

**Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН**

# **УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ**

***Выпуск 117  
Сентябрь 2025***

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

**ISSN 1819-2467**

**Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.**

**Москва – 2025**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

# УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

*Выпуск 117*

Москва – 2025

УДК 519  
ББК 32.81  
У 67

ISSN 1819-2467

**Управление большими системами // Сборник трудов. – Вып 117. – М.: ИПУ РАН, 2025. – 363 с.**  
**Дата опубликования:** 30.09.2025.

## КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Попков Ю.С., Черноуско Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галеев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. физ.-мат. наук Горбунова А.В. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андреевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуилов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Соловуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

## РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Герасыкин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-ра техн. наук проф. Фуртат И.Б. (ИПМ РАН).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

# **СОДЕРЖАНИЕ**

## ***Системный анализ***

---

**Новиков Д.А.**

*Авторефлексия и обучение.....* 7

**Авдеева З.К., Коврига С.В.**

*Модель представления убеждений и аттитюдов  
субъекта с использованием когнитивных карт .....* 19

**Вытовтов К.А., Барабанова Е.А., Шабанова Е.В.**

*Исследование переходного режима работы  
трехфазной системы массового обслуживания  
с общим буфером .....* 52

**Романенко В.А.**

*Нечёткая оптимизация управления парком  
воздушных судов с учётом трансферных  
пассажиропотоков.....* 74

**Сысоев А.С., Сараев П.В., Погодаев А.К.**

*Планирование эксперимента для анализа  
чувствительности по факторам математических  
моделей различных классов .....* 103

## ***Математическая теория управления***

---

**Мусатова Е.Г., Лазарев А.А.**

*Метод ветвей и границ для решения задачи  
минимизации платы за внешние ресурсы .....* 119

**Ипатов Д.В., Петров К.В., Чернобрывец М.А.,**

**Кулагин К.А.**

*Расчёт и определение области устойчивости  
образовательного антропоморфного робота.....* 141

## ***Анализ и синтез систем управления***

---

**Сулиман Б., Фрадков А.Л.**

*Анализ разделимости движений управлением для  
двух идентичных маятников .....* 171

<b>Мухин А.В.</b>	
<i>Синтез стабилизирующих законов управления по измеряемому выходу при выполнимости условия Кимуры .....</i>	188
<hr/>	
<b><i>Информационные технологии в управлении</i></b>	
<b>Абраменков А.Н.</b>	
<i>Оптимизационный подход к решению РпР-задачи на основе параметризации вектором Родрига.....</i>	200
<b>Абрамян В.Л.</b>	
<i>Идентификация RFID-меток с сенсорного поля с использованием БПЛА.....</i>	220
<b>Анисимов Р.О., Дворников А.Д., Кулагин К.А., Титова С.А., Петров К.В.</b>	
<i>Применение LLM-моделей на одноплатных компьютерах для реализации автономного полёта БПЛА .....</i>	246
<hr/>	
<b><i>Сетевые модели в управлении</i></b>	
<b>Жилякова Л.Ю., Базенков Н.И.</b>	
<i>Модель кодирования временных интервалов активными агентами .....</i>	265
<hr/>	
<b><i>Управление в социально-экономических системах</i></b>	
<b>Цыганов В.В., Еналеев А.К., Савушкин С.А.</b>	
<i>Механизмы устойчивого развития железнодорожного транспорта путём капитального ремонта тепловозов .....</i>	286
<hr/>	
<b><i>Управление подвижными объектами и навигация</i></b>	
<b>Ашмарин В.В., Борзунов А.В.</b>	
<i>Тенденции развития инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов по результатам патентных исследований.....</i>	320

<b>Болотнов А.С., Кондрашкин Г.В., Шкатор М.Ю.</b>	
<i>Проверка характеристик астроинерциальной навигационной системы на морском объекте в режиме непрерывного астроинерциального исчисления.....</i>	335
<hr/>	
<i>Программы и системы моделирования объектов, средств и систем управления</i>	
<b>Воронцов Г.О., Коваленко А.В.</b>	
<i>Программа для проверки соответствия противопожарных разрывов нормативно-техническим требованиям на генеральном плане нефтегазохимических комплексов.....</i>	351

## АВТОРЕФЛЕКСИЯ И НАУЧЕНИЕ

Новиков Д. А.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Авторефлексией называется отражение субъектом в своем сознании и анализ собственных представлений о реальности, принципах и технологиях своей деятельности, соответствии ее результатов поставленным целям, способов повышения эффективности собственной деятельности. В статье рассмотрен ряд моделей авторефлексии, описываемых в терминах процессов научения, в рамках которых показано, что при неубывающей кривой научения, зависящей от суммарного времени, на него затраченного, оптимальной стратегией является максимизация первоначального периода обучения. То есть если условия получения и освоения опыта не изменяются (в процессе деятельности субъект не получает качественно новой информации), то авторефлексия не имеет смысла. Авторефлексия оправдана, если, например, в процессе продуктивной деятельности увеличивается индивидуальная скорость научения. Предложены иерархические модели научения, в которых достигнутые значения критерия научения определяет скорость научения на более высоком уровне иерархии, что также может рассматриваться как эффект присутствия авторефлексии.

Ключевые слова: деятельность, авторефлексия, неопределенность, научение.

### 1. Введение

Авторефлексия является предметом исследований в философии, психологии [1, 12, 16], педагогике [6, 7, 15], а в последние годы – и в искусственном интеллекте (в основном применительно к большим языковым моделям) [13, 20].

В методологии (учении об организации деятельности) авторефлексия является элементом саморегуляции; в рамках процессуальной структуры деятельности [19], приведенной на рис. 1, авторефлексии соответствует анализ:

I) соответствия ожидаемого и/или достигнутого результатов действию, приводящий, быть может, к корректировке субъектом технологии своей деятельности и/или

---

<sup>1</sup> Дмитрий Александрович Новиков, академик РАН, директор ([novikov@ipu.ru](mailto:novikov@ipu.ru)).

представлений о *внешней среде*, т.е. об условиях деятельности (последнее является простейшим видом *адаптации* – см. обзоры в [8, 18, 21]);

II) соответствие полученного результата *цели*, приводящий, быть может, к корректировке субъектом цели, задач и технологии своей деятельности;

III) степени удовлетворения полученным результатом потребности, приводящий, быть может, к корректировке субъектом своих потребностей, а также цели, задач и технологии деятельности.

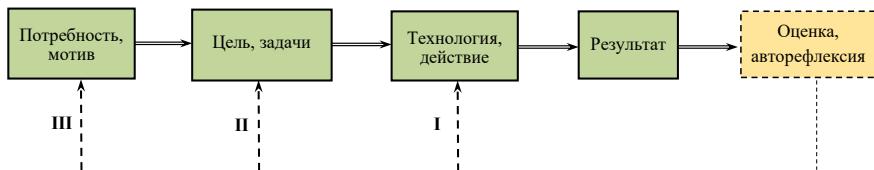


Рис. 1. Процессуальные компоненты деятельности  
и авторефлексия

В педагогике авторефлексия рассматривается как ключевой элемент рефлексивной фазы любого педагогического проекта [7], во время которой исследователь или педагог-практик «обращается назад» и, «глядя на себя со стороны», осмысляет процесс и результаты своей деятельности.

В западной психологии больше распространен термин «*метакогниции*» (знание субъекта о своих механизмах познания), введенный в [15] (см. обзоры в [5, 16]) и являющийся частным аспектом авторефлексии.

Формальные (математические) модели авторефлексии рассматривались в [4] в терминах логических моделей и в [9] – в терминах стабильности информационного управ-

ления (как свойства рефлексивной информационной структуры<sup>2</sup>, обеспечивающего совпадение ожидаемых и наблюдаемых субъектом действий его оппонентов и состояний внешней среды).

Рассмотрим ряд моделей авторефлексии, описываемых в терминах процессов *научения* (освоения опыта [2, 3]) при фиксированных потребностях и целях деятельности – см. цикл «I» на рис. 1.

## **2. Модель цикла «обучение – продуктивная деятельность - рефлексия»**

Пусть агент, реализуя некоторую *деятельность* [3], достигает ее целевого результата с вероятностью  $p_1$ . В случае неудачи он анализирует свою деятельность, быть может, оптимизирует ее или использует другую технологию и в результате такой «авторефлексии» достигает цели с вероятностью  $p_2 \geq p_1$ . Если цель опять не достигнута, то цикл повторяется с вероятностью  $p_3 \geq p_2$ . И т.д.

Вероятность  $p^k$  достижения цели за  $k$  шагов равна

$$(1) \quad p^k = p^{k-1} + p_k(1 - p^{k-1}), \quad k = 2, 3, \dots.$$

Легко видеть, что (1) – неубывающая последовательность, асимптотически стремящаяся к единице.

Рассмотрим двухэтапную модель авторефлексии и обучения, в которой фиксирован момент времени  $T$ , к которому деятельность должна быть завершена. Агент может распорядиться этим временем следующим образом:

---

<sup>2</sup> Отметим, что в рамках моделирования информационной рефлексии обычно вводится аксиома *автоинформированности* (субъект правильно информирован о своих представлениях и считает таковыми других субъектов), делающая авторефлексию субъекта относительно собственных представлений отчасти бессмысленной.

- время  $t_1$  может быть потрачено на обучение/научение - приобретение/освоение опыта (проектирование деятельности, разработка и/или освоение технологий и т.д. [2, 3]);
  - цикл продуктивной деятельности занимает время  $\tau$ ;
  - затем время  $t_2$  (в случае недостижения продуктивного результата) может быть потрачено на осознание и приобретение/освоение опыта (собственно этап авторефлексии, всегда осуществляемой после получения того или иного – целевого или отличающегося от него - результата деятельности);
  - второй цикл продуктивной деятельности также занимает время  $\tau$ .

Таким образом, в силу условия  $t_1 + t_2 + 2\tau = T$  у агента остается возможность выбора только значения одной переменной  $t_1 \in [0; T - 2\tau]$ .

Будем считать, в соответствии с [3], что *кривая опыта* (зависимость от времени вероятности освоения опыта, достижения целевого результата и т.п. [2]) имеет вид (*экспоненциальная кривая научения*):

$$(2) \quad p_{1,2}(t) = 1 - \exp(-\gamma t),$$

где константа  $\gamma > 0$  – скорость научения.

Рассмотрим два случая:

1. Освоение опыта в процессе продуктивной деятельности не происходит, тогда в соответствии с выражением (1) вероятность  $p^2(t_1) = 1 - \exp(-\gamma[t_1 + T - 2\tau])$  является монотонно возрастающей функцией  $t_1$ , т.е. оптимально значение (3)  $t_1^* = T - 2\tau$ .

Более того, в этом случае при выполнении условия  $T > 3\tau$  агенту выгоднее отказаться от второй «попытки» осуществления деятельности, потратив сначала все время  $T - \tau$  на обучение, а затем реализовать единственный цикл продуктивной деятельности.

2. Освоение опыта в процессе продуктивной деятельности происходит, тогда в соответствии с выражением **Ошибка! Источник ссылки не найден.** вероятность  $p^2(t_1) = 1 - \exp(-\gamma[t_1 + T - \tau])$  также является монотонно возрастающей функцией  $t_1$ , т.е. также оптимально его значение (3).

Как и в первом случае, при выполнении условия  $T > 2\tau$  агенту выгоднее отказаться от второй «попытки» осуществления деятельности, потратив сначала все время  $T - \tau$  на обучение, а затем реализовать единственный цикл продуктивной деятельности.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

**Утверждение 1'.** При экспоненциальной кривой опыта (2) в двухэтапной модели авторефлексии и обучения оптимальной стратегией агента является (3) - максимизация первоначального периода обучения.

Утверждение 1' может быть обобщено.

**Утверждение 1.** При неубывающей кривой опыта, зависящей от суммарного времени, затраченного на обучение, в двухэтапной модели авторефлексии и обучения оптимальной стратегией агента является (3) - максимизация первоначального периода обучения.

Доказательство утверждения 1. Пусть  $p(t)$  – некоторая неубывающая кривая опыта, зависящая от суммарного (в случае, когда обучение производится с перерывами) времени  $t$ , затраченного на обучение. К произвольному начальному моменту времени  $t_0$  значение опыта равно  $p(t_0)$ . Агенту надо выбрать  $t_1 \in [0; T - t_0 - 2\tau]$ . Если освоения опыта в процессе деятельности не происходит, то в силу условия  $t_0 + t_1 + t_2 + 2\tau = T$ ,  $t_2 = T - t_0 - t_1 - 2\tau$ . Если в процессе деятельности происходит освоение опыта, то  $t_2 = T - t_0 - t_1 - \tau$ . Ниже будем пользоваться выражением  $t_2 = T - t_0 - t_1 - m\tau$ , где соответственно  $m = 1$  или  $m = 2$ . В соответствии с выражением (1), агент решает задачу:

$$p(t_0 + t_1) + p(t_0 + t_1 + t_2) (1 - p(t_0 + t_1)) \rightarrow \max_{t_1 \in [0; T - t_0 - 2\tau]} .$$

Подставляя  $t_2$ , получим

$$p(T - m\tau) + (1 - p(T - m\tau)) p(t_0 + t_1) \rightarrow \max_{t_1 \in [0; T - t_0 - 2\tau]} .$$

В силу монотонности кривой опыта, независимо от значения  $m = 1$  или  $m = 2$ , решение этой задачи достигается при максимально возможном значении времени  $t_1$ , т.е.  $t_1^* = T - t_0 - 2\tau$ . Утверждение 1 доказано.

Последовательно применяя обратной индукцией результат утверждения 1 в многоэтапной модели, получаем справедливость следующего следствия.

*Следствие.* При неубывающей кривой опыта, зависящей от суммарного времени, затраченного на обучение, в многоэтапной модели авторефлексии и обучения оптимальной стратегией агента является максимизация первоначального периода обучения.

Содержательная интерпретация результата следствия: сначала максимально возможное время следует тратить на получение и освоение опыта, а затем переходить к продуктивной деятельности.

Применительно к авторефлексии этот вывод значит, что, если условия получения и освоения опыта не изменяются (кривая опыта «едина»), т.е. в процессе деятельности агент не получает качественно новой информации (в том числе о множестве и вероятностях возможных значений факторов неопределенности [2, 3]), то авторефлексия бессмысленна.

Приведем иллюстративный пример, когда авторефлексия все же имеет смысл.

Пусть после первого периода продуктивной деятельности у агента возрастает скорость обучения:  $\gamma_2 > \gamma_1$ , тогда во втором случае (когда в процессе деятельности происходит освоение опыта)

$$p_2(t_1) = 1 - \exp(-\gamma_1(t_1 + \tau)) \exp(-\gamma_2(t - t_1 - \tau)),$$

$t(t_1 + \tau, T - \tau]$ .

Из выражения (1) получаем:

$$p^2(t_1) = 1 - B \exp[(\gamma_2 - 2\gamma_1)t_1],$$

где  $B = \exp[(\gamma_2 - \gamma_1)\tau - \gamma_2 T] > 0$ .

Решение задачи

$$p^2(t_1) \rightarrow \max_{t_1 \in [0; T - 2\tau]}$$

имеет простой вид:

$$(4) \quad t_1^* = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma_2 \geq 2\gamma_1, \\ T - 2\tau, & \text{если } \gamma_2 < 2\gamma_1. \end{cases}$$

Содержательная интерпретация стратегии (4) такова: если в результате авторефлексии скорость обучения возрастает в два и более раза, то первоначальное обучение не имеет смысла; в противном случае следует все имеющееся время потратить на первоначальное обучение.

### 3. Иерархическая модель

В [3] предложена модель автонавучения в непрерывном времени – дифференциальное уравнение для уровня научения  $z(t) \in [0; 1]$ ,  $t \geq 0$ :

$$(5) \quad \dot{x}(t) = \gamma(1-x)\psi(x)$$

с начальным условием  $x(0) = \lambda \in [0; 1]$ , где  $\gamma > 0$ ,  $\psi(\cdot)$ :  $[0; 1] \rightarrow (0; A]$  – непрерывная функция, где  $0 < A < +\infty$ . Если множитель  $\psi(x)$  в правой части выражения (5) интерпретируется как интенсивность процесса проверок состояний внешней среды (эффект «научения научению») или/и как вероятность успешного освоения опыта (компоненты технологии, успешного выполнения действий, и т.п.), то  $A = 1$ . В [3] показано, что, варьируя  $\psi(z)$ , можно получать различные кривые автонавучения. Частными случаями являются многие хрестоматийные классы кривых научения, например, логистическая кривая научения

$$(6) \quad x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \exp(-\gamma t)},$$

которой соответствует  $\dot{x}(x) = x$ ,  $\lambda > 0$ , т.е. выражение (5) для нее имеет вид  $\dot{x}(t) = \gamma x(1-x)$ .

Другими словами, логистическая модель автон обучения получается, когда процесс научения зависит от «метапроцесса», определяющего эффективность научения и зависящего от достигнутого уровня научения (причем линейным образом – см. предположение  $\dot{x}(x) = x$ ).

Альтернативой является *иерархическая модель* с  $m$  уровнями иерархии (условно уровень может рассматриваться как «ранг авторефлексии»), в которой

$$(7) \quad \dot{x}_i(t) = \gamma_i(1-x_i(t))x_{i+1}(t), i = \overline{1, m-1}; \quad \dot{x}_m(t) = \gamma_m(1-x_m(t)),$$

т.е. процесс обучения на верхнем уровне описывается экспоненциальной кривой, а на всех других уровнях зависит от уровня научения более высокого уровня иерархии.

Приведем пример: пусть  $m = 2$ , тогда при нулевых начальных уровнях научения имеем:  $x_2(t) = 1 - e^{-\gamma_2 t}$ ,

$$(8) \quad \dot{x}_1(t) = \gamma_1(1-x_1(t))(1-e^{-\gamma_2 t}).$$

Решение уравнения (8) имеет вид

$$(9) \quad x_1(t) = 1 - e^{-\gamma_1 t} e^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t})}.$$

Если бы в правой части выражения (8) множитель  $1 - e^{-\gamma_2 t}$  отсутствовал, то (9) имело бы вид  $x_1(t) = 1 - e^{-\gamma_1 t}$ , т.е. процесс нижнего уровня также описывался бы классической экспоненциальной кривой научения. Иерархическое взаимодействие приводит к тому, что кривая научения (9) нижнего уровня имеет точку перегиба.

#### 4. Заключение

Авторефлексия и обучение в процессе (или по результатам) деятельности тесно связаны. Как показывает рассмотренная выше модель цикла «обучение – продуктивная деятельность - рефлексия», авторефлексия имеет смысл, если в процессе деятельности агент приобретает качественно новый опыт, требующий осмыслиения и приводящий, быть может, к изменению (и повышению эффективности) технологий деятельности.

Перспективным в рамках цикла «I» на рис. 1 представляется развитие моделей авторефлексии в терминах сокращения множества возможных миров (характеризующих состояние внешней среды – условия деятельности) в рамках обобщенных множественных структур информированности [11].

Более амбициозным является возможное рассмотрение авторефлексии в рамках циклов «II» и «III» на рис. 1, что потребует разработки формальных моделей, связывающих сквозным образом все элементы цепочки «потребность – цель – действие – результат». Эта задача видится нетривиальной, так как на сегодня отсутствуют даже операционные количественные модели целеполагания, не говоря уже о моделях связи последнего с потребностями, мотивацией и пр.

#### Литература

1. АНИСИМОВ О.С. *Авторефлексия и самопознание* // Живая психология. – 2016. – Т. 3, №1. – С. 11–28.
2. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели опыта* // Проблемы управления. – 2021. – №1. – С. 43–60.
3. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели технологий*. – М.: Ленанд, 2019. – 160 с.

4. ЛЕФЕВР В.А. *Рефлексия*. - М.: Когито-центр, 2003. – 296 с.
5. ЛИТВИНОВ А.В., ИВОЛГИНА Т.В. *Метакогниция: Понятие, структура, связь с интеллектуальными и когнитивными способностями (по материалам зарубежных исследований)* // Современная зарубежная психология. – 2013. – №3. – С. 59–70.
6. МАЙЕР Р.В. *Кибернетическая педагогика: имитационное моделирование процесса обучения: монография*. – Глазов: Глазов. гос. пед. ин-т, 2014. – 141 с.
7. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Образовательный проект*. – М.: Эгвес, 2004. – 120 с.
8. НОВИКОВ Д.А. *Математические модели формирования и функционирования команд*. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2008. – 184 с.
9. НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Рефлексия и управление: математические модели*. – М.: Физматлит, 2013. – 412 с.
10. Теория управления: словарь системы основных понятий. – М.: Ленанд, 2024. – 128 с.
11. ФЕДЯНИН Д.Н., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Обобщенная множественная структура информированности* // Управление большими системами. – 2024. – Вып. 109. – С. 6–20.
12. ЦУПИКОВА Е.В., ЦЫГУЛЕВА М.В. *Экспериментальная проверка модели формирования умений авторефлексии* // Гуманитарные исследования. – 2019. – №3(24). – С. 172–178.
13. DOU Z., YANG C., WU X. et al. *Re-ReST: Reflection-Reinforced Self-Training for Language Agents* // Proc. of the 2024 Conf. on Empirical Methods in Natural Language Processing. – 2024. – P. 15394–15411.

14. FAISAL S., LOVA M., LADIN S. et al. *Self-Reflection Model Based on Fact, Feeling, Finding, Future, Framework* // Journal Teknologi Pendidikan. – 2025. – Vol. 27, No. 1. – P. 236–252.
15. FLAVELL J. *Metacognitive Aspects of Problem Solving* // The Nature of Intelligence. Ch. 12. – New Jersey, 1976. – P. 231–235.
16. GIBBS G. *Learning by Doing. A Guide to Teaching and Learning Methods*. – London: Further Education Unit, 1998. – 129 p.
17. LEBUDA I., BENDEK M. *A Systematic Framework of Creative Metacognition* // Physics of Life Reviews. – 2023. – Vol. 46. – P. 161–181.
18. MARÍN C., MEHANDJIEV N. *A Classification Framework of Adaptation in Multi-Agent Systems* // In: Klusch M., Rovatsos M., Payne T.R. (eds) Cooperative Information Agents // Lecture Notes in Computer Science. – 2006. – Vol. 4149. – P. 1–25.
19. NOVIKOV D. *Control, Activity, Personality* // Advances in Systems Science and Applications. – 2020. – Vol. 20, No. 3. – P. 113–135.
20. RENZE M., GUVEN E. *Self-Reflection in LLM Agents: Effects on Problem-Solving Performance* // arXiv:2405.06682v3.
21. VARSOS K., PAPAMICHAIL M., FLOURIS G. et al. *Adaptation Procedure in Misinformation Games* // Auton Agent Multi-Agent Syst. – 2025. – Vol. 39, No. 22. – P. 1–47.

## SELF-REFLEXION AND LEARNING

Dmitry Novikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Academician RAS (novikov@mail.ru).

*Abstract: Self-reflection is the subject's reflection and analysis of their own understanding of reality, the principles and techniques of their activities, the correspond-*

*ence of their results to their goals, and ways to improve the effectiveness of their activities. This article examines several models of self-reflection, described in terms of learning processes. It is shown that, with a non-decreasing learning curve dependent on the total learning time, the optimal strategy is to maximize the initial learning period. That is, if the conditions for acquiring and mastering experience do not change (during the activity, the subject does not receive qualitatively new information), then self-reflection is meaningless. Self-reflection is justified if, for example, the individual learning rate increases during productive activity. Hierarchical learning models are proposed, in which the achieved values of the learning criterion determine the learning rate at a higher level of the hierarchy, what can also be considered an effect of self-reflection.*

Keywords: activity, self-reflection, uncertainty, learning.

УДК 519.8

ББК 22.18 + 32.811 + 32.817 + 65.050 + 87.0

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

*Поступила в редакцию 11.07.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*

## МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УБЕЖДЕНИЙ И АТТИТЮДОВ СУБЪЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОГНИТИВНЫХ КАРТ

Авдеева З. К.<sup>1</sup>, Коврига С. В.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Основу исследования составляет анализ дискурса, являющегося распространенным средством социально-политической коммуникации. Особое значение такой анализ приобретает в управлении в социально-политических ситуациях в области международных отношений, где без понимания механизмов интерпретации действий и текстов невозможно адекватно анализировать конфликтные ситуации, переговоры, функционирование политических сетей и идеологических систем. В контексте задач управления социально-политической коммуникацией с использованием методов представления и обработки знаний предложена модель представления убеждений и аттитюдов субъекта. Основу модели составляет когнитивная карта причинно-следственных отношений между факторами (концептами), значимыми в картине мира субъекта, которая вербализует его структуру убеждений по некоторой ситуации. Отличительной особенностью модели является включение в нее валентности – параметра для учета эмоционально окрашенных оценок субъекта (аттитюдов) по оцениваемой ситуации. Данная модель предназначена для решения задач экспликации и анализа устойчивости и согласованности структуры убеждений и аттитюдов (установок) субъекта по оцениваемой ситуации, анализа динамики ее изменения посредством структурного анализа. Для реализации структурного анализа предложена система критерiev эмоциональной согласованности и ряд структурных показателей для оценки значимости и эмоциональной согласованности выводимых из модели последовательностей утверждений, определяющих предпочтения субъекта при принятии решений в ситуации. В заключении приведены обобщающие выводы и обозначено дальнейшее направление экспериментальных исследований.

Ключевые слова: социальное управление, дискурс, аттитюд, методы представления и обработка знаний, когнитивная карта, структурный анализ.

