q_1) - 8000000000$	$R^2 = 0,9584$	$F = 115,19$	$F = 4,88$
Банк	$C_2(Q) = 0,045Q_2^{0,69}$	$R^2 = 0,9218$	$F = 106,06$	$F = 3,10$
	$C_2(Q) = 270,04 \ln(Q_2) - 2252,9$	$R^2 = 0,9855$	$F = 611,69$	$F = 3,10$
	$C_2(Q) = 0,0003Q_2^{1,3662}$	$R^2 = 0,8467$	$F = 38,66$	$F = 3,68$
	$C_2(Q) = 186,64e^{0,000003Q_2}$	$R^2 = 0,8423$	$F = 37,39$	$F = 3,68$
Страховщик	$C_3(Q) = 0,0125Q_3^{1,5786}$	$R^2 = 0,8881$	$F = 222,22$	$F = 1,87$
	$C_3(Q) = 6,8722e^{0,0105Q_3}$	$R^2 = 0,8824$	$F = 210,1$	$F = 1,87$

Таким образом, регрессионные модели являются адекватными и значимыми. При этом практически во всех случаях логарифмическая и экспоненциальная модели дают большую точность по сравнению со степенными моделями.

Далее исследуем зависимости объемов продаж и цен агентов от коэффициента комиссионного вознаграждения при различных эффектах расширения масштаба.

На рис. 4 представлены зависимости оптимальных объемов продаж риелтора и банка от коэффициента комиссии в паре «риелтор – банк»; на рис. 5 представлены зависимости оптимальных цен риелтора и банка. При этом случай  $u_1 < 0$  означает, что риелтор платит комиссию банку, а случай  $u_1 > 0$  подразумевает платеж банка риелтору.

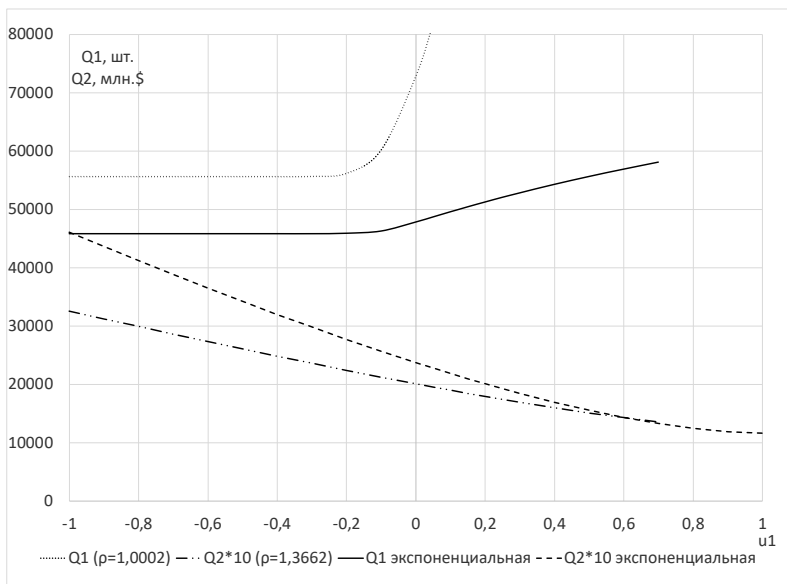


Рис. 4. Зависимость оптимального количества проданных квартир и объема выдачи кредитов от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек

Так как при  $\rho < 1$  и при логарифмической функции издержек условие второго порядка не соблюдается, т.е. невозможно найти максимум прибыли, на рисунках отражены зависимости только при отрицательном эффекте расширения масштаба ( $\rho > 1$  и экспоненциальная функция издержек).

Проанализировав рис. 4 и 5, можно сделать вывод о том, что при отрицательном эффекте расширения масштаба с ростом коэффициента комиссии в паре «риелтор – банк» риелтору вы-

годно увеличивать объем продаж, а банку выгодно снижать объем продаж.

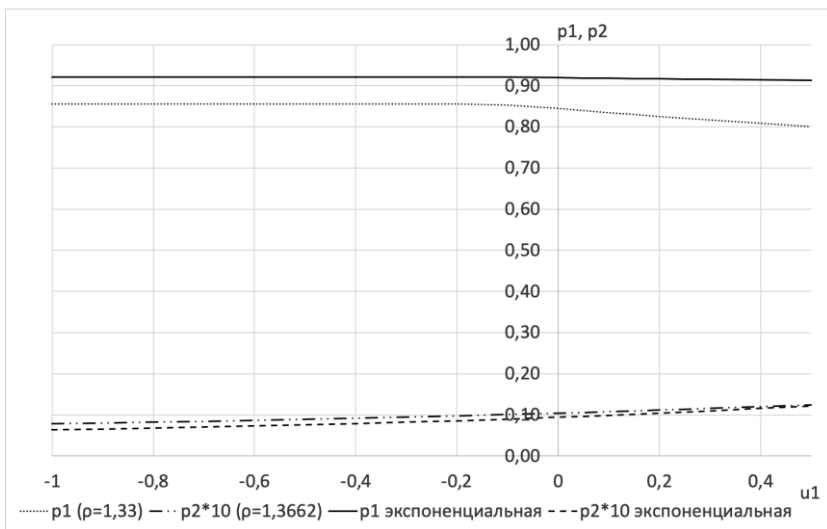


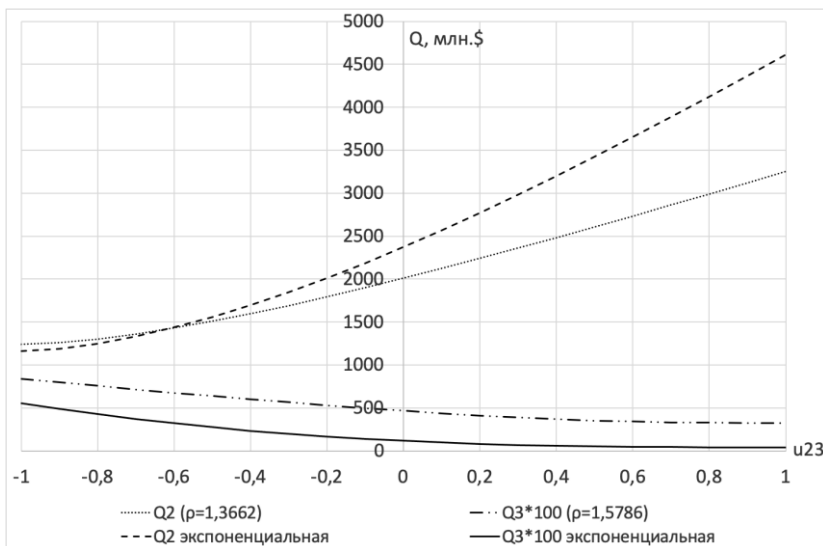
Рис. 5. Зависимость оптимальной цены на жилье (в долях от наибольшей цены) и ставки процента по ипотеке от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек

Наряду с этим, начиная с некоторого значения  $u_1$ , риелтору выгодно снижать цены на жилье, а банку – повышать ставку ипотечного кредитования. Отметим, что снижение оптимальной цены на жилье и рост ипотечной ставки происходят уже при  $u_1 < 0$ , поскольку для риелтора растет, а для банка – снижается оптимальное значение доли внутреннего оборота  $\alpha^*$ .

Также рассмотрены зависимости объемов продаж и цен на услуги для банка и страховщика от коэффициента комиссии в паре «банк – страховщик» при отрицательном эффекте расширения масштаба. При этом случай  $u_{23} < 0$  означает, что банк платит комиссию страховщику, а случай  $u_{23} > 0$  подразумевает платеж страховщика банку.

На рис. 6 представлены зависимости оптимальных объемов кредитования и страхования от коэффициента комиссии в паре

«банк – страховщик»; на рис. 7 представлены зависимости оптимальных цен на услуги банка и страховщика.

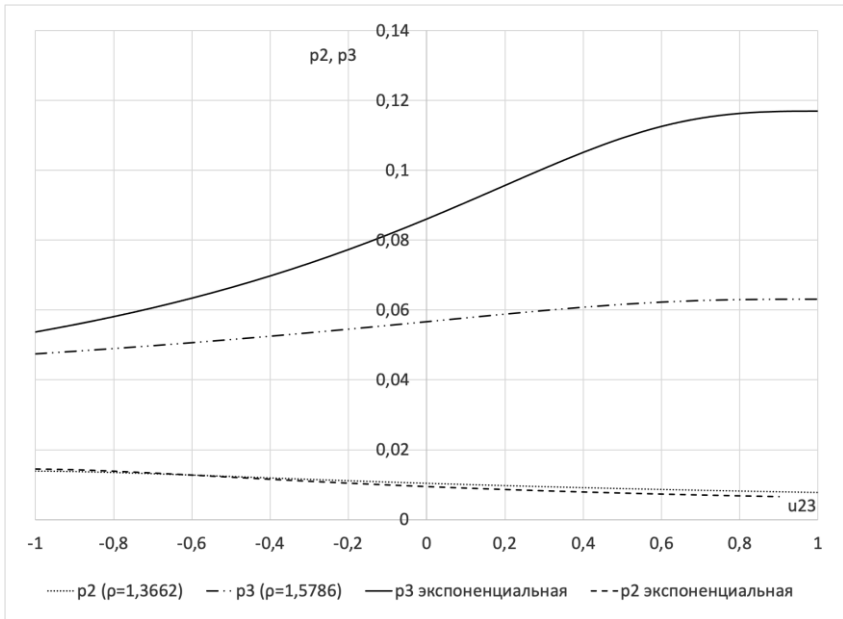


*Рис. 6. Зависимость оптимальных объемов кредитов и страховых полисов от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек*

Проанализировав графики, можно сделать вывод о том, что с ростом коэффициента взаимодействия банка и страховщика для банка целесообразно увеличивать объем выдаваемых кредитов, а страховщику – снижать количество полисов. Кроме того, банку целесообразно снижать ставку ипотечного кредита, а страховщику – повышать тариф страхования жилья.

Обобщим полученные результаты. Цена жилья зависит от ставки ипотечного кредита через коэффициент комиссии в паре «риелтор – банк»  $u_1$  ( $u_{21}$ ) так, что при увеличении  $u_1$  (или снижении  $u_{21}$ ) с увеличением ставки ипотечного кредита цена жилья падает:

$$\frac{\partial p_1}{\partial p_2} < 0.$$



*Рис. 7. Зависимость оптимальной процентной ставки по ипотеке и оптимального страхового тарифа от коэффициента комиссии при степенных и экспоненциальных функциях издержек*

Ипотечная ставка зависит от тарифа страхования через коэффициент комиссии в паре «банк – страховщик»  $u_{23}$  ( $u_3$ ) так, что при росте  $u_{23}$  (или снижении  $u_3$ ) с увеличением тарифа страхования ипотечная ставка уменьшается:

$$\frac{\partial p_2}{\partial p_3} < 0.$$

В целом система «риелтор – банк – страховщик» с вогнутыми функциями издержек агентов обеспечивает более гибкое регулирование цен, чем в случае линейных функций издержек [15]. Для снижения цены жилья можно увеличивать коэффициент комиссии в паре «риелтор – банк», в этом случае ипотечная ставка незначительно повышается; в то же время следует уменьшать коэффициент комиссии в паре «банк – страховщик»,

в этом случае ставка ипотечного кредита также растет слабо, а страховой тариф уменьшается.

## 5. Выводы

В исследовании представлены эмпирические данные, которые характеризуют фактические издержки риелтора, банка и страховщика на рынке недвижимости России. Эти данные подтверждают проявление у этих агентов положительной или отрицательной отдачи от расширения масштаба.

С учетом типа отдачи от расширения масштаба разработаны модели максимизации прибыли агентов системы «риелтор – банк – страховщик», поступающих рационально. Также представлены формулы вычисления оптимального объема продаж и коэффициента внутрисистемного оборота и необходимые условия максимизации прибыли агентов системы.

Было доказано, что коэффициент комиссии влияет на оптимальный объем продаж и оптимальные цены агентов системы с учетом нелинейности функции издержек и был представлен анализ этих зависимостей, который показывает, что с увеличением соответствующих коэффициентов риелтору целесообразно увеличивать объем продаж и снижать цену, а страховщику – наоборот. На оптимальную стратегию банка влияет изменение коэффициента комиссии с каждым из его контрагентов.

На основе проведенных исследований агенты системы «риелтор – банк – страховщик» могут принимать решения по развитию, т.е. выбирать такие коэффициенты внутрисистемного оборота, коэффициенты комиссии, объемы продаж и, соответственно, цены, при которых их прибыли будут максимальными, а их взаимодействие будет наиболее выгодным для всех агентов.

## Литература

1. ЗАМЯТИНА А.Ю. Построение модели отраслевой функции издержек естественной монополии ОАО «РЖД» // JSRP. – 2014. – №14(18). – С. 25–30.

2. КОСОРУКОВ О.А., СВИРИДОВА О.А. *Модель минимизации издержек в системах управления запасами* // Вестник РЭА им. Г.В. Плеханова. – 2009. – №6. – С. 52–58.
3. КУРИЛЁНОК К., КУРИЛЁНОК Е. *Новые Методы экономического анализа* // Наука и инновации. – 2019. – №12(202). – С. 61–66.
4. *Медиа-информационная группа «Страхование сегодня». Динамика рынка.* – Url: <http://www.insur-info.ru/statistics/> (дата обращения: 23.01.2021).
5. *ОАО «РЕСО-ГАРАНТИЯ», Отчетность по МСФО.* – URL: <https://www.reso.ru/shareholders/finance/msfo/> (дата обращения: 19.01.2021).
6. *Отчетность по МСФО. ГК ПИК.* – URL: <https://pik-group.ru/about/news-and-reports/reports/financial-results> (дата обращения: 19.01.2021).
7. ПЛЕЩЕНКО В.И. *Оптимизация издержек промышленных предприятий при работе с альтернативными поставщиками* // Экономический анализ: теория и практика. – 2011. – №25. – С. 47–50.
8. *Рейтинговое агентство «РИА РЕЙТИНГ». Рэнкинг страховых компаний по итогам 2014 года.* – URL: [http://riarating.ru/insurance\\_companies\\_rankings/20150319/610649976.html](http://riarating.ru/insurance_companies_rankings/20150319/610649976.html) (дата обращения: 23.01.2021).
9. *Росриэлт недвижимость, цены на недвижимость в России.* – URL: <https://rosrealt.ru/cena> (дата обращения: 19.01.2021).
10. *Сбербанк, отчетность по МСФО.* – URL: <https://www.sberbank.com/ru/investor-relations/reports-and-publications/ifrs> (дата обращения: 19.01.2021).
11. *Центральный Банк, статистика.* URL: <https://www.cbr.ru/statistics/table/?tableid=4-1> (дата обращения: 19.01.2021).
12. *Центральный Банк, статистика.* – URL: [https://www.cbr.ru/statistics/insurance/report\\_individual\\_ins/?unidbquery.posted=true&unidbquery.dtype=1&unidbquery.to=2020](https://www.cbr.ru/statistics/insurance/report_individual_ins/?unidbquery.posted=true&unidbquery.dtype=1&unidbquery.to=2020) (дата обращения: 19.01.2021).
13. CALOMIRIS C.W., JAREMSKI M. *Deposit insurance: theories and facts* // Annual Review of Financial Economics. – 2016. – Vol. 8, No. 1. – P. 97–120.

14. CARBAUGH R. *Contemporary economics: an applications approach* // Cengage Learning. – 2006. – P. 35.
15. GERASKIN M. *Pricing analysis of interconnected markets of housing, mortgage lending and insurance* // Kybernetes. – 2020. – Vol. 50, No. 5. – P. 1212–1249.
16. JONES K. *Fha-insured home loans: an overview* // The Housing Finance System in the United States. – 2013. – P. 44–58.
17. PARK K.A. *Temporary loan limits as a natural experiment in federal housing administration insurance* // Housing Policy Debate. – 2017. – Vol. 27, No. 3. – P. 449–466.
18. TIROLE J. *The theory of industrial organization*. – Cambridge: MIT Press, 1988. – 496 p.
19. WALTERS A.A. *Production and cost functions: and econometric survey* // Econometrica. – 1963. – No. 31(1). – P. 23–44.

## MODELING INTERACTIONS OF INSTITUTIONS OF HOUSING MARKETS BASED ON POWER, EXPONENTIAL AND LOG COST FUNCTIONS

**Mikhail Geraskin**, Doctor of Economics, professor, head of the Department of Mathematical Methods in Economics of the Institute of Economics and Management, Samara National Research University named after Academician S.P. Korolev (Samara University) (innovation@ssau.ru).

**Maria Ivanova**, post-graduate student, Samara National Research University named after Acad. S.P. Korolev (Samara University) (ivanova.maria.ami@gmail.com).

*Abstract: The article presents a system of optimality conditions for housing market agents (realtor, bank and insurer) with power, exponential and logarithmic cost functions corresponding to different types of economies of scale. The results of numerical experiments are presented, demonstrating the nature of price interdependencies in these markets for various types of functions. In contrast to the study of the "realtor – bank – insurer" system based on linear cost functions, this work presents the following conclusions: firstly, in the case when all agents have concave cost functions, then the real estate price, mortgage interest rate and insurance tariff lower than in the case when agents have convex cost functions; secondly, an increase in the intrasystem commission rate leads to an increase in the price of the agent who pays the commission, and a decrease in the price of the agent who receives it; thirdly, an increase in the commission rate leads to a sharper decrease in the price of an agent, in the case when he has a convex cost function, while the counterparty has a*



*concave one, than otherwise. When comparing the effectiveness of using different types of cost functions, it was found that logarithmic and exponential functions provide greater accuracy than power functions.*

Keywords: optimal strategy, realtor, bank, insurer.

УДК 330.4

ББК 65.05

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.4

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

*Поступила в редакцию 01.12.2022.  
Опубликована 14.12.2022.*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУДАРА В АКСИАЛЬНО-ПЛУНЖЕРНОМ НАСОСЕ

Третьякова Е. А.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Представлен подход к моделированию аксиально-плунжерного насоса компакт-серии с наклонным блоком и выполнен гидродинамический расчет. Были изучены существующие модели аксиально-плунжерного насоса, в ходе чего обнаружен скачок расхода в момент гидроудара, однако «величина удара» была неизвестна. При моделировании вводились допущения, связанные со свойствами рабочей жидкости и геометрией плунжера, также не учитывались температурные изменения. В процессе моделирования были выделены четыре этапа. Первый этап включает в себя создание объема жидкости – жидкостную модель по твердотельной модели насоса. На втором этапе была создана сетка. Третий этап посвящён созданию макросов для движения выделенных ранее составляющих насоса. На четвёртом этапе все подготовленные части модели выгружаются во Fluent 18.1 и производится установка параметров расчёта. Адекватность полученной модели была оценена при помощи сравнения смоделированного полного расхода насоса с величиной теоретического расхода, рассчитанной аналитически. В ходе моделирования была вычислена амплитуда скачка давления во время гидроудара на рабочем режиме насоса при максимальном давлении нагнетания. Был предложен метод по его снижению. Внесены изменения в конструкцию плунжера. Проведен расчет на прочность измененной конструкции.*

**Ключевые слова:** аксиально-плунжерный насос, гидродинамический расчёт, модель, плунжер, сетка, удар, клапан.

### 1. Введение

Аксиально-плунжерные гидромашины (АПГ) – один из типов объемных гидромашин, широко используемых в качестве гидронасосов или гидромоторов в авиационной и строительной технике, а также станкостроении, где требуется малая подача рабочей жидкости при достаточно высоких её напорах. Также важно отметить компактность и малый вес по сравнению с другими конструкциями поршневых насосов (рис. 1). Малые детали

---

<sup>1</sup> Екатерина Алексеевна Третьякова, студент ([ekaterina\\_tretikova@mail.ru](mailto:ekaterina_tretikova@mail.ru)).

и расположение камер вдоль приводного вала дают меньшие вибрации и низкую инерцию.

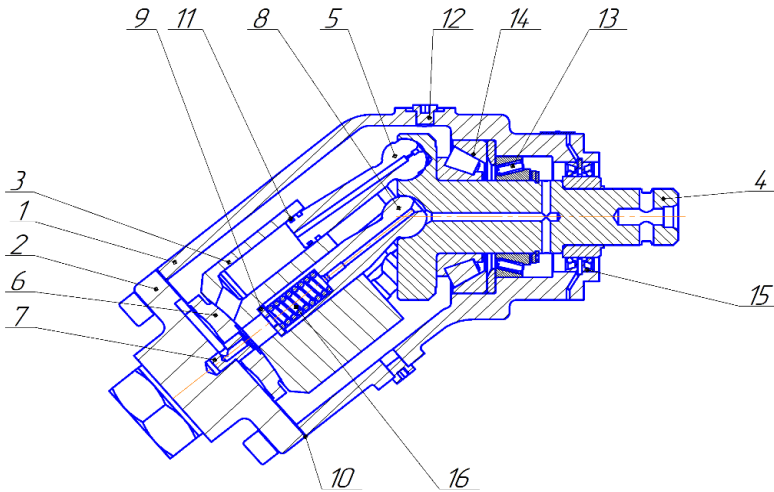


Рис. 1. Аксиально-плунжерный насос: 1 – корпус; 2 – крышка; 3 – блок цилиндров; 4 – вал; 5 – плунжер; 6 – торцевой распределитель; 7 – штифт; 8 – сферическая часть оси; 9 – упор; 10 – уплотнение; 11 – уплотнение цилиндров плунжеров; 12 – заглушка; 13 – радиально-упорный подшипник; 14 – радиально-упорный подшипник

Насосы объемного типа широко распространены в различных гидросистемах из-за свойственной им независимости генерируемого расхода от давления в системе и частоты вращения приводного вала. Принцип работы объемных гидромашин основан на периодическом изменении объема рабочих камер, что приводит к пульсациям подачи, которые в свою очередь приводят к вибрации ограждающих элементов. Такие динамические нагрузки приводят к вибрации, нарушению герметичности и разрушению системы [5].

На сегодняшний день исследования по уменьшению динамических нагрузок ведутся в разных направлениях. В работе рассматривается подход, связанный с созданием динамической

модели с целью выявления природы и направленности гидроудара для дальнейшей его компенсации.

## 2. Литературный обзор

В ходе анализа существующих моделей аксиально-плунжерного насоса было выделено две основных группы исследований. *Локальное* математическое моделирование создаётся для того, чтобы показать линии тока жидкости в определённой области объекта. Данные модели служат для рассмотрения процессов в относительно небольших объёмах, таких как: канавки, зазоры, каналы всасывания или нагнетания, ходовая часть (например, расчёт спроектированного нагнетательного канала или же моделирование течения жидкости в цилиндре) [1, 3, 4, 6, 8, 9]. *Обобщённое* моделирование показывает динамику течения жидкости в гидравлической системе, учитывая трубопроводы и дополнительные элементы [2, 7]. Обычно данные модели используются для получения пульсационной картины и часто сопровождаются данными эксперимента (например, моделирование насоса с целью изучения дросселирующего отверстия). В данных моделях отличительными допущениями являются упрощённое движение плунжеров и отсутствие зазоров. Важным аспектом является то, что во многих работах говорилось о явлении *гидроудара*, который проявлялся в скачкообразном поведении графиков расхода, однако не было чёткого представления о его величине и направленности. Из анализа существующих модификаций плунжера можно сделать вывод об их немногочисленности [10].

## 3. Процесс моделирования

В рамках данного исследования проведено моделирование рабочего процесса аксиально-плунжерного гидронасоса компактной серии для 1 плунжера.

Необходимо обозначить допущения, которые принимались при данном моделировании:

1. Несжимаемая жидкость. Данная модель сплошной среды подразумевает сохранение плотности при изменении давления.

Сжимаемость среды показывается процентным содержанием воздуха в ней и важна для анализа кавитации в насосе. Данное допущение оправдывается ограниченными вычислительными ресурсами и незначительным влиянием на изучаемый процесс. При определении явления отрицательного гидроудара (при резком открытии задвижки) нет необходимости учитывать сжимаемость жидкости, так как нет образования кавитационных процессов.

2. Температура. В данной имитационной модели учитывалась стандартная (по настройкам Fluent) температура рабочего тела. Параметры, зависящие от температуры, (плотность и вязкость жидкости) принимались при  $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Это обосновывается тем, что действительная температура рабочего тела во время процесса неизвестна. Очевидно, реальная температура превышает принимаемую, что, в свою очередь, повлияет на амплитуду удара. Рабочий процесс приводит к повышению температуры, от чего проявляется уменьшение вязкости и плотности (т.е. уменьшение способности жидкости сопротивляться сторонним воздействиям), результатом является увеличение амплитуды гидроудара.

Данная погрешность результатов не скажется при подходе к модификации плунжера, так как расчёт демпфирующих и упругих сред будет идти по наименьшему давлению (если рассчитывать для меньшего давления, то будет функционировать при более высоком).

3. Геометрические допущения в виде отсутствия канавок и дросселирующих отверстий в распределительном блоке. Учёт данных модификаций распределительного блока значительно усложнил бы процесс создания модели и сетки. Расчёт канавок и их эффективность не входит в тему данной работы. Главная задача – смоделировать рабочий процесс АПГ и провести модификацию плунжера.

4. Допущение геометрии и движения плунжера. В данной работе принималась идеализированная цилиндрическая форма плунжера: без осевого канала и не коническая, что значительно упрощает создание сетки. Также не учитывается радиальное биение, что упрощает задание движения.

5. Утечки. При моделировании соблюдалась идеальная изоляция как зон нагнетания и всасывания, так и цилиндра с пространством внутри корпуса. Перетечки между окнами нагнетания и всасывания в торцевом распределителе являются незначительными, а утечки через противоположный торец цилиндра влияют на полученные результаты расхода. В этом случае правильность полученного расхода мы сможем проверить через теоретический расход насоса.

Создание динамической модели удобно разбить на этапы. На первом этапе моделирования была создана жидкостная модель для расчёта по твердотельной. Модель разбита на 3 тела: зона нагнетания, зона всасывания (что называется статор) и цилиндры с каналами – ротор.

Второй этап представляет собой создание сетки. Конечная сетка модели состоит из 4 тел (рис. 2). Сетка имеет максимальный коэффициент скошенности 0,65, а средний – 0,15, что говорит о её качественности. Всего в сетке 148 734 элемента.

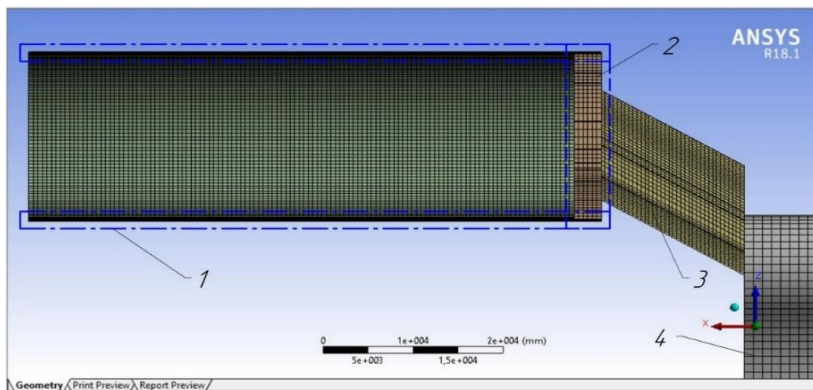


Рис. 2. Сетка модели: 1 – зазор; 2 – область перемещения плунжера; 3 – подвод; 4 – области нагнетания и всасывания

Третий этап включает в себя создание макросов (UDF-файлы) на платформе Microsoft Visual Studio 2012. Путём проб и ошибок было выявлено преимущество вращения тела «статор»,

а не «ротор». Это обосновывается визуальным представлением результатов. Закон движения плунжеров синусоидальный.

На *четвёртом этапе* сетка выгружается во Fluent 18.1, где происходит задание параметров расчёта, граничных условий и макросов движения. Важной частью данного этапа является грамотная настройка параметров перестраивающейся сетки (Dynamic Mesh) и подбор разбиения для рабочего цикла (2900 шагов). Это связано с функцией динамической сетки: необходимо создать такое перемещение тела (создаваемой сетки), чтобы оно было меньшим, чем сам размер сетки для правильного выполнения «Layering» и перестроения сетки.

#### 4. Анализ полученных результатов

Можно отметить, что давление начало возрастать на 1533 шаге, максимальное значение составляет  $P = 46,5$  МПа в теле подвод (рис. 2) на 1557 шаге, что превышает давление зоны нагнетания на  $\Delta P = 11,5$  МПа (составляет 32,9% от давления зоны нагнетания) (рис. 3).

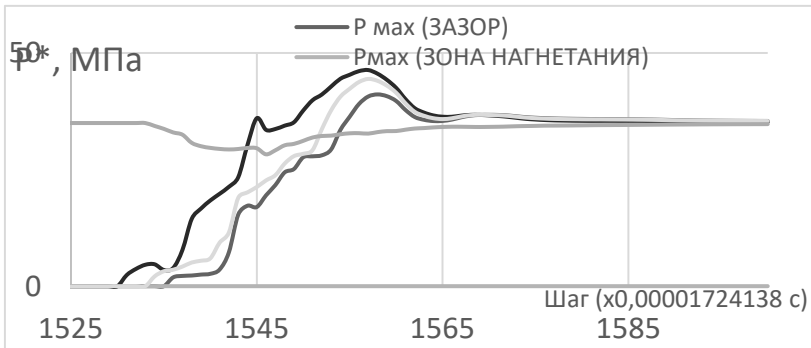


Рис. 3. График зависимости полного давления от шага

Также важно рассмотреть поле распределения давления и векторное направление скорости потока (рис. 4). Векторы направлены в сторону цилиндра, следовательно, основной удар приходится именно на него, т.е. на плунжер.

Резкий скачок параметров сказывается и на картине расхода (рис. 5). На графике можно увидеть кратковременные пики расхода.

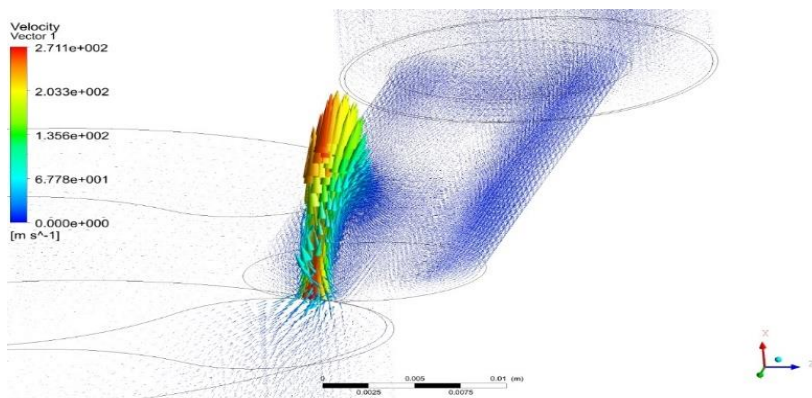


Рис. 4. Векторы скорости потока в момент гидроудара

Среднее значение расхода в данной модели можно определить из графика путём деления разницы максимального и минимального значений пополам, т.е. на один плунжер приходится теоретический расход, равный

$$(1) Q_{\text{сред}1}^{\text{теор}} = \frac{Q_{\text{max}} - Q_{\text{min}}}{2} = \frac{5344 - 13}{2} = 20,22 \text{ л/мин.}$$

Для определения смоделированного полного расхода для аксиально-плунжерного насоса необходимо полученный средний теоретический расход умножить на количество плунжеров ( $z = 7$ ):

$$(2) Q_{\text{сред}}^{\text{теор}} = Q_{\text{сред}1}^{\text{теор}} \cdot z = 20,22 \cdot 7 = 141,54 \text{ л/мин.}$$

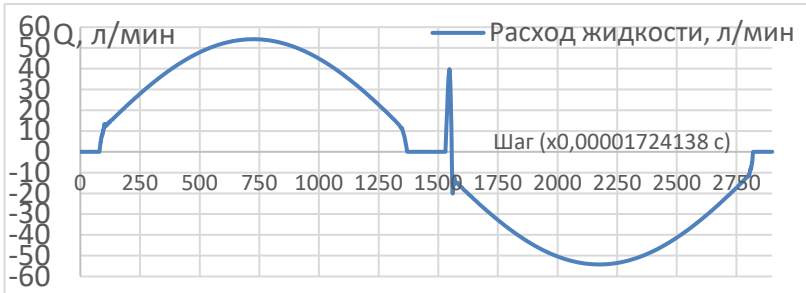
Безусловно, данное допущение является грубым, так как не учитываются перетечки между плунжерами во время их одновременного перекрытия зоны нагнетания, однако этого достаточно для оценки порядка расхода и, следовательно, правильно-сти моделирования. Для данной проверки сравнивается смоделированный расход и значение теоретического расхода, которое получено аналитическим путём.



Данное значение соответствует теоретической величине расхода (без учёта объёмных потерь). Сравнивая его с величиной, рассчитанной аналитически, которая равна

$$(3) Q_m = \frac{Q_{\text{эф}}}{\eta_0} = \frac{7,5}{0,97} = 7,73 \frac{\text{м}^3}{\text{час}} = 0,13 \frac{\text{м}^3}{\text{мин}} = 130 \frac{\text{л}}{\text{мин}}$$

Разница значений в 8,9% говорит о правильном функционировании модели.



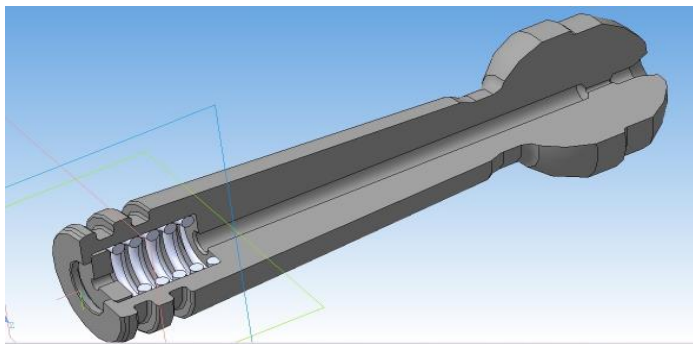
*Рис. 5. График расхода жидкости для 1 плунжера, л/мин*

## **5. Модификация конструкции**

Полученные данные о величии удара и его направлении дают основания для его компенсации путём демпфирования: резкий скачок давления гасится упругой средой или механизмом. При условии наличия необходимых материалов внутри плунжера можно расположить демпфирующий, невпитывающий материал или демпфирующую среду, в которой бы находилась сферическая головка плунжера. Упругое демпфирование мест соприкосновения плунжера с управляющим валом позволит компенсировать вибрации в сторону ответственного органа системы. Данные идеи пока имеют только теоретический характер. Для осуществления упругой компенсации гидроудара также можно рассмотреть предохранительный клапан с пружиной (рис. 6).

Данная конструкция была рассчитана на прочность в программе ANSYS Workbench 18.1. Основное тело модифицированного плунжера было разбито на элементы размера 1 мм,

а места с содержанием концентраторов напряжений, острых кромок по 0,2 мм. Пружина проходит расчёт на прочность. Но запирающий элемент и корпус плунжера не проходят по коэффициенту запаса текучести. Небольшая разница коэффициентов запаса от минимальных необходимых показывает возможность доработки конструкции.



*Рис. 6. 3D-модель предложенной модификации*

## 6. Заключение

Проведён подробный анализ явления гидроудара и показана необходимость его исключения. Осуществлён анализ имеющихся подходов динамического моделирования АПГ и конструкций плунжеров.

Выполнен динамический расчёт рабочего процесса аксиально-плунжерного насоса. Результатами являются графики расхода и давлений, динамическое представление процесса гидроудара и деформации пружины в предохранительном клапане. Определена амплитуда гидроудара  $\Delta P = 11,5 \text{ МПа}$ , который на 32,9% превышает значение давления зоны нагнетания.

Выдвинуты методы, направленные на борьбу с гидроударом. Проведён анализ на прочность одной из предложенных конструкций. Полученные результаты могут быть использованы при разработке новых и модификации имеющихся аксиально-плунжерных гидромашин (АПГ).

## Литература

1. БЕЛОВ Н.А., НИКИТИН О.Ф. *Профилирование проточной части нагнетательного канала аксиально-поршневого насоса* // МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2019. – 53 с.
2. НИКОЛЕНКО И.В., РЫЖАКОВ А.Н. *Математическое моделирование рабочего процесса в гидроприводе на основе регулируемых аксиально-поршневых гидромашин* // Наука и образование. МГТУ им. Баумана. – 2015. – №9 – С. 17–31.
3. ПУЗАНОВ А.В. *Гидромеханический анализ ходовой части аксиально-поршневой гидромашин* // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2016. – №4. – С.161–169.
4. ПУЗАНОВ А.В., ЕРШОВ Е.А. *Моделирование индикаторной диаграммы аксиально-плунжерной гидромашин* // Вестник Брянского государственного технического университета. – 2017. – №3(56) – С. 29–35.
5. РОДИОНОВ Л.В. и др. *Методические указания для курсового проекта «Проектирование объемного насоса» метод. указания.* – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – С. 32.
6. BERTA G.L., CASOLI P, VACCA A. *Simulation model of axial piston pumps inclusive of cavitation* // Proc. of Fluid Power Systems and Technology Division (FPSTD) ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, 2015.
7. BIN ZHANG, JIEN MA, HAOCEN HONG, HUAYONG YANG, YOUTONG FANG *Analysis of the flow dynamics characteristics of an axial piston pump based on the computational fluid dynamics method* // Journal of Aeronautics. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics. – 2017. – Vol. 11. – P. 86–95.
8. EDGE K.A., DARLING J. *Cylinder pressure transients in oil hydraulic pump with sliding plate valves.* – School of Engineering, University of Bath, 2016. – 45 p.
9. GUAN CHANGBIN, JIAO ZONGXIA, HE SHOUZHAN *Theoretical study of flow ripple for an aviation axial-piston pump with damping holes in valve* // Journal of Aeronautics. School

of Automation Science and Engineering, Beihang University, Beijing, China, 2013. – 182 p.

10. IVANTYSYNOVA M. *The Piston Cylinder Assembly in Piston Machines // A Long Journey of Discovery* Maha Fluid Power Research Center, Purdue University, USA, 2013. – 25 p.