---

<sup>1</sup> Зинаида Константиновна Авдеева, к.т.н., с.н.с. (avdeeva@ipu.ru).

<sup>2</sup> Светлана Вадимовна Коврига, н.с. (kovriga@ipu.ru).

## **1. Введение**

В условиях развития и распространения информационных и телекоммуникационных технологий, технологий интернет-коммуникации и медиатизации общества информационно-коммуникативные процессы занимают все более значимое место в сфере социально-политического управления в обществе [4]. Любая поступающая к человеку информация оказывает позитивное или негативное влияние на его поведение, структуру знаний, отражающую его картину (модель) мира [11]. Картина мира включает в себя набор убеждений, особенностей восприятия ценностных и практических установок субъекта, которыми он руководствуется в своей деятельности и принятии решений. Технологии убеждающей коммуникации являются основой современного политического управления, нацеленного на изменение представлений о социально-политической реальности, политических ценностей и убеждений, поведенческих моделей участников информационно-коммуникационного воздействия [4].

В статье предметом исследования являются социально-политические взаимодействия (коммуникации) с использованием методов представления и обработки знаний. Основу исследования составляет анализ дискурса, в частности политического, как средства социально-политической коммуникации. Здесь под дискурсом понимается текст, связанный с ситуативным контекстом, определяющим все существенное для порождения текста с учетом системы когнитивных и коммуникативно-прагматических целеустановок автора, взаимодействующего с адресатом [14].

Анализ смысловой информации дискурса направлен на воспроизведение картин мира разных социальных групп, основанных на текстах [12].

В сложных коммуникационных ситуациях важно стремиться к согласованности мнений всех заинтересованных сторон, при том что взгляды, точки зрения, картины мира могут различаться. Поэтому применение методов представления знаний перспективно и с позиций достижения взаимопонимания – понимания различий картин мира, которое можно существенно

облегчить за счет визуализации – представления в наглядной форме [15].

Кроме того, возрастание потребности в методах анализа политических текстов и текстов СМИ, размещенных на различных медиаресурсах, обусловлено необходимостью мониторинга различных тенденций

– в формировании общественного мнения по тем или иным проблемным вопросам [10], например, в такой важной сфере, как протестная активность [2], или при анализе и формировании идеологических предпочтений пользователей социальных сетей [3,4];

– в представлениях (онтологиях, картинах мира) политических сетей, представляющих собой коллективных акторов в виде сетей системообразующих игроков мировой политики: политического руководства и экспертов, участвующих в процессе принятия внешнеполитических и внешнеэкономических решений, в формировании стратегий развития международных отношений [13] и др.

К одной из важнейших функций социально-политического дискурса относится функция убеждения [5]. Таким образом, к целям политического дискурса относится формирование влияния на общественное сознание для внушения определенных намерений, установок и мотивации определенного поведения [4].

В широком смысле под убеждением (*persuasion*) понимаются любые попытки воздействия (как правило, речевого), цель которых изменение установок (*attitudes*), убеждений (*beliefs*) и представлений человека. Чаще всего в качестве цели убеждения рассматривается изменение установок – аттитюдов [11].

В современной социальной психологии аттитюд определяется как относительно общая и продолжительная оценка объекта по валентному измерению, варьирующемуся от негативного до позитивного. Эти оценки могут быть привязаны практически ко всему, включая людей, социальные группы, физические объекты, события, поведение и абстрактные концепции. Значимой функцией аттитюда является «функция знания», которая помо-

гает субъекту организовать свои представления об окружающем мире, интерпретировать возникающие события и явления [34].

Перспективность применения методов представления знаний к проблемам управления социально-политической коммуникацией обусловлена возможностями [18]:

- объективизации структур знаний, состоящих за текстом, с помощью специальных методов представления знаний;
- экспликации механизмов понимания текста, выявления скрытых структур знаний.

Поэтому актуальной задачей является экспликация и исследование типичных структур такого рода, что требует применение специального аппарата, отличающегося по своей форме от традиционного аппарата математики [7, 18].

Одним из признанных методов анализа социально-политического дискурса является когнитивное картирование [5, 13, 18, 29]. Согласно Р. Аксельроду, предложившему использование когнитивных карт для моделирования политических процессов, когнитивная карта представляет собой совокупность утверждений, связанных между собой каузальными связями. Посредством подобных каузальных связей выстраиваются цепочки последовательных утверждений, которые формируют картину мира ЛПР по конкретной ситуации [13, 25, 29]. Когнитивное картирование позволяет выявить каузальную структуру текста, что используется для анализа социально-политических ситуаций или формирования сценариев развития ситуации, а также для моделирования мышления человека, принимающего общественно значимые решения, так как структуры знания в мышлении ЛПР, являются важнейшими элементами ситуации, неустранимыми из модели принятия решений [5, 7, 18, 25].

Анализируя свои и чужие когнитивные карты, можно углубить понимание проблемы, улучшить качество и обоснованность принимаемых решений. Можно использовать когнитивные карты для коллективной выработки и принятия решений, изменения устоявшихся стереотипов, генерации новых точек зрения [5, 13, 15, 18].

Моделирование на основе когнитивных карт формирует различные сценарии развития ситуации или разрешения кон-

фликтных ситуаций сквозь призму картин мира субъектов, отраженных в этих картах. Однако семантика традиционных карт не учитывает возможность оценки аффекта, представляющего собой комплекс эмоций и настроений, которые имеют важное значение в мышлении и поведении субъектов [1, 7]. Эмоциональные ценности являются неотъемлемыми элементами человеческого восприятия, понимания и принятия решений, о чем свидетельствуют многочисленные эмпирические исследования [28].

Как отмечалось выше, значимым объектом убеждения (воздействия) в коммуникациях являются аттитюды, которые отражают эмоционально окрашенные оценки различных объектов субъектом.

В статье рассматривается задача включения аттитюдов (с учетом их особенностей) в модель представления убеждений субъекта в виде когнитивной карты причинно-следственных отношений между факторами, обозначаемыми понятиями, значимыми в картине мира субъекта по некоторой ситуации. Предложена модель субъекта  $M_s^P$ , отражающая убеждения и аттитюды (выраженные через эмоциональные оценки – валентности), в совокупности важные для принятия решений по некоторой оцениваемой ситуации. Модель  $M_s^P$  является основой для решения различных задач анализа и моделирования социально-политического дискурса с целью

- оценки влияния последнего на различные категории целевой аудитории;
- оценки устойчивости и непротиворечивости системы убеждений и аттитюдов субъекта  $P$  по некоторой ситуации  $S$  (прослеживание траектории изменения убеждений и аттитюдов субъекта  $P$  о ситуации  $S$  с учетом ее изменений);
- выявления различий видения одной и той же ситуации у разных субъектов коммуникации (например, для разрешения конфликтов, проведения переговоров) и др.

Далее в разделе 2 приведены особенности аттитюдов, формальное представление модели  $M_s^P$ ; в разделе 3 представлены базовые положения, составляющие основу анализа эмоциональ-

ной согласованности модели  $M_s^P$ , система критериев и основы структурного анализа такой согласованности. В заключении приведены обобщающие выводы и обозначено дальнейшее направление экспериментальных исследований.

## **2. Модель представления убеждений и аттитюдов субъекта**

### **2.1. АТТИТЮД. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА**

Аттитюд не доступен внешнему наблюдению. Он проявляется на основе измеряемых реакций (компонент аттитюда), отражающих позитивные или негативные оценки относительно некоторого объекта.

Аттитюд основан на аффективном, когнитивном и поведенческом компонентах. В современных психологических исследованиях наиболее популярно рассмотрение двукомпонентного основания аттитюда (поведенческий компонент приравнивается к намерению совершить определенный поступок и изучается отдельно) [9]. Аффективный компонент состоит из чувств и эмоций, связанных с объектом аттитюда; когнитивный компонент состоит из убеждений, представлений, связанных с объектом аттитюда [34].

Аттитюд обладает следующими особенностями [9, 11, 34]:

- затрагивает не отдельные объекты (явления), а совокупность объектов оценки;
- может быть основан как на особенностях, которые субъект приписывает объектам (когнитивное основание), так и на эмоциях к ним (эмоциональное основание);
- субъект может обладать несколькими разными аттитюдами в отношении одного и того же объекта. В этом случае их актуализация во многом зависит от ситуации (конкретный ситуационных условий). Например, люди могут выражать позитивное отношение к политикам вообще после напоминания об известном政治ическом деятеле, отличающемся своей честностью и принципиальностью, и негативное отношение – после напоминания о политике, замешанном в коррупционном скандале;

- может складываться из нескольких частных оценок. Например, субъект может оценивать протестную ситуацию как способ реализации прав человека (позитивная оценка) и одновременно как угрозу общественной безопасности (негативная оценка), при этом обобщенный аттитюд зависит от значимости для субъекта каждой составляющей оценки.

Аттитюд несет в себе оценочный компонент – валентность – положительную или отрицательную ценность, значимость объекта: события, действия и т.п. для субъекта.

Валентность может формироваться по нескольким критериям оценивания субъектом ситуации. Например, субъект может оценить некоторое событие исходя из его новизны, приятности, желательности, соответствия цели. Последствия события оцениваются с точки зрения причинно-следственных связей, несоответствия ожиданиям, соответствия цели (потребности), предпочтениям [31].

Валентность в основном передается в социальных взаимодействиях эксплицитно, например, с помощью слов и мимики [27], тональности голоса, учащенного дыхания; примерами имплицитного ее проявления является повышение артериального давления, учащение сердцебиения и др.

Различают аффективную валентность – это свойство аффективной реакции, профиль чувствительных ко времени физиологических и психологических изменений после воздействия стимула (объекта аттитюда) и семантическую валентность – сохраненные семантические знания о значении стимула [24, 26].

В предлагаемой модели субъекта  $M_s^P$  введенный параметр валентности относится к семантической валентности.

Наконец, необходимо учитывать еще одно важное свойство аттитюда или аттитюдо-релевантной информации (т.е. соответствующей аттитюду) –оценочную согласованность такой информации [34].

Аттитюды, включающие в себя одну – позитивную или негативную – оценку, называются однородными. Социальные установки, которые могут включают как положительную, так и отрицательную оценку объекта (явления), называются амби-

валентными (attitude ambivalence). Амбивалентность может возникать, когда оценки в пределах одного измерения противоречивы или когда одно измерение объекта аттитюда является положительным, а другое – отрицательным.

## 2.2. МОДЕЛЬ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ УБЕЖДЕНИЙ И АТТИТЮДОВ. ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Модель  $M_s^P$  представления системы убеждений и аттитюдов субъекта  $P$  о ситуации  $S$  включает

- когнитивную карту  $K_s^P = (X^C, W, f)$ , представляющую в виде ориентированного графа, где  $X^C = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\}$  – множество факторов-переменных (включая целевые факторы субъекта  $P$ ), каждый из которых представлен понятием (концептом)  $C_{xi} = (N_{xi}, M_{xi})$ , где  $N_{xi}$  – это имя фактора  $x_i$ ,  $M_{xi}$  – это смысл, ассоциируемый с именем  $N_{xi}$  у субъекта  $P$  в системе убеждений и аттитюдов о ситуации  $S$ ;  $W$  – множество отношений между  $X^C$ , которое может быть представлено квадратной матрицей  $W = [w_{ij}]$  причинно-следственных влияний, где  $w_{ij}$  вес влияния фактора  $x_i$  на  $x_j$  ( $x_i \xrightarrow{w_{ij}} x_j$ ), оцениваемый на универсальной шкале  $U$  в интервале  $[-1, 1]$  и определяющий степень уверенности субъекта  $P$ , что изменение фактора  $x_i$  является причиной изменения фактора  $x_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ); при этом вес  $w_{ij} > 0$  характеризует одностороннее изменение «+»: параметр-следствие изменяется в том же направлении, что и параметр-причина; вес  $w_{ij} < 0$  – разностороннее изменение «-»: параметр-следствие изменяется в противоположном направлении от изменения параметра-причины; если влияние между парой факторов ( $x_i, x_j$ ) отсутствует, то  $w_{ij} = 0$ ;
- $f$  – функция агрегирования для любого зависимого фактора от факторов, непосредственно влияющих на него;
- активность  $a_i$  фактора  $x_i \in X^C$  – оценка направления изменения  $x_i$ ;  $a_i = 1$  если наблюдается (или желательно) увеличение значения фактора  $x_i$ ,  $a_i = -1$ , если наблюдается (или желательно) уменьшение значения  $x_i$ ,  $a_i = 0$ , если неизвестно или предпочтения по направленности изменения  $x_i$  отсутствуют у субъекта  $P$ ;

- валентность  $v_i$  фактора  $x_i$  – оценка субъектом  $P$  привлекательности (хороший \ благоприятный \ позитивный \ полезный \ нравится) фактора  $x_i$  ( $v_i = 1$  – положительная валентность) в контексте  $S$  или непривлекательности  $x_i$  (плохой \ неблагоприятный \ негативный \ вредный \ не нравится) ( $v_i = -1$  – отрицательная валентность); оценка  $v_i = 0$  интерпретируется как нейтрально; оценка  $v_i = (1 \vee -1)$  – амбивалентность.

В качестве  $f$  используется линейная функция. Выбор обусловлен, с одной стороны, распространённостью данного типа функций в практике применения когнитивных карт в различных прикладных областях. С другой стороны, в социальной психологии в рамках теории интеграции информации (Information Integration Theory) [21], исследующей то, как человек объединяет информацию от двух или более стимулов для получения количественного значения, предложена концепция «когнитивной алгебры». Когнитивная алгебра предусматривает объединение нескольких оценочных стимулов в одно суждение, используя алгебраические правила. В основе этой алгебры используются модели сложения, умножения и усреднения (среднего арифметического и взвешенного среднего; последнее – предпочтительнее согласно экспериментальным данным по критерию правдоподобности формируемых оценок) [9, 21, 22]. Таким образом когнитивная алгебра применима для формирования «общего» аттитюда, отражающего обобщенное отношение к оцениваемой ситуации, представленной когнитивной картой  $K_S^P$ .

### **3. Подход к анализу эмоциональной согласованности модели убеждений и аттитюдов $M_S^P$**

Различные формы коммуникативного воздействия, в том числе посредством социально-политического дискурса, направлены на изменение картины мира субъекта  $P$ , которая может быть в разной степени подвержена влиянию в некоторой ситуации  $S$ . Такое влияние может приводить к нарушению устойчивости, согласованности убеждений и аттитюдов субъекта  $P$ .

В социальной психологии теории когнитивной согласованности исследуют влияние противоречий в когнитивной системе<sup>1</sup> субъекта (конфликт мнений, ценностей, установок) на его деятельность и принятие решений.

### 3.1. БАЗОВЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Концепция когнитивной согласованности (Cognitive Consistency) играет ключевую роль в обработке социальной информации (теория баланса Ф. Хайдера (1958), теория когнитивного диссонанса Л. Фестингера (1957) и др.). Согласно этой концепции люди предпочитают, чтобы их знания, убеждения, мнения, аттитюды, намерения были согласованы (не противоречили друг другу), т.е. стремятся к внутренней согласованности своей когнитивной системы (картины мира). Нарушение такой согласованности (сбалансированности) приводит к внутренней напряженности, что отражается в поведении, в частности, принятии решений или коммуникации; и субъект стремится изменить состояние рассогласованности, которое может быть выражено в изменении убеждений и аттитюдов.

Специалист в области когнитивных наук П. Тагард предложил теорию эмоциональной согласованности (Emotional Coherence) [32], которая схожа с идеями теорий когнитивной согласованности Ф. Хайдара и Л. Фестингера. Согласно принципам этой теории, аттитюды формируются и изменяются благодаря отношениям между ценностями, связанными с системами понятий, убеждений и целей. Например, люди придают положительную ценность таким понятиям, как равенство, если это понятие согласуется с другими позитивными понятиями, такими как человеческие потребности, и противостоит негативным понятиям, таким как бедность. Эмоциональная согласованность уравновешивает положительные и отрицательные ценно-

---

<sup>1</sup> Когнитивная система – совокупность связанных между собой представлений и оценок как отдельных стимулов (объектов), так и групп стимулов, с помощью которых люди интерпретируют и активно изменяют внешнюю среду [9].

сти, чтобы дать общий вывод в модели представлений субъекта по некоторой оцениваемой ситуации. Как следствие, люди принимают решения и другие выводы на основе того, насколько хорошо конкурирующие альтернативы в целом соответствуют их убеждениям и целям, включая эмоциональные ценности (валентности), которые они придают этим представлениям.

В соответствии с этой теорией П. Тагард разработал метод когнитивно-аффективного картирования, позволяющего визуально изображать идеи, убеждения и эмоции субъектов, которые они связывают с некоторым политическим вопросом [28, 33].

Когнитивно-аффективные карты (cognitive-affective maps, CAM) отражают набор концептов, важных в системе убеждений субъекта по некоторому вопросу, ситуации. Концептам приписана эмоциональная ценность – валентность (положительная или отрицательная), и они связаны между собой симметричными эмоциональными связями (положительными – взаимодополняющими или отрицательными – конфликтующими (несовместимыми)), т.е. семантика связи между парой концептов отражает отношение согласованности (конфликтности) между ними. CAM представляются в виде неориентированных графов с использованием различных техник визуализации. Эмоциональная согласованность моделируется нейронными сетями, которые показывают, как конфликтующие ценности могут быть сбалансированы (согласованы) друг с другом [33].

### *3.2. ОТЛИЧИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИ УБЕЖДЕНИЙ И АТТИТЮДОВ $M_s^P$*

Существенным различием моделей CAM и  $M_s^P$  является заложенная в них семантика и, как следствие, их назначение (решаемые виды задач).

CAM направлена на исследование содержания – набора концептов, составляющих основу убеждений субъекта, и их эмоциональной согласованности.

Модель  $M_s^P$  направлена не только на формирование набора концептов, но на вербализацию структуры убеждений по неко-

торой ситуации в виде модели причинно-следственных отношений между концептами (факторами), порождающей связанные цепочки рассуждений субъекта  $P$  в контексте ситуации  $S$ .

Результаты анализа модели  $M_s^P$  отражают степень обусловленности изменения одних факторов (концептов) при активации других факторов через те или иные связывающие их цепочки (пути) причинно-следственных влияний в зависимости от степени уверенности субъекта  $P$  в причинности между факторами в когнитивной карте  $K_s^P$ , отражающей ситуацию  $S$ .

Такое вербальное представление позволяет анализировать и прогнозировать логику принятия решений, приоритеты целеполагания, предпочтения субъекта  $P$  в ситуации  $S$ ; анализировать динамику изменений в картине мира субъекта – индивидуального или коллективного (например, политической сети), обусловленных изменением ситуации; анализировать и сравнивать картины мира субъектов политических конфликтов или переговоров и т.п.

При определении системы критериев эмоциональной согласованности, применимых к различным конструкциям и карте  $K_s^P$  в целом, помимо валентностей  $\{v_i\}$  факторов  $\{x_i\}$  используются активности  $\{a_i\}$ , определяющие направленность изменений  $\{x_i\}$  (раздел 2.2).

В отличие от модели САМ, ориентированной на анализ эмоциональной согласованности концептов в системе убеждений субъекта по некоторой ситуации (проблеме), модель  $M_s^P$  направлена на анализ такой согласованности как факторов (концептов), так и структуры связей между ними на основе сформированной системы критериев.

### 3.3. СИСТЕМА КРИТЕРИЕВ ЭМОЦИОНАЛЬНОЙ СОГЛАСОВАННОСТИ МОДЕЛИ $M_s^P$

Система критериев эмоциональности согласованности (ЭС) включает критерии, относящиеся к базовым конструкциям (факторам  $\{x_i\}$ , прямым причинно-следственным связям  $\{l_{ij}(x_i, x_j)\}$  и узлам  $\{B_j(x_{1j}, \dots, x_{nj}, x_j)\}$ ) карты  $K_s^P$ , представляющей в виде ор-

графа. Узел  $B_j$  – конструкция, включающая фактор-приемник  $x_j$  со всеми факторами-источниками ( $x_{1j}, \dots, x_{nj}$ ), влияющими на него. На рис. 1 представлены перечисленные конструкции, включая узел со знаками влияния между связанными факторами (слева) и узел с весами влияний (справа). Критерии представлены по мере усложнения конструкций карты  $K_s^P$  и составляют основу для анализа эмоциональной согласованности более сложных конструкций карты, образованных из базовых конструкций, и когнитивной карты в целом.

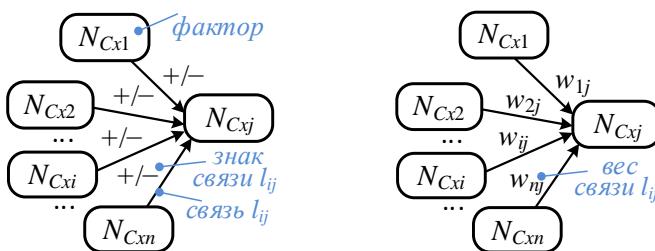


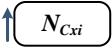
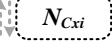
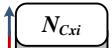
Рис. 1. Базовые конструкции для знаковых и взвешенных карт

*Базовая конструкция – фактор (концепт).* В таблице 1 перечислены виды факторов (с их визуализацией), различающихся по эмоциональной окраске – оценочному отношению (аттитюду) субъекта к фактору и критерии их ЭС.

Критерий ЭС помимо аттитюда (в виде оценки валентности  $v_i$ ) включает и оценку субъекта желательной направленности изменения фактора. Стрелки в таблице 1 указывают направленность активности (изменения) фактора,  $a_i$ , (синяя – рост, красная – снижение).

Нейтральные факторы имеют оценку  $v_i = 0$  и направленность их изменения для субъекта  $P$  не важна. Но при включении таких факторов в более сложные конструкции карты направленность их изменения необходимо учитывать для обеспечения ЭС порождаемых конструкций и карты в целом (с учетом семантики связей между факторами, принятой в модели (см. раздел 2.2)).

Таблица 1. Эмоционально согласованные факторы  $x_i$   
в карте  $K_S^P$

Фактор (визуализация)	Валентность фактора		Критерий $C_k(x_i)$
	Значение	Интерпретация	
	$v_i = 1$	позитивное отношение к $x_i$ – благоприятная эмоциональная окраска	$C_1(x_i): v_i = 1 \& a_i = 1$
	$v_i = -1$	отрицательное отношение к $x_i$ – негативная эмоциональная окраска	$C_2(x_i): v_i = -1 \& a_i = -1$
	$v_i = 0$	нейтральное отношение к фактору $x_i$	$C_3(x_i) \vee C_4(x_i)$ $C_3(x_i): v_i = 0 \& a_i = 1$ $C_4(x_i): v_i = 0 \& a_i = -1$
	$v_i = 1 \vee -1$	амбивалентное отношение к фактору $x_i$	$C_5(x_i):$ $v_i = 1 \& a_i = 1 \vee$ $v_i = -1 \& a_i = -1$

*Базовая конструкция – прямая причинно-следственная связь.*  
Перечень критериев ЭС связей между парой факторов  $l_{ij}(x_i, x_j)$ , выраждающих отношение причинно-следственного влияния между  $x_i$  и  $x_j$  вместе с весом  $w_{ij} \in [-1; 1]$ , приведен в таблице 2.

Собственно, любая элементарная связь  $l_{ij}$  считается эмоционально согласованной, если ее валентность равна  $v_{ij} = 1$ .

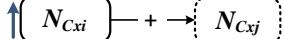
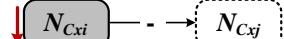
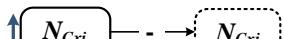
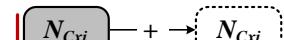
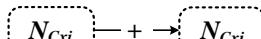
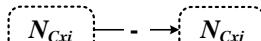
Вычисление валентности связи  $v_{ij}$  между парой факторов  $x_i, x_j$  в таблице 2 осуществляется по соответствующим значениям  $v_i, v_j$  или  $a_i, a_j$ , учитываемых в критериях ЭС факторов, приведенным в таблице 1.

**Утверждение 1.** Пусть заданы две элементарные связи  $l_{ij}(x_i, x_j)$ ,  $l_{jk}(x_j, x_k)$  и каждая из них эмоционально согласована в соответствии с одним из критериев  $C_1(l_{ij}) - C_{14}(l_{ij})$  (таблица 2). Тогда последовательное объединение  $l_{ij}(x_i, x_j) \cup l_{jk}(x_j, x_k)$  эмоционально согласовано, если связующий фактор объединения принадлежит обеим связям  $x_j \in l_{ij}$  и  $x_j \in l_{jk}$  с одним и тем же видом ЭС (значения валентности фактора  $x_j$  в  $l_{ij}$  и  $l_{jk}$  совпадают; см. таблицу 1). Пример приведен на рис. 2.