## **SIMULATION OF A WATER HAMMER IN AN AXIAL PISTON PUMP**

**Ekaterina Tretyakova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, student (ekaterina\_tretikova@mail.ru).

*Abstract: The paper presents an approach to modeling an axial piston pump compact series with an inclined block and performed a hydrodynamic calculation. Existing models of the axial piston pump were studied, during which a jump in flow was found at the time of water hammer, but the "shock magnitude" was unknown. During modeling, assumptions related to the properties of the working fluid and the geometry of the plunger were introduced, and temperature changes were also not taken into account. Four stages were identified in the modeling process. The first stage involves the creation of a fluid volume - a fluid model from a solid model of the pump. In the second step, a mesh was created. The third stage is devoted to creating macros for the movement of the previously selected pump components. At the fourth stage, all prepared parts of the model are uploaded to Fluent 18.1 and the calculation parameters are set. The adequacy of the resulting model was assessed by comparing the simulated total pump flow with the theoretical flow calculated analytically. Upon the simulation, the amplitude of the pressure jump was calculated during the water hammer in the operating mode of the pump at the maximum discharge pressure. A method was proposed to reduce it. Changes have been made to the design of the plunger. The strength of the modified structure was calculated.*

**Keywords:** axial piston pump, hydrodynamic calculation, model, plunger, mesh, water hammer, valve.

УДК 62-12

ББК 31.16

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.5

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 27.11.2022.*

*Опубликована 31.01.2023.*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРХИТЕКТУРЫ НЕЙРОННОЙ СЕТИ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ЗАРЯДА АККУМУЛЯТОРА

Яковлев И. А.<sup>1</sup>, Елизарова А. В.<sup>2</sup>, Саитова Г. А.<sup>3</sup>  
(ФГБОУ ВО Уфимский государственный авиационный  
технический университет, Уфа)

*Рассматривается задача прогнозирования состояния заряда аккумулятора, на основе нейронных сетей. Были исследованы два типа рекуррентных нелинейных авторегрессионных нейронных сетей в задаче прогнозирования состояния заряда аккумулятора в процессе его использования. Основным критерием качества прогнозирования выступала среднеквадратичная ошибка. По результатам исследования была выбрана оптимальная структура нейронной сети.*

Ключевые слова: химический источник тока, нейросетевое моделирование, литий-ионный аккумулятор, прогнозирование, уровень разряда аккумулятора.

### 1. Введение

Перспективы развития техники гражданского и военного применения, в том числе создание систем накопления и хранения электрической энергии, в частности для автономных необитаемых подводных аппаратов (АНПА), а также обитаемых подводных аппаратов (ОПА), во многом определяются наличием высокоэнергоемких источников электроэнергии.

Для обеспечения электрической энергией двигателей, электронной аппаратуры и автоматизированных систем управления широко применяются системы электроснабжения на основе химических источников тока (ХИТ), которые наиболее полно отвечают требованиям к комплексам вооружения в части простоты в управлении, постоянной готовности к работе на нагрузку и минимально необходимого обслуживания в процессе эксплуа-

---

<sup>1</sup> Илья Андреевич Яковлев, студент каф. АСУ (ilya-yakovlev-1999@bk.ru).

<sup>2</sup> Анастасия Валерьевна Елизарова, аспирант каф. ТК (elizarovaanastasia@gmail.com).

<sup>3</sup> Гузель Асхатовна Саитова, к.т.н., доцент (saitova@bk.ru).

тации. При работе большинства ХИТ отсутствуют акустические и тепловые шумы, что обеспечивает повышенную скрытность функционирования комплексов различного назначения [3]. К таким источникам энергии относятся литий-ионные аккумуляторы, для которых необходимо обеспечить безопасную работу.

Самым опасным последствием отказов аккумуляторов является тепловой разгон, во время которого происходит постоянный рост температуры аккумулятора, приводящий к возгораниям и взрывам [6]. Одним из наиболее эффективных технологических способов достижения высокой степени надёжности и безопасности эксплуатации аккумуляторных батарей является тщательный подбор аккумуляторов по электрическим характеристикам. При подборе максимально близких по своим характеристикам аккумуляторов возрастает ресурс и время работы всей батареи за счёт экономии энергии на балансировке отдельных аккумуляторных блоков, составляющих батарею. По достижению минимального значения напряжения аккумулятора дальнейший его разряд приведёт к глубокому разряду, что резко сократит ресурс аккумулятора. Для того чтобы момент наступления минимального напряжения не был неожиданным, необходимо прогнозировать состояние заряда аккумулятора.

Из-за сложной природы процесса разряда аккумулятора классические методы, основанные на физических законах, зачастую дают недостаточную точность прогнозирования состояния заряда аккумулятора [27]. Поэтому одной из актуальных задач является отслеживание состояния заряда аккумулятора в реальном времени для учёта оставшегося времени работы системы в заданном режиме [10–26]. В работе предлагается использование нейронной сети для определения уровня заряда аккумулятора.

## **2. Проблема прогнозирования состояния заряда аккумуляторной батареи**

### **2.1. ОЦЕНКА ЗАПАСА ЁМКОСТИ АККУМУЛЯТОРНОЙ БАТАРЕИ**

Пусть состояние заряда аккумулятора  $SOC$  в момент времени  $t$  определяется отношением оставшейся ёмкости  $Q_r(t)$  к номинальной  $Q_0$  по уравнению (1). Тогда оставшаяся ёмкость

в момент времени  $t$  определится как разность между номинальной ёмкостью, когда аккумулятор полностью заряжен, и суммой затраченных ёмкостей на каждом из предыдущих шагов (2). Для упрощения примем номинальную ёмкость равной номинальной ёмкости аккумулятора на предыдущем цикле разряда  $Q_0(\tau) = Q_0(\tau - 1)$ , полагая эффект старения аккумулятора равным нулю:

$$(1) \text{ SOC}(t) = \frac{Q_r(t)}{Q_0} \cdot 100\%,$$

$$(2) Q_r(t) = Q(0) - \sum_{i=1}^{t-1} Q(i).$$

Общая затраченная ёмкость  $Q$  аккумулятора на протяжении процесса во временном диапазоне от  $t_1$  до  $t_2$  определяется произведением напряжения на ток нагрузки:

$$(3) Q = \int_{t_1}^{t_2} W(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} U(t) \cdot I(t) dt.$$

Представление ёмкости через мощность выбрано не случайно и рассматривается с точки зрения предположения о компенсации падающего напряжения возрастающим током в процессе разряда. Тогда в установившемся режиме кривая мощности будет меняться с меньшей скоростью и будет более предсказуемой, как если бы оценка ёмкости происходила только по току. Это облегчит получение точной оценки оставшейся энергии.

Для того чтобы определить оставшееся время работы аккумулятора на заданной мощности, необходимо разделить оставшуюся ёмкость  $Q_r(t)$  на текущую мгновенную мощность  $W_t$ :

$$(4) T_t = \frac{Q_r(t)}{W_t}.$$

В условиях меняющегося значения мощности  $\frac{dW}{dt} \neq 0$  расчёт оставшегося времени, основанный на полученном значении мощности  $W_t$ , не несёт практической информации, так как сразу после измерения мощность примет другое значение и величина оставшегося времени  $T_t$  поменяется. Таким образом, целесообразно оценивать оставшееся время, опираясь на следующее оценочное значение мощности  $\hat{W}_{t+1}$  (см. рис. 1).

По первому и второму законам коммутации ток и напряжение в цепи не могут измениться мгновенно. Исходя из этих правил переход  $\Delta W(t)$  от одного значения мощности к другому представляет собой нелинейную зависимость.

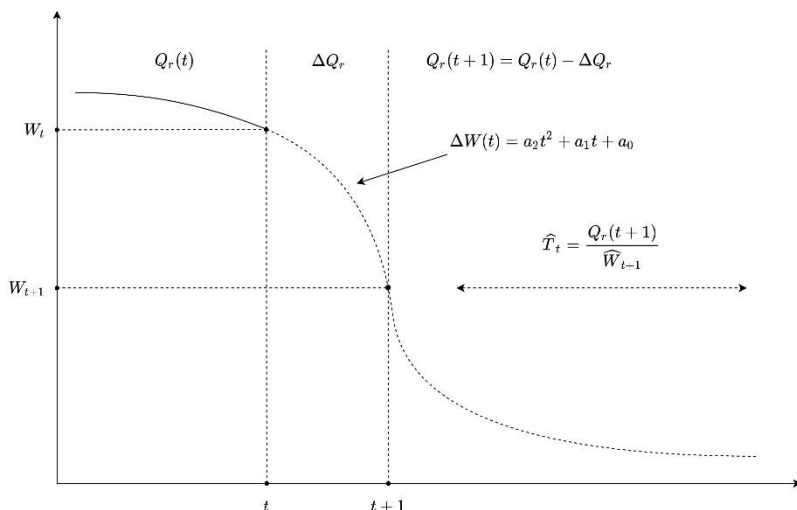


Рис. 1. Определение оставшегося времени работы аккумулятора  $T_t$  на основе значения мощности  $\widehat{W}_{t+1}$  в момент времени  $t + 1$

Оптимальным будет аппроксимировать этот переход полиномом второго порядка. Тогда количество энергии, затраченной в момент переходного процесса, определяется зависимостью

Зная величину энергии  $\Delta Q_r$ , затраченную на переход от одного значения мощности к другому, можно определить значение оставшейся ёмкости  $Q_r(t + 1)$  на следующем шаге. На основе рассчитанной ёмкости определяется оценочное значение оставшегося времени работы  $\widehat{T}_t$  на заданной мощности по соотношению

$$(5) \quad \widehat{T}_t = \frac{Q_r(t) - \Delta Q_r}{\widehat{W}_{t+1}} = \frac{Q_r(t+1)}{\widehat{W}_{t+1}}.$$

Таким образом, для корректной оценки состояния заряда аккумулятора требуется определять величину мощности на следующем шаге дискретного процесса так, чтобы ошибка между реальной величиной  $W_{t+1}$  и оценочной  $\widehat{W}_{t+1}$  стремилась к нулю:

$$(6) \quad \varepsilon = |W_{t+1} - \widehat{W}_{t+1}| \rightarrow 0.$$



## **2.2. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЯ НА КЛЕММАХ АККУМУЛЯТОРНОЙ БАТАРЕИ**

В случае разряда батареи в режиме постоянного тока (CC) или сопротивления (CR) функции мощности  $W_{CC}(t)$  и  $W_{CR}(t)$  в обоих сценариях будут повторять форму функции напряжения разряда  $U(t)$  аккумуляторной батареи в соответствии с законом Ома для участка цепи (8). А функция мощности примет вид (9) или (10) для постоянного тока или постоянного сопротивления соответственно, где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности:

$$(7) \quad U = IR,$$

$$(8) \quad \hat{W}_{t+1}(t) \propto \alpha \hat{U}_{t+1}(t),$$

$$(9) \quad \hat{W}_{t+1}(t) \propto \frac{1}{\alpha} \hat{U}_{t+1}^2(t).$$

Зависимость напряжения разряда аккумуляторной батареи от времени представляет собой нелинейный процесс. Такой процесс является сложным и может быть описан эмпирическими соотношениями с большим количеством входных параметров, среди которых имеются экспериментальные константы. Из-за большого количества неуточнённых параметров и в силу естественных эффектов аккумулятора применение эмпирических зависимостей на практике становится невозможным. Помимо этого, такие параметры как температура аккумулятора, токи разряда/заряда, количество циклов перезаряда влияют на скорость деградации ёмкости аккумулятора, функция которой также имеет нелинейный характер [7, 9].

Таким образом, так или иначе приходится идентифицировать объект исследования. Увеличение входных параметров пропорционально вызывает сложности в их уточнении и оценки адекватности получаемого результата, уменьшение входных параметров заставляет чаще обращаться к идентификации реальных параметров аккумулятора, занимая тем самым полезное время и прерывая его работу. Непрерывность в работе аккумуляторной батареи может стать принципиальным условием в зависимости от приложения [1].

Отчасти вопрос компромисса между количеством входных параметров и идентификацией реальных параметров аккумулятора решается применением интеллектуальных методов, в частности нейронных сетей. Нейронная сеть, в основе которой со-

держатся весовые коэффициенты, позволяет найти зависимость между входными и выходными значениями путём настройки этих весовых коэффициентов. Процесс настройки весовых коэффициентов называется обучением. Тогда задача прогнозирования состояния заряда аккумулятора сводится к определению входных параметров, данных, используемых для обучения и выбору архитектуры нейронной сети.

В случае оценки состояния заряда аккумулятора необходимо найти зависимость между входными параметрами времени относительно начала разряда, температуры ячейки и тока нагрузки, чтобы спрогнозировать выходное значение напряжения аккумулятора. Данная задача является задачей прогнозирования временных рядов, для которой необходимо правильно определить архитектуру и модель нейронной сети.

### **3. Обучение рекуррентных нейронных сетей временных рядов**

#### **3.1. ВЫБОР АРХИТЕКТУРЫ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

На сегодняшний день в задачах оценки состояния заряда аккумулятора активно применяются такие рекуррентные нейронные сети как *LSTM* и *GRU* [8]. Такие нейронные сети лишены недостатка экспоненциального затухания градиента и демонстрируют высокую точность прогнозирования. Однако, несмотря на все их преимущества по сравнению с *NARX*- и *NAR*-рекуррентными нейронными сетями, их архитектура сложна наличием большого количества параметров, процесс синтеза и обучения становится более ресурсоемким. Из-за большого количества параметров *LSTM*-сети легко переобучить, они чувствительны к инициализируемым значениям весовых коэффициентов.

В условиях автономности необитаемого объекта потребность в быстрой перестройке параметров нейронной сети для достижения желаемой точности путём переобучения играет более важную роль, чем сохранение точности прогнозирования в долгосрочном периоде на первоначальных неизменяемых обучаемых данных. Таким образом, основным преимуществом

в задаче прогнозирования состояния заряда аккумуляторной батареи в условиях автономности необитаемого объекта является возможность легко переобучить нейронную сеть на новые данные, сохраняя при этом достаточную точность прогнозирования.

### *3.2. ПОДГОТОВКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ*

В процессе проектирования нейронной сети встаёт вопрос о выборе верной архитектуры. Архитектура определяет фундаментальные правила организации слоёв, нейронов и связей между ними в нейронной сети. Так же как и для задач прогнозирования временных рядов разработаны такие архитектуры как нейронные сети прямого распространения и рекуррентные нейронные сети [5]. Данная работа не ставит перед собой цели глобальной оптимизации гиперпараметров выбранной нейронной сети. Определяется малая исследуемая область параметров по количеству нейронов в скрытом слое, числу скрытых слоёв и величинам задержек по обратной связи и по входу, которая включает в себя окрестность допустимых параметров нейронной сети с незначительным изменением в точности прогнозирования. Изменение числа задержек не приводит к желаемому увеличению точности. Увеличение скрытых слоёв, так же как и количества нейронов в них, приводит к усложнению процесса обучения, из-за чего нивелируется основное преимущество использования *NARX*- и *NAR*- нейронных сетей перед *LSTM* и *GRU*. Исходя из этого, нейронные сети с количеством скрытых слоёв больше чем один и с большим числом задержек в рамках данной работы рассматриваться не будут.

Перед началом формирования обучающей выборки необходимо обеспечить её репрезентативность и непротиворечивость данных. Данные, собранные с датчиков, зачастую имеют шумы и выбросы, от которых необходимо избавиться. Частота дискретизации данных составляет 10 секунд.

Конфигурация обучения у всех нейронных сетей следующая:

- максимальное число эпох в процессе обучения составляет 10000;
- количество задержек по обратной связи у всех нейронных сетей составляет 20 единиц;

- разделение обучающих данных – блочное;
- часть обучающей выборки составляет 70% от общего числа данных;
- часть тестовой выборки составляет 15% от общего числа данных;
- часть контрольной выборки составляет 15% от общего числа данных.

В качестве обучающей выборки выступают данные NASA по разряду литий-ионного аккумулятора ёмкостью 2 Ач. В наборе имеются данные по напряжению на клеммах аккумулятора ( $U$ , В), времени разряда по каждому циклу ( $\tau$ , сек), току нагрузки ( $I$ , А) и температуре аккумулятора ( $T$ , °С). Обучающая выборка состоит из данных по трём *Li-Ion*-аккумуляторным ячейкам с количеством данных по каждой равным примерно 34000. Ток разряда во всех случаях постоянный и равен 1 А.

Создание нейронной сети осуществляется с использованием *MATLAB* и пакета *ntstool*. Функции создания *NAR*- и *NARX*-сети – *narnet* и *narxnet* соответственно.

### 3.3. НЕЛИНЕЙНАЯ АВТОРЕГРЕССИОННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ

Нелинейная авторегрессионная нейронная сеть использует на входе только вектор значений напряжения, описывающий процесс разряда аккумулятора, и по предыдущим значениям прогнозирует последующее на шаг вперёд.

Классическая архитектура последовательно-параллельной нелинейной авторегрессионной нейронной сети с 32 нейронами в одном скрытом слое и 20 единицами задержек по обратной связи изображена на рис. 2 [4].

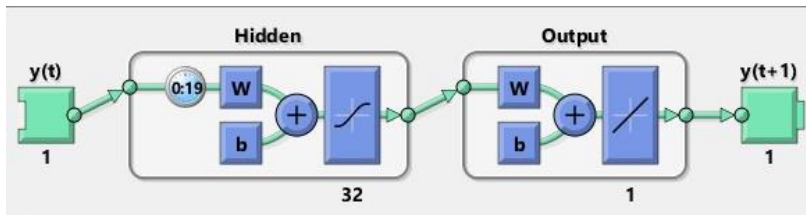


Рис. 2. Классическая архитектура последовательно-параллельной нелинейной авторегрессионной нейронной сети

Для определения зависимости качества прогнозирования нелинейной авторегрессионной нейронной сети от количества нейронов в скрытом слое и алгоритмов обучения были созданы и обучены нелинейные авторегрессионные нейронные сети с использованием трёх разных алгоритмов обучения (см. таблицы 1–3).

*Таблица 1. Анализ производительности нелинейной авторегрессионной нейронной сети с использованием метода Левенберга – Маркварда*

№	Количество скрытых слоёв	Количество нейронов в скрытом слое	Общая ошибка прогнозирования алгоритмов обучения	
			Левенберга – Маркварда	Минимальная ошибка достигнута на эпохе
1	1	4	3,7619e-05	2894
2	1	16	6,1006e-05	1318
3	1	32	1,0929e-04	684
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$			6,9305e-05	1632
$ \max x - \min x $			7,1671e-05	2210
$\frac{ \max x - \min x }{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \cdot 100\%$			103,4%	135,4%

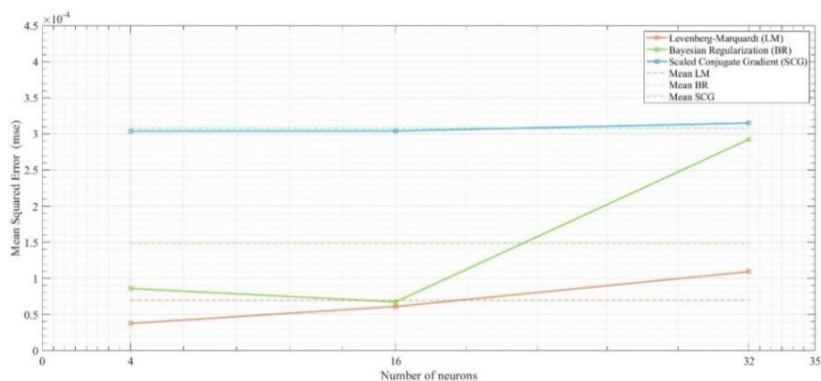
Можно видеть, как сильно меняется ошибка прогнозирования от количества нейронов в нейронной сети. Сильнее всего количество нейронов на ошибку прогнозирования влияет в случае применения алгоритма обучения байесовской регуляризации и меньше всего – в случае применения алгоритма обучения масштабируемого сопряжённого градиента. Данные зависимости показаны на рис. 3.