Таблица 2. Виды эмоционально согласованных элементарных связей между парой факторов  $l_{ij}(x_i, x_j)$  в карте  $K_s^P$

Критерий $C_k(l_{ij})$	Валентность связи $v_{ij}$
<i>Группа 1 – по признаку благоприятной эмоциональной окраски фактора-приемника влияния <math>x_j</math> в <math>l_{ij}</math></i>	
$C_1(l_{ij}): C_1(x_i) \& C_1(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1$	$v_{ij} = v_i \times v_j \times sign(w_{ij}) = 1$
$C_2(l_{ij}): C_2(x_i) \& C_1(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1$	$v_{ij} = v_i \times v_j \times sign(w_{ij}) = 1$
$C_3(l_{ij}): C_3(x_i) \& C_1(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1$	$v_{ij} = a_i \times v_j \times sign(w_{ij}) = 1$
$C_4(l_{ij}): C_4(x_i) \& C_1(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1$	$v_{ij} = a_i \times v_j \times sign(w_{ij}) = 1$
<i>Группа 2 – по признаку неблагоприятной эмоциональной окраски фактора-приемника влияния <math>x_j</math> в <math>l_{ij}</math></i>	
$C_5(l_{ij}): C_1(x_i) \& C_2(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1$	$v_{ij} = v_i \times v_j \times sign(w_{ij}) = 1$
$C_6(l_{ij}): C_2(x_i) \& C_2(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1$	$v_{ij} = v_i \times v_j \times sign(w_{ij}) = 1$
$C_7(l_{ij}): C_3(x_i) \& C_2(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1$	$v_{ij} = a_i \times v_j \times a_j \times sign(w_{ij}) = 1$
$C_8(l_{ij}): C_4(x_i) \& C_2(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1$	$v_{ij} = a_i \times v_j \times sign(w_{ij}) = 1$

Таблица 2 (продолжение)

Критерий $C_k(l_{ij})$	Валентность связи $v_{ij}$
<i>Группа 3 – по признаку положительной активности нейтрального фактора-приемника влияния <math>x_j</math> в <math>l_{ij}</math></i>	
	
$C_9(l_{ij}): C_1(x_i) \& C_3(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1$	$v_{ij} = v_i \times a_j \times sign(w_{ij}) = 1$
	
$C_{10}(l_{ij}): C_2(x_i) \& C_3(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1$	$v_{ij} = v_i \times a_j \times sign(w_{ij}) = -1$
<i>Группа 4 – по признаку отрицательной активности нейтрального фактора-приемника влияния <math>x_j</math> в <math>l_{ij}</math></i>	
	
$C_{11}(l_{ij}): C_1(x_i) \& C_4(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1$	$v_{ij} = v_i \times a_j \times sign(w_{ij}) = -1$
	
$C_{12}(l_{ij}): C_2(x_i) \& C_4(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1$	$v_{ij} = v_i \times a_j \times sign(w_{ij}) = 1$
<i>Группа 5 (по признаку нейтральности фактора-источника влияния <math>x_i</math> и фактора-приемника <math>x_j</math> в <math>l_{ij}</math>)</i>	
	
$C_{13}(l_{ij}): C_3(x_i) \& C_3(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1 \text{ (a)}$ $\vee C_4(x_i) \& C_4(x_j) \& sign(w_{ij}) = 1 \text{ (б)}$	$v_{ij} = a_i \times a_j \times sign(w_{ij}) = 1$
	
$C_{14}(l_{ij}): C_3(x_i) \& C_4(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1 \text{ (б)}$ $\vee C_4(x_i) \& C_3(x_j) \& sign(w_{ij}) = -1 \text{ (г)}$	$v_{ij} = a_i \times a_j \times sign(w_{ij}) = -1$

Здесь и далее, чтобы не перегружать визуализацию, на рисунках веса на связях не указываются, так как для формирования критериев достаточно знать знак влияния («+» – положительное или «–» – отрицательное).

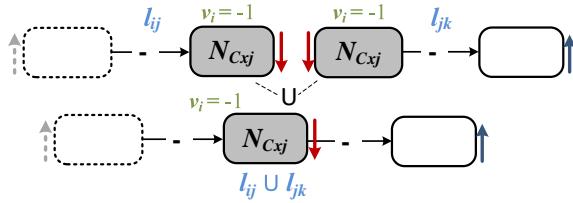


Рис. 2. Последовательное объединение  $l_{ij}(x_i, x_j) \cup l_{jk}(x_j, x_k)$

**Утверждение 2.** Пусть заданы две элементарные связи  $l_{ij}(x_i, x_j)$ ,  $l_{ik}(x_i, x_k)$  и каждая из них эмоционально согласована в соответствии с одним из критериев  $C_1(l_{ij}) - C_{14}(l_{ij})$  (таблица 2). Объединение  $l_{ij}(x_i, x_j) \cup l_{ik}(x_i, x_k)$  в виде ветвления

(2.1) эмоционально согласовано, если связующий фактор этого объединения принадлежит обеим связям  $x_i \in l_{ij}$  и  $x_i \in l_{ik}$  с одним и тем же видом ЭС (значения валентности фактора  $x_i$  в  $l_{ij}$  и  $l_{ik}$  совпадают) (см. рис. 3);

(2.2) амбивалентно, если  $x_i$  в связях  $l_{ij}$  и  $l_{ik}$  различается по виду ЭС (значения валентности  $v_i$  противоположны) (см. рис. 4).

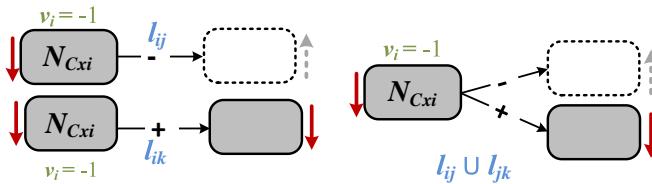


Рис. 3. Объединение  $l_{ij}(x_i, x_j) \cup l_{ik}(x_i, x_k)$  в виде ветвления

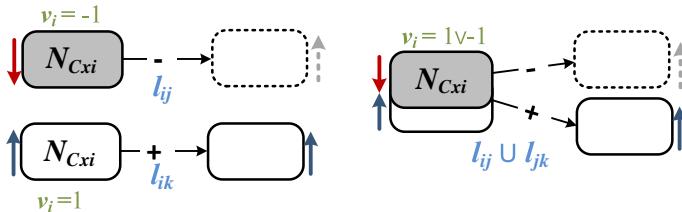


Рис. 4. Объединение  $l_{ij}(x_i, x_j) \cup l_{ik}(x_i, x_k)$  в виде ветвления с амбивалентностью

**Примечание 1.** Утверждение 2 сформулировано для простого случая – ветвления из пары связей, но условия ЭС можно сформулировать по аналогии и для ветвлений, включающих более двух связей.

**Утверждение 3.** Любая цепочка (путь, path)  $p$  причинно-следственных влияний длины  $d$  ( $d = 2, 3, \dots, n - 1$ ,  $n$  – число факторов в карте  $K_s^P$ ), включающая последовательность эмоционально согласованных элементарных связей  $\{l_{ij}\}$  в соответствии с утверждением 1, являются эмоционально согласованными, и валентность цепочки  $p$  равна  $v_p = 1$ .

Нетрудно убедиться, что все виды возможных эмоционально согласованных связей  $l_{ij}$  в таблице 2 имеют положительные значения валентности,  $v_{ij} = 1$ , что обеспечивает  $v_p = 1$  для цепочки  $p$ .

**Ограничение 1 модели  $M_s^P$ .** Включение в карту  $K_s^P$  ветвлений с амбивалентностью (утверждение 2.2) приводит к неопределенности в части анализа эмоциональной согласованности модели  $M_s^P$  субъекта, особенно с усложнением структуры  $K_s^P$  – объединением таких конструкций в карте, как узлы (см. ниже). Неопределенность обусловлена тем, что, с одной стороны, амбивалентность аттитюдов в когнитивной системе субъекта характерна при оценке некоторой ситуации, но с другой стороны, выражительные возможности предложенной модели  $M_s^P$  на сегодня не позволяют представить одновременно такую двойственность фактора (концепта) в однозначно определенной структуре причинно-следственных влияний в  $K_s^P$ . Требуются дополнительные исследования по расширению модели  $M_s^P$ .

Таким образом, рассмотрение условий ЭС ветвлений в  $K_s^P$  позволяют выявлять возможные амбивалентные ветвления с целью их исключения из  $K_s^P$ .

Включение в карту  $K_s^P$  ветвлений с амбивалентностью допустимо при условии, что связующий фактор этого ветвления является входным, т.е. на него не влияют другие факторы в  $K_s^P$ .

Тогда ограниченный анализ на ЭС модели  $M_s^P$  субъекта  $P$  о ситуации  $S$  может проводится на двух картах  $K_s^P(+)$  и  $K_s^P(-)$ , порожденных из  $K_s^P$  путем разделения амбивалентного фактора  $x_i^{+/-}$  на  $x_i^+$  и  $x_i^-$  с преобразованием структуры  $K_s^P$  в  $K_s^P(+)$  и  $K_s^P(-)$  в соответствии со связями  $x_i^+$  и  $x_i^-$  (упрощенный пример приведен на рис. 5).

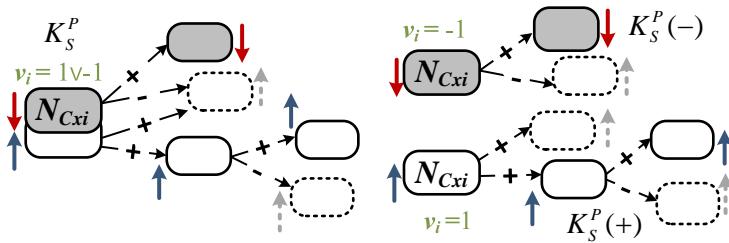


Рис. 5. Разбиение  $K_s^P$  на  $K_s^P(+)$  и  $K_s^P(-)$  на основе разделения входного амбивалентного фактора  $x_i^{+/-}$  в  $K_s^P$

Другой подход к такому анализу может состоять в приведении входного амбивалентного фактора  $x_i^{+/-}$  к фактору с однородной валентностью  $x_i^+$  либо  $x_i^-$  и тем самым к упрощению карты  $K_s^P$  до  $K_s^P(+)$  либо  $K_s^P(-)$ . Основой приведения фактора  $x_i^{+/-}$  к  $x_i^{+/-} = x_i^+$  либо  $x_i^{+/-} = x_i^-$  служит учет степеней уверенности субъекта  $P$  в наличии причинно-следственных влияний фактора  $x_i^{+/-}$ , которые в  $K_s^P$  представляются весами влияний  $w_{ij}$  на соседние с ним факторы; предпочтение отдается  $x_i^{+/-} = x_i^+$  либо  $x_i^{+/-} = x_i^-$  с превосходящей степенью исхода. Степень исхода в орграфе для любого фактора  $x_i \in K_s^P$  в знаковой карте равна числу ( $m$ ) исходящих связей из фактора  $x_i$ ,  $Od^{xi} = m$ ; в карте с весами –  $Od^{xi} = \sum_{j=1}^m |w_{ij}|$ .

*Базовая конструкция – узел когнитивный карты.* Критерии ЭС узла  $B_j$ ,  $C_{15}(B_j) – C_{18}(B_j)$ : узел  $B_j(x_{1j}, \dots, x_{nj}, x_j)$  эмоционально

согласован, если он образован множеством элементарных связей  $l_{ij}$  факторов-источников влияния ( $x_{1j}, \dots, x_{nj}$ )

- с фактором-приемником положительной эмоциональной окраски  $x_j^+$  из группы 1 таблицы 2 (рис. 6а) –  $C_{15}(B_j)$ ;
- с фактором-приемником отрицательной эмоциональной окраски  $x_j^-$  из группы 2 таблицы 2 (рис. 6б) –  $C_{16}(B_j)$ ;
- нейтральным фактором-приемником  $x_j$  из группы 3 и группы 5 (с условиями (а) и (г)) таблицы 2 (рис. 6в) –  $C_{17}(B_j)$ ;
- нейтральным фактором-приемником  $x_j$  из группы 4 и группы 5 (с условиями (б) и (в)) таблицы 2 (рис. 6г) –  $C_{18}(B_j)$ .

При этом допускается неполное представительство видов факторов-источников влияния из каждой группы в узле  $B_j$  (несколько примеров приведено на рис. 6д).

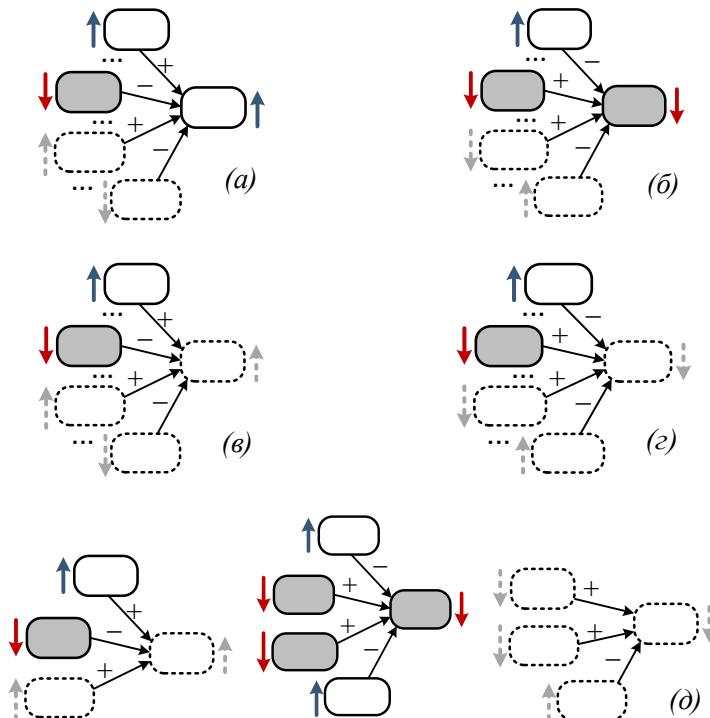


Рис. 6. Виды эмоционально согласованных узлов

**Утверждение 4.** Валентность  $v_{Bj}$  произвольного узла  $B_j$ , удовлетворяющего одному из критериев  $C_{15}(B_j) - C_{18}(B_j)$ , равна 1 в силу того, что каждый такой узел конструируется на основе эмоционально согласованных связей  $\{l_{ij}\}$ , валентность которых равна 1.

Простейший вид узла в  $K_S^P$  – это узел вида  $B_j(x_i, x_j) = l_{ij}(x_i, x_j)$ .

**Утверждение 5.** Пусть заданы два узла  $B_i(x_{1i}, \dots, x_{ni}, \mathbf{x}_i)$  и  $B_j(x_{1j}, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, x_{mj}, x_j)$  и каждый из них эмоционально согласован в соответствии с одним из критериев  $C_{15}(B_j) - C_{18}(B_j)$ . Последовательное объединение двух узлов  $B_i \cup B_j$  эмоционально согласовано, если связующий фактор объединения принадлежит обоим узлам  $x_i \in B_i$  и  $x_i \in B_j$  с одним и тем же видом ЭС (значения валентности фактора  $x_i$  в  $B_i$  и  $B_j$  совпадают) (см. рис. 7).

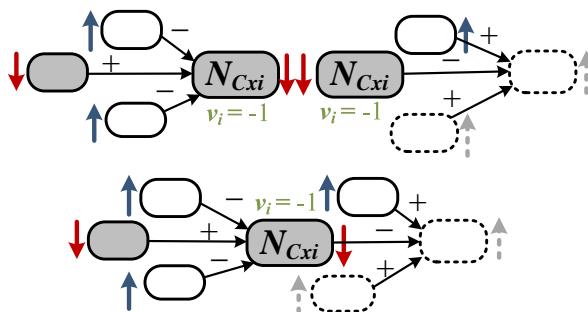


Рисунок 7. Последовательное объединение  $B_i \cup B_j$

**Утверждение 6.** Пусть заданы узлы  $B_i(x_{1i}, \dots, x_{ni}, \mathbf{x}_i)$ ,  $B_j(x_{1j}, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, x_{mj}, x_j)$  и  $B_k(x_{1k}, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, x_{mk}, x_k)$ , каждый из них эмоционально согласован в соответствии с одним из критериев  $C_{15}(B_j) - C_{18}(B_j)$ . Тогда объединение  $B_i \cup B_j \cup B_k$  в виде ветвления эмоционально согласовано, если связующий фактор объединения принадлежит всем узлам  $x_i \in B_i$ ,  $x_i \in B_j$  и  $x_i \in B_k$  с одним и тем же видом ЭС (значения валентности фактора  $x_i$  в  $B_i$ ,  $B_j$  и  $B_k$  совпадают) (см. рис. 8).

*Примечание 2.* Амбивалентное ветвление узлов не рассматривается в силу ограничений модели  $M_S^P$ , обсуждаемых

выше в контексте амбивалентных ветвлений связей  $l_{ij}$  (см. Ограничение 1).

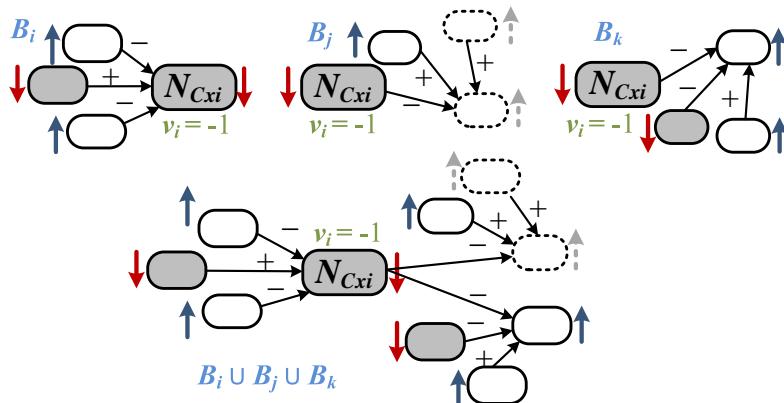


Рис. 8. Объединение узлов с ветвлением

**Утверждение 7.** Любая сложная конструкция, порождаемая объединением нескольких узлов в соответствии с условиями ЭС, определенными в утверждениях 4–6, является эмоционально согласованной, и ее валентность = 1.

### 3.4. ОСНОВЫ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА МОДЕЛИ УБЕЖДЕНИЙ И АТТИТЮДОВ $M_s^P$

Как отмечалось в разделе 2.2, модель  $M_s^P$  направлена не только на формирование набора концептов, но на вербализацию структуры убеждений по некоторой ситуации в виде модели причинно-следственных отношений между концептами (факторами) в  $K_s^P$ , порождающей связанные цепочки причинно-следственных рассуждений субъекта  $P$  в контексте ситуации  $S$ .

Оценка любого причинного эффекта опирается на базовое свойство транзитивности модели  $M_s^P$  (если  $x_i$  является прямой причиной изменения  $x_k$  и  $x_k$  – прямой причиной изменения  $x_j$ , то  $x_i$  является косвенной причиной  $x_j$ ; аналогично и для цепочек длины  $> 2$  ( $x_i \rightarrow x_k \rightarrow \dots \rightarrow x_j \Rightarrow x_i \dashv x_j$ )).

Следует напомнить, что причинный эффект интерпретируется (в соответствии с семантикой связей в  $M_S^P$ , раздел 3.2) как степень обусловленности изменения  $x_j$  при активации  $\{x_i\}$  через связывающие их цепочки причинных влияний.

Эти цепочки причинных влияний в  $K_S^P$  отражают представления субъекта, соответствующие его убеждениям и эмоциональным ценностям, и формируют альтернативы для принятия решений.

Предпочтения и выбор альтернатив определяются на основе правил вывода модели  $M_S^P$  с применением структурного анализа для решения следующих задач:

- выявление входных, выходных, ключевых факторов (концептов) в системе убеждений субъекта  $P$  в контексте ситуации  $S$ ;
- общую оценку ЭС системы убеждений, отраженную в модели  $M_S^P$  (или частичную, по отдельным фрагментам связанных убеждений в  $M_S^P$ );
- оценку отдельных альтернатив косвенного причинного эффекта некоторого фактора  $x_i$  на выходной целевой фактор  $x_j$  на основе анализа достижимости (передачи причинного влияния  $x_i$  к  $x_j$  по связывающим цепочкам распространения влияний между ними) с учетом ЭС этих эффектов;
- оценку общего причинного эффекта некоторого фактора  $x_i$  на выходной целевой фактор  $x_j$  с учетом всех косвенных причинных эффектов между  $x_i$  и  $x_j$ ;
- оценку отдельных (или общих) косвенных причинных эффектов от нескольких факторов  $\{x_i\}$  на выходной целевой фактор  $x_j$  с учетом ЭС этих причинных эффектов.

Далее рассмотрим ряд структурных показателей, составляющих основу для решения перечисленных здесь задач структурного анализа.

*Число факторов и связей, плотность  $K_S^P$*  (доля связей  $K_S^P$  по отношению к возможному общему числу связей в ней) относятся к простым структурным показателям (могут использоваться для сравнения карт). Количество факторов оценивает

размер карты; количество связей, плотность – способ для оценки ее сложности.

Также сложность может оцениваться по *соотношению входных и выходных факторов* [30].

*Входные факторы* – это факторы, которые только передатчики влияния в  $K_s^P$ . Для любого такого фактора  $x_i$  степень захода  $Id^{xi} = 0$  и степень исхода в знаковой карте равна числу ( $m$ ) исходящих связей из фактора  $x_i$ ,  $Od^{xi} = m$ , а в карте с весами –  $Od^{xi} = \sum_{j=1}^m |w_{ij}|$ . Степень исхода измеряет, насколько  $x_i$  прямо влияет на другие факторы.

*Выходные факторы* – это факторы, которые только приемники влияния в  $K_s^P$ . Для любого такого фактора  $x_j$  степень исхода  $Od^{xj} = 0$  и степень захода в знаковой карте равна числу ( $n$ ) входящих связей в фактор  $x_j$ ,  $Id^{xj} = n$ , а в карте с весами –  $Id^{xj} = \sum_{i=1}^n |w_{ij}|$ . Степень захода измеряет, насколько  $x_j$  находится под прямым влиянием других факторов.

Для остальных факторов  $\{x_k\}$  в  $K_s^P$  степень захода  $Id^{xk} = m$  ( $Id^{xm} = \sum_{i=1}^m |w_{ik}|$ ) и степень исхода  $Od^{xk} = n$  ( $Od^{xk} = \sum_{j=1}^n |w_{kj}|$ ).

Сумма степеней исхода и захода любого фактора  $x_i$   $D^{xi} = Id^{xi} + Od^{xi}$  определяет степень центральности фактора.

Центральность  $D^{xi}$  является важным показателем, поскольку позволяет ранжировать факторы по их значимости в структуре убеждений субъекта, отраженной в  $M_s^P$ . Содержательно степень центральности определяет значимость фактора (концепта) в окружении его непосредственных соседей (сколько с ним связано других факторов).

*Критерием центральности цепочки причинных влияний* является суммарная степень центральностей факторов, образующих цепочку  $p$ ,  $D^p = D^{beg} + \dots + D^{xi} + \dots + D^{end}$ , где  $D^{beg}$  – степень центральности начального фактора,  $D^{end}$  – степень центральности последнего фактора в  $p$ .

Данный критерий является ключевым показателем оценки значимых цепочек причинных утверждений (чем больше значение  $D^P$ , тем более значима  $p$ ) в общей структуре  $K_s^P$ .

Для оценки устойчивости таких цепочек утверждений субъекта  $P$  по ситуации  $S$  может служить *критерий частотности*, характеризующий частоту изменения центральности (значимости) цепочек причинных рассуждений субъекта  $P$  при изменении условий в ситуации  $S$ .

ЭС различных конструкций и карты  $K_s^P$  в целом оценивается на основе *системы критериев эмоциональной согласованности* (см. раздел 3.3). В силу ограничения модели  $M_s^P$  (см. Ограничение 1 в разделе 3.3) ЭС модели рассматривается после сведения  $K_s^P$  к карте без амбивалентных факторов или к карте, в которой амбивалентные факторы могут быть только входными.

ЭС карты  $K_s^P$  в целом обеспечивается при условии ЭС цепочек и узлов причинных влияний; другими словами, валентности этих конструкций должны быть положительными (равными 1). Базовым условием ЭС таких сложных конструкций являются эмоциональные согласованности элементарных связей  $\{l_{ij}\}$  (таблица 2), образующих эти конструкции, при том что валентности отдельных факторов  $\{x_i\}$  могут быть любыми (положительными ( $= 1$ ), отрицательными ( $= -1$ ), или нейтральными ( $= 0$ )) (см. таблицу 1). Нарушение ЭС означает наличие эмоционально несогласованных элементарных связей  $l_{ij}$  в оцениваемых конструкциях.

Напомним, что валентность фактора  $x_i$ ,  $v_i = 0$ , означает нейтральное отношение субъекта к  $x_i$ , поэтому для обеспечения ЭС элементарной связи, включающей нейтральный фактор  $x_i$ , учитывается параметр его активности  $a_i$  (таблица 2).

В качестве показателя ЭС цепочки  $p$  или узла  $B$  причинных влияний, или  $K_s^P$  в целом может служить соответствующий *относительный показатель ЭС*

- для цепочки  $p$ :  $N_{pl}^{\mathcal{EC}} / N_{pl}$ , где  $N_{pl}^{\mathcal{EC}}$  – количество эмоционально согласованных связей  $\mathcal{EC}$ , входящих в  $p$ ,  $N_{pl}$  – общее количество связей в  $p$ ;
- для узла  $B$ :  $N_{Bl}^{\mathcal{EC}} / N_{Bl}$  (расшифровка по аналогии с  $p$ );
- для карты  $K_s^P$ :  $N_{Kl}^{\mathcal{EC}} / N_{Kl}$  (расшифровка по аналогии с  $p$ ).

Также относительные показатели для  $p$ ,  $B$  и  $K_s^P$  могут представляться в виде соотношения эмоционально несогласованных связей к общему количеству связей.

Критерий центральности цепочки причинных влияний  $p$  устанавливает одно из основных правил вывода следствий из модели  $M_s^P$ , суть которого состоит в следующем. Если в знаковой  $K_s^P$  обнаруживается неопределенность – две противоречивые цепочки, то предпочтение отдается цепочке с большей центральностью. Пример неопределенности, обусловленной противоречивыми цепочками влияний  $p^+(x_i, x_j)$  (косвенный эффект влияния  $x_i$  на  $x_j$  положительный) и  $p^-(x_k, x_j)$  (косвенный эффект – отрицательный), приведен на рис. 9. Это интерпретируется так, что для субъекта в качестве основы для принятия решения предпочтительнее является цепочка причинных влияний  $p^-(x_k, x_j)$ . Данное правило вывода справедливо при условии ЭС  $p^+$  и  $p^-$ .