Таблица 2. Анализ производительности нелинейной авторегрессионной нейронной сети с использованием метода байесовской регуляризации

№	Количество скрытых слоёв	Количество нейронов в скрытом слое	Общая ошибка прогнозирования алгоритмов обучения	
			Байесовская регуляризация	Минимальная ошибка достигнута на эпохе
1	1	4	8,6028e-05	210
2	1	16	6,7404e-05	527
3	1	32	2,9241e-04	328
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$			1,4861e-04	355
$ \max x - \min x $			2,2501e-04	317
$\frac{ \max x - \min x }{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \cdot 100\%$			151,4%	89,3%

Таблица 3. Анализ производительности нелинейной авторегрессионной нейронной сети с использованием метода масштабированного сопряжённого градиента

№	Количество скрытых слоёв	Количество нейронов в скрытом слое	Общая ошибка прогнозирования алгоритмов обучения	
			Масштабируемый сопряжённый градиент	Минимальная ошибка достигнута на эпохе
1	3,0370e-04	4	3,0370e-04	5021
2	3,0402e-04	16	3,0402e-04	6230
3	3,1509e-04	32	3,1509e-04	9921
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$			3,0760e-04	7057
$ \max x - \min x $			1,1390e-05	4900
$\frac{ \max x - \min x }{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \cdot 100\%$			3,7%	69,4%



*Рис. 3. Зависимость среднеквадратичной ошибки от количества нейронов нелинейной авторегрессионной нейронной сети на разных алгоритмах обучения*

Также следует обратить внимание на количество эпох, необходимых для достижения минимальной ошибки прогнозирования. В случае использования алгоритма Левенберга – Маркварда можно наблюдать обратно-пропорциональную зависимость между количеством нейронов в скрытом слое и количестве эпох по достижению минимальной ошибки. Обратную картину можно видеть при использовании алгоритма масштабируемых сопряжённых градиентов, где количество эпох пропорционально возрастает с увеличением количества нейронов в скрытом слое. В алгоритме байесовской регуляризации количество эпох сначала пропорционально возрастает до какого-то определённого количества нейронов, а потом обратно-пропорционально с увеличением количества нейронов в скрытом слое уменьшается количество требуемых эпох по достижению минимальной ошибки. Более подробно это можно наблюдать графически на рис. 4.

Учитывая данные, изображённые на рис. 3 и рис. 4, можно видеть, что в алгоритме масштабируемого сопряжённого градиента при увеличении количества нейронов увеличивается количество эпох, необходимых для достижения минимальной ошибки, однако ошибка при этом остаётся практически неизменной. В алгоритме байесовской регуляризации наблюдается соответ-

ствие увеличение количества эпох уменьшению ошибки. В общем случае количество требуемых эпох в зависимости от количества нейронов можно считать постоянным. Однако вопрос минимальной ошибки от количества нейронов в промежутке [4; 32] [4; 32] [4; 32] остаётся открытым. В алгоритме Левенберга – Маркварда наблюдается соответствие увеличения ошибки уменьшению количества требуемых эпох. С увеличением количества нейронов ошибка увеличивается.

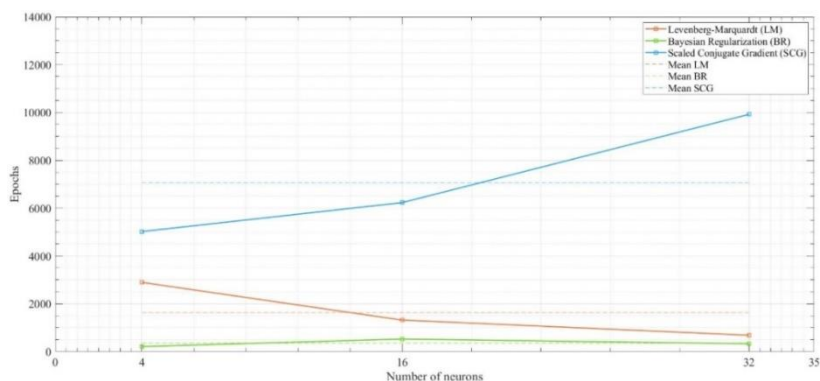


Рис. 4. Зависимость требуемых количеств эпох от количества нейронов нелинейной авторегрессионной нейронной сети на разных алгоритмах обучения

Результаты процесса обучения нелинейных авторегрессионных нейронных сетей представлены на рис. 5. По оси абсцисс указывается количество эпох, по оси ординат – среднеквадратичная ошибка. Синим цветом обозначен график ошибки обучающей выборки, красным – ошибка тестовой выборки, зелёным – ошибка контрольной выборки.

Результаты прогнозирования нейронных сетей с разным количеством нейронов и тремя разными алгоритмами обучения в зависимости от периода поступления данных на вход представлены на рис. 6. Период поступления данных увеличивается в 4 раза, а потом – в 16 раз от начального, который составляет 10 секунд.



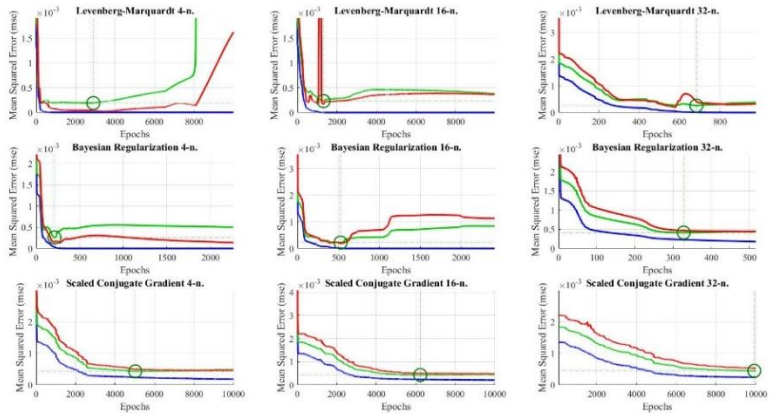


Рис. 5. Достижение минимальной ошибки в процессе обучения нелинейных авторегрессионных нейронных сетей

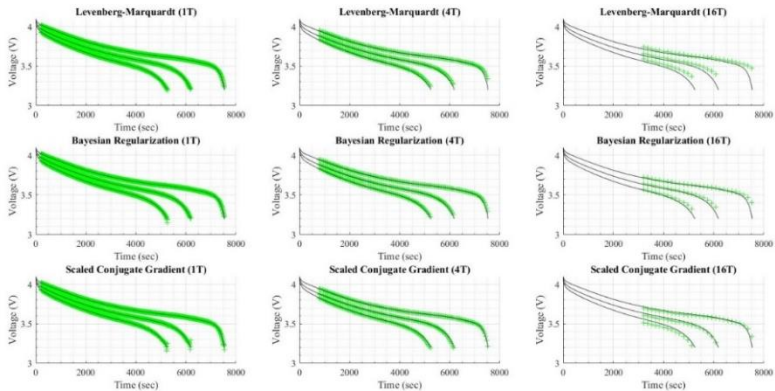


Рис. 6. Прогнозирование состояния заряда аккумулятора нелинейной авторегрессионной нейронной сети с 4 нейронами в скрытом слое

Основным критерием качества нелинейной авторегрессионной нейронной сети в задаче прогнозирования состояния заряда аккумулятора является точность прогнозирования. Дополнительным критерием будет служить способность качественно

прогнозировать состояние заряда аккумулятора на разных периодах входных данных. Сложность алгоритмов обучения Левенберга – Маркварда и байесовской регуляризации несопоставимы со сложностью алгоритма масштабируемого сопряжённого градиента. Время, за которое происходит обучение нейронной сети на разных алгоритмах обучения, вне зависимости от количества эпох примерно равно между собой, поэтому количество эпох не будет выступать критерием оптимальности. Допустимыми архитектурами будут считаться те, ошибка которых ниже средней между максимальной и минимальной по всем алгоритмам обучения и по всем количествам нейронов. Таким образом, средняя ошибка будет составлять  $1,7635e-04$ .

С учётом данных на рис. 3 и в таблице 1 можно выделить допустимые архитектуры нелинейной авторегрессионной нейронной сети (см. таблицу 4).

*Таблица 4. Допустимые архитектуры нелинейной авторегрессионной нейронной сети*

Ошибка прогнозирования (ниже средней $1,7635e-04$ )	Архитектура нелинейной авторегрессионной нейронной сети	
	Количество нейронов	Алгоритм обучения
<b>3,7619e-05</b>	<b>4</b>	Левенберга – Маркварда
6,1006e-05	16	Левенберга – Маркварда
6,7404e-05	16	Байесовская регуляризация
8,6028e-05	4	Байесовская регуляризация
1,0929e-04	32	Левенберга – Маркварда

В таком случае оптимальной архитектурой нелинейной авторегрессионной нейронной сети будет являться наличие 4 нейронов в скрытом слое с использованием алгоритма обучения Левенберга – Маркварда.

Также видно, что у всех архитектур наблюдается сложность в прогнозировании третьей экспоненциальной зоны разряда аккумулятора.

По среднеквадратичной ошибке прогнозирования меньше всего от количества нейронов в скрытом слое зависят нейрон-

ные сети, обученные алгоритмом масштабируемых сопряжённых градиентов, и больше всего – нейронные сети, обученные алгоритмом байесовской регуляризации.

По количеству эпох меньше всего от количества нейронов в скрытом слое зависят нейронные сети, обученные алгоритмом масштабируемого сопряжённого градиента, и больше всего – нейронные сети, обученные алгоритмом Левенберга – Маркварда.

### 3.4. НЕЛИНЕЙНАЯ АВТОРЕГРЕССИОННАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ С ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Модель нелинейной авторегрессии с внешними входами (NARX) относится к классу рекуррентных нейронных сетей. Наличие обратных связей позволяет NARX-сети принимать решения, основываясь не только на входных данных, но и с учётом предыстории состояний динамического объекта [7].

Здесь на вход нейронной сети подаются 3 параметра: данные по времени разряда в секундах, ток нагрузки в амперах и температура ячейки в градусах Цельсия.

Классическая архитектура последовательно-параллельной нелинейной авторегрессионной нейронной сети с 32 нейронами в одном скрытом слое и 19 единицами задержек по входу и 1 задержкой по обратной связи изображена на рис. 7.

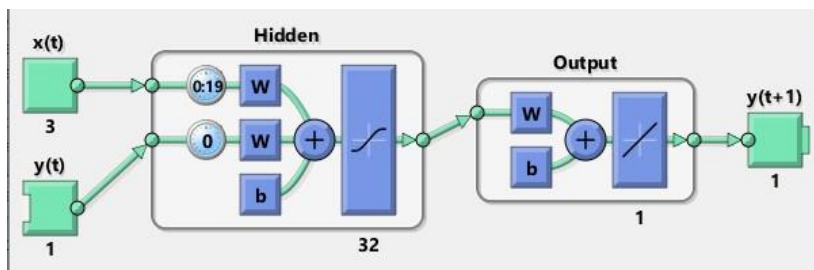


Рис. 7. Классическая архитектура последовательно-параллельной нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью

Количество задержек по внешней обратной связи позволяет делать прогноз на желаемое количество шагов. В нашем случае количество прогнозируемых шагов равно единице.

Для определения зависимости качества прогнозирования нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью от количества нейронов в скрытом слое и алгоритмов обучения были созданы и обучены нейронные сети с использованием разных алгоритмов обучения (см. таблицы 5–7).

*Таблица 5. Допустимые архитектуры нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью с использованием метода Левенберга – Маркварда*

№	Количество скрытых слоёв	Количество нейронов в скрытом слое	Общая ошибка прогнозирования алгоритмов обучения	
			Левенберга – Маркварда	Минимальная ошибка на эпохе
1	1	4	3,4256e-04	148
2	1	16	3,8114e-04	136
3	1	32	3,5747e-04	103
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$			3,6039e-04	129
$ \max x - \min x $			3,8580e-05	45
$\frac{ \max x - \min x }{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \cdot 100\%$			10,7%	34,8%

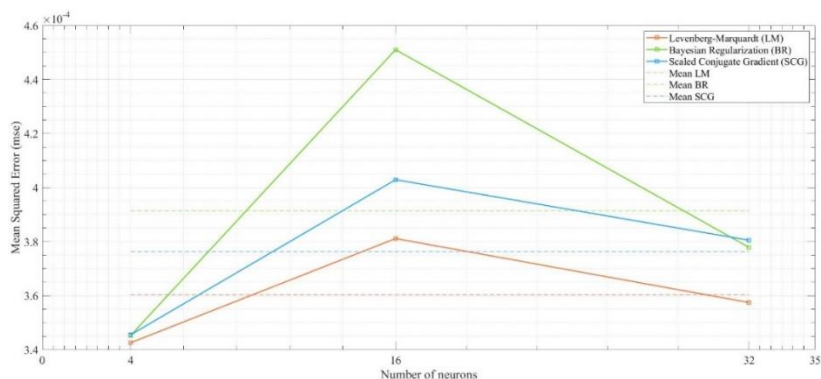
В отличие от нелинейной авторегрессионной нейронной сети в случае обучения нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью можно наблюдать общую тенденцию по всем трём алгоритмам обучения. Единственное отличие заключается в среднем значении ошибки каждого из алгоритмов. Более подробно это можно видеть на рис. 8.

*Таблица 6. Допустимые архитектуры нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью с использованием метода байесовской регуляризации*

№	Количество скрытых слоёв	Количество нейронов в скрытом слое	Общая ошибка прогнозирования алгоритмов обучения	
			Байесовская регуляризация	Минимальная ошибка на эпохе
1	3,4527e-04	4	3,4527e-04	135
2	4,5104e-04	16	4,5104e-04	281
3	3,7790e-04	32	3,7790e-04	83
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$			3,9140e-04	166.33
$ \max x - \min x $			1,0577e-04	198
$\frac{ \max x - \min x }{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \cdot 100\%$			27%	11,9%

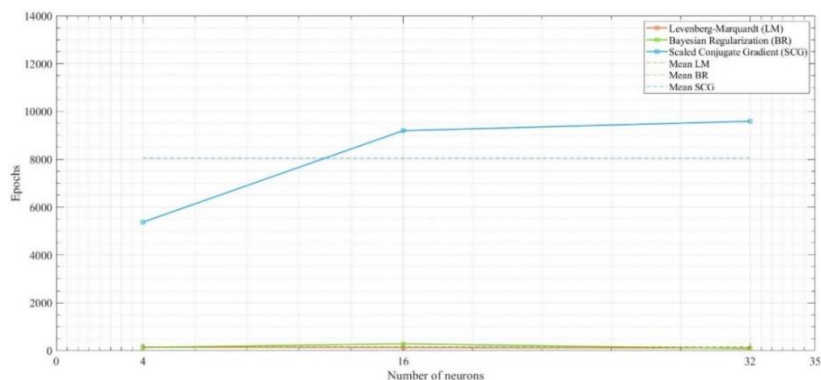
*Таблица 7. Допустимые архитектуры нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью с использованием метода масштабируемого сопряжённого градиента*

№	Количество скрытых слоёв	Количество нейронов в скрытом слое	Общая ошибка прогнозирования алгоритмов обучения	
			Масштабируемый сопряжённый градиент	Минимальная ошибка на эпохе
1	3,0370e-04	4	3,4550e-04	5372
2	3,0402e-04	16	4,0292e-04	9196
3	3,1509e-04	32	3,8053e-04	9588
$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$			3,7632e-04	8052
$ \max x - \min x $			5,7420e-05	4216
$\frac{ \max x - \min x }{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \cdot 100\%$			15,3%	52,4%



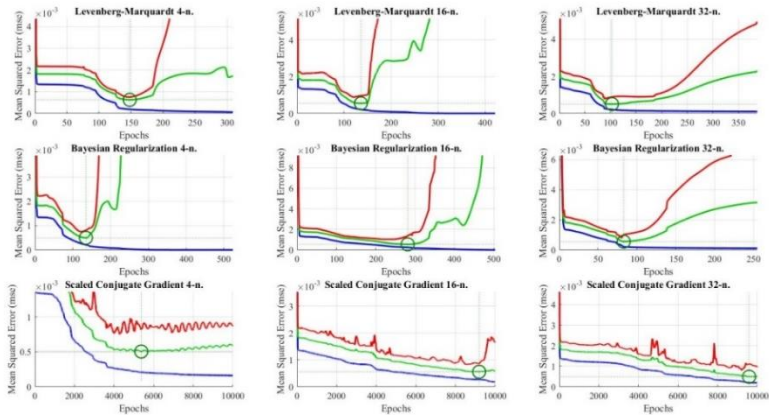
*Рис. 8. Зависимость среднеквадратичной ошибки от количества нейронов нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью на разных алгоритмах обучения*

Количество эпох в зависимости от алгоритма обучения меняется в значительной степени. На рис. 9 можно видеть, что алгоритмы Левенберга – Маркварда и байесовской регуляризации имеют примерно одинаковые количества эпох, в то время как масштабируемый сопряжённый градиент сильно отличается от предыдущих двух. Причиной этому служит всё та же разница в сложности методов.



*Рис. 9. Зависимость требуемых количеств эпох от количества нейронов нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью на разных алгоритмах обучения*

Результаты процесса обучения нелинейных авторегрессионных нейронных сетей с внешней обратной связью представлены на рис. 10. По оси абсцисс указывается количество эпох, по оси ординат – среднеквадратичная ошибка. Синим цветом обозначен график ошибки обучающей выборки, красным – ошибка тестовой выборки, зелёным – ошибка контрольной выборки.



*Рис. 10. Достижение минимальной ошибки в процессе обучения нелинейных авторегрессионных нейронных сетей с внешней обратной связью*

Результаты прогнозирования нейронных сетей с разным количеством нейронов и тремя разными алгоритмами обучения в зависимости от периода поступления данных на вход представлены на рис. 11. Период поступления данных увеличивается в 4 раза, а потом – в 16 от начального, который составляет 10 секунд.

Основным критерием качества, так же как и с нелинейной авторегрессионной нейронной сетью, остаётся точность прогнозирования. Дополнительным критерием будет служить способность прогнозирования состояния заряда аккумулятора при разных периодах поступления входных данных. Допустимыми архитектурами будут считаться те, ошибка которых ниже средней между максимальной и минимальной по всем алгоритмам обу-

чения и по всем количествам нейронов. Таким образом, средняя ошибка будет составлять  $3,9680\text{e-}04$ .

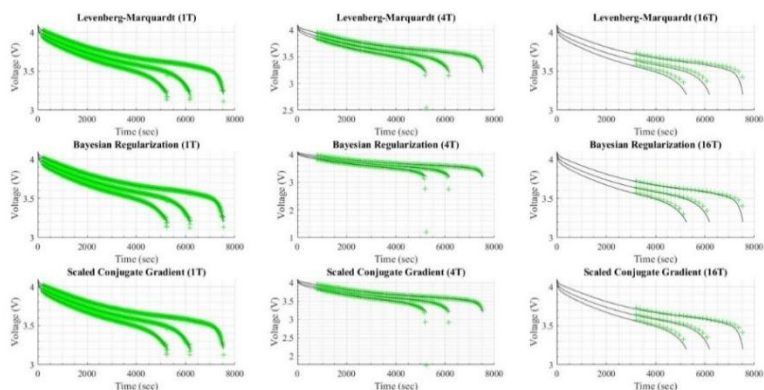


Рис. 11. Прогнозирование состояния заряда аккумулятора нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью с 4 нейронами в скрытом слое

С учётом данных на рис. 8 и в таблицах 5–7 можно выделить допустимые архитектуры нелинейной авторегрессионной нейронной сети (см. таблицу 8).

Таблица 8. Допустимые архитектуры нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью

Ошибка прогнозирования (ниже средней $3,9680\text{e-}04$ )	Архитектура нелинейной авторегрессионной нейронной сети	
	Количество нейронов	Алгоритм обучения
<b><math>3,4256\text{e-}04</math></b>	<b>4</b>	<b>Левенберга – Маркварда</b>
$3,4527\text{e-}04$	4	Байесовская регуляризация
$3,4550\text{e-}04$	4	Масштабируемый сопряжённый градиент
$3,5747\text{e-}04$	32	Левенберга – Маркварда
$3,7790\text{e-}04$	32	Байесовская регуляризация
$3,8053\text{e-}04$	32	Масштабируемый сопряжённый градиент
$3,8114\text{e-}04$	16	Левенберга – Маркварда



В таком случае оптимальной архитектурой нелинейной авторегрессионной нейронной сети будет являться наличие 4 нейронов в скрытом слое с использованием алгоритма обучения Левенберга – Маркварда.

Как и в нелинейной авторегрессионной нейронной сети, везде наблюдается сложность в прогнозировании третьей экспоненциальной зоны разряда аккумулятора.

По среднеквадратичной ошибке прогнозирования меньше всего от количества нейронов в скрытом слое зависят нейронные сети, обученные алгоритмом Левенберга – Маркварда, и больше всего – нейронные сети, обученные алгоритмом байесовской регуляризации.

По количеству эпох меньше всего от количества нейронов в скрытом слое зависят нейронные сети, обученные алгоритмом байесовской регуляризации, и больше всего – нейронные сети, обученные алгоритмом масштабируемого сопряжённого градиента.

#### **4. Сравнение результатов работы нейронных сетей**

Основным отличием между нелинейной авторегрессионной нейронной сетью с внешней обратной связью и без неё заключается в наборе входных данных. Приведены ошибки двух моделей нейронных сетей (см. таблицу 9), имеющих лучшие результаты по прогнозированию состояния заряда аккумулятора с периодом поступления входных данных равным 10 секундам.

*Таблица 9. Оптимальные архитектуры среди NA-R и NARX-нейронных сетей.*

Среднеквадратичная ошибка прогнозирования	Модель нейронной сети	Количество нейронов в скрытом слое	Алгоритм обучения
3,7619e-05	NAR	4	Левенберга – Маркварда
3,4256e-04	NARX	4	Левенберга – Маркварда

В условиях малого количества обучающей выборки применение нелинейной авторегрессионной нейронной сети без внешней обратной связи даёт меньшую ошибку в задаче прогнозирования состояния заряда аккумулятора, чем применение той же нейронной сети с внешней обратной связью.

Так как входными параметрами для нейронной сети с внешней обратной связью являются время, ток нагрузки и температура ячейки, то все они вносят неопределённость в выходной результат. С учётом естественной индивидуальности внутренних характеристик каждой аккумуляторной ячейки, значение изменения температуры при нагреве в процессе разряда зависит от внутреннего сопротивления аккумулятора. При увеличении количества данных в обучающей выборке происходит эффект усреднения, из-за чего прогнозирование состояния заряда таких же ячеек тестовой выборки будет точнее. В нашем случае данных трёх ячеек явно недостаточно, чтобы достичь точности прогнозирования выше, чем у *NAR*-сети. С увеличением количества входных параметров нейронной сети для обучения необходима соразмерная обучающая выборка и архитектура нейронной сети, способная идентифицировать все существующие признаки и способная найти между ними зависимость.

Таким образом, в задаче прогнозирования состояния заряда аккумулятора с применением малой обучающей выборки эффективность использования последовательно-параллельной нелинейной авторегрессионной нейронной сети становится выше, чем использование последовательно-параллельной нелинейной авторегрессионной нейронной сети с внешней обратной связью и множеством входных параметров [2].

## 5. Заключение

В рамках данной работы были исследованы два типа рекуррентных нелинейных авторегрессионных нейронных сетей в задаче прогнозирования состояния заряда аккумулятора в процессе его использования на малой обучающей выборке. Основным критерием качества прогнозирования выступала среднеквадратичная ошибка. Нейронная сеть тестировалась на трёх

испытаниях разряда аккумулятора, данные которого не участвовали в обучающей выборке.

В случае *NAR*-сети обучение проводилось с использованием входного параметра напряжения с аккумулятора в процессе разряда. Для прогнозирования последующего значения напряжения нейронная сеть использовала на входе значения предыдущих состояний напряжения аккумулятора.

В случае *NARX*-сети обучение проводилось с использованием таких входных параметров как относительное время разряда, ток нагрузки, температура ячейки и напряжение ячейки. Для прогнозирования последующего состояния значения напряжения нейронная сеть использовала на входе значения относительного времени, тока нагрузки, температуры ячейки и значения уточнённого напряжения на предыдущих шагах.

По результатам исследования оптимальным типом нейронной сети в условиях ограниченной обучающей выборки оказалась *NAR*-нейронная сеть с 4 нейронами в скрытом слое при 20 единицах задержки на входе в интервале [1, 16] нейронов.

### **Литература**

1. ГАЛУШКИН Н.Е., ГАЛУШКИНА Н.Н. *Анализ эмпирических зависимостей, описывающих разряд щелочных аккумуляторов* // Электрохимическая энергетика. – 2005. – Т. 5, №1. – С. 43–50.
2. ГЕЙДАРОВ П.Ш. *Сравнительный анализ результатов обучения нейронной сети с вычисленными весовыми значениями и с генерацией весовых значений случайным образом* // Автоматика и телемеханика. – 2020. – №7. – С. 56–78. Англ.: GEIDAROV P. *Comparative analysis of the results of training a neural network with calculated weights and with random generation of the weights* // Automation and Remote Control. – 2020. – Vol. 81:7. – P. 1211–1229.
3. ЕРИН С. *Литиевые аккумуляторы: от сырья до готовых химических источников тока* // Технологии в электронной промышленности. – 2014. – №3. – С. 70–73.
4. САИТОВА Г.А., ЕЛИЗАРОВА А.В. *Нейросетевая модель для оценки состояния заряженности литий-ионного аккумуля*

- мулятора // Перспективные информационные технологии (ПИТ–2021) [Электронный ресурс]: труды Международной научно-технической конференции / Под ред. С.А. Прохорова. – Электрон. текстовые и граф. дан.– Самара: Изд-во Самарского научного центра РАН, 2021. – С. 288–293.
5. ХАЙКИН С. *Нейронные сети. Полный курс*. Второе издание: перевод с англ. – М: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.
  6. ЧУДИНОВ Е.А., ТКАЧУК С.А., ШИШКО В.С. *Технологические основы производства литий-ионного аккумулятора* // Электрохимическая энергетика. – 2015. – Т. 15, №2. – С. 84–92.
  7. CHANG W.Y. *The state of charge estimating methods for battery: A review* // International Scholarly Research Notices. – 2013. – Vol. 2013. – 8 p.
  8. LI S. et al. *State-of-charge estimation of lithium-ion batteries in the battery degradation process based on recurrent neural network* // Energies. – 2021. – Vol. 14, No. 2. – P. 306.
  9. TANG X. et al. *Li-ion battery parameter estimation for state of charge* // IEEE American Control Conference (ACC-2011). – IEEE, 2011. – P. 941–946.
  10. TIAN J. et al. *Flexible battery state of health and state of charge estimation using partial charging data and deep learning* // Energy Storage Materials. – 2022. – Vol. 51. – P. 372–381.
  11. VIDAL C. et al. *Machine learning applied to electrified vehicle battery state of charge and state of health estimation: State-of-the-art* // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – P. 52796–52814.
  12. WANG K. et al. *State of charge estimation of composite energy storage systems with supercapacitors and lithium batteries* // Complexity. – 2021. – Vol. 2021.
  13. WANG L. et al. *State of charge estimation for LiFePO<sub>4</sub> battery via dual extended kalman filter and charging voltage curve* // Electrochimica Acta. – 2019. – Vol. 296. – P. 1009–1017.
  14. WANG Q. et al. *Power battery state of charge estimation based on extended Kalman filter* // Journal of Renewable and Sustainable Energy. – 2019. – Vol. 11, No. 1. – P. 014302.

15. WANG Y., CHEN Z. *A framework for state-of-charge and remaining discharge time prediction using unscented particle filter* // *Applied Energy*. – 2020. – Vol. 260. – P. 114324.
16. WEI Z. et al. *Load current and state-of-charge coestimation for current sensor-free lithium-ion battery* // *IEEE Trans. on Power Electronics*. – 2021. – Vol. 36, No. 10. – P. 10970–10975.
17. XI Z. et al. *Learning of battery model bias for effective state of charge estimation of lithium-ion batteries* // *IEEE Trans. on Vehicular Technology*. – 2019. – Vol. 68, No. 9. – P. 8613–8628.
18. XIA Z., QAHOUQ J.A. A. *State-of-charge balancing of lithium-ion batteries with state-of-health awareness capability* // *IEEE Trans. on Industry Applications*. – 2020. – Vol. 57, No. 1. – P. 673–684.
19. XIONG R. et al. *A set membership theory based parameter and state of charge co-estimation method for all-climate batteries* // *Journal of Cleaner Production*. – 2020. – Vol. 249. – P. 119380.
20. XIONG X. et al. *A novel practical state of charge estimation method: an adaptive improved ampere-hour method based on composite correction factor* // *Int. Journal of Energy Research*. – 2020. – Vol. 44, No. 14. – P. 11385–11404.
21. XU Y. et al. *Online identification of battery model parameters and joint state of charge and state of health estimation using dual particle filter algorithms* // *Int. Journal of Energy Research*. – 2022. – Vol. 46, No. 14. – P. 19615–19652.
22. XUAN D.J. et al. *Real-time estimation of state-of-charge in lithium-ion batteries using improved central difference transform method* // *Journal of Cleaner Production*. – 2020. – Vol. 252. – P. 119787.
23. YANG B., WANG Y., ZHAN Y. *Lithium Battery State-of-Charge Estimation Based on a Bayesian Optimization Bidirectional Long Short-Term Memory Neural Network* // *Energies*. – 2022. – Vol. 15, No. 13. – P. 4670.
24. YANG F. et al. *State-of-charge estimation of lithium-ion batteries via long short-term memory network* // *IEEE Access*. – 2019. – Vol. 7. – P. 53792–53799.
25. YANG F. et al. *State-of-charge estimation of lithium-ion batteries using LSTM and UKF* // *Energy*. – 2020. – Vol. 201. – P. 117664.

26. ZHANG K. et al. *State of charge estimation for lithium battery based on adaptively weighting cubature particle filter* // IEEE Access. – 2019. – Vol. 7. – P. 166657–166666.
27. ZHANG R. et al. *State of the art of lithium-ion battery SOC estimation for electrical vehicles* // Energies. – 2018. – Vol. 11, No. 7. – P. 1820.

## DETERMINING THE ARCHITECTURE OF A NEURAL NETWORK IN THE PROBLEM OF ESTIMATING THE STATE OF THE BATTERY CHARGE

**Ilya Yakovlev**, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Student of the department of ACS (ilya-yakovlev-1999@bk.ru).

**Anastasia Elizarova**, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Graduate student of the department of TC (elizarovaanastasia@gmail.com).

**Guzel Saitova**, Ufa State Aviation Technical University, Ufa, Candidate of Sciences in Technology (saitova@bk.ru).

*Abstract: The problem of estimating the state of charge of the battery, based on neural networks, is considered. Two types of recurrent nonlinear autoregressive neural networks were investigated in the problem of estimating the state of charge of a battery during its use. The main criterion for the quality of forecasting was the mean square error. According to the results of the study, the optimal structure of the neural network was chosen.*

**Keywords:** chemical current source, neural network modeling, lithium-ion battery, battery discharge level prediction.

УДК 681.5

ББК 30.2-5-05

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.6

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Э.Ю. Калимулиной.*

*Поступила в редакцию 11.08.2022.  
Опубликована 31.01.2023.*

# СИНТЕЗ ГЕНЕРАТОРА ЗАДАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ МОБИЛЬНЫМ РОБОТОМ

Кокунько Ю. Г.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*При планировании пути следования автономного колесного робота возникают такие проблемы, как обеспечение безопасности движения, гладкости и ограниченности кривизны пути и скорости ее изменения с учетом проектных ограничений робота как механического объекта управления. Совместное решение этих проблем может привести к громоздким аналитическим расчетам, нереализуемым в реальном времени. В данной работе предлагается упростить и автоматизировать генерацию плоских путей для колесного робота, совмещающую решение указанных проблем. На первом этапе строится примитивный путь в виде плоской ломаной, отрезки которой соединяют опорные точки маршрута и обеспечивают безопасное выполнение рабочего сценария. На втором этапе решается проблема сглаживания сочленений ломаной без использования геометрических расчетов. Для этого предлагается использовать динамический генератор с использованием уравнений движения центра масс колесной платформы. При синтезе корректирующих воздействий генератора, имитирующих управляющие воздействия робота, используется метод декомпозиции и S-образные гладкие и ограниченные нелинейные обратные связи, что позволяет выполнить проектные ограничения робота на скорость, ускорение и управляющие моменты. Поэтому выходные переменные генератора, имитирующие координаты центра масс робота, будут порождать сглаженный естественным образом путь с допустимой кривизной при отслеживании координат опорного негладкого маршрута. Разработанные алгоритмы сглаживания не требуют сложных геометрических построений и специальных вычислительных ресурсов, их можно использовать и на этапе планирования, и в реальном времени на бортовом компьютере.*

Ключевые слова: колесный робот, реализуемая траектория, динамический генератор, проектные ограничения, сигма-функция.

## 1. Введение

На современных производствах, как в гражданских, так и военных отраслях, все активней используются беспилотные

---

<sup>1</sup> Юлия Георгиевна Кокунько, м.н.с. (juliakokunko@gmail.com).

транспортные средства. Базовой задачей при интегрировании мобильного робота в конкретный процесс является планирование пути следования. Факторы, влияющие на выбор тех или иных математических методов для планирования движения, обусловлены миссией робота или группы роботов и особенностями решаемых прикладных задач. К наиболее распространенным факторам относятся: подход к построению пути (локальный или глобальный); геометрическое представление перемещаемого объекта (твердое тело или кинематическая конструкция); свойства окружения (статические или динамические); свойства конфигурационного пространства (равномерное распределение допустимых состояний или наличие узких областей); характер запросов планирования (однократный или многократный); комплектность и возможности сенсорной системы, мощность вычислительных ресурсов бортовой информационно-управляющей системы, используемые методы автоматического управления движением и др. [7, 21].

В данной работе объектом исследования является беспилотная колесная платформа, которая рассматривается как механический объект автоматического управления. Для проектирования законов управления мобильным роботом, как правило, требуется полное аналитическое описание задающих воздействий (т.е. кривой движения в связанной с роботом системе координат) для того, чтобы можно было найти их производные старших порядков, в частности первую и вторую производные, знание которых в большинстве случаев необходимо для синтеза обратной связи [2, 5–6, 8–10, 13, 19]. Учитывая, что мобильный механизм не может изменять скорость и направление движения мгновенно, также требуется обеспечить гладкость и допустимую кривизну заданного пути следования на этапе планирования: маршрут должен быть не только безопасным, но и реализуемым.

Для аналитического описания пути следования используют различные интерполяционные алгоритмы, в частности, кубические *B*-сплайны, которые позволяют формировать гладкие кривые различной формы [2, 8–9, 11–13, 15–16, 18]. Однако формирование сложных составных маршрутов с обеспечением всех



ограничений, продиктованных механической природой объекта управления, требует большого объема вычислений, не всегда выполнимых в реальном времени.

Цель данной работы состоит в том, чтобы упростить и автоматизировать сглаживание опорного примитивного маршрута, который представляет собой набор контрольных точек полигона, соединенных отрезками, и отвечает требованиям безопасности [17]. Координаты этой ломаной рассматриваются как задающие воздействия для виртуального робота. Виртуальный робот – это динамический генератор, который построен в виде уравнений движения центра масс колесной платформы с обратной связью. Использование блочного подхода и  $S$ -образных гладких и ограниченных корректирующих воздействий позволит автоматически учитывать проектные ограничения механической системы на скорости и ускорения [1, 14]. Поэтому при отслеживании опорной ломаной переменные генератора на выходе будут порождать гладкие кривые, которые, в свою очередь, будут являться реализуемыми задающими воздействиями для реального мобильного робота.

Функционирование динамического генератора не требует аналитического описания опорного сигнала и позволяет автоматически учитывать ограничения не только на управления, но и на скорости, что выгодно отличает данный подход от существующих аналогов [2, 8–9, 13]. Предлагаемые алгоритмы сводятся к численному интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не требуют длительного машинного времени, дополнительных геометрических расчетов и могут быть выполнены в реальном времени в информационно-управляющей системе робота.

Статья имеет следующую структуру. Описание кинематической модели колесного робота как основы для построения динамического генератора приводится в разделе 2. Декомпозиционный синтез динамического генератора с учетом проектных ограничений мобильного робота представлен в разделе 3. Результаты имитационного моделирования, подтверждающие эффективность разработанного подхода, представлены в разделе 4.

## 2. Кинематическая модель колесного робота

В качестве объекта управления рассматривается беспилотная колесная платформа. За основу для построений мы принимаем уравнения движения ее центра масс в неподвижной системе декартовых координат  $Ox$  [2, 8, 20]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y} &= v \sin \theta, \\ (1) \quad \dot{\theta} &= vu_1, \\ \dot{v} &= u_2; \end{aligned}$$

где  $x, y$  – координаты центра масс платформы (выходные переменные);  $v$  – ее линейная скорость, предполагается, что в режиме работы  $v \neq 0$ ;  $\theta$  – угол между осью  $Ox$  и центральной линией платформы, которая совпадает с направлением вектора скорости (ориентация платформы относительно неподвижной системы координат);  $u = (u_1, u_2)^T$  – вектор управления, его элементами являются кривизна траектории движения робота  $u_1$  и линейное ускорение  $u_2$ , которые, в свою очередь, регулируются управляющими моментами, развиваемыми приводами постоянного тока.

Динамика исполнительных устройств в данных построениях не учитывается. Первые три уравнения системы (1) описывают ее кинематику, последнее уравнение добавлено для учета ограничений по линейному ускорению.

Для системы (1) рассматривается задача путевой стабилизации, для решения которой закон управления в форме обратной связи, обеспечивающий вывод базовой точки на целевую (допустимую) траекторию и ее движение вдоль заданной кривой, предполагается синтезированным. Для его реализации необходимо знать значения первой и второй производных задающего воздействия, а именно, скорости и ускорения рассматриваемого объекта управления.

Для получения математической модели, имитирующей движение центра масс колесной платформы и предоставляющей информацию о первых и вторых производных выходных пере-

менных, мы представим систему (1) в каноническом виде «вход – выход» с учетом обозначений  $y_1 = (y_{11} := x, y_{12} := y)^T$  [3–4]:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= Bu, \end{aligned}$$

где

$$(3) \quad \begin{aligned} y_2 &= (y_{21} := v \cos \theta; \quad y_{22} := v \sin \theta)^T, \\ B &= \begin{pmatrix} -v^2 \sin \theta & \cos \theta \\ v^2 \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \det B = -v^2 \neq 0, \\ B^{-1} &= \begin{pmatrix} -\sin \theta / v^2 & \cos \theta / v^2 \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу механической природы объекта управления (2) вводятся следующие требования: в режиме движения элементы векторов  $y_2(t)$ ,  $\dot{y}_2(t)$  и, следовательно,  $u(t)$ , должны быть гладкими функциями, ограниченными заданными константами:

$$(4) \quad \begin{aligned} |y_{2j}(t)| &\leq Y_2 \leq V / \sqrt{2}, \\ |\dot{y}_{2j}(t)| &\leq Y_3 \leq A / \sqrt{2}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2, \\ \|y_2(t)\| &= \sqrt{y_{21}^2(t) + y_{22}^2(t)} \leq V, \\ \|\dot{y}_2(t)\| &= \sqrt{\dot{y}_{21}^2(t) + \dot{y}_{22}^2(t)} \leq A, \quad V^2 < A, \end{aligned}$$

где  $V$ ,  $A$  – проектные ограничения конкретного робота на линейную скорость и ускорение, которые обусловлены конструкцией механизма и мощностью исполнительных приводов.