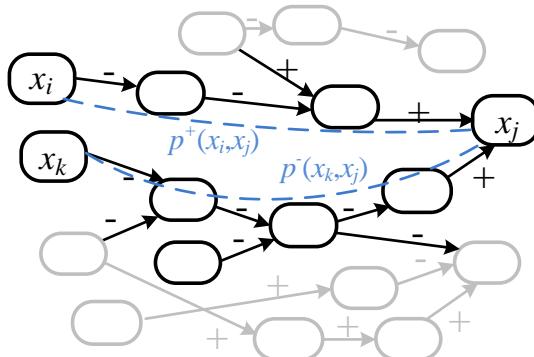


Рис. 9. Пример неопределенности, обусловленной противоречивыми цепочками влияний  $p^+(x_i, x_j)$  и  $p^-(x_k, x_j)$

Однако если обнаружено нарушение ЭС в одной или обеих цепочках, то оценку предпочтения следует формировать с учетом относительных показателей ЭС.

Для преодоления ситуаций с неопределенностями, обусловленными наличием противоречивых цепочек влияний в знаковой карте  $K_s^P$ , структурный анализ проводится с учетом весов влияний в  $K_s^P$ , представленной нагруженным ориентированным графом (справа на рис. 1 представлен фрагмент такой карты в виде узла). Тогда в основе такого анализа используются степени матрицы  $W = [w_{ij}]$  причинно-следственных влияний (см. раздел 2.2), где  $W^2$  – веса причинных влияний факторов, связанных цепочками (путями) длины 2,  $W^3$  – длины 3 и т.д. Матрица  $Q = W + W^2 + W^3 + \dots + W^{n-1}$  есть транзитивное замыкание отношений причинно-следственного влияния в  $K_s^P$ . По степенным матрицам и матрице транзитивного влияния можно оценивать различные причинные эффекты (косвенные по отдельным цепочкам и\или общие – по нескольким цепочкам).

При этом ЭС оценивается так же, как и в знаковой  $K_s^P$ , – с использованием системы критерииев ЭС (раздел 3.3).

Рассмотренный здесь набор показателей не исчерпывает всего множества структурных показателей (например, существует несколько мер центральности) для анализа когнитивных карт и социальных сетей (см., например, [6, 30]). Предполагается отдельное экспериментальное исследование по целесообразности расширения числа таких показателей в контексте решения задач анализа социально-политического дискурса с использованием модели  $M_s^P$ .

#### **4. Заключение**

Для таких сфер, как административное, социальное, политическое управление, часто характеризующихся принятием решений в условиях неопределенности (недостатка информации), значимы результаты психологических исследований [1, 7]. В таких условиях поведение субъектов, принимаемые ими реше-

ния в ситуации зависит от психологических факторов: их убеждений, представлений, аттитюдов.

Важнейшим элементом коммуникационного воздействия являются технологии интернет-коммуникации [4]. Возможности социальных сетей как технологий коммуникации, в том числе и политической, на сегодняшний день разнообразны: обмен текстовыми сообщениями, фото- и видеофайлами в режиме реального времени, прямые трансляции различных событий. Несмотря на то, что социальные сети увеличивают количество и качество доступной информации, объем и формы ее представления превосходят возможности ее обработки традиционными методами, которые в преобладающей степени связаны со структурными количественными характеристиками анализа социальных сетей [2, 8]. При этом признается важность обработки текстов как источника полезной информации, и с совершенствованием алгоритмов анализа тональности текста (*sentiment analysis*) и в целом интеллектуального анализа текстов (*NLP, natural language processing*) это направление будет и дальше развиваться [2].

Особое значение анализ дискурса приобретает в сфере формирования политических идеологий, международных отношений, где без понимания механизмов, обеспечивающих интерпретацию действий и текстов, невозможно адекватно анализировать и моделировать конфликтные ситуации, переговоры, функционирование политических сетей и идеологических систем [13, 18, 20].

Для вербализации картины (модели) мира, субъективных представлений необходимо извлечение имплицитной информации, отображающей понимание субъектом некоторой ситуации. Одним из способов экспликации такой внутренней информации субъекта является анализ дискурса.

Для выявления структуры субъективных представлений о ситуации, в том числе при анализе дискурса, традиционно применяется когнитивное картирование – метод презентации таких представлений в виде структуры причинно-следственных отношений между концептами (факторами) ситуации, значимы-

ми для субъекта. Когнитивное картирование позволяет выявить не всегда очевидные схемы вывода умозаключений субъекта.

Однако такая типовая формализация не учитывает аттилудно-релевантную информацию субъектов, важную с точки зрения учета психологических факторов, влияющих на поведение субъектов, принимаемые ими решения в ситуации. Для решения этой проблемы предложена модель  $M_s^P$ , в основе которой когнитивная карта  $K_s^P$ , отражающая убеждения и аттилуды, в совокупности значимые для субъекта по некоторой оцениваемой ситуации. Модель  $M_s^P$  предназначена для решения различных задач анализа и моделирования социально-политического дискурса с целью анализа устойчивости и согласованности (сбалансированности) убеждений и аттилудов субъекта; анализа динамики изменения структуры убеждений и аттилудов: стабильность или изменчивость с течением времени при изменении ситуации и при воздействии других субъектов; сравнительного анализа структур убеждений и аттилудов различных акторов коммуникативного взаимодействия (переговоры, конфликты) и др.

Представление когнитивной карты  $K_s^P$  в виде нагруженного ориентированного графа позволяет развить структурные методы исследования сбалансированности и устойчивости системы убеждений и аттилудов субъекта  $P$  о ситуации  $S$  – значимых характеристиках когнитивной системы субъекта, влияющей на его поведение, принимаемые решения. Основу таких методов составляют разработанная система критериев эмоциональной согласованности модели  $M_s^P$  и известные структурные метрики, используемые при анализе различных сетевых моделей, в том числе когнитивных карт и социальных сетей, начиная с классических работ [16, 23] и современных (см., например, [6, 30]).

Для развития таких методов планируется проведение ряда экспериментальных исследований по применению разработанной модели  $M_s^P$  к дискурсу политических деятелей, отражающих их предпочтения в конкретных социально-политических ситуациях в различные периоды времени («эволюцию картин мира»).

Одним из перспективных направлений применения такого рода моделей представляется развитие методологии сетевого анализа, ориентированного на обнаружение и дальнейший мониторинг носителей «картины мира» в различных сетевых образованиях и коммуникативных связей между ними.

### **Литература**

1. АВТОНОМОВ В.С. *Модель человека в экономической теории и других социальных науках* // Истоки: вопросы истории народного хозяйства и экономической мысли. – 1998. – №3. – С. 24–71.
2. АХРЕМЕНКО А.С., СТУКАЛ Д.К., ПЕТРОВ А.П. *Сеть или текст? Факторы распространения протеста в социальных медиа: теория и анализ данных* // Полис. Политические исследования. – 2020. – №2. – С. 73–91.
3. БЫЗОВ Л.Г., ГУБАНОВ Д.А., КОЗИЦИН И.В. и др. *Идеальный политик для социальной сети: подход к анализу идеологических предпочтений пользователей* // Проблемы управления. – 2020. – Вып. 4. – С. 15–26.
4. ВОЛОДЕНКОВ С.В. *Интернет-коммуникации в глобальном пространстве современного политического управления*. – М.: Изд-во Московского университета, 2015. – 272 с.
5. ГАВРИЛОВА М.В. *Политический дискурс как объект лингвистического анализа* // Полис. Политические исследования. – 2004. – №3. – С. 127–139.
6. ГАЛАГАНОВА С.Г., ТУРУСИНА Т.В. *Технологии анализа социальных сетей с целью выявления социальных трендов* // Человеческий капитал. – 2023. – №1(169). – С. 121–136.
7. ГОЛЫГИН Е.Н. *Когнитивный подход к анализу практики политической элиты: идейные источники и основные принципы* // Вестник Московского Университета. Серия 12. Политические науки. – 2007. – №6. – С.89–96.
8. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства* / Под общ. ред. Д.А. Новикова. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2010.
9. ГУЛЕВИЧ О.А., САРИЕВА И.Р. *Социальная психология*. – М.: Изд-во Юрайт, 2015. – 452 с.
10. КИСЕЛЕВА О.В., НАУМЕТОВА Ю.Э. *Формирование общественного мнения и способы манипулирования им в различных*

- целях // Международный журнал экспериментального образования. – 2017. – №6. – С. 91–95.
11. ЛАТЫНОВ В.В. *Психология коммуникативного воздействия*. – М: Институт психологии РАН, 2013. – 368 с.
  12. *Методология исследований политического дискурса: Актуальные проблемы содержательного анализа общественно-политических текстов. Вып. 1* / Под общ. ред. И.Ф. Ухвановой-Шмыговой. – Мн.: Белгосуниверситет, 1998. – 283 с.
  13. *Новое пространство мировой политики: взгляд из США* / Под общ. ред. В.М. Сергеева и Е.С. Алексеенковой. Аналитические доклады. – М.: МГИМО, 2011. – Вып. 6(30). – 132 с.
  14. ПАТИКОВА Р.В. *Дискурс – коммуникация – текст: к вопросу о корреляциях и системных характеристиках* // Научная мысль Кавказа. – 2010. – №4. – С. 126–130.
  15. ПЛОТИНСКИЙ Ю.М. *Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений*. – М.: Логос, 2001. – 296 с.
  16. РОБЕРТС Ф.С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам* / Пер. с англ. А.М. Раппопорта, С.И. Травкина / Под ред. А.И. Теймана. – М.: Наука, 1986. – 496 с.
  17. РОЩУПКИН В.Г. *Международные информационно-психологические конфликты: учебное пособие*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2023. – 168 с.
  18. СЕРГЕЕВ В.М. *Когнитивные методы в социальных исследованиях* // Язык и моделирование социального взаимодействия / Под общ. ред. В.В. Петрова. – Б: БГК им. И.А. Бодуэна де Куртенэ, 1998. – С. 3–20.
  19. ХЕРАДСТВЕЙТ Д., НАРВЕСЕН У. *Психологические ограничения на принятие решений* // Язык и моделирование социального взаимодействия / Под общ. ред. В.В. Петрова. – Б: БГК им. И.А. Бодуэна де Куртенэ, 1998. – С. 381–407.
  20. ШУЛЬЦ В.Л., КУЛЬБА В.В., ШЕЛКОВ А.Б. и др. *Сценарный анализ в управлении геополитическим информационным противоборством*. – М.: Наука, 2015. – 542 с.
  21. ANDERSON N.H. *Foundations of information integration theory*. – New-York: Academic Press, 1981. – 423 p.
  22. BETTMAN J., NOEL C., LUTZ R. *Cognitive Algebra in Multiattribute Attitude Models* // Journal of Marketing Research. – 1975. – Vol. 12. – P. 151–164.

23. HARARY F., NORMAN R.Z., CARTWRIGHT D. *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs.* – New York: Wiley, 1965. – 426 с.
24. HEIMER O., KRON A., HERTZ U. *The temporal dynamics of the semantic versus affective representations of valence during reversal learning* // Cognition. – 2023. – Vol. 236. – 105423. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2023.105423>.
25. GIABBANELLI P.J., KNOX C.B., FURMAN K. et al. *Defining and Using Fuzzy Cognitive Mapping* // In: Giabbanelli P.J., Nápoles G. (eds) *Fuzzy Cognitive Maps*. Springer, Cham. – 2024. – DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-48963-1\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-031-48963-1_1).
26. ITKES O., KRON A. *Affective and Semantic Representations of Valence: A Conceptual Framework* // Emotion Review. – 2019. – Vol. 11, No. 4. – P. 283–293.
27. KAUSCHKE C., BAHN D., VESKER M. et al. *The Role of Emotional Valence for the Processing of Facial and Verbal Stimuli –Positivity or Negativity Bias?* // Front. Psychol. – 2019. – DOI: <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2019.01654>.
28. MANSELL J., MOCK S. et al. *Measuring attitudes as a complex system: Structured thinking and support for the Canadian carbon tax* // Politics and the Life Sciences. – 2021. – Iss. 40(2). – P. 179–201.
29. *Structure of Decision. The cognitive Maps of Political Elites* / Ed. R. Axelrod. – New-York: Princeton, 1976.
30. SCHUERKAMP R., GIABBANELLI P.J. *Analysis of Fuzzy Cognitive Maps* // In: Giabbanelli P.J., Nápoles G. (eds) *Fuzzy Cognitive Maps*. Springer, Cham. – 2024. – DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-48963-1\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-031-48963-1_5).
31. SHUMAN V., SANDER D., SCHERER K.R. *Levels of valence* // Front. Psychol. – 2013. – Vol. 4. – P. 261. – DOI: <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00261>.
32. THAGARD P. *Hot Thought. Mechanisms and Applications of Emotional Cognition*. – London: Cambridge, Massachusetts, 2006.
33. THAGARD P. *Social Equality: Cognitive modeling based on emotional coherence explains attitude change* // Policy Insights from Behavioral and Brain Sciences. – 2018. – Iss. 5(2). – P. 247–256.
34. *The Handbook of Attitudes. Volume 1: Basic Principles* / Ed. D. Albarracín and B.T. Johnson. – New-York – London: Taylor & Francis, 2018. – 678 p.

## A MODEL FOR REPRESENTING AN INDIVIDUALS' BELIEFS AND ATTITUDE USING COGNITIVE MAPS

**Zinaida Avdeeva**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior Researcher (avdeeva@ipu.ru).

**Svetlana Kovriga**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Researcher (kovriga@ipu.ru).

*Abstract: The research is based on the analysis of discourse, which is a common means of socio-political communication. Such an analysis is of particular importance in man-aging socio-political situations in the field of international relations. In the context of the tasks of managing socio-political communication using methods of knowledge representation and processing, a model for representing the beliefs and attitudes of a subject is proposed. The model is based on a cognitive map of the causal relationships between factors (concepts) that are significant in the subject's worldview, which verbalizes his belief structure in a given situation. A distinctive feature of the model is the inclusion of valence in it, a parameter for taking into account emotionally colored assessments of the subject (attitudes) in the assessed situation. This model is designed to solve the problems of explication and analysis of the stability and consistency of the structure of beliefs and attitudes of the subject in the assessed situation, analyzing the dynamics of its change through structural analysis. To implement the structural analysis, a system of criteria for emotional consistency and a number of structural indicators are proposed to assess the significance and emotional consistency of sequences of statements derived from the model that determine the preferences of the subject when making decisions in a situation. In conclusion, generalizing conclusions are given and the further direction of experimental research is outlined.*

**Keywords:** social management, discourse, attitude, methods of knowledge representation and processing, cognitive mapping, structural analysis.

УДК 303.732 + 004.82 +316.64 + 316.65

ББК 60.8

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

*Поступила в редакцию 23.05.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ТРЕХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБЩИМ БУФЕРОМ<sup>1</sup>

Вытовтов К. А.<sup>2</sup>, Барабанова Е. А.<sup>3</sup>, Шабанова Е. В.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Исследованы нестационарные характеристики производительности трехфазной системы массового обслуживания с пуссоновским входным потоком, экспоненциально распределенным временем обслуживания на всех фазах и ограничением на суммарный размер общего буфера. Записана система дифференциальных уравнений Колмогорова с использованием специально введенных функций, учитывающих закономерности функционирования системы. Для решения системы уравнений использован метод матрицы преобразования вероятностей. Получены выражения для нахождения вероятности потерь и производительности системы. В качестве примера рассмотрена система с размером буфера, равного трем. Исследована длительность переходного режима в зависимости от соотношений интенсивностей обслуживания на отдельных фазах обслуживания. Сделан вывод, что наибольшее влияние на длительность переходного режима оказывают интенсивности обслуживания на первой и второй фазах. Проанализированы зависимости максимальных значений нестационарной вероятности потерь и соответствующих стационарных вероятностей для различных значений интенсивностей обслуживания. Анализ характеристик производительности системы проведен для параметров, соответствующих современным оптическим сетям. Полученные выводы представляют интерес для проектирования высокопроизводительных вычислительных систем.

Ключевые слова: трехфазная СМО, уравнения Колмогорова, переходной режим, нестационарные характеристики.

## 1. Введение

Многофазные системы массового обслуживания (СМО) имеют большое значение для построения математических моделей в области телекоммуникаций. В частности, они используются для

<sup>1</sup> Работа выполнена при гранта Российской научного фонда № 25-29-00926, <https://rscf.ru/project/25-29-00926/>

<sup>2</sup> Константин Анатольевич Вытовтов, д.т.н., доцент ([vytovtov\\_konstan@mail.ru](mailto:vytovtov_konstan@mail.ru)).

<sup>3</sup> Елизавета Александровна Барабанова, д.т.н., доцент ([elizavetaalex@yandex.ru](mailto:elizavetaalex@yandex.ru)).

<sup>4</sup> Екатерина Владиславовна Шабанова, техник ([shabanovaev@gmail.com](mailto:shabanovaev@gmail.com)).

математического описания процесса работы систем связи с многоэтапным процессом обработки заявок. Пример такой системы – сеть базовых станций линейной топологии. Стационарный режим работы многофазных систем изучен достаточно глубоко как в случае пуассоновского, так и коррелированного входных потоков [3, 5, 6, 7, 9, 11, 14, 16].

В последнее время все более актуальной становится проблема работы многофазных СМО в переходном режиме. Например, ввиду перехода к высокоскоростным способам передачи информации для проектирования оптических телекоммуникационных сетей необходимо исследовать поведение характеристик производительности системы в переходном режиме, в том числе время переходного режима, в случае перезагрузки системы или неисправности обслуживающих устройств [8]. Одна из первых работ на эту тему была написана в 1967 г. [12]. В этой работе рассмотрена двухфазная система с бесконечным буфером на первой фазе и нулевым – на второй. В дальнейшем рассматривались более сложные системы: системы с временем обслуживания fazового типа [10, 13], различные tandemные сети [15, 17] и др. Большинство работ на эти темы основывается на использовании численных методов существующих пакетов программ. Также был проведен анализ устойчивости нестационарных марковских процессов с непрерывным временем для основных классов СМО с нестационарными входными потоками [4, 21, 22]; анализ основных характеристик одно- и многолинейных систем в нестационарном режиме [18, 19, 20].

Однако работа многофазных систем в переходном режиме еще мало изучена, хотя увеличение скорости передачи и обработка информации в современных устройствах требует учета зависимости параметров систем от времени. Кроме того, особый интерес с практической точки зрения представляют собой системы с общим буфером, поскольку они адекватно описывают многие процессы, например, функционирование процессоров ЭВМ, промышленных контроллеров и микроконтроллеров с одним общим оперативным запоминающим устройством. В одной из ра-

бот на эту тему [2] рассматривалась двухфазная система с общим буфером, получены и проанализированы характеристики ее производительности.

В данной работе исследуются нестационарные характеристики производительности трехфазной СМО с общим буфером (раздел 2). В разделе 3 приведена система уравнений Колмогорова, описывающая функции вероятностей состояний системы, и описан метод ее аналитического решения. В разделе 4 представлены численные результаты, графики вероятностей состояний и нестационарных характеристик производительности, проведено исследование зависимости характеристик и длины переходного режима от соотношения между значениями интенсивностей обработки на трех фазах системы.

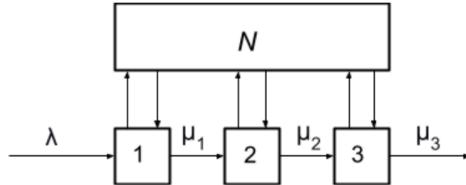
## 2. Постановка задачи

Рассматривается трехфазная СМО с одним однолинейным обслуживающим устройством на каждой фазе и общим для трех фаз буфером. Входящий поток заявок имеет пуассоновское распределение с интенсивностью  $\lambda$ , время обслуживания распределено экспоненциально таким образом, что интенсивность обслуживания на каждой фазе равна  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  соответственно, максимальное число заявок в системе не превышает  $N$ . После обработки заявки в первой фазе заявка переходит во вторую фазу, после завершения обслуживания во второй фазе заявка переходит в третью. Если при переходе на следующую фазу оказывается, что процесс обработки предыдущей заявки на ней еще не завершился, заявка переходит в буфер. После освобождения фазы заявка переходит из буфера в обработку. Схема описываемого процесса приведена на рис. 1.

Число заявок на 1, 2 и 3 фазах обозначаются  $n_1, n_2, n_3$  соответственно. Размер буфера накладывает ограничение на количество заявок в системе:  $n_1 + n_2 + n_3 \leq N$ ,  $n_i = \overline{0, N}$  для  $i = 1, 2, 3$ . Новая заявка может поступить в систему только при  $n_1 + n_2 + n_3 < N$ , иначе заявка теряется.

Целью настоящей работы является исследование вероятно-

стей нахождения системы в возможных состояниях, вероятности потерь, производительности системы при известных параметрах.



*Рис. 1. Схема трехфазной системы с общим буфером*

### 3. Математическая модель

Исследуемый процесс является марковским с числом состояний системы  $(n_1, n_2, n_3)$ , равным  $R = \frac{1}{6}(N+1)(N+2)(N+3)$ . Прежде всего для рассматриваемого случая построен граф состояний, в соответствии с графом построена система уравнений Колмогорова.

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(0, 0, 0, t)}{dt} &= -\lambda P(0, 0, 0, t) + \mu_3 P(0, 0, 1, t); \\
 \frac{dP(0, 0, n_3, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_3)P(0, 0, n_3, t) + \mu_2 P(0, 1, n_3 - 1, t) + \\
 &\quad + \mu_3 P(0, 0, n_3 + 1, t), \\
 &(n_3 \neq 0, n_3 \neq N); \\
 (1) \quad \frac{dP(0, 0, N, t)}{dt} &= -\mu_3 P(0, 0, N, t) + \mu_2 P(0, 1, N - 1, t); \\
 \frac{dP(0, n_2, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2)P(0, n_2, 0, t) + \mu_1 P(1, n_2 - 1, 0, t) + \\
 &\quad + \mu_3 P(0, n_2, 1, t), \\
 &(n_2 \neq 0, n_2 \neq N); \\
 \frac{dP(0, N, 0, t)}{dt} &= -\mu_2 P(0, N, 0, t) + \mu_1 P(1, N - 1, 0, t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(0, n_2, n_3, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2 + \mu_3)P(0, n_2, n_3, t) + \\
 &+ \mu_1 P(1, n_2 - 1, n_3, t) + \mu_2 P(0, n_2 + 1, n_3 - 1, t) + \\
 &+ \mu_3 P(0, n_2, n_3 + 1, t), \\
 (n_2, n_3 &\neq 0, n_2 + n_3 \neq N); \\
 \frac{dP(0, n_2, n_3, t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_3)P(0, n_2, n_3, t) + \\
 &+ \mu_1 P(1, n_2 - 1, n_3, t) + \mu_2 P(0, n_2 + 1, n_3 - 1, t), \\
 (n_2, n_3 &\neq 0, n_2 + n_3 = N); \\
 \frac{dP(n_1, 0, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1)P(n_1, 0, 0, t) + \lambda P(n_1 - 1, 0, 0, t) + \\
 &+ \mu_3 P(n_1, 0, 1, t), \\
 (n_1 &\neq 0, n_1 \neq N); \\
 \frac{dP(N, 0, 0, t)}{dt} &= -\mu_2 P(N, 0, 0, t) + \lambda P(N - 1, 0, 0, t); \\
 \frac{dP(n_1, 0, n_3, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_3)P(n_1, 0, n_3, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, 0, n_3, t) + \mu_2 P(n_1, 1, n_3 - 1, t) + \\
 &+ \mu_3 P(n_1, 0, n_3 + 1, t), \\
 (n_1, n_3 &\neq 0, n_1 + n_3 \neq N); \\
 \frac{dP(n_1, 0, n_3, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_3)P(n_1, 0, n_3, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, 0, n_3, t) + \mu_2 P(n_1, 1, n_3 - 1, t), \\
 (n_1, n_3 &\neq 0, n_1 + n_3 = N); \\
 \frac{dP(n_1, n_2, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, 0, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, 0, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, 0, t) + \\
 &+ \mu_3 P(n_1, n_2, 1, t), \\
 (n_1, n_2 &\neq 0, n_1 + n_2 \neq N); \\
 \frac{dP(n_1, n_2, 0, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2)P(n_1, n_2, 0, t) + \\
 &+ \lambda P(n_1 - 1, n_2, 0, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, 0, t), \\
 (n_1, n_2 &\neq 0, n_1 + n_2 = N);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP(n_1, n_2, n_3, t)}{dt} = & -(\lambda + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P(n_1, n_2, n_3, t) + \\
& + \lambda P(n_1 - 1, n_2, n_3, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, t) + \\
& + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, t) + \mu_3 P(n_1, n_2, n_3 + 1, t), \\
& (n_1, n_2, n_3 \neq 0, n_1 + n_2 + n_3 \neq N); \\
\frac{dP(n_1, n_2, n_3, t)}{dt} = & -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P(n_1, n_2, n_3, t) + \\
& + \lambda P(n_1 - 1, n_2, n_3, t) + \mu_1 P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, t) + \\
& + \mu_2 P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, t), \\
& (n_1, n_2, n_3 \neq 0, n_1 + n_2 + n_3 = N).
\end{aligned}$$

Запись уравнений (1) аналогична записи уравнений для двухфазной системы [20]. Однако она неудобна для дальнейшего практического использования при произвольном размере буфера ввиду большого числа условий «если». В связи с этим были рассмотрены закономерности в построении системы уравнений Колмогорова (1).