Проектирование динамического генератора, имитирующего движение центра масс колесной платформы (2) с учетом ограничений (4) представлено в следующем разделе.

### 3. Формирование реализуемых путей следования с помощью динамического генератора

Введем динамический генератор, порождающий допустимые для колесного робота кривые движения, как копию уравнений (2) в виде

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= Bw, \end{aligned}$$

где  $x_1, x_2, \dot{x}_2 \in R^2$  – векторы положения, скорости и ускорения центра масс виртуального робота, которые будут использоваться в системе управления реальным роботом в качестве задающих воздействий,  $w \in R^2$  – корректирующие воздействия генератора. Цель управления системой (5) состоит в том, чтобы обеспечить выполнение ограничений (4), а именно:

$$(6) \quad \begin{aligned} |x_{2j}(t)| &\leq Y_2, \\ |\dot{x}_{2j}(t)| &\leq Y_3, t \geq 0, j = 1, 2, \end{aligned}$$

в процессе отслеживании выходными переменными генератора  $x_1(t) = (x_{11}, x_{12})^T$  задающих воздействий  $\chi(t) \in R^2$ . Элементами вектора  $\chi = (\chi_1, \chi_2)^T$  являются координаты опорного пути в неподвижной системе декартовых координат. Они могут быть заданы в аналитическом виде или в виде непрерывных детерминированных сигналов, поступающих в информационно-управляющую систему из автономного источника. Предполагается, что составленный в первом приближении опорный путь отвечает требованиям безопасности, но не является гладким. В простейшем случае он представляет собой набор контрольных точек полигона, соединенных прямыми линиями. Точки сочленений отрезков ломаной являются особыми, в них элементы вектора  $\dot{\chi} = (\dot{\chi}_1, \dot{\chi}_2)^T$  имеют конечные разрывы. В общем случае текущие значения  $\dot{\chi}(t)$  могут быть не известны, но являются ограниченными:

$$(7) \quad |\dot{\chi}_j(t)| \leq X_2 < Y_2, t \geq 0, j = 1, 2.$$

Более конкретные требования к ограничениям  $X_2$ , которые надо обеспечить на этапе планирования первичного пути, будут сформулированы по ходу изложения.

Корректирующие воздействия генератора (5) имитируют управляющие воздействия исходной системы (2), которые одновременно являются задающими воздействиями для исполнительных приводов. Поэтому мы должны выбрать  $w(t)$  из класса

гладких и ограниченных функций с ограниченными производными. Этим требованиям удовлетворяют  $S$ -образные нелинейные функции, такие как арктангенс, гиперболический тангенс, логистическая функция и т.п. Для данной задачи мы выбрали сигма функцию  $\sigma(x) = -\text{th}(-x/2)$  [1, 14]. Для масштабирования сигма-функции мы вводим множитель  $k = \text{const} > 0$  для ее аргумента, а именно:

$$(8) \quad |\dot{x}_j(t)| \leq X_2 < Y_2, t \geq 0, j = 1, 2.$$

В дальнейших вычислениях  $k$  играет роль большого коэффициента (коэффициента усиления) в малой окрестности нуля. Сигма функция определена на всей числовой оси, она гладкая, ограниченная  $|\sigma(kx)| < 1$  и имеет ограниченную производную  $\sigma'(kx) = 0,5k(1 - \sigma^2(kx))$ ,  $0 < \sigma'(kx) \leq 0,5k, x \in R$ .

Мы предлагаем использовать сигма функцию (8) не только в корректирующих воздействиях генератора, но и в локальной связи для того чтобы выполнить заданные ограничения по скорости изменения выходных переменных (6).

Введем ошибку слежения  $e_1 = x_1 - \chi$ ,  $e_1 = (e_{11}, e_{12})^T$ , ее производную  $\dot{e}_1 = x_2 - \dot{\chi}$ , сигмоидальную локальную связь  $x_2 = -m_1\sigma(k_1e_1)$ ,  $\sigma(k_1e_1) = (\sigma(k_1e_{11}), \sigma(k_1e_{12}))^T$ ,  $m_1, k_1 = \text{const} > 0$  и невязку

$$(9) \quad e_2 = x_2 + m_1\sigma(k_1e_1), e_2 = (e_{21}, e_{22})^T.$$

Представим систему (5) в координатном базисе ошибки слежения и невязки (9):

$$(10) \quad e_2 = x_2 + m_1\sigma(k_1e_1), e_2 = (e_{21}, e_{22})^T,$$

где

$$(11) \quad A_1 = \text{diag}(A_{1j}), A_{1j} = 1 - \sigma^2(k_1e_{1j}), 0 < A_{1j} \leq 1, j = 1, 2.$$

Сформировав в системе (10) сигмоидальные корректирующие воздействия в виде

$$(12) \quad w = -B^{-1}(m_2\sigma(k_2e_2) + 0,5m_1k_1A_1x_2), \\ m_2, k_2 = \text{const} > 0, \sigma(k_2e_2) = (\sigma(k_2e_{21}), \sigma(k_2e_{22}))^T,$$

получим замкнутую виртуальную систему в терминах ошибок слежения и невязок:

$$(13) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -m_1 \sigma(k_1 e_1) + e_2 - \dot{\chi}, \\ \dot{e}_2 &= -m_2 \sigma(k_2 e_2) - 0,5 m_1 k_1 \Lambda_1 \dot{\chi}. \end{aligned}$$

В малой окрестности нуля сигма-функция близка к линейной функции, а на бесконечности она стремится к функции знака, поэтому ее можно ограничить снизу кусочно-линейной функцией

$$(14) \quad m_i |\sigma(k_i e_{ij})| \geq \begin{cases} 0,8 m_i, & |e_{ij}| > \Delta_i, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \\ 0,8 m_i k_i |e_{ij}| / 2,2, & |e_{ij}| \leq 2,2 / k_i \leq \Delta_i, \end{cases}$$

точка разделения  $\sigma(2,2) \approx 0,8$  принята для удобства вычислений из интервала  $k_i \Delta_i = 2,2 \in [1,3; 3]$ , где  $\pm 1,3$  – абсциссы точек перегиба первой производной,  $\pm 3$  – абсциссы вершин сигма-функции, в которых ее кривизна достигает максимального значения.

В системе (13) производную задающего воздействия  $\dot{\chi}(t)$  будем трактовать как внешнее ограниченное по модулю возмущение (7). Амплитуды  $m_1$  и  $m_2$  сигмоидальных управлений должны выбираться таким образом, чтобы обеспечить инвариантно по отношению к возмущению последовательное попадание невязки (9) и ошибки слежения в некоторые окрестности нуля:

$$(15) \quad \begin{aligned} |e_{2j}(t)| &\leq 2,2 / k_2 \leq \Delta_2, t > t_2 \geq 0; \\ |e_{1j}(t)| &\leq 2,2 / k_1 \leq \Delta_1, t > t_1 \geq t_2, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Радиусы областей (14) – это, по сути, точность стабилизации ошибки слежения и невязки, которая зависит от больших коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ . Для анализа достаточных условий устойчивости системы в терминах ошибок слежения и невязок (13) мы используем функцию Ляпунова  $V_2 + V_1$ ,  $V_i = 0,5 e_i^T e_i$ ,  $i = 1, 2$ . Составим ее производную в силу системы (13) и оценим полученные слагаемые с учетом (11), (13) вне областей (14):

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 + \dot{V}_1 &= e_2^T (-m_2 \sigma(k_2 e_2) - 0,5 m_1 k_1 \Lambda_1 \dot{\chi}) + \\ &+ e_1^T (-m_1 \sigma(k_1 e_1) + e_2 - \dot{\chi}) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^2 (|e_{2j}| (0,5 m_1 k_1 |\dot{\chi}_j| - 0,8 m_2) + |e_{1j}| (|e_{2j}| + |\dot{\chi}_j| - 0,8 m_1)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что верхнее, а затем и нижнее неравенства (15) будут выполнены при любых начальных значениях переменных системы (13), если

$$(16) \quad 0,5 m_1 k_1 X_2 < 0,8 m_2, \quad 2,2 / k_2 + X_2 < 0,8 m_1.$$

Заметим, что в системе управления мобильным роботом динамический генератор будет спроектирован в виде замкнутой системы (5), (12):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ (17) \quad \dot{x}_2 &= -m_2 \sigma(k_2 (x_2 + m_1 \sigma(k_1 (x_1 - \chi)))) - \\ &- 0,5 m_1 k_1 \begin{pmatrix} 1 - \sigma^2(k_1 (x_{11} - \chi_1)) & 0 \\ 0 & 1 - \sigma^2(k_1 (x_{12} - \chi_2)) \end{pmatrix} x_2, \end{aligned}$$

а виртуальная система (13) была введена для анализа устойчивости ошибок слежения. Выбор амплитуд, удовлетворяющих (16), обеспечит выполнение (15) при  $t \geq 0$ , если  $|e_{ij}(0)| \leq 2,2/k_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ . Мы можем обеспечить такие начальные значения в виртуальной системе в терминах ошибок слежения и невязок (13) путем установки подходящих начальных значений в генераторе (17), например:

$$\begin{aligned} x_{1j}(0) = \chi_j(0) \Rightarrow e_{1j}(0) = 0, \\ (18) \quad |x_{2j}(0)| \leq 2,2 / k_2 \Rightarrow |e_{2j}(0)| \leq 2,2 / k_2, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Тогда в полученной замкнутой системе в исходных терминах генератора (17) в силу (9) гарантируется ограниченность скорости и ускорения:

$$\begin{aligned} |x_{2j}(t)| &\leq 2,2 / k_2 + 0,8 m_1, \\ (19) \quad |\dot{x}_{2j}(t)| &\leq m_2 + 0,5 m_1 k_1 (2,2 / k_2 + 0,8 m_1), \quad j = 1, 2, t \geq 0. \end{aligned}$$

Для корректного выбора допустимых параметров сигмоидальной обратной связи проведем совместный анализ получен-

ных нижних оценок (16) и верхних ограничений (6) с учетом неравенств (19):

$$(20) \begin{cases} 2,2/k_2 + X_2 < 0,8m_1 \leq Y_2 - 2,2/k_2, \\ 0,625m_1k_1X_2 < m_2 \leq Y_3 - 0,5m_1k_1Y_2, Y_2^2 < Y_3. \end{cases}$$

Пусть  $\bar{k}_2$  – это максимальное допустимое значение большого коэффициента  $k_2$ , определяемое проектными ограничениями на управляющие моменты исполнительных приводов. Для начала принимаем  $k_2 = \bar{k}_2$ , это значение определяет выбор начальных значений (18), предельную точность стабилизации невязки  $|e_{2j}(t)| \leq 2,2/\bar{k}_2, j = 1, 2, t \geq 0$  в рамках используемого подхода и ограничения на скорость изменения опорного задающего воздействия (7) в следующем виде:

$$4,4/k_2 + X_2 < Y_2 \Rightarrow X_2 < Y_2 - 4,4/\bar{k}_2.$$

В предположении, что данные требования выполнены, на основе первого неравенства (20) принимаем конкретное значение амплитуды  $m_1 = \bar{m}_1$ , которое определяет максимально возможное значение большого коэффициента  $0 < k_1 \leq \bar{k}_1 = 0,9Y_3 / (Y_2\bar{m}_1)$  и предельную точность стабилизации ошибки слежения  $|e_{1j}(t)| \leq 2,475Y_2\bar{m}_1 / Y_3, j = 1, 2, t \geq 0$ . При конкретных значениях  $m_1, k_1$  на основе второго неравенства (20) принимаем конкретное значение амплитуды  $m_2$ .

Таким образом, изображающая точка  $(x_{11}, x_{12})$  динамического генератора (17)–(18) с параметрами, выбранными на основе полученных неравенств (20), порождает сглаженную опорную кривую с непрерывной ограниченной кривизной, допустимую для данного мобильного робота. Переменные генератора  $x_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t) \in R^2$  поступают в качестве задающих воздействий в информационно-управляющую систему для формирования закона управления движением.



#### 4. Моделирование

Для верификации разработанных алгоритмов было проведено численное моделирование на примере колесной платформы, развивающей максимальную скорость в 2,4 м/с и ускорение 6 м/с<sup>2</sup>.

Динамический генератор (17) был смоделирован в системе MATLAB-Simulink, для численного интегрирования был использован метод Эйлера с шагом 0,01.

Задающее воздействие, которое представляет собой желаемую траекторию движения робота, в первом приближении задавалось в виде непрерывной, но не гладкой, плоской кривой

$$\begin{aligned}
 \chi_1 &= 0, \quad \chi_2 = 2t, \quad t \in [0; 5); \\
 \chi_1 &= 2t - 10, \quad \chi_2 = 10, \quad t \in [5; 10); \\
 (21) \quad \chi_1 &= 10, \quad \chi_2 = 30 - 2t, \quad t \in [10; 15); \\
 \chi_1 &= 40 - 2t, \quad \chi_2 = 0, \quad t \in [15; 20); \\
 \chi_1 &= 0, \quad \chi_2 = 2t - 40, \quad t \geq 20, \quad \chi_j [м], t [с].
 \end{aligned}$$

С помощью неравенств (20) были определены следующие параметры сигмоидальных корректирующих воздействий генератора:

$$(22) \quad m_1 = 2, 2, \quad m_2 = 5, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 5.$$

На рис. 1 представлены график заданной опорной кривой (21) и точки генератора ( $x_{11}(t)$ ,  $x_{12}(t)$ ) (17), (22), из которого видно, что изображающая точка сходится к заданной траектории и далее движется в малой окрестности данной кривой.

На рис. 2 соответственно представлены графики выходных переменных генератора  $x_{1i}(t)$  и задающих воздействий  $\chi_i(t)$  (внизу) и ошибки отслеживания  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  (вверху).

В данном случае оценки  $|e_1(t)| \leq 0,65$  [м] справедливы в переходных процессах вокруг особых точек, в то время как оценки  $|e_1(t)| \leq 5 \times 10^{-6}$  [м] справедливы для рассматриваемого объекта управления в устойчивом состоянии. На основе данных графиков можно сделать об эффективной работе построенного генератора в рамках первой сформулированной ранее задачи, а именно, задачи сглаживания траектории на стыках, при этом

учитывая заданную нами точность слежения в устойчивом положении.

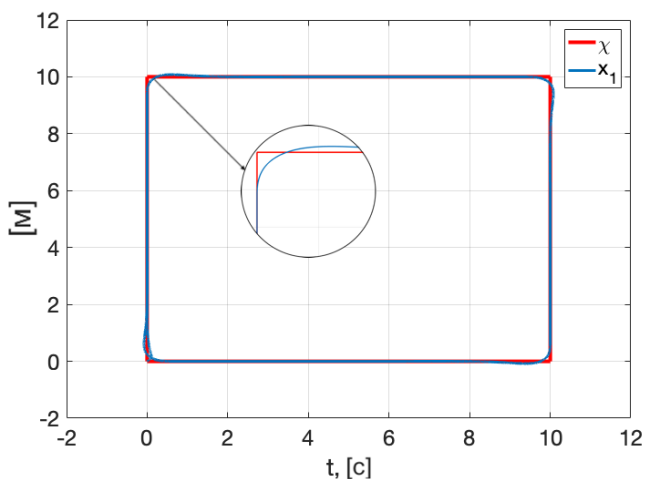


Рис. 1. График опорной кривой  $\chi = (\chi_1, \chi_2)$  [м] и точки генератора  $x_1(t) = (x_{11}(t), x_{12}(t))$  [м]

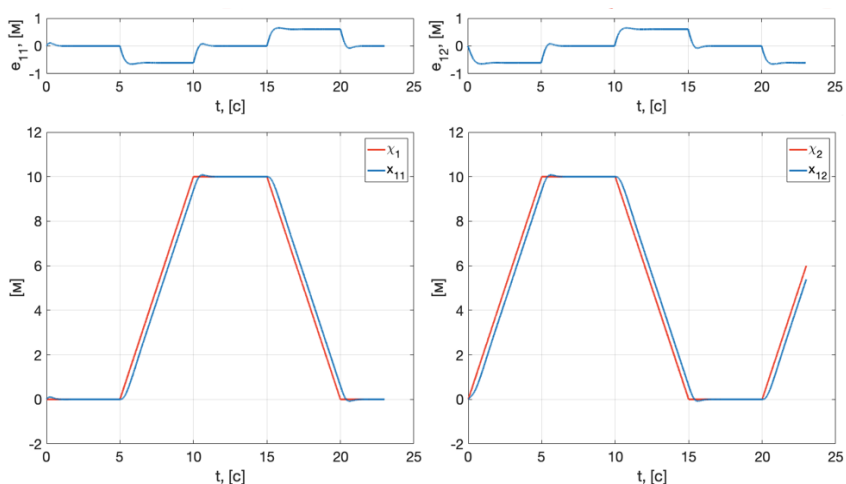


Рис. 2. График задающих воздействий  $\chi_i(t)$ , переменных генератора  $x_{1i}(t)$  и соответствующих им ошибок слежения  $e_{1i}(t) = x_{1i}(t) - \chi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$

На рис. 3–4 для обеих координат представлены графики переменных генератора  $x_2(t)$  и  $\dot{x}_2(t)$  соответственно.

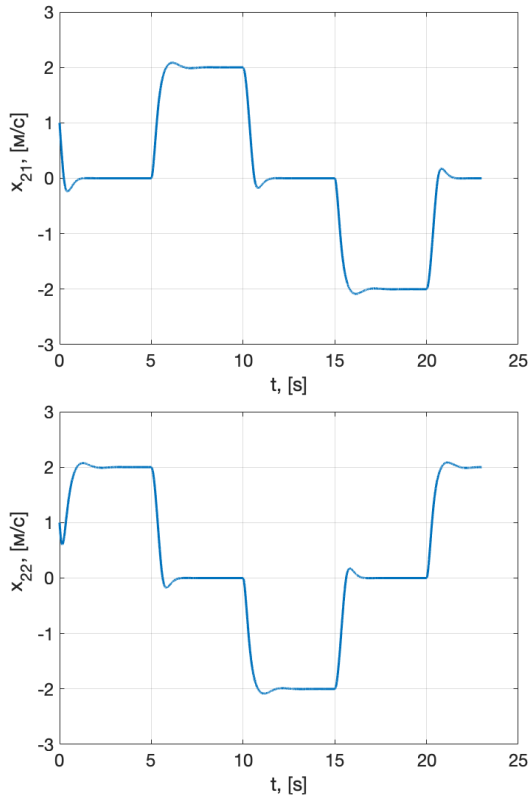


Рис. 3. График  $x_2(t)$  [м/с]

Из полученных графиков (рис. 3–4) видно, что переменные генератора, имитирующие скорость и ускорение колесного робота, достигают максимального значения в  $|x_2(t)| \leq 2,09$  [м/с] и  $|\dot{x}_2(t)| \leq 5$  [м/с<sup>2</sup>], что подтверждает выполнение разработанным генератором второй поставленной в данной работе задачи – задачи учета проектных ограничений робота как механического объекта управления.

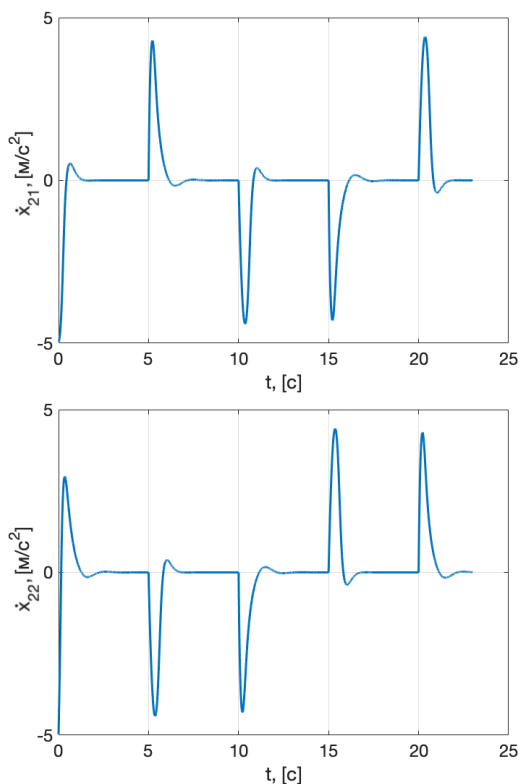


Рис. 4. График  $\dot{x}_2(t)$  [м/с²]

## 5. Заключение

Основной результат работы – метод построения и настройки динамического генератора реализуемых путей следования, который позволяет учитывать проектные ограничения на скорость и ускорение колесной платформы на этапе синтеза и обеспечивает автоматическое сглаживание стыков опорного негладкого маршрута, составленного в первом приближении. Использование простых в реализации операций интегрирования,

избавляет от необходимости выполнять сложные геометрические расчеты на стадии планирования и, как следствие, от больших вычислительных затрат. Переменные генератора в процессе отслеживания первичного негладкого векторного сигнала в режиме реального времени порождают сглаженную траекторию, реализуемую конкретным колесным роботом, и предоставляют ограниченные командные сигналы для скорости и ускорения.

Использование разработанного подхода позволит расширить область применения стандартных методов проектирования обратных связей для решения задач путевой стабилизации и упростит процесс планирования движений. Результаты численного моделирования подтвердили эффективность разработанных алгоритмов, простых в численной реализации.

### ***Литература***

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №1. – С. 40–66.
2. КОЧЕТКОВ С.А., УТКИН В.А. *Метод декомпозиции в задачах управления мобильными роботами* // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №10. – С. 86–103.
3. КРАСНОВ Д.В., УТКИН А.В. *Синтез многофункциональной системы слежения в условиях неопределенности* // Управление большими системами. – 2017. – Вып. 69. – С. 29–49.
4. КРАСНОВА С.А., УТКИН А.В. *Анализ и синтез минимально-фазовых нелинейных SISO-систем при действии внешних несогласованных возмущений* // Проблемы управления. – 2014. – №6. – С. 22–30.
5. ПЕСТЕРЕВ А.В. *Синтез стабилизирующего управления в задаче следования колесного робота вдоль заданной кривой* // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №7. – С. 25–39.
6. ПЕСТЕРЕВ А.В., РАПОПОРТ Л.Б., ТКАЧЕВ С.Б. *Каноническое представление нестационарной задачи путевой стабилизации* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – Т. 54, №4. – С. 160–176.

7. BAUTISTA G.D., PEREZ J., MILANÉS V., NASHASHIB F. *A review of motion planning techniques for automated vehicles* // IEEE T-ITS. – 17(4) – P. 1–11.
8. BELINSKAYA Y. *Application of the covering method for trajectories design for car-like robot* // Proc. of the 14th Int. Conf. Management of Large-Scale System Development (MLSD–2021), 27–29 September 2021, Moscow, Russia.
9. BELINSKAYA YU.S., CHETVERIKOV V.N. *Covering method for point-to-point control of constrained flat system* // IFAC-Papers OnLine. – 2015. – Vol. 48(11). – P. 924–929.
10. BUSURIN V.I., YIN NAING WIN *Microoptoelectromechanical ring angular velocity transducer based on the optical tunnel effect for control system of mobile objects* // J Phys: Conf Ser. – 1333:052002.
11. FAROUKI R.T. *Pythagorean Hodograph Curves*. – Springer, 2008.
12. KANO H., FUJIOKA H. *B-Spline trajectory planning with curvature constraint* // Proc. Annual American Control Conference (ACC). – 2018. – P. 1963–1968.
13. KOCHETKOV S.A. *Mobile robot trajectory control under influence of unknown perturbation* // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. – 2019. – No. 10(4). – P. 725–732.
14. KOKUNKO YU., KRASNOVA S. *Synthesis of a tracking system with restrictions on UAV state variables* // Mathematics in Engineering, Science and Aerospace. – 2019. – No. 10(4). – P. 695–705.
15. LAVALLE S.M. *Planning algorithms*. – Cambridge University Press, 2006.
16. MERCY T., VAN PARYS R., PIPELEERS G. *Spline-based motion planning for autonomous guided vehicles in a dynamic environment* // IEEE TCST. – 2017. – Vol. 26(6). – P. 2182–2189.
17. MINGUEZ J., LAMIRAUX F., LAUMOND J.P. *Motion planning and obstacle avoidance* // In: Springer Handbook of Robotics, Springer International Publishing. – 2008. – P. 1177–1202.
18. SAKCSAK B., BASCETTA L., FERRETTI G., PRANDINI M. *Sampling-based optimal kinodynamic planning with motion primitives* // Autonomous Robots. – 2019. – Vol. 43(7). – P. 1715–1732.
19. SAMSON C. *Control of chained systems. Application to path following and time varying point – stabilization of mobile robots* // IEEE Trans Automat Control. – 1995. – Vol. 40(1). – P. 64–77.
20. WEBB D.J., VAN DER BERG J. *Kinodynamic RRT\*: asymptotically optimal motion planning for robots with linear* // Proc. of the IEEE Int.

Conf. on Robotics and Automation – 2013 (ICRA–2013), May 6–10, 2013, Karlsruhe, Germany. – P. 5039–5046.

21. ZHOU CH., HUANG B., FRÄNTI P. *A review of motion planning algorithms for intelligent robots* // Journal of Intelligent Manufacturing. – 2022. – No. 33. – P. 387–424.

## DESIGN OF A REFERENCE ACTIONS GENERATOR FOR A MOBILE ROBOT CONTROL SYSTEM

**Julia Kokunko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (juliakokunko@gmail.com).

*Abstract: Planning the path of an autonomous wheeled robot can pose problems such as ensuring motion safety, smoothness and bounded curvature of the path and its rate of change, considering the design constraints of the robot as a mechanical control object. The joint solution of these problems can lead to cumbersome analytical calculations that are not realizable in real-time. In this paper, we propose to simplify and automate the generation of planar paths for a wheeled robot, which will solve both of these problems. At the first stage, a primitive path is constructed in the form of a flat polyline. The second stage solves the problem of smoothing the articulation of the polyline. Instead of geometric calculations, a dynamic generator is designed as a copy of the equations of motion of the robot. The synthesis of the generator's correcting actions, which simulate the robot's control actions, is based on the decomposition method and S-shaped smooth and constrained nonlinear feedbacks. This ensures that the design constraints of the robot on velocity, acceleration and control torques are met, and the output variables of the generator will generate a naturally smoothed path with acceptable curvature when tracking the coordinates of the reference nonsmooth trajectory.*

**Keywords:** wheeled robot, realizable trajectory, dynamic oscillator, design constraints, sigma function.

УДК 62.50

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.7

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.М. Вишневым.*

*Поступила в редакцию 30.11.2022.*

*Опубликована 31.01.2023.*

# ГРАФИЧЕСКИЙ ИНТЕРФЕЙС СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ

Тутуров А. А.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Описаны специфика работы специалистов дежурной смены и роль отображения информации о процессах, протекающих в космическом комплексе, на принятие решений по управлению космическими аппаратами в составе орбитальной группировки дистанционного зондирования Земли. Поставлена задача разработки графического интерфейса как элемента системы поддержки принятия решений для дежурной смены управления космическими аппаратами, состоящей из специалистов предприятий космического комплекса. Предложены принципы разделения служебной информации, которой оперируют специалисты дежурной смены, по категориям на основе природы её источников, а также механизм отображения данной информации в режиме реально времени с помощью графического интерфейса с целью уменьшить затраты времени на идентификацию ситуации нештатного функционирования наземного и/или бортового программно-технического обеспечения в условиях ограниченного времени проведения сеанса связи с космическим аппаратом. Ключевой особенностью предложенного графического интерфейса является «вектор состояния космического аппарата» – способ отображения данных телеметрии элементов подсистем космического аппарата, необходимых для регистрации нештатной ситуации на борту космического аппарата, и поиска стратегии купирования/ликвидации последствий обеспечения её функциональной устойчивости как способности сохранять и/или восстанавливать возложенные на неё функции.*

Ключевые слова: космический аппарат, космический комплекс, нештатная ситуация, диагностика, система поддержки принятия решений, интерфейс.

## 1. Введение

Учитывая современный уровень развития программно-технического обеспечения элементной базы такой масштабной системы как космический комплекс (КК), особо актуален вопрос обеспечения его функциональной устойчивости [3], под которой в данной работе подразумевается способность сохранения и/или

---

<sup>1</sup> Алексей Александрович Тутуров, м.н.с. (tuturov@mail.ru).



восстановления возможности выполнения функций, возложенных на систему, а также адаптирования информационных каналов связи при изменении характеристик её элементов под воздействием деструктивных факторов внешней и/или внутренней среды.

В данной работе КК будет рассматриваться как социо-киберфизическая система [6, 7], в которой человеческий фактор в виде коллективов специалистов, экспертов предприятий, входящих в состав КК, а также разработчиков космической техники, рассматривается как некий информационный ресурс, призванный отразить опыт, знания и интуицию упомянутых групп лиц в виде неких цифровых двойников [5] этих коллективов.

Требуется предложить графический интерфейс, исходя из отображения процессов в космическом комплексе и информации о текущем состоянии его элементов, учёт которых необходим для принятия решений по управлению космическим аппаратом (КА) дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ) во время проведения сеанса связи с КА. Необходимо учесть требования, связанные с возможностью обнаружения нештатной ситуации (НШС) в процессе проведения сеанса связи с КА. Такие требования могут быть связаны со сбоями в работе бортового и/или наземного программно-технического обеспечения.

## **2. Постановка проблемы**

### **2.1. КОСМИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС КАК СРЕДА УПРАВЛЕНИЯ**

Управление КА ДЗЗ в составе орбитальной группировки (ОГ) требует учёта воздействия большого числа факторов, определяемых характеристиками элементов космического комплекса, действовавших в данных процессах.

В решении задачи данной работы предлагается использовать:

1. ОГ КА ДЗЗ.
2. Наземный комплекс управления (НКУ) – совокупность технических средств и сооружений, предназначенных для управления функционированием ОГ КА с момента её выведения на орбиту.

3. Наземный комплекс приёма, обработки и распределения информации (НКПОР) – совокупность взаимосвязанных наземных технических средств с программным обеспечением, предназначенных для обеспечения заказчика и его потребителей целевой информацией, полученной на основе данных мониторинга работы ОГ КА.

4. Центр управления полётами (ЦУП) – сооружения с техническими системами и технологическими средствами командно-программного, телеметрического и баллистико-навигационного обеспечения, внешних информационных обменов, магистральных и специальных связей, отображения, предназначенными для обеспечения деятельности обслуживающего персонала по формированию, передаче, приему, обработке, хранению, документированию информации при непрерывном процессе управления полетами КА.

## **2.2. АЛГОРИТМ**

Базовый алгоритм штатного рабочего цикла КА в ОГ ДЗЗ имеет вид:

1. НКПОР: формирование заказа на получение целевой информации, а именно: характеристики (разрешение, спектральный диапазон и т.д.), объём и желательный срок предоставления результата ДЗЗ.

2. ЦУП: анализ текущего функционала ОГ применительно к условиям заказа: баллистический анализ траекторий, пригодных для работы КА в ближайшее время, относительно наземных станций и района получения целевой информации.

3. ЦУП: формирование пакетированного программного кода рабочей программы конкретного КА для загрузки в его бортовую вычислительную систему.

4. ЦУП+НКУ+КА: проведение сеанса связи – получение телеметрической информации о состоянии КА [1] при отсутствии нештатной ситуации на борту, закладка РП в бортовую вычислительную систему.

5. КА: отработка рабочего задания – штатная работа целевой аппаратуры в заданный период времени и заданном режиме, обеспеченным штатной работой служебной аппаратуры. Формирование целевой информации на борту КА и подготовка её

к передаче на наземную станцию связи в автоматическом режиме согласно.

6. КА+НКУ: проведение автоматического сброса целевой информации на наземную станцию связи.

7. НКПОР: валидация результата выполнения требований заказчика. Передача заказчику полученной целевой информации.

На рис. 1 представлена схема участия элементов КК в алгоритме штатного рабочего цикла ДЗЗ с разделением на области административных, баллистических и технических задач.

Под административными задачами подразумевается совокупность решений по управлению процессами обмена информации и принятия решений при взаимодействии с потребителями услуг ДЗЗ относительно оформления, изменения, уточнения, реализации и проверки результатов их заказов, а именно, соответствия полученных характеристик результатов ДЗЗ условиям заказа. В область административных задач также входят все организационные задачи, описывающие взаимодействия специалистов предприятий в составе КК.

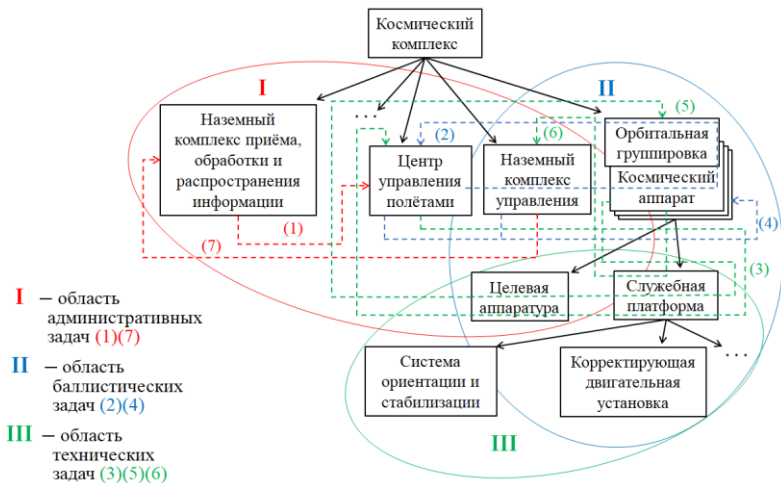


Рис. 1. Схема реализации базового алгоритма штатного рабочего цикла ОГ КА ДЗЗ в составе КК

Под баллистическими задачами подразумевается совокупность решений по управлению реализацией процессов обмена информации и принятия решений относительно вопросов порядка баллистического построения КА в ОГ. В данную область входят задачи расчета очередностей задействования КА, зависящих от текущего уровня качества работы их целевой аппаратуры, количества пригодных для решения конкретной задачи КА в составе ОГ на текущий момент времени, а также географии как расположения наземных станций связи НКУ, так и района проведения ДЗЗ.

Под техническими задачами подразумевается совокупность решений по управлению процессами обмена информации и принятия решений относительно вопросов штатного и нештатного функционирования программного обеспечения и аппаратуры бортовой и наземной техники. Особое внимание уделяется работе таких бортовых систем как система ориентации и стабилизации (СОС) и корректирующая двигательная установка (КДУ). От штатной работы СОС напрямую зависят ориентация на Солнце солнечных батарей КА и ориентация на цель аппаратуры ДЗЗ при проведении съёмок. От штатной работы КДУ зависят высота орбиты КА и его расположение в баллистическом построении ОГ. Проведение коррекций орбиты с помощью КДУ накладывает ограничения на задействования целевой аппаратуры.

Как видно из схемы представленного алгоритма, на всех его шагах, кроме шага №5 (отработки рабочего задания бортовой аппаратурой КА) непосредственно присутствуют специалисты предприятия в составе КК. Следовательно, на каждом шаге формируются экспертные оценки, чья скорость и точность формирования связана с форматом восприятия информации, а также с возможными помехами в каналах связи между элементами КК или внутри них. Вся связанная с шагами алгоритма информация проходит через специалистов дежурной смены управления КА и рассматривается как информационные ресурсы, общий вид которых представлен на рис. 2.

### 2.3. МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

Как видно на рис. 2., вся информация в распоряжении дежурной смены управления КА имеет три «основных» направления: «кадры», «техника» и «программы».

Под «кадрами» подразумевается совокупность экспертных оценок и принятых специалистами НКУ, ЦУП и НКПОР решений, на базе информации, получаемой от всех элементов КК.

Под «техникой» подразумевается совокупность сообщений о текущем состоянии бортового и наземного технического обеспечения всех элементов КК.

Под «программами» подразумевается совокупность бортового и наземного программного обеспечения «ПО», а также регламентирующие документы и инструкции, как актуальные, так и вышедшие из употребления, но представляющие ценность при принятии решений по управлению и/или разработке новых решений, инструкций и/или программно-технического обеспечения для конкретного элемента КК.



Рис. 2. Модель информационных ресурсов дежурной смены управления КА

Помимо «основных» направлений на рис. 2. представлены курсивом «смешанные»:

- «кадрово-техническое» – совокупность информации, получаемой специалистами от техники напрямую, – это главным образом массивы данных бортовой телеметрии КА и отчёты аппаратуры НКУ, получаемые во время и/или после окончания проведения сеанса связи с КА. Для «кадрово-технической» информации источником ошибок являются «программы» в виде несовершенства регламентирующих деятельность специалистов документов или нарушения по тем или иным причинам работы бортового и/или наземного ПО;

- «программно-техническое» – совокупность информации, получаемой бортовой и/или наземной техникой посредством штатной работы бортового и/или наземного ПО, – это главным образом программные пакеты, закладываемые во время сеанса связи на борт КА при изменении бортового ПО, а также команды наземного ПО, посредством которого осуществляется непосредственное и/или отложенное управление наземной и/или бортовой техникой. Для «программно-технической» информации источником ошибок являются «кадры» в виде человеческого фактора при принятии решений по управлению техническими средствами.

- «программно-кадровые» – совокупность информации, получаемой специалистами предприятий КК посредством использования в основном наземного ПО, – это главным образом продукты расчетов программных комплексов и/или средств планирования сеансов связи с КА. Для «программно-кадровой» информации источником ошибок являются технические сбои в каналах связи, делающие невозможным своевременную доставку или реализацию информации, что автоматически снижает её актуальность, поскольку посредством неё доводятся все решения по управлению.