В частности, в соответствии с постановкой задачи, уравнения Колмогорова записываются только для случаев  $n_1 + n_2 + n_3 = \overline{N}$ . Слагаемые  $\lambda S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют во всех уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3, n_1 + n_2 + n_3 = N$ . Слагаемые  $\mu_1 S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют в уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3$ , кроме  $n_1 = 0$ . Слагаемые  $\mu_2 S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют в уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3$ , кроме  $n_2 = 0$ . Слагаемые  $\mu_3 S(n_1, n_2, n_3)$  со знаком «плюс» присутствуют в уравнениях для любых  $n_1, n_2, n_3$ , кроме  $n_3 = 0$ . Слагаемые  $\lambda S(n_1 - 1, n_2, n_3)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_1 = 0$ . Слагаемые  $\mu_1 S(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_2 = 0$ . Слагаемые  $\mu_2 S(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_3 = 0$ . Слагаемые  $\mu_3 S(n_1, n_2, n_3 + 1)$  со знаком «минус» присутствуют в уравнениях во всех случаях, кроме  $n_1 + n_2 + n_3 = 0$  и  $n_1 + n_2 + n_3 = N$ .

Для учета этих закономерностей была использована функция, введенная в [20]:

$$(2) \quad \vartheta(x, M, K) = \frac{(|2(x - M) + 1| + 2(x - M) + 1)}{4|2(x - M) + 1| \cdot |2(K - x) - 1|} \cdot \frac{(|2(K - x) - 1| + 2(K - x) - 1)}{4|2(x - M) + 1| \cdot |2(K - x) - 1|}$$

и получена следующая общая форма системы уравнений Колмогорова для рассматриваемого случая:

$$(3) \quad \begin{aligned} & \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N) \frac{dP(n_1, n_2, n_3, t)}{dt} = \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N) \cdot \\ & \cdot \left\{ [\lambda \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N - 1) + \mu_1 \vartheta(n_1, 1, N) + \right. \\ & \cdot \mu_1 \vartheta(n_2, 1, N) + \mu_1 \vartheta(n_3, 1, N)] P(n_1, n_2, n_3, t) + \lambda \vartheta(n_1, 1, N) \cdot \\ & \cdot \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N) P(n_1 - 1, n_2, n_3, t) + \mu_1 \vartheta(n_2, 1, N) \cdot \\ & \cdot P(n_1 + 1, n_2 - 1, n_3, t) + \mu_2 \vartheta(n_3, 1, N) P(n_1, n_2 + 1, n_3 - 1, t) + \\ & \left. + \mu_3 \vartheta(n_1 + n_2 + n_3, 0, N - 1) P(n_1, 0, n_3 + 1, t) \right\}, \\ & (n_1, n_2, n_3 = \overline{0, N}). \end{aligned}$$

Для решения системы (3) целесообразно использовать метод матрицы преобразования вероятностей [20]. Однако при больших размерах буфера использование ряда  $(n_1, n_2, n_3)$  крайне неудобно для записи матрицы коэффициентов уравнений Колмогорова. Для упрощения построения матрицы коэффициентов комбинации  $n_1, n_2, n_3$  ставится в соответствие значение функции  $\varrho$ , где

$$(4) \quad \begin{aligned} & \varrho(N, n_1, n_2, n_3) = n_3 + (N + 1)n_2 - \frac{n_2(n_2 - 1)}{2} + \\ & + \sum_{i=0}^{n_1} \left[ \frac{(N - i + 3)(N - i - 2)}{2} \vartheta(i, 1, N) \right] - n_1 n_2 + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, строке для  $P(0, 0, 0)$  (3) соответствует индекс 1, строке  $P(0, 0, 1)$  соответствует индекс 2 и т.д. Таким образом, введение авторами функции (4) позволяет без ограничений и дополнительных преобразований использовать матричные методы решения (3).

#### 4. Численный пример

Для иллюстрации работы системы примем  $N = 3$ . В этом случае система уравнений Колмогорова принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(0, 0, 0, t)}{dt} &= -\lambda P(0, 0, 0, t) + \mu_3 P(0, 0, 1, t); \\
 \frac{dP(0, 0, 1, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_3)P(0, 0, 1, t) + \mu_3 P(0, 0, 2, t) + \\
 &\quad + \mu_2 P(0, 1, 0, t); \\
 \frac{dP(0, 0, 2, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_3)P(0, 0, 2, t) + \mu_3 P(0, 0, 3, t) + \\
 &\quad + \mu_2 P(0, 1, 1, t); \\
 \frac{dP(0, 0, 3, t)}{dt} &= -\mu_3 P(0, 0, 3, t) + \mu_2 P(0, 1, 2, t); \\
 \frac{dP(0, 1, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2)P(0, 1, 0, t) + \mu_3 P(0, 1, 1, t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1, 0, 0, t); \\
 \frac{dP(0, 1, 1, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2 + \mu_3)P(0, 1, 1, t) + \mu_3 P(0, 1, 2, t) + \\
 &\quad + \mu_2 P(0, 2, 0, t) + \mu_1 P(1, 0, 1, t); \\
 \frac{dP(0, 1, 2, t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_3)P(0, 1, 2, t) + \mu_2 P(0, 2, 1, t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1, 0, 1, t); \\
 \frac{dP(0, 2, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_2)P(0, 2, 0, t) + \mu_3 P(0, 2, 1, t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1, 1, 0, t); \\
 \frac{dP(0, 2, 1, t)}{dt} &= -(\mu_2 + \mu_3)P(0, 2, 1, t) + \mu_2 P(0, 3, 0, t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(1, 1, 1, t); \\
 \frac{dP(0, 3, 0, t)}{dt} &= -\mu_2 P(0, 3, 0, t) + \mu_1 P(1, 2, 0, t); \\
 \frac{dP(1, 0, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1)P(1, 0, 0, t) + \mu_3 P(1, 0, 1, t) + \\
 &\quad + \lambda P(0, 0, 0, t);
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(1, 0, 1, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_3)P(1, 0, 1, t) + \mu_3 P(1, 0, 2, t) + \\
 &\quad + \mu_2 P(1, 1, 0, t) + \lambda P(0, 0, 1, t); \\
 \frac{dP(1, 0, 2, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_3)P(1, 0, 2, t) + \mu_2 P(1, 1, 1, t) + \\
 &\quad + \lambda P(0, 0, 2, t); \\
 \frac{dP(1, 1, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P(1, 1, 0, t) + \mu_3 P(1, 1, 1, t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(2, 0, 0, t) + \lambda P(0, 1, 0, t); \\
 \frac{dP(1, 1, 1, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P(1, 1, 1, t) + \mu_2 P(1, 2, 0, t) + \\
 &\quad + \mu_1 P(2, 0, 1, t) + \lambda P(0, 1, 1, t); \\
 \frac{dP(1, 2, 0, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2)P(1, 2, 0, t) + \mu_2 P(2, 1, 0, t) + \\
 &\quad + \lambda P(0, 2, 0, t); \\
 \frac{dP(2, 0, 0, t)}{dt} &= -(\lambda + \mu_1)P(2, 0, 0, t) + \mu_3 P(2, 0, 1, t) + \\
 &\quad + \lambda P(1, 0, 0, t); \\
 \frac{dP(2, 0, 1, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_3)P(2, 0, 1, t) + \mu_2 P(2, 1, 0, t) + \\
 &\quad + \lambda P(1, 0, 1, t); \\
 \frac{dP(2, 1, 0, t)}{dt} &= -(\mu_1 + \mu_2)P(2, 1, 0, t) + \mu_1 P(3, 0, 0, t) + \\
 &\quad + \lambda P(1, 1, 0, t); \\
 \frac{dP(3, 0, 0, t)}{dt} &= \mu_1 P(3, 0, 0, t) + \lambda P(2, 0, 0, t).
 \end{aligned}$$

Рассматриваемая система моделирует работу процессора с частотой 1 ГГц. Для получения численного решения системы были выбраны значения: интенсивность поступления информации  $\lambda = 83 \cdot 10^6$  бит/с, интенсивности обработки  $\mu_1 = 5 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_2 = 10 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_3 = 20 \cdot 10^6$  бит/с. Длительность переходного режима можно определить, считая переходный процесс завершенным в момент установления стационарных значений вероятностей состояний системы. Критерий установления стационарных значений:  $|P_i(t - 5 \cdot 10^{-8}) - P_i(t)| < 10^{-5}$ ,  $i = \overline{1, 20}$ . Для вычислений использованы начальные условия

$\bar{P}(0) = (1, 0, 0, \dots, 0)^\top$ , т.е. в начальный момент буфер пуст, нет заявок в обработке. Значения вероятностей определяются по формуле

$$\bar{P}(t) = M(t)\bar{P}(0),$$

где  $M(t)$  — матрица преобразования вероятностей, детально описанная в целом ряде работ [1, 4, 20].

На рис. 2 представлена зависимость вероятностей состояний от времени. По результатам численных расчетов видно, что эти вероятности являются не монотонно изменяющимися, а имеют экстремумы в переходном режиме. Это объясняется наличием комплексно-сопряженных характеристических чисел системы (1). Длительность переходного режима для заданных исходных данных  $\tau = 8,98 \cdot 10^{-7}$  с.

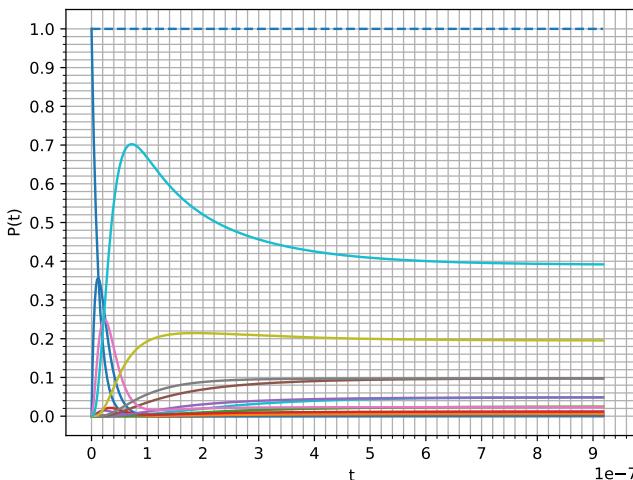


Рис. 2. Вероятности состояний системы

Остановимся детальнее на зависимости характера решения для вероятностей состояний от вида собственных чисел инфинитезимальной матрицы. Из теории дифференциальных уравнений известно, что решение системы линейных однородных диффе-

ренциальных уравнений с постоянными коэффициентами находится в виде суммы  $\sum_{i=1}^m (A_i \exp \gamma_i t)$  экспонент от собственных чисел  $\gamma_i$  с постоянными коэффициентами  $A_i$ . В [16] было показано, что собственные числа любой инфинитезимальной матрицы могут быть либо действительными отрицательными, либо комплексно сопряженными с отрицательной действительной частью. Если все собственные числа  $\gamma_i$  действительные и отрицательные, то переходной процесс очевидно монотонно затухает с течением времени  $t$  и стремится к стационарному режиму. Если в решении характеристического уравнения присутствуют комплексно-сопряженные числа ( $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ , где  $i$  – мнимая единица), то для них можно записать

$$(6) \quad \begin{aligned} & A \exp(\gamma' + i\gamma'')t + A \exp(\gamma' - i\gamma'')t = \\ & = A \exp(\gamma't) \exp(i\gamma''t) + A \exp(\gamma't) \exp(-i\gamma''t) = \\ & = 2A \exp(\gamma't) \cos(\gamma''t). \end{aligned}$$

Таким образом, при отрицательной действительной части  $\gamma'$  процесс имеет волнообразный затухающий характер.

Основными характеристиками СМО являются вероятность потерь информации и производительность системы. Вероятность потерь трехфазной системы с общим буфером может быть рассчитана как

$$(7) \quad P_{loss}(t) = \sum_{n_1+n_2+n_3=N} P(n_1, n_2, n_3, t).$$

Производительность системы вычисляется по формуле

$$(8) \quad A(t) = [1 - P_{loss}(t)]\lambda.$$

По результатам расчетов (рис. 3, рис. 4) видно, что в переходном режиме (например, при инсталляции системы) наблюдается резкое возрастание вероятности потерь и падение производительности системы. При этом максимальное значение вероятности потерь в переходном режиме  $P_{loss} = 0,96$  в момент времени  $t = 0,11$  мкс превышает это же значение в стационарном режиме  $P_{loss} = 0,942$ , а минимальное значение производительности  $A = 0,4 \cdot 10^7$  бит/с в этот момент времени меньше производительности в стационарном режиме  $A = 0,6 \cdot 10^7$  бит/с.

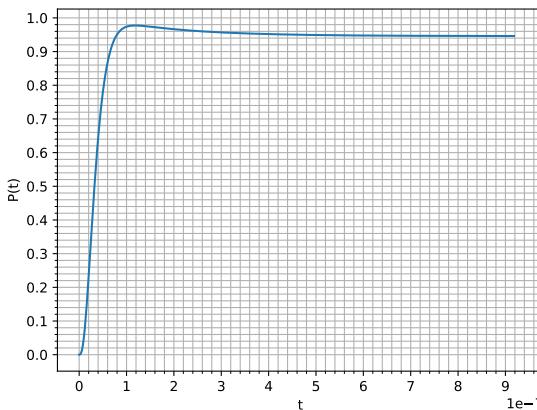


Рис. 3. Вероятность потерь заявок

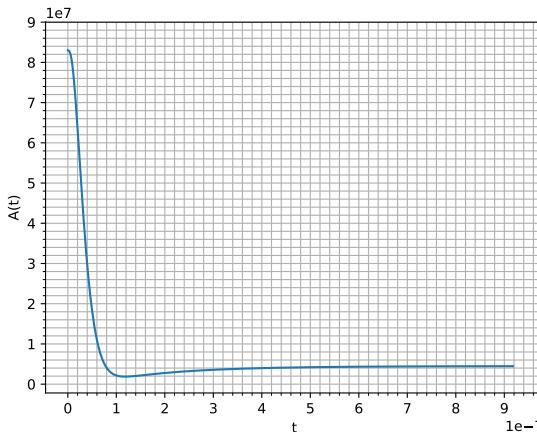


Рис. 4. Производительность системы

На рис. 5 представлена зависимость вероятностей состояний системы от времени для  $\mu_1 = 5 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_2 = 20 \cdot 10^6$  бит/с,  $\mu_3 = 10 \cdot 10^6$  бит/с. Здесь длительность переходного процесса  $10,02 \cdot 10^{-7}$  с. На рис. 6 и рис. 7 представлены зависимости от времени вероятности потерь и производительности системы. Экстремумы в переходном режиме обусловлены комплексно-сопряженными собственными числами матрицы коэффициентов в (1).

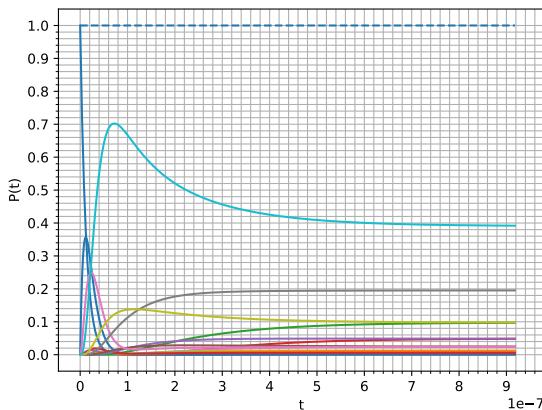


Рис. 5. Вероятности состояний системы

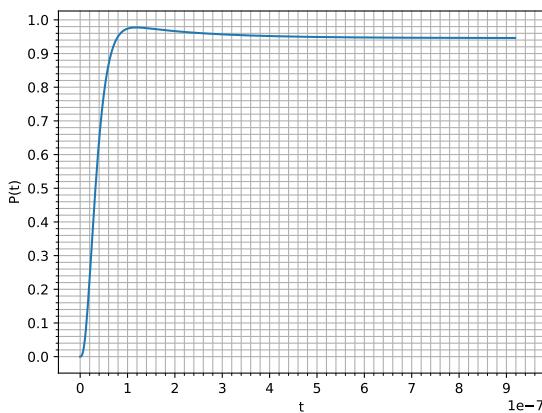


Рис. 6. Вероятность потерь заявок

Важнейшим аспектом при проектировании многофазных систем является исследование зависимости их характеристик не просто от интенсивности обслуживания, а от соотношения интенсивностей обслуживания в каждой фазе. Действительно, при низкой интенсивности обслуживания в последней фазе вероятность потерь будет достаточно большой вне зависимости от интенсив-

ности обслуживания в предыдущих фазах. В результате анализа зависимости характеристик системы от соотношений параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  построены двухмерные графики длительности переходного режима, максимальных вероятностей потерь, минимальных производительностей.

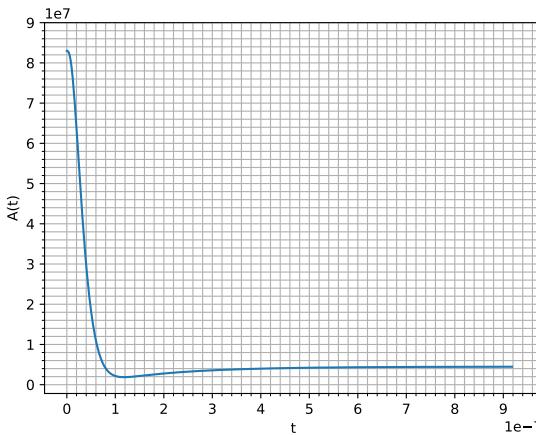


Рис. 7. Производительность системы

На рис. 8 представлен график зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_1$  и  $\mu_2$  при  $\mu_3 = 10 \cdot 10^6$  пакеты/с, значения  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  изменяются от  $1 \cdot 10^6$  до  $20 \cdot 10^6$  бит/с. На графиках отмечены линии уровня с шагом  $0,5 \cdot 10^{-7}$ .

На рис. 9 представлен график зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  при  $\mu_1 = 10 \cdot 10^6$  пакеты/с. Значения  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  изменяются от  $1 \cdot 10^6$  до  $20 \cdot 10^6$  пакеты/с.

Максимальная длительность переходного режима для всех рассмотренных параметров равна 1,038 мкс, при этом наибольшие значения получены в окрестности кривой  $\mu_{i1} \cdot \mu_{i2} = 45 \cdot 10^{12}$  бит<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>, где  $\mu_{i1}$ ,  $\mu_{i2}$  — изменяемые параметры. При возрастании изменяемых интенсивностей обработки с малой разницей между

ними длительность переходного режима сокращается, при малом значении одного из параметров с увеличением второго длина переходного режима увеличивается.

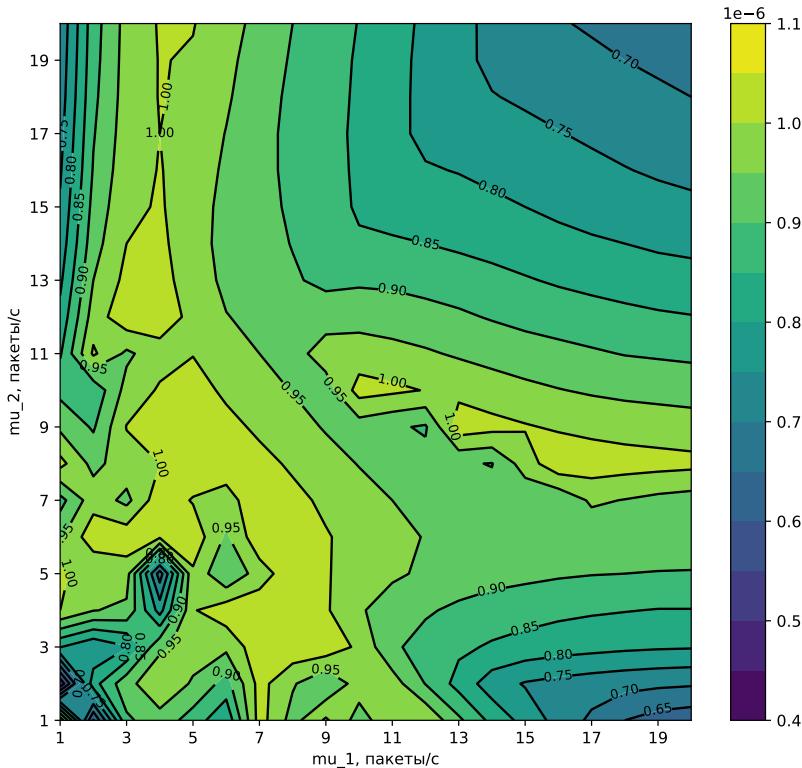


Рис. 8. График зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$

При фиксированном  $\mu_1$  разница между минимальной и максимальной длительностью переходного режима равна  $4,94 \cdot 10^{-7}$  с, при фиксированном  $\mu_3 = 5,28 \cdot 10^{-7}$  с. Из этого можно сделать вывод, что соотношение параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  оказывает большее влияние на длительность переходного режима.

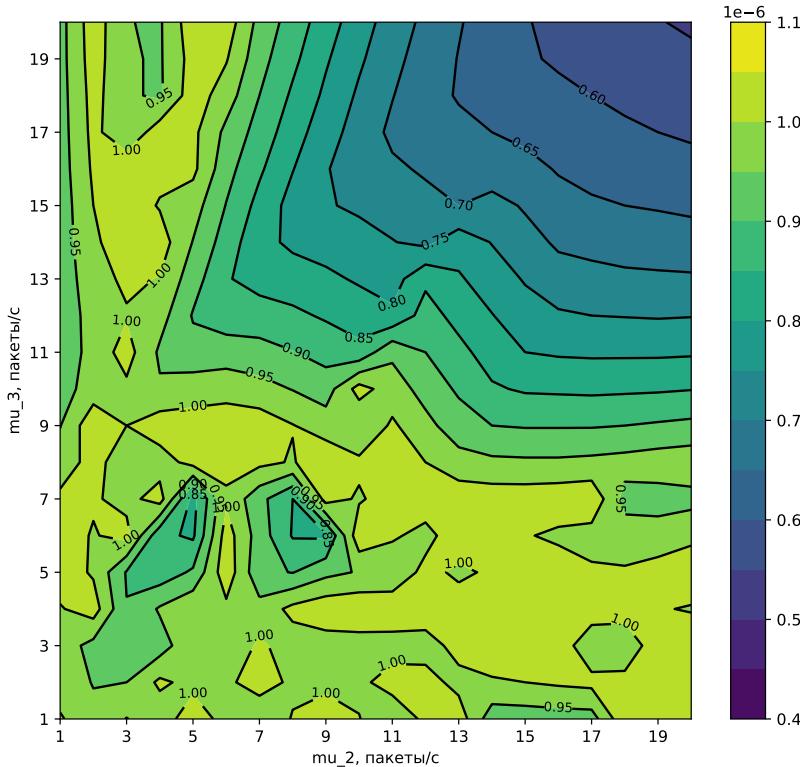


Рис. 9. График зависимости длительности переходного режима от соотношения параметров  $\mu_2$ ,  $\mu_3$

Из-за наличия комплексных чисел среди собственных значений матрицы системы уравнений Колмогорова вероятность потерь изменяется не монотонно, т.е. максимум вероятности потерь больше стационарного и различен для разных соотношений интенсивностей обработки.

Для любого распределения интенсивностей при фиксированном наборе значений стационарные производительность и вероятность потерь, а также переходные вероятности потерь равны, следовательно достаточно исследовать зависимость различия максимума вероятности потерь и ее стационарного значения

от изменения только двух параметров. На рис. 10 приведен график зависимостей максимума вероятности потерь и ее стационарного значения при фиксированном параметре  $\mu_3 = 10 \cdot 10^6$  бит/с, изменяемых параметрах  $\mu_1, \mu_2 = \overline{1, 20} \cdot 10^6$  бит/с.

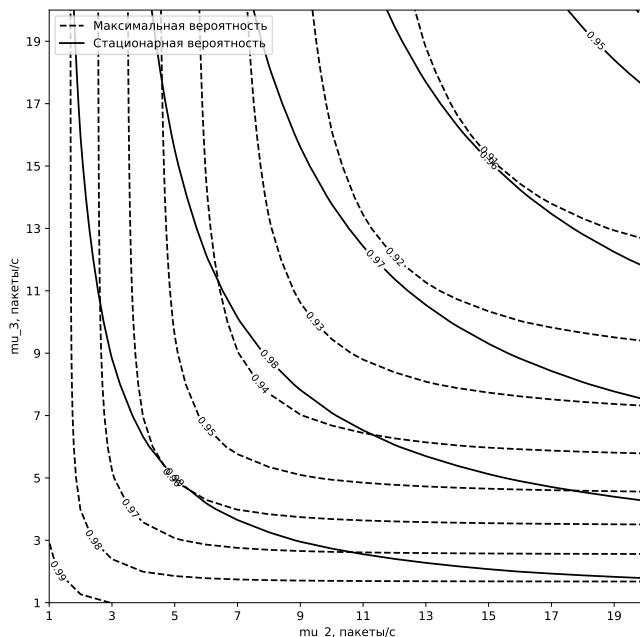


Рис. 10. График зависимости максимальной и стационарной вероятностей потерь от соотношения параметров  $\mu_2, \mu_3$

Максимальные вероятности потерь имеют такой же характер изменения в зависимости от соотношения изменяемых параметров, как и стационарные вероятности потерь: максимальная вероятность зависит от произведения параметров  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  прямо пропорционально (линии уровня имеют уравнения вида  $P_{loss} = \mu_1 \mu_2 \cdot \text{const}$ , где  $\mu_1, \mu_2$  – изменяемые параметры). Так как  $A(t) = (1 - P_{loss})\lambda$ , минимальная производительность имеет линии уровня с уравнениями вида  $A = (1 - \mu_1 \mu_2 \cdot \text{const})$  (рис. 11), т.е. зависит от произведения интенсивностей обработки, но не от их соотношения.