Полукруглыми стрелками на рис. 2. показано направление последовательности обмена информации специалистами дежурной смены в рамках реализации базового алгоритма суточного цикла управления КА:

- стандартный рабочий день дежурной смены управления начинается с «пересменки» – передачи составом специалистов сменяющейся дежурной смены всех особенностей своего дежурства заступающему составу;

- специалисты дежурной смены управления ЦУП связываются с НКУ и НКПОР, собирая данные для оформления суточного Плана задействования средств (план проведения сеансов наземными станциями связи НКУ), который должен штатно поступить в работу через 72 часа. Исходными данными для этой подзадачи являются сведения от заказчиков о виде, качестве и количестве запрашиваемой ими целевой информации, а также результаты анализа текущей степени применимости конкретных КА в составе ОГ для реализации этого запроса, в том числе результаты актуального баллистического построения ОГ;

- проводятся «дневные» сеансы связи с КА по Планам сеансов связи [2], подготовленным накануне предыдущей сменой, которые базово состоят из функциональных, служебных и разовых команд, а также циклограмм – стандартизированных программных пакетов для реализации запланированных операций управления в заданном периоде по бортовой шкале времени;

- в процессе сеанса связи с КА специалисты дежурной смены получают массив данных телеметрии и проводят по нему экспресс-анализ состояния бортовой аппаратуры в режиме реального времени;

- после окончания сеансов связи специалистами дежурной смены проводится с использованием наземного ПО глубокий анализ массива данных телеметрии КА с занесением статистики в соответствующие журналы;

- к середине рабочего дня специалистам дежурной смены управления ЦУП поступает от специалистов НКПОР сведения о запрашиваемой заказчиками целевой информации на ближайшие сутки, на основании которых совместно формируется файл рабочей программы для закладки на борт КА штатно в первый «вечерний» сеанс связи;

- после проведения «ночных» и «утренних» сеансов связи специалистами дежурной смены управления формируется ста-

тика за сутки по всем КА в составе ОГ для передачи её следующему составу на очередной «пересменке».

### **2.3. НЕШТАТНЫЕ СИТУАЦИИ**

Среди наиболее вероятных сценариев регистрации НШС на борту КА можно выделить:

1. Обнаружение НШС в процессе экспресс-анализа массива данных бортовой телеметрии в процессе сеанса связи с КА (шаг №4 алгоритма штатного рабочего цикла КА в ОГ ДЗЗ).

2. Отсутствие запланированного автоматического сброса целевой информации наземной станцией НКУ (шаг №6 алгоритма штатного рабочего цикла КА в ОГ ДЗЗ).

В случае регистрации НШС на сеансе связи в задачи специалистов дежурной смены входит скорейшая идентификация вида и степени критичности НШС. В случае успешного выполнения данного условия необходимо выдать соответствующие управляющие воздействия на борт для запуска программных процедур восстановления штатного функционирования систем КА до окончания текущего сеанса связи из-за естественного выхода КА из зоны радиовидимости наземной станции НКУ.

В случае регистрации НШС по отсутствию запланированного автоматического сброса целевой информации и получения соответствующей информации от специалистов НКУ специалистам дежурной смены управления ЦУП необходимо провести регламентированную процедуру подготовки к встрече на ближайшем сеансе связи данного КА в НШС.

Принятие всех решений при наличии НШС связано с жёсткими ограничениями по времени до окончания сеанса связи и/или до начала следующего ближайшего сеанса связи, для внепланового осуществления которого необходимо провести «дозаказ» свободной станции связи НКУ в План задействования средств на текущие сутки.

Отметим, что факт регистрации НШС на борту нарушает ход реализации полётного задания для данного конкретного КА, но не для ОГ ДЗЗ в целом. Однако возникает необходимость пересмотреть программы работ остальных КА в ОГ для определения тех, которые при минимальных затратах по времени и допустимой потере качества целевой информации смогут реализо-



вать полётное задание КА в НШС [4]. Сам же процесс купирования/ликвидации последствий НШС на борту КА может занимать несколько витков орбиты и требовать проведения дополнительных сеансов связи, что перераспределяет рабочие ресурсы дежурной смены управления, создавая дополнительную трудовую и соответственно сенсорную нагрузку на специалистов предприятий КК.

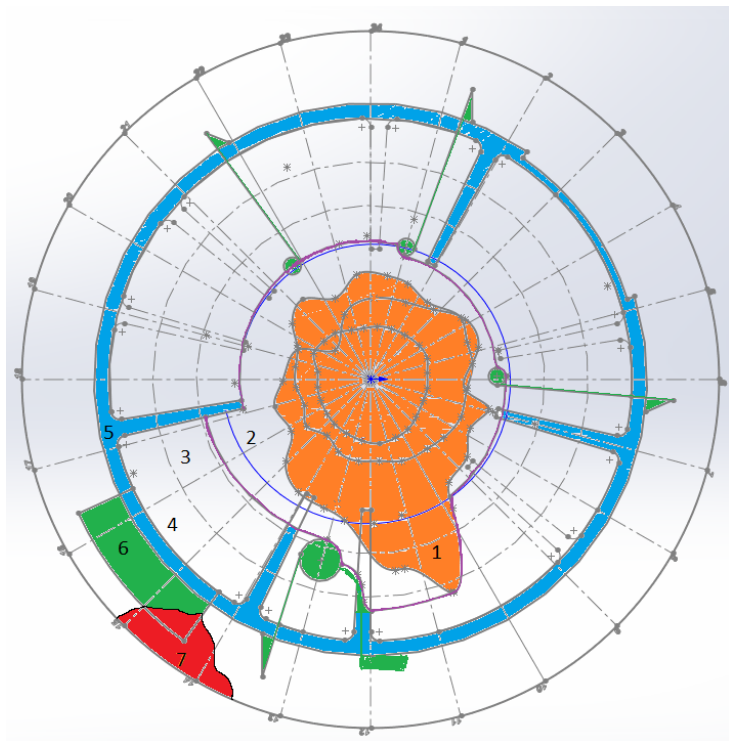
Таким образом, разработка стратегий, уменьшающих вероятность возникновения НШС и повышающих эффективность их устранения, является приоритетом работы специалистов дежурной смены управления наряду с качественной реализацией базового алгоритма штатного рабочего цикла ОГ КА ДЗЗ в составе КК. Что в свою очередь отражает актуальность проблематики поисков новых программно-технических решений, улучшающих восприятие больших объёмов информации специалистами дежурной смены управления, как способа уменьшения времени реакции на НШС и экономии ресурсов КК.

Одним из возможных направлений решения данной проблемы – уменьшения времени на восприятие оператором текущей информации о состоянии КА, анализ и принятие решения по управлению – является разработка системы поддержки принятия решений. Данная система подразумевает автоматизированный программно-технический комплекс, хранящий статистику по видам возможных НШС, сочетаниям факторов, повышающих вероятность возникновения НШС, стратегиям по ликвидации/купированию последствий НШС, а также факторам, требующим особого внимания при выборе и применении тех или иных управляющих воздействий специалистами дежурной смены управления.

Класс данных систем автоматически попадает под ограничения, связанные с коммерческой тайной, вследствие чего акцент в данной работе будет сделан только на разработке модификации графического интерфейса – одного из ключевых элементов, определяющих эффективность системы поддержки принятия решений.

## 2.4. ГРАФИЧЕСКИЙ ИНТЕРФЕЙС

Прототип предлагаемого графического интерфейса системы поддержки принятия решений для специалистов дежурной смены управления представлен на рис. 3.



*Рис. 3. Прототип графического интерфейса системы поддержки принятия решений для специалистов дежурной смены управления*

Рассмотрим представленные рис. 3. семь разноцветных областей исходя из приоритета логики их функционирования.

Область №5 (голубой цвет) – область плановых «программно-кадровых» процессов. Вертикальные пики отображают времена и продолжительность проведения сеансов связи с КА. Поскольку пользователями данного интерфейса предполагаются специалисты дежурной смены управления КА, интенсивность

их работы показана равномерной с падением на сон большинства сотрудников от 2 ночи до 5 часов утра.

В реальности интенсивность даже запланированных действий будет изменяться, что даст дополнительные результаты при исследовании вопросов оптимизации трудовой деятельности специалистов КК, прямо или косвенно задействованных в управлении КА. Следует обратить внимание, что серым пунктиром без заливки голубым цветом показаны незапланированные сеансы связи с КА, но возможные для проведения исходя из взаимодействия баллистических параметров орбиты КА с географией наземных станций связи НКУ.

Область №6 (зелёный цвет) – область «техно-программных» процессов. Эта область неоднородна и лежит в обеих средах: на Земле и в космосе. Крупный прямоугольный участок зелёного цвета (между 14 и 17 часами) с внешней стороны от области № 5 отображает максимальную загруженность наземного ПО ЦУП и НКПОР в связи с подготовкой новой рабочей программы на следующие сутки полёта КА, которая штатно закладывается на первом вечернем «закладочном» сеансе связи с КА. Треугольные зелёные участки (около 1, 6, 13 и 22 часов) отображают обработку наземным ПО запланированных автоматических сбросов отчётов о работе целевой аппаратуры КА по радиоканалу связи на пункты приёма НКПОР. Круглые зелёные участки, соединённые с зелёными треугольными, являются отображением работы бортового ПО в рамках рабочей программы на текущие сутки полёта КА.

Области №1 и №7 – это области нештатных ситуаций в космосе и на Земле соответственно. В случае области №1 её состав в большинстве случаев представлен ошибками в программных и/или технических процессах, отображаемых информационными категориями «программы» и «техника» соответственно. Например, ошибки в бортовом ПО или попадание микрометеоритов в элементы конструкций или приборов КА. В случае области №7 к ошибкам в наземном ПО и технике добавляются ошибки, обусловленные прямым влиянием человеческого фактора, в то время как для области №1 они могут существовать лишь косвенно с момента разработки и проектирования КА и его бортового ПО.

Области №2, №3 и №4 соответственно отображают зоны «штатного», «ограниченного» и «нештатного» функционирования КА в космосе. Внешняя граница области №4 соответствует физическому прекращению работоспособности КА ввиду полной потери функциональной устойчивости [3] или штатной консервации с последующей утилизацией после окончания срока эксплуатации.

«Кадрово-технические» взаимодействия на рис. 3. отображены в моменты проведения сеансов связи с КА и косвенно «вектором состояния КА», представленным спиралью синего цвета в области №2 и фиолетовой кривой в областях №2, №3 и №4. Оба «вектора состояния КА» берут начало на вечернем «закладочном» витке и отражают поведение аппарата, соответственно:

- синий – предполагаемое поведение на основании прогноза системы поддержки принятия решений, оперирующей данными цифрового двойника КА;
- фиолетовый – реальное поведение на основании обработки и анализа данных бортовой телеметрии КА, поступающих в процессе проведения сеансов связи.

Как видно на рис. 3, реализации рабочей программы (зелёные круги) могут как не оказывать влияния на «вектор состояния КА», так и отклонять его от запланированного положения (синий цвет) в сторону большей устойчивости (к центру) или в сторону меньшей устойчивости (к краю области №2).

Следует отметить, что, хотя граница области №1 имеет случайный характер, внутри данной области находятся определяемые контуры трёх ограничений, являющихся следствиями статистики сбора информации о процессах категорий «кадры», «программы» и «техника», а именно:

1. Ограничения, обусловленные несовершенством ПО, которые, как правило, максимальны на этапе начала лётных испытаний прототипа серии КА и должны устраняться к их окончанию.

2. Ограничения, обусловленные старением бортового оборудования и конструкций КА. Данные ограничения, как правило, неустранимы ввиду невозможности или не рентабельности про-

ведения ремонта и/или замены вышедших из строя элементов в условиях космоса. Данные ограничения постепенно расширяют область №1 и по факту являются основной причиной прекращения эксплуатации КА.

3. Ограничения, обусловленные изменениями эксплуатационной документации на основе принятия решений экспертным сообществом по итогам анализа НШС на борту КА. Данные ограничения являются фундаментальной основой рабочего функционала системы поддержки принятия решений.

### *2.5. ПОПЕРЕЧНОЕ СЕЧЕНИЕ «ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ КА»*

В представленной модели графического интерфейса суточного цикла управления КА для специалистов дежурной смены управления. Вызывает сложность реализация «вектора состояния КА». На данном этапе этот элемент графического интерфейса представляет собой некую спираль, поперечное сечение которой сегментировано в соответствии с составом всех активных в текущий момент времени подсистем служебной платформы и целевой аппаратуры КА, которые в свою очередь разделены на 3 зоны:

1. Внутренняя зона, окрашиваемая в оранжевый цвет, сигнализирует, что показания конкретного датчика конкретного телеметрируемого элемента работающей в данный момент подсистемы КА лежат ниже его индивидуальной нормы значений, определяемой на основании накопленной статистики. При этом такая статистика может разниться в зависимости от конкретного режима функционирования данного элемента и/или степени его износа.

2. Средняя зона, окрашиваемая в зелёный цвет и перекрывающая внутреннюю зону, сигнализирует, что показания конкретного датчика конкретного телеметрируемого элемента работающей в данный момент подсистемы КА лежат в границах его индивидуальной нормы значений.

3. Внешняя зона, окрашиваемая в красный цвет и перекрывающая внутреннюю и среднюю зоны, сигнализирует, что показания конкретного датчика конкретного телеметрируемого элемента работающей в данный момент подсистемы КА лежат выше границы его индивидуальной нормы значений.

Случай, когда не активна ни одна из зон и, соответственно, весь сектор показаний телеметрии конкретного датчика не окрашен, сигнализирует факт отсутствия данных телеметрии с этого конкретного датчика. Это может указывать, как на плановое отсутствие задействования конкретного элемента в программе работы на данный момент, так и на повреждение самого датчика и/или помехи при записи/передаче данных телеметрии при условии, что в данный момент времени этот элемент подсистемы КА должен быть задействован в реализации актуальной программы работы.

Предлагаемый вид поперечного среза «вектора состояния КА» представлен на рис. 4.

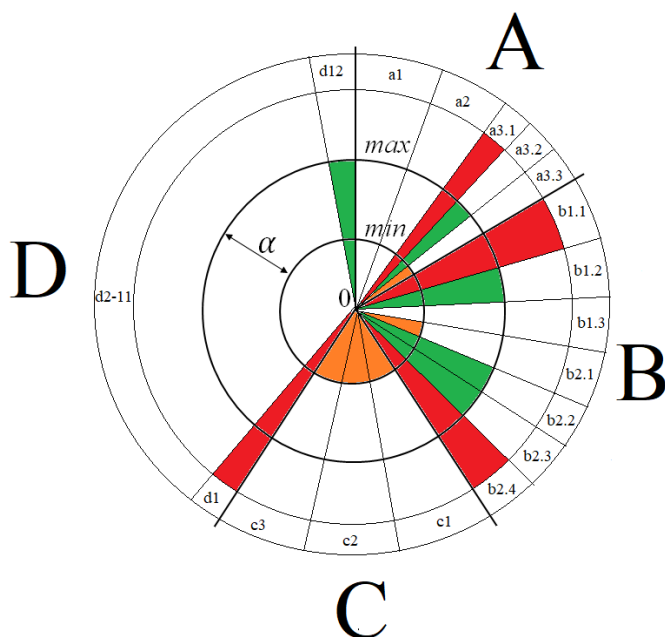


Рис. 4. Иллюстрация поперечного среза  
«вектора состояния КА»

Заглавными латинскими буквами обозначены подсистемы КА, строчными с номерами – показания датчиков элементов данных подсистем. У некоторых элементов может быть

несколько датчиков, в этом случае добавляются цифры в десятичную часть номера. Оранжевым цветом изображены показания датчиков ниже нижней границы допустимого диапазона статистической нормы альфа показаний для конкретного датчика. Зелёным – показания в пределах статистической нормы альфа. Красным – показания выше верхней границы статистической нормы альфа. Отсутствие данных датчика отображается отсутствием цветовой индикации, поскольку при отключенном приборе отсутствие данных является штатной ситуацией, но если прибор должен по плану функционировать, то отсутствие данных является косвенным признаком нештатной ситуации, из-за возможных проблем с энергоснабжением и/или проблем с передачей данных телеметрии.

В то время как поперечный срез спирали «вектора состояния КА» образуется данными телеметрии всех активных в текущий момент времени датчиков, направление поворота (к центру или от центра области «штатного» функционирования №2 на рис. 3, демонстрирует динамику изменения текущего состояния всего КА как сложной системы.

### **3. Заключение**

Развитию разрабатываемого графического интерфейса системы поддержки принятия решений для специалистов дежурной смены управления КА ДЗЗ в составе ОГ предполагает его реализацию в виде программного продукта для всей системы поддержки принятия решений, используя реальные данные телеметрии ОГ КА ДЗЗ для определения разновидностей и периодичности НШС на продолжительном временном отрезке с проверкой результатов путём сравнения с данными статистики НШС собранными специалистами дежурной смены управления за исследуемый период. В случае высокой степени совпадения данных моделирования с результатами наблюдений данный программный продукт может быть внедрён как элемент механизма оценки эффективности специалистов дежурной смены управления по итогам окончания рабочей смены.

## Литература

1. АБРАМОВ Н.С., ТАЛАЛАЕВ А.А., ФРАЛЕНКО В.П. *Интеллектуальный анализ телеметрической информации для диагностики оборудования космического аппарата* // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2016. – №1. – С. 64–75.
2. ГОНЧАРОВ А.К., ЧЕРНОВ А.А. *Планирование сеансов приёма информации с космических аппаратов орбитальной группировки при ограниченном количестве приёмных комплексов* // Космонавтика и ракетостроение. – 2014. – №1. – С. 180–189.
3. КОРОЛЕВ А.Н. *Функциональная устойчивость навигационно-информационных систем* // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2018. – Т. 61, №7. – С. 559–565.
4. КОТЯШОВ Е.В., КУВАЕВ О.Л., КУДИНОВ М.Г., ЧЕРНЯВСКИЙ В.А. *Информационно-расчетная модель планирования применения орбитальных группировок космических аппаратов* // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. – 2017. – №657. – С. 15–22.
5. YURKEVITCH E.V., STEPANOVSKAYA I.A. *Controlling the security of the airport airspace using the digital twin* // Journal of Physics: Conference Series. – London: Institute of Physics and IOP Publishing Limited. – 2021. – Vol.1864. –P. 012128 (1–6).
6. YURKEVITCH E.V., STEPANOVSKAYA I.A., KRYUKOVA L.N. *Mechanisms of information support for the digital transformation of space complexes based on the concept of socio-cyber-physical self-organization* // Lecture Notes in Networks and Systems. – Cham: Springer. – 2022. – Vol. 330. – P. 629-637.
7. YURKEVITCH E.V., KRYUKOVA L.N. *Model design as a new socio-cyber-physical systems creating mechanism* // Journal of Physics: Conference Series. – London: IOP Publishing Limited. – 2021. – Vol. 1864. – P. 012089 (1–6).



## **DEVELOPMENT OF A PROJECT OF A GRAPHIC INTERFACE AS AN ELEMENT OF A DECISION SUPPORT SYSTEM FOR THE DUTY SHIFT OF SPACE VEHICLE CONTROL**

**Aleksey Tuturov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., junior researcher (tuturov@mail.ru).

*Abstract: The specifics of the work of duty shift specialists and the role of means of displaying information about the processes occurring in the space complex on decision-making on the control of spacecraft as part of the Earth's remote sensing orbital constellation are described. The task was set to develop a graphical interface project as an element of a decision support system for the on-duty shift of spacecraft control, consisting of specialists from space complex enterprises. The principles of separating service information, which are operated by shift shift specialists, into categories based on the nature of its sources, as well as a mechanism for displaying this information in real time using a graphical interface, in order to reduce the time spent on identifying the situation of abnormal operation of the ground and/or on-board software and hardware in the conditions of a limited time of a communication session with the spacecraft. The key feature of the proposed graphical interface is the "spacecraft state vector" - a method for displaying telemetry data of the elements of the spacecraft subsystems necessary to register an emergency situation on board the spacecraft and search for a strategy to stop / eliminate its consequences by ensuring functional stability - the ability of the system to save and / or restore the functions assigned to it.*

**Keywords:** spacecraft, space complex, emergency situation, diagnostics, decision support system, interface.

УДК 629.78 + 004.5 + 007.5

ББК 32.81

DOI: 10.25728/ubs.2023.101.8

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М.Ф. Караваем.*

*Поступила в редакцию 05.12.2022.*

*Опубликована 31.01.2023.*