## 5. Выводы

В данной работе рассмотрена трехфазная система массового обслуживания с общим для трех фаз буфером в переходном режиме при пуассоновском входном потоке. Для системы записаны дифференциальные уравнения Колмогорова. Для этого использовалась функция (3) [17] и введена функция (4).

Для решения системы уравнений Колмогорова применен метод матрицы преобразования вероятностей [19]. Для различных значений интенсивности обслуживания заявок получены вероятности состояний системы, вероятность потерь, производительность, время переходного режима. По результатам расчетов проведен анализ характеристик системы.

При вычислении характеристик производительности системы, основанном на параметрах, соответствующих работе процессора с частотой 1 ГГц, получены длительности переходного режима порядка  $10^{-7}$  с. Наибольший разброс значений длительностей наблюдается при вариации соотношения параметров  $\mu_1, \mu_2$ .

Вероятности состояний, вероятность потерь и производительность с течением времени изменяются не монотонно. Это объясняется наличием комплексно-сопряженных чисел с отрицательной действительной частью среди собственных значений матрицы коэффициентов системы уравнений Колмогорова [16]. При этом максимальная вероятность потерь и минимальная производительность зависят от соотношения интенсивностей обработки на фазах так же, как стационарные значения. При рассмотренных значениях параметров  $1 \cdot 10^6 \leq \mu_i \leq 20 \cdot 10^6$  бит/с получены максимальные значения потерь  $P_{loss} \geq 0,94$ , стационарные вероятности потерь  $P_{loss} \geq 0,89$ . Такие высокие вероятности получены из-за малого размера рассматриваемого буфера.

## Литература

1. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ДУДИН А.Н., КЛИМЕНЮК В.И. *Стochastic systems with correlated flows*.

- Теория и применение в телекоммуникационных сетях.* – М.: Изд-во «ТЕХНОСФЕРА», 2018. –564 с.
2. ВИШНЕВСКИЙ В.М., ВЫТОВТОВ К.А., БАРАБАНОВА Е.А. *Исследование переходного режима двухфазной системы массового обслуживания с ограничением на суммарный размер буфера* // Автоматика и телемеханика. – 2024. – №1. – С. 64–82.
  3. ГОРБУНОВА А.В., ЛЕБЕДЕВ А.В. *Двумерные распределения максимальных остаточных времен обслуживания в бесконечнолинейных системах с разделением заявок* // Пробл. передачи информ. – 2020. – Т. 56, вып. 1. – С. 80–98; Problems Inform. Transmission. – 2020. – Vol. 56, Iss. 1. – P. 73–90.
  4. КОВАЛЕВ И.А., САТИН Я.А., СИНИЦИНА А.В. и др. *Об одном подходе к оцениванию скорости сходимости нестационарных марковских моделей систем обслуживания* // Информ. и её применение. – 2022. – Т. 16. Вып. 3. – С. 75–82.
  5. СЕМЕНОВА О.В. *Стационарное распределение вероятностей состояний СМО с двумя режимами функционирования и потоком катастрофических сбоев* // Автоматика и телемеханика. – 2002. – №10 – С. 73–86.
  6. ФАРХАДОВ М.П., ПЕТУХОВА Н.В., ЕФРОСИНИН Д.В. и др. *Двухфазная модель с неограниченными очередями для расчета характеристик и оптимизации речевых порталов самообслуживания* // Пробл. управл. – 2010. – №6. – С. 53–57.
  7. AL-RAWI Z.R., AL SHBOUL K.M.S. *A Single Server Queue with Coxian-2 Service and One-Phase Vacation (M/C-2/M/1 Queue)* // Open J. Appl. Sci. 2021. – Vol. 11, No. 6. – P. 766–774.
  8. BARABANOVA E.A., VYTOVTOV K.A., VYSHNEVSKY V.M. et al. *High-capacity strictly non-blocking optical switches based on new dual principle* // J. Phys.: Conf. Ser. – 2021. – Vol. 2091, No. 1. – URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/2091/1/012040> (дата обращения: 06.04.2025).

9. DUDIN A.N., KLIMENOK V.I., VISHNEVSKY V.M. *Methods to Study Queueing Systems with Correlated Arrivals* // The Theory of Queueing Systems with Correlated Flows. Springer, Cham. – DOI: 10.1007/978-3-030-32072-0\_2.
10. KEMPA WPJCIECH M., PAPROCKA I. *Transient behavior of a queueing model with hyper-exponentially distributed processing times and finite buffer capacity* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 24. – DOI: 10.3390/s22249909.
11. MURAT SAGIR, VEDAT SAGLAM. *Optimization and analysis of a tandem queueing system with parallel channel at second station* // Communications in Statistics P Theory and Methods. – 2022. – Vol. 51, No. 21. – P. 1–14.
12. PRABHU N.U. *Transient Behaviour of a Tandem Queue* // Management Science. – 1967. – Vol. 13, No. 9. – P. 631–639. – DOI: 10.1287/mnsc.13.9.631.
13. RUBINO G. *Transient analysis of Markovian queueing systems: a survey with focus on closed forms and uniformization* // Queueing Theory 2: Advanced Trends; Wiley-ISTE: Hoboken. NJ. – 2021. – P. 269–307.
14. SERITE OZKAR. *Two-commodity queueing-inventory system with phase-type distribution of service times* // Annals of Operations Research. – 2022. – URL: <https://link.springer.com/article/10.1007/s10479-022-04865-3> (дата обращения: 06.04.2025).
15. SITA RAMA MURTHY M., SRINIVASA RAO K., RAVINDRANATH V. et al. *Transient Analysis of K-node Tandem Queueing Model with Load Dependent Service Rates* // Int. J. Engin. Techno. – 2018. – Vol. 7, No. 3.31. – P. 141–149.
16. SUDHESH R., VAITHIYANATHAN A. *Stationary analysis of infinite queueing system with two P stage network server* // RAIRO-Oper. Res. – 2021. – Vol. 55. – P. 2349–2357.
17. SUHASINI A.V.S., SRINIVASA RAO K., REDDY P.R.S. *Transient analysis of tandem queueing model with nonhomogenous poisson bulk arrivals having state-dependent service rates* // Int. J. Advanc. Comput. Math. Sci. – 2012. –

- Vol. 3, No. 3. – P. 272–289.
- 18. VISHNEVSKY V.M., VYTOVTOV K.A., BARABANOVA E.A. et al. *Analysis of an M AP/M/I/N queue with periodic and non-periodic piecewise constant input rate* // Mathematics. – 2022. – Vol. 10, No. 10. – URL: <https://www.mdpi.com/2227-7390/10/10/1684> (дата обращения: 06.04.2025).
  - 19. VISHNEVSKY V.M., VYTOVTOV K.A., BARABANOVA E.A. et al. *Transient behavior of the M AP/M/I/N queuing system* // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, No. 2559. – DOI: 10.3390/math9202559.
  - 20. VYTOVTOV K.A., BARABANOVA E.A., VISHNEVSKY V.M. *Modeling and Analysis of Multi-channel Queuing System Transient Behavior for Piecewise-Constant Rates* // LNCS. Springer. – 2023. – Vol. 13766. – P. 397–409.
  - 21. ZEIFMAN A.I., KOROLEV V., SATIN Y.A. *Review Two Approaches to the Construction of Perturbation Bounds for Continuous-Time Markov Chains* // Mathematics. – 2020. – Vol. 8. – DOI: 10.3390/math8020253.
  - 22. ZEIFMAN A.I., RAZUMCHIK R.V., SATIN Y.A. et al. *Ergodicity bounds for the markovian queue with time-varying transition intensities, batch arrivals and one queue skipping policy* // Appl. Math. Comput. – 2021. – Vol. 395. – Article 125846.

## ANALYSIS OF THE THREE PHASE QUEUING SYSTEM WITH COMMON BUFFER

**Konstantin Vytovtov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Assistant Professor (vytovtov\_konstan@mail.ru).

**Elizaveta Barabanova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Assistant Professor (elizavetaalex@yandex.ru).

**Ekaterina Shabanova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Technician (shabanovaev@gmail.com).

*Abstract: This paper examines the non-stationary performance metrics of a three-phase queuing system with a Poisson input flow, exponentially distributed service time across all phases, and a constraint on the total size of the shared buffer. A system of Kolmogorov differential equations is written using specially introduced functions that account for the system's operating principles. A probability translation matrix method is used to solve the system of equations. Expressions are derived for finding the loss probability and system performance. A system with a buffer size of three is considered as an example. The duration of the transient mode is analyzed as a function of the ratios of service rates in individual service phases. It is concluded that the service rates in the first and second phases have the greatest impact on the duration of the transient mode. The dependences of the maximum values of the non-stationary loss probability and the corresponding stationary probabilities for various service rates are analyzed. The analysis of the system performance metrics is conducted for parameters corresponding to modern optical networks. The obtained conclusions are of interest for the design of high-performance computing systems.*

Keywords: queuing system, Kolmogorov equations, transient mode, non-stationary characteristics.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А. С. Манделем.*

*Поступила в редакцию 12.07.2025.*

*Дата опубликования 30.09.2025.*

# НЕЧЁТКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПАРКОМ ВОЗДУШНЫХ СУДОВ С УЧЁТОМ ТРАНСФЕРНЫХ ПАССАЖИРОПОТОКОВ

Романенко В. А.<sup>1</sup>

(Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара)

Решён вариант задачи совместной оптимизации структуры и численности парка воздушных судов (ВС) и распределения ВС по авиалиниям для авиакомпании, планирующей выполнение массовых трансферных перевозок пассажиров на базе узлового аэропорта. Предполагается, что задача решается авиакомпанией на этапе, предшествующем выполнению перевозок, когда спрос на перевозки может быть известен лишь приближённо. В этом случае прогнозные уровни спроса определяются путём экспертных оценок и должны рассматриваться в качестве нечётких чисел. Совместная оптимизация по критерию экономической эффективности сформулирована как целочисленная задача математического программирования с нечётким критерием и чёткими ограничениями. С использованием приёма дефазификации нечёткая задача сведена к обычной задаче математического программирования, решаемой за приемлемое время с помощью доступного программного обеспечения. На базе программного пакета IBM ILOG OPL получено решение серии модельных примеров задачи с уровнями спроса, заданными в нечёткой и «чёткой» форме. Выполненное сравнение выявило существенные различия наиболее значимых результатов решения оптимизационной задачи при нечётких и «чётких» исходных данных. Попытка заменить решение, полученное с учётом нечёткости прогноза пассажиропотока, «чётким» решением приводит к существенному ухудшению целевой функции. Всё это свидетельствует о целесообразности учёта нечёткой неопределённости исходных данных. Предложенная нечёткая модель может быть использована для повышения эффективности принимаемых решений на этапе проектирования таких перспективных авиатранспортных систем, как системы трансферных авиаперевозок на базе узловых аэропортов.

**Ключевые слова:** оптимизация, математическое программирование, нечёткое число, воздушные суда, узловой аэропорт, трансферные пассажиры, авиалинии.

## 1. Введение

Настоящая статья продолжает тематику публикаций [7, 8], посвящённых использованию нечётких величин в задачах опти-

---

<sup>1</sup> Владимир Алексеевич Романенко, к.т.н., доцент ([vla\\_rom@mail.ru](mailto:vla_rom@mail.ru)).

мизации организационно-технических систем воздушного транспорта. Рассматривается задача нечёткого математического программирования, являющаяся частью общей проблемы принятия решений в управлении авиатранспортным предприятием при неполноте определённых исходных данных. Предполагается, что некоторой авиакомпанией, выполняющей перевозки или планирующей выполнение перевозок между заданным аэропортом и рядом других аэропортов, решается вопрос о выборе направлений повышения экономической эффективности перевозочной деятельности. Одним из таких направлений может стать стимулирование трансферных перевозок путём обеспечения удобных условий перевозки пассажирам, выбирающим маршрут с пересадкой в рассматриваемом аэропорту. Другое направление, во многом обусловленное активизацией трансферных перевозок, может состоять в оптимизации парка воздушных судов (ВС), включающей изменение числа ВС, замену ВС одного типа ВС другого типа, включение в состав авиапарка ВС не использовавшихся ранее типов и т.д. Если авиапарк формируется авиакомпанией на базе широко распространённых договоров операционного лизинга, то изменение его состава и численности может быть осуществлено достаточно быстро. Стремление повысить роль трансферных перевозок и изменения в составе авиапарка должны учитываться при решении задачи оптимального распределения ВС по авиалиниям – одной из типичных задач математического программирования, часто встречающихся в практике планирования работы авиатранспортных предприятий. Поскольку задача переформирования авиапарка и задача его распределения по авиалиниям имеют единую цель – максимум прибыли, то имеет смысл решать их совместно, рассматривая как две части единой задачи.

Проблема повышения экономической эффективности в условиях ужесточения существующих и появления новых вызовов стоит перед российскими авиапредприятиями весьма остро. Одним из путей её разрешения является концентрация трансферных пассажиропотоков в узловых аэропортах. Более или менее успешный опыт такой деятельности к настоящему времени накоплен у целого ряда отечественных авиакомпаний и аэропортов. В качестве одного из новейших примеров следует

отметить усилия авиакомпании «Аэрофлот» по развитию региональных пересадочных хабов, предпринимаемые национальным перевозчиком РФ в течение последних лет [2]. Таким образом, рассматриваемая в статье задача может считаться вполне актуальной.

Решение двуединой задачи проектирования авиапарка и распределения его по авиалиниям возможно при наличии информации относительно уровней пассажиропотоков на рассматриваемых авиалиниях. Задача решается на этапе, предшествующем выполнению перевозок, когда спрос на перевозки может быть известен лишь предположительно. Предположим, что прогнозные уровни спроса определяются путём экспертных оценок и могут рассматриваться в качестве нечётких величин.

Как оптимизация парка транспортных средств, так и оптимизация распределения ВС по авиалиниям были одними из первых задач математического программирования, результаты решения которых были успешно внедрены в практику работы авиапредприятий ещё в 1950-х годах. Впервые детерминированное решение первой из этих задач было описано в работе [13], второе – в работе [14]. Впоследствии были разработаны весьма сложные и изощрённые подходы к решению обеих задач. Продолжилось совершенствование детерминированных моделей решения задачи оптимизации авиапарка, активно используемых на практике [1, 9, 11, 26, 27]. Первым фактором, стохастичность которого начала учитываться при разработке моделей оптимизации авиапарка, явился уровень спроса пассажиров на перевозку [20, 24]. Позже в моделях, ориентированных на долгосрочное планирование, было предложено учитывать также изменчивость цен на авиатопливо и ряд других факторов, имеющих вероятностный характер [12, 16]. В настоящее время основные усилия исследователей сосредоточены не столько на расширении возможностей моделей, сколько на поиске методов поиска оптимальных решений за приемлемое время. Среди предложенных в последнее время подходов можно отметить смешанно-целочисленное линейное программирование, методы машинного обучения, в числе которых алгоритм обучения с подкреплением, алгоритм «Актор – Критик» и некоторые другие [16].

Состояние исследований в части оптимизации распределения ВС по авиалиниям довольно подробно описано в недавней статье [8], поэтому, чтобы не повторяться, напомним здесь лишь основные моменты. Разработка методов решения рассматриваемой задачи с учётом стохастичности пассажиропотоков началась лишь немногим позже, чем было получено стохастическое решение [3, 15]. Полученные к настоящему времени методики позволяют осуществлять [10, 17, 23] оптимальное распределение многочисленного парка ВС на разветвлённой сети авиалиний с учётом многих промежуточных посадок, временных ограничений на параметры графика оборота ВС, необходимость «стыковок» авиарейсов, необходимость возвращения ВС в базовый аэропорт.

Поскольку задача распределения ВС по авиалиниям является лишь частью общей проблемы принятия решений в управлении авиакомпанией, то и решаться она должна совместно с другими оптимизационными задачами, в число которых может входить и задача формирования парка ВС [18]. Эволюция исследований стохастической распределительной задачи идёт в направлении как расширения комплекса совместно решаемых оптимизационных задач, так и увеличения числа учитываемых случайных факторов. Если в более ранних работах [15, 22] выполнялось распределение ВС по авиалиниям при случайному спросе, то, например, в [21] был учтен также стохастический характер цен на авиатопливо, а в [25] распределение ВС рассмотрено совместно с формированием авиалиний, составлением расписания полётов и планированием технического обслуживания ВС при случайному спросе и отклонениях от расписания. Комплекс задач в одной из наиболее сложных постановок представлен в статье [19], где одновременно решаются задачи распределения ВС, формирования авиалиний и составления расписания с учётом необходимости технического обслуживания ВС и наличия код-шеринговых соглашений между перевозчиками. Случайными считаются спрос, время наземной стоянки ВС и отклонения от расписания.

К настоящему времени неизвестны работы, в которых такой значимый фактор, как пассажирский спрос, подверженный влиянию различного рода неопределённостей, рассматривался бы

в терминах нечёткости. Исключение составляет работа автора [8], где рассмотрена довольно простая постановка задачи распределения ВС по авиалиниям при нечетко заданных уровнях спроса. В настоящей статье предлагается задачи проектирования парка ВС и расстановки ВС по авиалиниям решать совместно, считая спрос заданным эксперто в нечеткой форме и ограничившись случаем сети авиалиний на базе узлового аэропорта.

## 2. Модель оптимизации

### 2.1. НЕОБХОДИМЫЕ ОПЕРАЦИИ НЕЧЁТКОЙ АРИФМЕТИКИ

Представим кратко основные понятия и приёмы нечеткой арифметики, используемые при решении рассматриваемой задачи. Нечёткое множеством  $\tilde{A}$  на универсальном множестве  $U$  – это совокупность кортежей вида  $\langle \mu_{\tilde{A}}(u), u \rangle$ , где  $\mu_{\tilde{A}}(u)$  – степень принадлежности элемента  $u \in U$  нечеткому множеству  $\tilde{A}$ , которая задаётся как действительное число из интервала  $[0, 1]$ .

Функция принадлежности – функция, позволяющая вычислить степень принадлежности нечеткому множеству произвольного элемента универсального множества.

Нечёткая величина – нечеткое множество, заданное на множестве действительных чисел [5].

«Треугольное» нечеткое число (ТНЧ) – нечеткая величина, относящаяся к типу нормальных, имеющая функцию принадлежности с треугольным профилем. ТНЧ характеризует неопределенность типа «приблизительно равно» и является одним из наиболее часто используемых, интуитивно понятных, простых и удобных для практических вычислений типов нечетких величин. ТНЧ  $\tilde{A}$  может быть представлено в виде кортежа  $\tilde{A} = \langle a^L, a^M, a^R \rangle$ , включающего координаты опорных точек функции принадлежности  $\mu_{\tilde{A}}(u)$ , отображённой на рис. 1.

Здесь  $a^M$  – наиболее возможное значение  $u$  (мода),  $a^L, a^R$  – наименьшее и наибольшее из возможных значений  $u$  (левая и правая границы ТНЧ соответственно),  $a^L \leq a^M \leq a^R$ .

Разности  $\Delta a^L = a^M - a^L$  и  $\Delta a^R = a^R - a^M$  называются, соответственно, левым и правым коэффициентами нечёткости, а их отношения к модальному значению  $a^M$  – левым  $k^{aL}$  и правым  $k^{aR}$  относительными коэффициентами нечёткости:

$$(1) \quad k^{aL} = \frac{\Delta a^L}{a^M}, \quad k^{aR} = \frac{\Delta a^R}{a^M}.$$

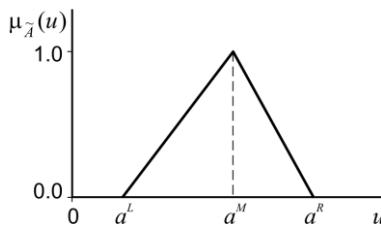


Рис. 1. «Треугольное» нечеткое число

ТНЧ  $\tilde{A}$  называется симметричным (СТНЧ), если величины его левых и правых коэффициентов равны:

$$(2) \quad \Delta a^L = \Delta a^R = \Delta a, \quad k^{aL} = k^{aR} = k^a.$$

Необходимые ниже операции с ТНЧ определяются с использованием принципа обобщения Заде [5]. Для заданных ТНЧ  $\tilde{A}$  и «обычного» (не нечёткого) числа  $b$  результатами нечёткого сложения (+), умножения ( $\times$ ), взятия максимума (max) и минимума (min) будут ТНЧ, определяемые соответственно как

$$(3) \quad \begin{aligned} \tilde{A} + (\times)b &= \langle a^L + (\times)b, a^M + (\times)b, a^R + (\times)b \rangle, \\ \max(\min)(\tilde{A}, b) &= \langle \max(\min)(a^L, b), \max(\min)(a^M, b), \\ &\quad \max(\min)(a^R, b) \rangle. \end{aligned}$$

Для приведения к чёткой форме (дефаззификации) ТНЧ ниже используется далее метод центроида [5], в соответствии с которым результатом дефаззификации ТНЧ  $\tilde{A} = \langle a^L, a^M, a^R \rangle$  явится чёткое число  $\bar{a}$ :

$$(4) \quad \bar{a} = \text{def}(\tilde{A}) = \frac{a^L + a^M + a^R}{3}.$$

## 2.2. МОДЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

Предполагается, что авиакомпания планирует организовать так называемую «веерную» сеть авиалиний, в которой один из аэропортов (узловой аэропорт, хаб) играет роль пересадочного центра для пассажиров, перевозимых между другими («периферийными») аэропортами. Для обеспечения высокой прибыльности формируемой «веерной» сети авиакомпания готова пойти на частичное или полное изменение состава авиапарка на условиях соглашений операционного лизинга. Рассмотрим предельный случай, когда авиакомпанией допускается возможность полного переформирования авиапарка. Будем считать, что к принятию в лизинг авиакомпании доступны ВС нескольких определённых типов. Обозначим число доступных типов ВС  $V$ . Введём принадлежащие множеству целых неотрицательных чисел  $\mathbf{Z}_+$  переменные  $n_v$ ,  $v = 1, \dots, V$ , представляющие собой численности ВС типа  $v$ , планируемых к приобретению авиакомпанией по договору лизинга. Множество численностей ВС  $\mathbf{N} = \{n_v \in \mathbf{Z}_+, v = 1, \dots, V\}$  должно быть определено в результате решения оптимизационной задачи.

Присвоим каждому аэропорту «веерной» сети номер  $k \in \{0, 1, \dots, K\}$ , где  $K$  – число периферийных аэропортов. Будем считать, что аэропорт с порядковым номером  $k = 0$  – узловой, а остальные аэропорты – «периферийные». Для упрощения модели примем, что каждый рейс между хабом и любым периферийным аэропортом выполняется без посадок в промежуточных аэропортах. Чтобы сократить время ожидания пересадки трансферных пассажиров, следующих из аэропорта отправления  $i$  в аэропорт назначения  $j$  ( $i, j \in \{1, \dots, K\}$ ) через узловой аэропорт ( $k = 0$ ), авиакомпания должна строить своё расписание с учётом необходимости организации в хабе «стыковок» рейсов. Под «стыковкой» рейсов на маршруте  $(i, 0, j)$  будем понимать такое сочетание времени прибытия в хаб рейса из аэропорта  $i$  и времени отправления из хаба в аэропорт  $j$  рейса, которое обеспечивает трансферному пассажиру, следующему по маршруту  $(i, 0, j)$ , надёжную возможность пересадки с первого из этих рейсов на второй. Для обеспечения востребованности стыковкам на маршруте  $(i, 0, j)$  примем, что каждому прибывающему

из  $i$  в 0 рейсу с трансферными пассажирами должен соответствовать отправляемый из 0 в  $j$  рейс. Таким образом, за заданный промежуток времени число рейсов с трансферными пассажирами из  $i$  в 0 должно совпадать с числом рейсов из 0 в  $j$ . Необходимость наличия стыковок рейсов в хабе учитываются следующим образом. Все рейсы условно разбиты на два вида: «стыковочные», т.е. перевозящие пассажиров всех категорий, включая трансферных, и «нестыковочные» – перевозящие пассажиров всех категорий за исключением трансферных. Число «стыковочных» рейсов на участках  $(i, 0)$  и  $(0, j)$  маршрута  $(i, 0, j)$  при наличии спроса на этот маршрут принимается одинаковым, что позволяет обеспечить возможность для комфортной пересадки трансферных пассажиров. Обозначим  $x_{vk}$  и  $y_{vk}$  соответственно число «стыковочных» и число «нестыковочных» рейсов, выполняемых на авиалинии между узловым и  $k$ -м аэропортами на ВС  $v$ -го типа в течение недели. Здесь и далее значения параметров приводятся к недельному интервалу, которому, как правило, соответствует цикличность повторяемости дней выполнения рейсов в расписании [6]. Множества численностей рейсов  $\mathbf{X} = \{x_{vk} \in \mathbf{Z}_+, v = 1, \dots, V, k = 1, \dots, K\}$  и  $\mathbf{Y} = \{y_{vk} \in \mathbf{Z}_+, v = 1, \dots, V, k = 1, \dots, K\}$  должны определяться в результате решения рассматриваемой оптимизационной задачи.

Примем заданным в нечёткой форме  $\tilde{q}_{ij}$  экспертный прогноз недельного пассажирского спроса на перевозку в пределах пары аэропортов  $(i, j)$ , где  $i$  – аэропорт отправления, а  $j$  – аэропорт назначения ( $i \neq j$ ,  $i, j \in \{0, 1, \dots, K\}$ ), предполагая, что уровни спроса в прямом и обратном направлениях могут различаться. Заметим, что достижение максимума прибыли не требует обязательной перевозки всех желающих. Неудовлетворённый в течение рассматриваемой недели спрос будем считать упущенными, полагая, что поскольку рассматриваемая авиакомпания может быть не единственным перевозчиком на авиалинии, то желающие, которым не найдётся мест на её рейсах, уйдут к конкурентам.

Используем для перехода от величины прогнозируемого спроса к величине ожидаемого пассажиропотока тот же подход, который был применён в [8], модифицировав его с учётом нали-

чия трансферных пассажиров. Предположим, что для перевозки пассажиров из  $i$  в  $j$  авиакомпания в течение недели планирует выделить на своих рейсах  $w_{ij}$  мест. Назовём «плановым» недельное число пассажиров из  $i$  в  $j$ , на перевозку которых авиакомпания будет вправе рассчитывать при некотором  $w_{ij}$ . Плановое недельное число пассажиров не сможет превысить как прогнозируемого недельного спроса  $\tilde{q}_{ij}$ , так и суммарного недельного числа мест  $w_{ij}$ . Поскольку плановое недельное число пассажиров будет зависеть от ТНЧ  $\tilde{q}_{ij}$ , то оно так же будет ТНЧ. Обозначим это ТНЧ  $\tilde{p}_{ij}$  и будем определять её по правилам нечётких вычислений (3) как

$$(5) \quad \tilde{p}_{ij} = \min(w_{ij}, \tilde{q}_{ij}).$$

В случае ориентации авиакомпании на массовые трансферные перевозки нужно ожидать, что на одной авиалинии будут перевозиться пассажиры, следующие через хаб сразу несколькими маршрутами, различающимися уровнями спроса и тарифов. Разумно предположить, что в целях повышения прибыли авиакомпании придётся ограничивать число предоставляемых мест для пассажиров на малорентабельных или убыточных маршрутах, удовлетворяя спрос в первую очередь на направлениях более прибыльных. Следует заметить, что такое управление продажами широко практикуется авиаперевозчиками. При решении рассматриваемой оптимизационной задачи рациональное распределение мест, выделяемых для пассажиров, следующих на авиалинии в пределах различных пар аэропортов, обеспечивается включением в число проектных параметров множества  $\mathbf{W} = \{w_{ij} \in \mathbf{Z}_+, i \neq j, i, j = 0, 1, \dots, K\}$ .

### 2.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Введём следующие обозначения величин, которые должны быть заданы или определены предварительно, до «запуска» алгоритма решения оптимизационной задачи:

$d_v, b_v$  – соответственно дальность и пассажировместимость ВС  $v$ -го типа,  $v \in \{1, \dots, V\}$ ;

$L_v$  – лизинговые платежи за одно ВС  $v$ -го типа, приведенные к недельному интервалу,  $v \in \{1, \dots, V\}$ ;

$l_k$  – протяжённость авиалинии между узловым и  $k$ -м периферийным ( $k \in \{1, \dots, K\}$ ) аэропортами;

$s_{ij}$  – средний сквозной тариф на перевозку пассажира в одном направлении из аэропорта  $i$  в аэропорт  $j$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{0, 1, \dots, K\}$ . Сквозной тариф на трансферную перевозку по маршруту  $(i, 0, j)$  определяется пропорционально сумме прямых тарифов на участках  $(i, 0)$  и  $(0, j)$  с учётом понижающего коэффициента  $k_{ij} < 1$ :

$$(6) \quad s_{ij} = k_{ij}(s_{i,0} + s_{0,j}), \quad i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots, K\}.$$

Использование понижающего коэффициента вызвано, в частности, необходимостью дифференцирования уровня тарифных ставок в зависимости от расстояния перевозки и необходимостью некоторой компенсации трансферным пассажирам за неудобства, связанные с пересадкой;

$t_{vk}$  – продолжительность парного («туда и обратно») рейса ВС  $v$ -го типа между хабом и  $k$ -м аэропортом, включающая полётное время туда и обратно, дополнительное время на руление ВС во время взлёта и посадки, затраты времени на обслуживание ВС перед вылетом и по прилете в аэропортах;

$\tau_{vk}$  – продолжительность рейса ВС  $v$ -го типа между хабом и  $k$ -м периферийным аэропортом в одном направлении по расписанию – временной промежуток между указанными в расписании моментами времени отправления и прибытия рейса. Величины продолжительности рейса по расписанию в прямом и обратном направлениях принимаются одинаковыми;

$C_{vk}$  – затраты на выполнение парного рейса ВС  $v$ -го типа на авиалинии между узловым ( $k = 0$ ) и  $k$ -м периферийным ( $k \in \{1, \dots, K\}$ ) аэропортами. Предполагается, что величина  $C_{vk}$  рассчитывается авиакомпанией для некоторого фиксированного уровня занятости пассажирских кресел, что позволяет считать  $C_{vk}$  величиной, не зависящей от числа перевозимых пассажиров. В соответствии с практикой предполагается, что спрос на перевозки в прямом и обратном направлениях может заметно различаться, поэтому не требуется, чтобы численности мест на перевозки «туда» и «обратно» совпадали;

$r_k$  – минимально допустимое недельное число парных рейсов между узловым и  $k$ -м периферийным аэропортами,  $k \in \{1, \dots, K\}$ ;

$r_{ij}$  – минимально допустимое недельное число «стыковок» рейсов на маршруте  $(i, 0, j)$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, K\}$ . Предполагается, что сокращение фактических недельных частот выполнения рейсов и числа «стыковок» ниже минимально допустимых уровней может привести к неприемлемому с точки зрения потенциальных пассажиров увеличению времени ожидания перевозки, что послужит причиной труднопрогнозируемого снижения спроса на перевозку между узловым и  $k$ -м периферийным аэропортами или из  $i$ -го периферийного в  $j$ -й периферийный аэропорт через рассматриваемый хаб;

$\theta_k$  – максимально допустимая продолжительность рейса в одном направлении между узловым и  $k$ -м периферийным аэропортами,  $k \in \{1, \dots, K\}$ . Задание предельно допустимой продолжительности рейса позволяет исключить возможность назначения на наиболее востребованные авиалинии, где конкурентами используются скоростные реактивные ВС, менее скоростных ВС, например с турбовинтовой двигателевой установкой. Таким образом, последние три параметра введены в целях обеспечения конкурентоспособности рассматриваемой авиакомпании;

В качестве критерия оптимальности задачи совместной оптимизации парка ВС и расстановки ВС по авиалиниям логично выбрать максимум недельной прибыли авиакомпании, составляющей разность между недельными доходами от перевозки пассажиров и недельными расходами на выполнение рейсов, а также приведенными к недельному интервалу лизинговыми платежами. Поскольку величины планового пассажиропотока  $\tilde{p}_{ij}$ , очевидно влияющие на прибыль, являются нечёткими, то прибыль также представляет собой нечёткую величину. Известно [4], что оптимизационная задача с нечёткой целевой функцией именно в силу нечёткости последней является задачей с бесконечным числом целевых функций. Чтобы придать постановке задачи определённость будем учитывать при расчёте при-

были дефазифицированные методом центроида значения плавнового пассажиропотока:

$$(7) \quad \bar{p}_{ij} = \text{def}(\tilde{p}_{ij}).$$

С учётом введённых обозначений максимизируемая целевая функция запишется как

$$(8) \quad \Pi = \sum_{i=0}^K \sum_{\substack{j=0, \\ i \neq j}}^K \bar{p}_{ij} s_{ij} - \sum_{v=1}^V \sum_{k=1}^K (x_{vk} + y_{vk}) C_{vk} - \sum_{v=1}^V n_v L_v.$$

Ограничения, учитываемые при решении оптимизационной задачи:

1) на общее недельное число мест, выделяемых для прибывающих в хаб из аэропорта  $k$  пассажиров всех категорий на ВС всех типов, которое не может превосходить суммарного числа мест на всех рейсах, выполняемых между хабом и аэропортом  $k$  в неделю:

$$(9) \quad w_{k0} + \sum_{j=1}^K w_{kj} \leq \sum_{v=1}^V (x_{vk} + y_{vk}) b_v, \quad k = 1, \dots, K;$$

2) аналогичное ограничение на общее недельное число мест, выделяемых для пассажиров, отправляемых из хаба в аэропорт  $k$ :

$$(10) \quad w_{0k} + \sum_{i=1}^K w_{ik} \leq \sum_{v=1}^V (x_{vk} + y_{vk}) b_v, \quad k = 1, \dots, K;$$

3) на общее недельное число мест на «стыковочных» рейсах ВС всех типов для прибывающих в хаб из аэропорта  $k$  трансферных пассажиров, которое не может превосходить суммарного числа мест на всех «стыковочных» рейсах, выполняемых между хабом и аэропортом  $k$  в неделю:

$$(11) \quad \sum_{j=1}^K w_{kj} \leq \sum_{v=1}^V x_{vk} b_v, \quad k = 1, \dots, K;$$

4) аналогичное ограничение на общее недельное число мест на «стыковочных» рейсах для отправляемых из хаба в аэропорт  $k$  трансферных пассажиров:

$$(12) \quad \sum_{i=1}^K w_{ik} \leq \sum_{v=1}^V x_{vk} b_v, \quad k = 1, \dots, K;$$

5) на суммарную продолжительность всех парных рейсов

всех ВС определённого типа, которая не должна превышать длительности календарного фонда времени с учётом разного рода производственных и непроизводственных простоев ВС:

$$(13) \sum_{k=1}^K (x_{vk} + y_{vk}) \tau_{vk} \leq n_v (T - T_v^{\text{ПР}}), \quad v = 1, \dots, V,$$

где  $T$  – длительность рассматриваемого интервала времени (неделя),  $T_v^{\text{ПР}}$  – средняя продолжительность простоев одного ВС  $v$ -го типа в течение рассматриваемого интервала времени (простои на ТОиР, простои по метеоусловиям, нахождение в резерве и пр.);

6) на число «стыковочных» рейсов на маршруте при наличии спроса на этот маршрут, которое на обоих его участках должно быть одинаковым:

$$(14) \sum_{v=1}^V x_{vi} = \sum_{v=1}^V x_{vj}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K\}: i \neq j, \quad \bar{q}_{ij} > 0,$$

где  $\bar{q}_{ij} = \text{def}(\tilde{q}_{ij})$  – дефазифицированное методом центроида значение  $\tilde{q}_{ij}$ ;

7) на минимальное недельное число рейсов на авиалинии, которое не может быть ниже заданного минимально допустимого недельного числа:

$$(15) \sum_{v=1}^V (x_{vk} + y_{vk}) \geq r_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

8) на минимальное недельное число «стыковок» рейсов с трансферными пассажирами на маршруте, которое не может быть ниже заданного минимально допустимого недельного числа:

$$(16) \sum_{v=1}^V x_{vi} \geq r_{ij} \quad (\text{или } \sum_{v=1}^V x_{vj} \geq r_{ij}), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, K\}: i \neq j, \quad \bar{q}_{ij} > 0;$$

9) запрет назначения на авиалинию ВС, дальность которого меньше протяжённости авиалинии:

$$(17) x_{vk} = y_{vk} = 0, \quad \forall v \in \{1, \dots, V\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}: l_k > d_v.$$

10) ограничение на продолжительность рейса ВС  $v$ -го типа между хабом и  $k$ -м периферийным аэропортом в одном направлении по расписанию, которая из соображений конкурентоспо-

собности не должна превышать максимально допустимую продолжительность:

$$(18) \quad x_{vk} = y_{vk} = 0, \quad \forall v \in \{1, \dots, V\}, \quad \forall k \in \{1, \dots, K\}: \tau_{vk} > \theta_k.$$

Таким образом, задача совместной оптимизации парка ВС и распределения ВС по авиалиниям сводится к определению множеств  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{W}$ , обеспечивающих максимум целевой функции  $\Pi$  (8) и удовлетворяющих ограничениям (9)–(18) при заданных  $d_v$ ,  $b_v$ ,  $L_v$ ,  $l_k$ ,  $r_k$ ,  $\theta_k$ ,  $s_{ij}$ ,  $k_{ij}$ ,  $\tilde{q}_{ij}$ ,  $r_{ij}$ ,  $t_{vk}$ ,  $\tau_{vk}$ ,  $C_{vk}$  ( $v = 1, \dots, V$ ,  $k, i, j = 1, \dots, K$ ). Сформулированная задача относится к классу «обычных» (не нечётких) задач целочисленного математического программирования. Решение рассмотренных ниже примеров получено с помощью программного пакета IBM ILOG OPL.

### **3. Модельные примеры**

#### **3.1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ**

Двумя основными целями решения рассмотренной ниже серии модельных примеров явились, во-первых, анализ влияния степени нечёткости исходных данных на результаты решения оптимизационной задачи и, во-вторых, оценка принципиальной целесообразности её решения в нечёткой форме.

Совокупность исходных данных сформирована на основе статистики одного из крупных региональных аэропортов европейской части России. Характеристики доступных авиакомпаний типов ВС приведены в таблице 1. Забегая вперёд необходимо отметить, что ВС типа 5 ( $v = 5$ ) ни при каком сочетании исходных данных не были распределены ни на одну авиалинию, поэтому этот тип ВС исключён из описания результатов.

*Таблица 1. Характеристики авиапарка*

$v$	1	2	3	4	5
$b_v$ , пас.	210	160	70	50	100
$d_v$ , км	5100	5100	1370	2500	2950

Лизинговый авиапарк предполагается задействовать для перевозок пассажиров между рассматриваемым хабом и 11 «периферийными» аэропортами. Недельный спрос на перевозки

между парами пунктов, заданный модальными значениями  $q_{ij}^M$  СТНЧ  $\tilde{q}_{ij}$ , приводится в таблице 2. Для оценки влияния нечёткости на результаты решения оптимизационной задачи рассмотрены 4 случая, соответствующие различным степеням уверенности эксперта в прогнозе, со следующими значениями относительного коэффициента нечёткости  $k^q$  СТНЧ  $\tilde{q}_{ij}$ :  $k^q \in \{0; 0,15; 0,3; 0,45\}$ . В каждом случае значения  $k^q$  приняты одинаковыми для всех  $\tilde{q}_{ij}$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, K\}$ .

Таблица 2. Модальный спрос между аэропортами,  $q_{ij}^M$ , чел.

i	j											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	14800	6300	6100	2305	1020	940	880	550	410	290	570
1	16400	0	0	0	0	830	0	0	0	345	125	0
2	6800	0	0	0	0	490	0	0	0	600	175	0
3	5930	0	0	0	405	0	0	0	0	0	0	270
4	2380	0	0	405	0	0	1630	140	310	0	0	0
5	905	760	500	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	910	0	0	0	1685	0	0	0	0	0	0	370
7	770	0	0	0	135	0	0	0	0	0	0	155
8	480	0	0	0	295	0	0	0	0	0	0	385
9	245	340	600	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	310	125	175	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	625	0	0	270	0	0	310	120	385	0	0	0

Исходные данные по авиалиниям сведены в таблицу 3. Величины, имеющие экономический смысл, выражены в условных денежных единицах ( усл. ед.). Прочерки соответствуют случаям недостаточной дальности ВС. Понижающий коэффициент для расчёта сквозных трансферных тарифов принят одинаковым для всех пар аэропортов:  $k_{ij} = 0,8$ ,  $\forall i, j \in \{1, \dots, K\}: i \neq j$ .

Для каждого из перечисленных выше значений  $k^q$  рассмотрено три приведённых в таблице 3 варианта ограничений на минимальное недельное число рейсов  $r_k$ ,  $k = 1, \dots, 11$ . Вариант I, принятый за базовый, близок к фактическим частотам рейсов, выполняемым в настоящее время из аэропорта.

Таблица 3. Характеристики авиалиний

k	l <sub>k</sub> , км	r <sub>k</sub> , рейсов, по вариантам	t <sub>vk</sub> , ч., по типам ВС (v)				τ <sub>vk</sub> , ч., по типам ВС (v)				C <sub>vk</sub> , усл.ед., по типам ВС (v)				s <sub>0k</sub> , усл. ед.	θ <sub>k</sub> , ч		
			1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4				
1	868	110	82	125	6,5	4,7	5,3	4,1	1,2	1,2	1,9	1,3	1443	1220	535	842	6,5	1,5
2	1359	66	49	81	7,7	5,9	7,3	5,3	1,7	1,7	2,9	1,9	2141	1810	811	1255	9,4	2
3	1346	31	24	41	7,6	5,8	7,2	5,3	1,7	1,7	2,9	1,9	2122	1795	804	1244	9,3	3
4	1629	24	18	24	8,3	6,5	—	6	2,0	2,0	—	2,3	2524	2135	—	1482	11	3
5	2350	6	5	6	9,9	8,1	—	7,8	2,9	2,9	—	3,2	3549	3001	—	2088	15,2	3,5
6	1153	8	6	8	7,2	5,4	6,5	4,8	1,5	1,5	2,5	1,6	1848	1563	695	1082	8,2	2,5
7	1800	10	7	10	8,7	6,9	—	6,4	2,2	2,2	—	2,5	2767	2340	—	1626	12	3
8	1600	5	4	5	8,2	6,4	—	5,9	2,0	2,0	—	2,2	2483	2100	—	1457	10,8	3
9	2250	3	2	3	9,7	7,9	—	7,6	2,8	2,8	—	3,0	3407	2881	—	2004	14,6	3,5
10	2200	2	2	2	9,6	7,8	—	7,4	2,7	2,7	—	3,0	3336	2821	—	1962	14,3	3,5
11	1770	7	5	7	8,6	6,8	—	6,3	2,2	2,2	—	2,4	2725	2304	—	1600	11,8	3,5

На недельное число стыковок ограничения наложены только для пар пунктов (1, 5) и (3, 4). По вариантам ограничения следующие: I)  $r_{1,5} = r_{5,1} = 7$ ,  $r_{3,4} = r_{4,3} = 4$ ; II)  $r_{1,5} = r_{5,1} = 5$ ,  $r_{3,4} = r_{4,3} = 3$ ; III)  $r_{1,5} = r_{5,1} = 8$ ,  $r_{3,4} = r_{4,3} = 5$ . Таким образом вариант I соответствует сокращению суммарного недельного числа рейсов и стыковок приблизительно до 75% от базового уровня, а вариант III – увеличению этого числа примерно на 15% от базового уровня.

### 3.2. ПРИМЕР 1

Приводимые ниже результаты позволяют сделать некоторые выводы относительно влияния степени нечёткости пассажиропотоков на результаты решения оптимизационной задачи. Результаты для варианта ограничений I при  $k^q = 0,3$ , рассмотренные в качестве иллюстрации более подробно, сведены в таблицы 4 и 5. Полученное решение обеспечивает авиакомпании ощутимую прибыль, составляющую  $\Pi = 21,7$  млн усл. ед., несмотря на необходимость лизинговых расходов на авиапарк следующей численности по типам ВС:  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 7$ ,  $v_3 = 4$ ,  $v_4 = 2$ . Для рассмотренного набора исходных данных использование ВС первого типа, отличающихся наибольшей пассажировместимостью, не планируется. Наиболее активно предполагается использовать ВС второго типа. Этот вывод подтверждают

и данные таблицы 4, в которой представлено оптимальное распределение количества рейсов по авиалиниям и типам ВС.

Согласно таблице 4, на ряде авиалиний число рейсов заметно превышает установленные ограничениями минимально необходимое их число, что говорит об особой прибыльности этих авиалиний. Для рассмотренного сочетания исходных данных число «трансферных» рейсов полностью совпадает на всех авиалиниях, что является скорее исключением, чем правилом. В рассматриваемом случае предполагается выполнение одного рейса в сутки на каждой авиалинии, тем самым обеспечивается возможность организации ежедневной перевозки трансферных пассажиров в пределах всех пар аэропортов. В большинстве других случаев число «трансферных» рейсов по авиалиниям несколько различается, равняясь либо незначительно превосходя на одних линиях  $r_{1,5}$  (или  $r_{5,1}$ ), а на других –  $r_{3,4}$  (или  $r_{4,3}$ ). Такое слабое разнообразие численности «стыковочных» рейсов по авиалиниям объясняется относительно равномерным распределением спроса на трансферные перевозки среди различных пар аэропортов.

Оптимальное распределение мест на ВС и соответствующие пассажиропотоки между аэропортами приведены в таблице 5. При наличии спроса на перевозку из аэропорта  $i$  в аэропорт  $j$  в соответствующую ячейку таблицы 5 внесены два числа: в верхнюю строку – оптимальное число выделяемых мест  $w_{ij}$ , в нижнюю строку – дефазифицированное число потенциальных пассажиров  $\bar{p}_{ij}$ . Нули соответствуют парам аэропортов, не пользующимся спросом. Сравнение данных таблиц 2 и 5 позволяет сделать вывод о том, что выделенных для выполнения перевозок в пределах значительного числа пар аэропортов мест недостаточно для удовлетворения даже модального уровня спроса. Там, где мест значительно меньше, чем желающих совершить поездку, дефазифицированное плановое число пассажиров  $\bar{p}_{ij}$  совпадает с числом выделенных мест  $w_{ij}$ , что соответствует высокой, практически, стопроцентной, занятости мест на ВС.

Таблица 4. Оптимальное количество рейсов

k \ v	x <sub>vk</sub>				y <sub>vk</sub>				x <sub>vk</sub> + y <sub>vk</sub>				$\sum x_{vk}$	$\sum y_{vk}$	$\sum x_{vk} + \sum y_{vk}$
	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4			
1	0	7	0	0	0	87	0	16	0	94	0	16	7	103	110
2	0	7	0	0	0	32	0	27	0	39	0	27	7	59	66
3	0	0	7	0	0	0	63	0	0	0	70	0	7	63	70
4	0	7	0	0	0	14	0	3	0	21	0	3	7	17	24
5	0	7	0	0	0	3	0	0	0	10	0	0	7	3	10
6	0	2	5	0	0	0	13	0	0	2	18	0	7	13	20
7	0	5	0	2	0	0	0	2	0	5	0	4	7	2	9
8	0	6	0	1	0	0	0	0	0	6	0	1	7	0	7
9	0	7	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	7	0	7
10	0	2	0	5	0	0	0	1	0	2	0	6	7	1	8
11	0	7	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	7	0	7
$\Sigma$	0	57	12	8	0	136	76	49	0	193	88	57	77	261	338

Таблица 5. Результаты оптимизации, w<sub>ij</sub>, мест,  $\bar{p}_j$ , пас.

i	j											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	14943 13368	6470 5727	4428 4375	2390 2103	714 714	917 831	868 784	524 478	410 369	377 290	399 399
1	14882 13748	0	0	0	0	543 543	0	0	0	290 274	90 89	0
2	6672 6035	0	0	0	0	343 343	0	0	0	420 420	153 143	0
3	4428 4336	0	0	0	283 283	0	0	0	0	0	0	189 180
4	2390 2145	0	0	283 283	0	0	522 522	98 98	217 217	0	0	0
5	718 690	532 532	350 350	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	910 819	0	0	0	517 517	0	0	0	0	0	0	153 153
7	828 712	0	0	0	113 107	0	0	0	0	0	0	109 108
8	533 450	0	0	0	207 207	0	0	0	0	0	0	270 269
9	245 221	275 263	600 540	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	390 306	60 60	170 154	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	437 437	0	0	189 189	0	0	141 141	84 84	269 269	0	0	0

Рисунок 2 иллюстрирует пример формирования функций принадлежности ТНЧ «планируемый пассажиропоток»  $\tilde{p}_{ij}$  на базе функций принадлежности СТНЧ «прогнозируемый спрос»  $\tilde{q}_{ij}$  с учётом численности выделенных на ВС мест  $z_{ij}$ . В примере использованы характеристики пассажиропотоков между аэропортом 10 и хабом. Параметры, соответствующие суммарным, в том числе трансферным, пассажиропотокам, прибывающим в хаб из аэропорта 10 и отправляемым из хаба в аэропорт 10, снабжены верхними индексами «П» и «О» соответственно. Соответственно исходным данным, пассажиропоток на авиалинии формируется за счёт спроса на перевозки в пределах следующих пар аэропортов:  $(10, 0)$ ,  $(10, 1)$ ,  $(10, 2)$ ,  $(0, 10)$ ,  $(1, 10)$ ,  $(2, 10)$ .

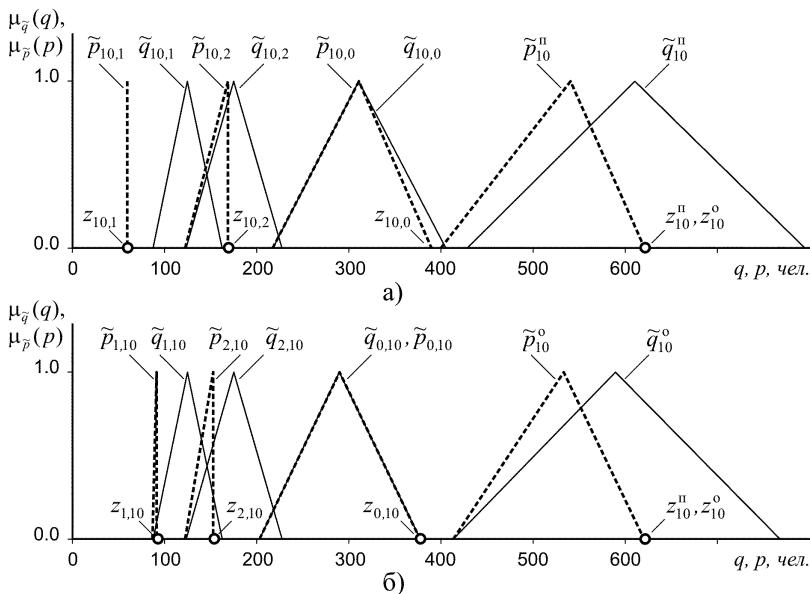


Рис. 2. Функции принадлежности нечётких параметров пассажиропотоков на авиалинии в аэропорт 10:  
а) прибытие в хаб; б) отправка из хаба

Из результатов, приводимых в таблицах 2 и 5, следует, что на рейсах этой авиалинии в одном направлении суммарно пла-

нируется выделить  $z_{10}^n = z_{10}^o = 620$  мест, которых, судя по рис. 2, не будет достаточно не только для удовлетворения максимально возможных уровней спроса  $\tilde{q}_{10}^n$  и  $\tilde{q}_{10}^o$ , но даже и близких к наиболее возможным (модальным). Причём в наиболее «ущемленном» положении окажутся желающие совершить трансферную перевозку. Число мест  $z_{0,10}$ , выделяемых для прямой перевозки в пределах пары (0, 10), будет достаточным для удовлетворения любого уровня спроса  $\tilde{q}_{0,10}$ . В обратном направлении мест ( $z_{10,0}$ ) может не хватить только в случае, если реализуется наиболее оптимистичный вариант прогноза по спросу  $\tilde{q}_{10,0}$ . На трансферные перевозки в пределах пары (10, 1) число выделяемых мест  $z_{10,1}$  существенно ниже любого уровня спроса  $\tilde{q}_{10,1}$ . В обратном направлении, в пределах пары (1, 10), мест ( $z_{1,10}$ ) будет достаточно, только если в жизнь воплотится наименее прогнозируемый уровень спроса  $\tilde{q}_{1,10}$ . Близкая, хотя и несколько лучшая, ситуация по возможности удовлетворения спроса складывается в пределах пар (10, 2) и (2, 10).

Как видно из рассмотренного примера, после преобразования СТНЧ  $\tilde{q}_{ij}$  в ТНЧ  $\tilde{p}_{ij}$  только в одном случае полученная  $\tilde{p}_{0,10}$  полностью совпадает с исходной  $\tilde{q}_{0,10}$ . В остальных случаях формируются ТНЧ  $\tilde{p}_{ij}$ , не являющиеся симметричными, с меньшими модальными значениями и более низкими коэффициентами нечёткости, чем у исходных СТНЧ  $\tilde{q}_{ij}$ , причём в случае с СТНЧ  $\tilde{q}_{10,1}$  исходная нечёткая величина редуцируется в чёткое число  $p_{10,1} = z_{10,1}$ .

Аналогичная картина наблюдается и при анализе общих результатов для рассматриваемого сценария. Суммарное количество потенциальных пассажиров, принимаемых и отправляемых хабом, представляющее собой ТНЧ  $\tilde{p}^\Sigma = \langle 63207, 79261, 79780 \rangle$  пас., заметно ниже заданного суммарного спроса, который при  $k^q = 0.3$  составляет СТНЧ  $\tilde{q}^\Sigma = \langle 66213, 94590, 122967 \rangle$  чел. При этом ТНЧ  $\tilde{p}^\Sigma$ , в отличие от  $\tilde{q}^\Sigma$ , на базе кото-

рого оно сформировано, уже не является симметричным. По сравнению с  $\tilde{q}^\Sigma$  оно и менее размыто. Левый и правый коэффициенты нечёткости ТНЧ  $\tilde{p}^\Sigma$  составляют  $k^{p^L} = 0,203$  и  $k^{p^R} = 0,007$ , что значительно ниже исходной величины  $k^q = 0,3$ .

Сравнение результатов оптимизации для различных вариантов ограничений и уровней нечёткости, приводимых в таблице 6 и на рис. 3 и 4, свидетельствует о том, что при любом сочетании исходных данных планируемые пассажиропотоки всегда отличаются от заданных нечётких уровней спроса в меньшую сторону и характеризуются меньшей размытостью.

*Таблица 6. Результаты оптимизации для различных вариантов ограничений и уровней нечёткости*

Вариант	$k_q$	$\Pi$ , млн. усл. ед.	$n^\Sigma$ , ВС	$z^\Sigma$ , тыс. мест	$\langle p^{\Sigma L}, p^{\Sigma M}, p^{\Sigma R} \rangle$ , тыс. пас.	$k_{p^\Sigma}^L$	$k_{p^\Sigma}^R$	$\bar{p}^\Sigma$ , тыс. пас.	$\gamma^T$ , %	$K_3$
I	<b>0</b>	<b>77,7</b>	<b>14</b>	<b>83,2</b>	<b><math>\langle 83,1; 83,1; 83,1 \rangle</math></b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>83,1</b>	<b>18,3</b>	<b>0,999</b>
	0,15	52,7	14	82,7	$\langle 75,1; 82,7; 82,7 \rangle$	0,09	0,01	80,2	19,8	0,969
	0,3	21,7	13	79,8	$\langle 63,2; 79,3; 79,8 \rangle$	0,20	0,01	74,1	20,0	0,929
	0,45	-11,0	12	76,9	$\langle 51,0; 76,1; 76,9 \rangle$	0,33	0,01	68,0	20,2	0,884
II	<b>0</b>	<b>107,2</b>	<b>13</b>	<b>78,7</b>	<b><math>\langle 78,5; 78,5; 78,5 \rangle</math></b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>78,5</b>	<b>13,4</b>	<b>0,999</b>
	0,15	87,9	11	73,9	$\langle 69,7; 72,4; 73,6 \rangle$	0,04	0,02	71,9	16,0	0,973
	0,3	62,4	11	73,5	$\langle 61,9; 72,1; 73,4 \rangle$	0,14	0,02	69,1	19,6	0,940
	0,45	32,6	10	70,9	$\langle 50,6; 69,1; 70,9 \rangle$	0,27	0,03	63,5	20,0	0,896
III	<b>0</b>	<b>51,4</b>	<b>15</b>	<b>86,6</b>	<b><math>\langle 85,3; 85,3; 85,3 \rangle</math></b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>85,3</b>	<b>19,3</b>	<b>0,985</b>
	0,15	25,5	15	85,7	$\langle 75,1; 84,5; 85,7 \rangle$	0,11	0,01	81,8	19,9	0,954
	0,3	-6,3	14	83,2	$\langle 63,2; 81,1; 83,2 \rangle$	0,22	0,03	75,8	19,8	0,912
	0,45	-39,0	13	80,3	$\langle 51,3; 78,5; 80,3 \rangle$	0,35	0,02	70,0	21,2	0,872

В таблице 6, наряду с прибылью  $\Pi$ , представлены оптимальные значения следующих параметров: суммарное число ВС всех типов в авиапарке  $n^\Sigma$ , суммарное недельное число выделенных мест на всех рейсах  $z^\Sigma$ , суммарное недельное число потенциальных пассажиров в форме ТНЧ  $\tilde{p}^\Sigma = \langle p^{\Sigma L}, p^{\Sigma M}, p^{\Sigma R} \rangle$  и в дефазифицированной форме  $\bar{p}^\Sigma$ , левый  $k_{p^\Sigma}^L$  и правый  $k_{p^\Sigma}^R$  относительные коэффициенты нечёткости ТНЧ  $\tilde{p}^\Sigma$ , доля транс-

ферного пассажиропотока в общем дефазифицированном недельном потенциальному пассажиропотоке  $\gamma^T$ , средний коэффициент занятости пассажирских мест  $K_s$ , подсчитанный как отношение суммарного дефазифицированного планового недельного числа пассажиров  $\bar{p}^\Sigma$  к общему недельному числу мест  $z^\Sigma$ .

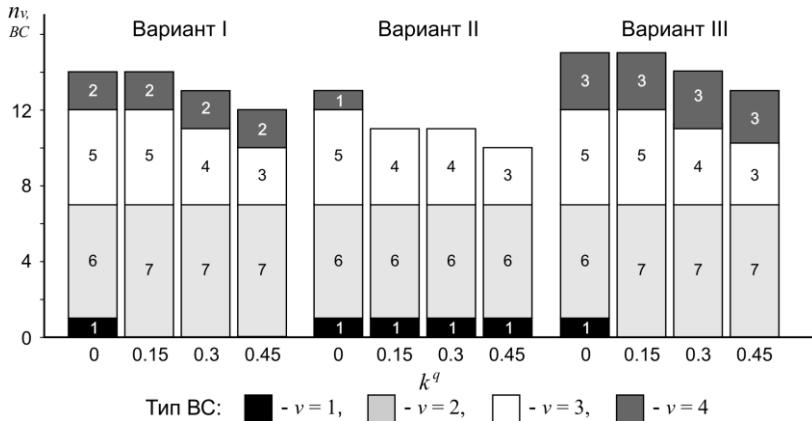


Рис.3. Оптимальный состав авиапарка

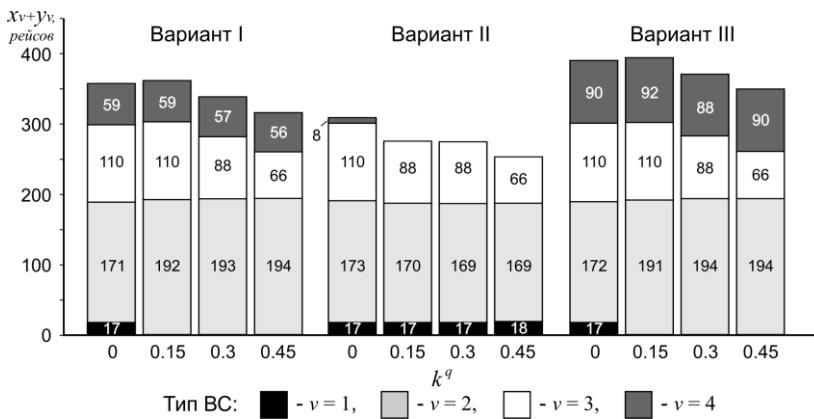


Рис.4. Оптимальное недельное число рейсов ВС

Результаты, представленные в таблице 6 и на рис. 3 и 4, позволяют заключить, что рост неопределённости прогноза при-

водит к снижению численности авиапарка, выделяемых мест и уровней планируемого пассажиропотока, что сопровождается некоторым увеличением доли трансферных пассажиров при незначительных колебаниях их абсолютной численности. Описанные тенденции служат причиной снижения прибыли вплоть до получения убытков, особенно заметных при жёстких требованиях по недельному числу рейсов и стыковок, сокращения разнообразия типов ВС в составе авиапарка и уменьшения общего числа рейсов, что более заметно при менее жёстких ограничениях на количество рейсов. Влиянием этих факторов объясняется всё менее рациональное распределение ВС по авиалиниям, выражющееся в снижении коэффициента занятости мест, по мере роста неопределённости и жёсткости ограничений на количество рейсов. Тем не менее при любых сочетаниях исходных данных коэффициент занятости остаётся весьма высоким. Таким образом, следует сделать вывод о существенном влиянии степени нечёткости исходных данных на результаты решения оптимизационной задачи.

Для рассмотренных исходных данных на базе современной персональной вычислительной техники затраты машинного времени на получение оптимальных решений задачи в нечёткой постановке составляли от 2 до 5 минут, в чёткой постановке – около 0,5 минуты.

### *3.3. ПРИМЕР 2*

Возвращаясь к целям выполнения модельных примеров, рассмотрим теперь вопрос возможности отказа от учёта нечёткости при решении оптимизационной задачи. Вообще возможность решения сформулированной выше комплексной задачи оптимизации в чёткой форме обеспечила бы заметное снижение затрат машинного времени на решение благодаря упрощению используемой математической модели. И хотя при рассмотренных исходных данных задачи решались быстро, можно предположить, что с увеличением размерности затраты машинного времени могут достигать неприемлемого уровня, особенно при учёте нечёткости.

Для оценки последствий игнорирования нечёткости спроса рассмотрим ситуацию, когда при фактической неопределённо-

сти спроса для формирования авиапарка и расстановки ВС по авиалиниям используется решение, полученное без учёта неопределённости. Результаты серии таких «подстановок» решений, полученных для «чёткого» спроса ( $k^q = 0$ ), в модель целевой функции (7), (8) при фактически неопределенном спросе представлены в столбцах таблицы 7 под заголовками «ЧР». Использованы описанные выше исходные данные при тех же сочетаниях ограничений и уровнях нечёткости, что и в примере 1. Для наглядности и удобства сравнения результаты решения «чёткой» ( $k^q = 0$ ) оптимизационной задачи в таблице 6 выделены полужирным шрифтом, а в таблицу 7 из таблицы 6 скопированы результаты решений при нечётком спросе ( $k^q \in \{0; 0,15; 0,3; 0,45\}$ ), озаглавленные «НР». Приведены относительные отклонения результатов, полученных на нечёткой модели при подстановке «чёткого» решения («ЧР»), от представленных в таблице 6 оптимальных результатов собственно нечёткой задачи («НР»).

*Таблица 7. Результаты использования «чёткого» решения при нечётком моделировании*

Вариант	$k_q$	П, млн усл. ед.		$\delta^{\Pi}$ , %	$n^{\Sigma}$ , ВС		$\delta^n$ , %	$z^{\Sigma}$ , тыс. мест		$\delta^Z$ , %	$\bar{p}^{\Sigma}$ , тыс. пас.		$\delta^P$ , %
		НР	ЧР		НР	ЧР		НР	ЧР		НР	ЧР	
		I	0,15	52,7	49,7	-5,7	14	14	0,0	82,7	83,2	0,5	80,2
II	0,3	21,7	15,2	-30,1	13	14	7,1	79,8	83,2	4,2	74,1	75,9	2,5
	0,45	-11,0	-21,0	-91,4	12	14	14,3	76,9	83,2	8,1	68,0	71,7	5,5
	0,15	87,9	79,5	-9,6	11	13	15,4	73,9	78,7	6,6	71,9	75,4	4,9
III	0,3	62,4	46,4	-25,5	11	13	15,4	73,5	78,7	7,0	69,1	71,6	3,6
	0,45	32,6	13,0	-60,1	10	13	23,1	70,9	78,7	11,0	63,5	67,7	6,5
	0,15	25,5	18,7	-26,6	15	15	0	85,7	86,6	1,0	81,8	81,5	-0,3
	0,3	-6,3	-16,4	-160,6	14	15	6,7	83,2	86,6	4,1	75,8	77,4	2,1
	0,45	-39,0	-52,4	-34,3	13	15	13,3	80,3	86,6	7,8	70,0	73,2	4,5

Наиболее впечатляет несовпадение значений целевой функции – прибыли, однако и по другим характеристикам отличия вполне явные. Как показывает сравнение, использование «чёткого» решения при нечёткости исходных данных означает необходимость выделения большего числа мест для большего числа пассажиров, что достигается использованием большего

числа ВС или заменой ВС меньшего класса на ВС большего класса (с большей стоимостью лизинга). Перечисленные факторы служат источником значительного сокращения прибыли. Таким образом, решение задачи оптимального распределения ВС в нечёткой постановке при заданном в нечёткой форме прогнозе пассажирского спроса следует считать весьма желательным; замена нечёткого оптимального решения чётким нецелесообразна.

#### **4. Заключение**

В статье решена задача совместной оптимизации авиапарка и распределения ВС на заданной сети авиалиний авиакомпании, планирующей развитие трансферных перевозок пассажиров через один из аэропортов с организацией в нём стыковок рейсов. Новизна постановки задачи состоит в том, что уровни спроса на прямые и трансферные перевозки приняты не полностью определёнными экспертино заданными нечёткими величинами, что соответствует этапу предварительного проектирования системы трансферных перевозок. Статья развивает подход к решению задач нечёткой оптимизации управления парком ВС, предложенный автором в работе [8]. Значимость названных задач определяется тем, что результаты их решения не только напрямую влияют на экономическую эффективность перевозочной деятельности авиапредприятий, но и позволяют повысить транспортную доступность пунктов, связанных заданной сетью авиалиний.

Задача совместной оптимизации сформулирована как целочисленная задача математического программирования с нечётким критерием и чёткими ограничениями. Благодаря использованию приёма дефазификации нечёткая задача сведена к обычной задаче математического программирования, решаемой имеющимися эффективными методами на базе доступного программного обеспечения. Решение модельных примеров получено с использованием программного обеспечения IBM ILOG OPL. Затраты машинного времени на решение задачи в нечёткой постановке при принятых исходных данных составили не более нескольких минут, что свидетельствует о практической реализу-

емости решения в условиях действующих предприятий гражданской авиации.

Как показало сравнение, учёт нечёткости исходных данных оказывает весомое влияние на результаты решения оптимизационной задачи. Попытка заменить решение, полученное с учётом нечёткости прогноза пассажиропотока, «чётким» решением приводит к существенному ухудшение целевой функции. Такую замену следует считать нежелательной.

Таким образом, представленные результаты модельных примеров свидетельствуют о том, что учёт неопределённости спроса при решении задачи совместной оптимизации парка ВС и распределения ВС по авиалиниям следует считать целесообразным, а предложенная нечёткая модель может быть использована для повышения эффективности принимаемых решений на этапе проектирования таких перспективных авиатранспортных систем, как системы авиаперевозок на базе узловых аэропортов.

### ***Литература***

1. АНДРОНОВ А.М., ХИЖНЯК А.Н. *Математические методы планирования и управления производственно-хозяйственной деятельностью предприятий гражданской авиации.* – М.: Транспорт, 1977. – 215 с.
2. «Аэрофлот» продолжает развитие авиатранспортных узлов за пределами столицы. [Электронный ресурс]. – URL: <http://www.ato.ru/content/aeroflot-prodolzhaet-razvitiye-aviatransportnyh-uzlov-za-predelami-stolicy> (дата обращения: 26.05.2025).
3. ДАНЦИГ Д.Б. *Линейное программирование, его применения и обобщения.* – М.: Прогресс, 1966. – 600 с.
4. ОРЛОВСКИЙ С.А. *Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации.* – М.: Наука, 1981. – 208 с.
5. ПЕГАТ А. *Нечёткое моделирование и управление.* – М.: БИ-НОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 798 с.
6. Приказ Министерства транспорта РФ от 12 декабря 2011 г. N 310 «Об утверждении Порядка формирования, утверждения и опубликования расписания регулярных воздушных перевозок пассажиров и (или) грузов, выполняемых перевозчиками, имеющими соответствующие лицензии». – URL:

- <https://mintrans.gov.ru/documents/2/2207> (дата обращения: 10.12.2024).
- 7. РОМАНЕНКО В.А. *Оптимизация параметров системы трансферных авиаперевозок с учётом нечёткой и стохастической неопределённостей* // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 41. – С. 285–313.
  - 8. РОМАНЕНКО В.А. *Оптимизация распределения воздушных судов по авиалиниям при нечётких исходных данных* // Управление большими системами. – 2025. – Вып. 115. – С. 156–182.
  - 9. САКАЧ Р.В., ПИНАЕВ Е.Г., ГЛАДЫШЕВСКАЯ Г.Н. и др. *Моделирование в планировании гражданской авиации*. – М.: Транспорт, 1983. – 173 с.
  - 10. ABARA J. *Applying integer linear programming to the fleet assignment problem* // Interfaces. – 1989. – Vol. 19, No. 4. – P. 20–28. – DOI: 10.1287/inte.19.4.20.
  - 11. BAZARGAN M., HARTMAN J. *Aircraft replacement strategy: Model and analysis* // J. Air Transp. Manag. – 2012. – Vol. 25. – P. 26–29. – DOI: 10.1016/j.jairtraman.2012.05.001.
  - 12. BELOBABA P., ODONI A., BARNHART C. *The Global Airline Industry*. – John Wiley & Sons, Ltd, 2009. – 509 p.
  - 13. DANTZIG G.B., FULKERSON D.R. *Minimizing the number of tankers to meet a fixed schedule* // Nav. Res. Logist. Q. – 1954. – Vol. 1, No. 3. – P. 217–222. – DOI: 10.1002/nav.3800010309.
  - 14. FERGUSON A.R., DANTZIG G.B. *The problem of routing aircraft – a mathematical solution* // Aeronaut. Engng. Rev. – 1955. – Vol. 14, No. 4. – P. 51–55.
  - 15. FERGUSON A.R., DANTZIG G.B. *The allocation of aircraft to routes – an example of linear programming under uncertain demand* // Manag. Sci. – 1956. – Vol. 3, No. 1. – P. 45–73. – DOI: 10.1287/mnsc.3.1.45.
  - 16. GEURSEN I.L., SANTOS B.F., YORKE-SMITH N. *Fleet planning under demand and fuel price uncertainty using actor–critic reinforcement learning* // Journal of Air Transport Management. – 2023. – Vol. 109. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jairtraman.2023.102397>.
  - 17. HANE C.A., BARNHART C., JOHNSON E.L. et al. *The fleet assignment problem: Solving a large-scale integer program* // Mathematical Programming. – 1995. – Vol. 70. – P. 211–232.

18. HOFF A., ANDERSSON H., CHRISTIANSEN M. et al. *Industrial aspects and literature survey: Fleet composition and routing* // Computers & Operations Research. – 2010. – Vol. 37, Iss. 12. – P. 2041–2061. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2010.03.015>.
19. KIZILOGLU K., SAKALLI U.S. *Integrating Flight Scheduling, Fleet Assignment, and Aircraft Routing Problems with Codesharing Agreements under Stochastic Environment* // Aerospace. – 2023. – Vol. 10, No. 12. – DOI: 10.3390/aerospace10121031.
20. LISTES O., DEKKER R. *A scenario aggregation-based approach for determining a robust airline fleet composition for dynamic capacity allocation* // Transp. Sci. – 2005. – Vol. 39, No. 3. – P. 367–382. – DOI: 10.1287/trsc.1040.0097.
21. NAUMANN M., SUHL L., FRIEDEMANN M. *A stochastic programming model for integrated planning of re-fleeting and financial hedging under fuel price and demand uncertainty* // Procedia – Soc. Behav. Sci. – 2012. – Vol. 54. – P. 47–55. – DOI: 10.1016/j.sbspro.2012.09.724.
22. PILLA V.L., ROSENBERGER J.M., CHEN V.C. et al. *A statistical computer experiments approach to airline fleet assignment* // IIE Trans. – 2008. – Vol. 40, No. 5. – P. 524–537. – DOI: 10.1080/07408170701759734.
23. RUSHMEIER R.A., KONTOGIORGIS S.A. *Advances in the optimization of airline fleet assignment* // Transportation Science. – 1997. – Vol. 31, No. 2. – P. 159–169.
24. SA C.A.A., SANTOS B.F., CLARKE J.P.B. *Portfolio-based airline fleet planning under stochastic demand* // Omega. Elsevier. – 2019. – Vol. 97(C). – DOI: 10.1016/j.omega.2019.08.008.
25. SAFAK O., CAVUS O., AKTURK M.S. *Multi-stage airline scheduling problem with stochastic passenger demand and non-cruise times* // Transp. Res. Part B Methodol. – 2018. – Vol. 114. – P. 39–67. – DOI: 10.1016/j.trb.2018.05.012.
26. SCHICK G.J., STROUP J.W. *Experience with a multi-year fleet planning model* // J. Manage. Sci. – 1981. – Vol. 9, No. 4. – P. 389–396. – DOI: 10.1016/0305-0483(81)90083-9.
27. WYATT J.K. *Optimal fleet size* // Oper. Res. Q. – 1961. – Vol. 12, No. 3. – P. 186. – DOI: 10.2307/3006775.

## FUZZY OPTIMIZATION OF AIRCRAFT FLEET MANAGEMENT TAKING INTO ACCOUNT TRANSFER PASSENGER FLOWS

**Vladimir Romanenko**, Samara National Research University, Samara, Cand.Sci., associate professor (vla\_rom@mail.ru).

*Abstract: A variant of the problem of joint optimization of the structure and number of aircraft fleet and the distribution of aircraft by air lines for an airline planning to perform mass transfer transportation of passengers based on a hub airport has been solved. It is assumed that the task is solved by the airline at the stage preceding the performance of transportation, when the demand for transportation can be known only approximately. In this case, the projected demand levels are determined by expert assessments and should be considered as fuzzy numbers. Joint optimization according to the criterion of economic efficiency is formulated as an integer mathematical programming problem with a fuzzy criterion and crisp constraints. Using the defuzzification technique, the fuzzy problem is reduced to an ordinary mathematical programming problem that can be solved in an acceptable amount of time using available software. Based on the IBM ILOG OPL software package, a solution has been obtained for a series of model examples of a problem with demand levels specified in a fuzzy and "crisp" form. The comparison revealed significant differences between the most significant results of solving the optimization problem with fuzzy and "crisp" initial data. An attempt to replace the solution obtained taking into account the vagueness of the passenger forecast with a "crisp" solution leads to a significant deterioration in the target function. All this indicates that it is advisable to take into account the vague uncertainty of the initial data. The proposed fuzzy model can be used to increase the efficiency of decisions made at the design stage of such promising air transport systems as transfer air transportation systems based on hub airports.*

**Keywords:** optimization, mathematical programming, fuzzy number, aircraft, hub airport, transfer passengers, airlines.

УДК 519.85 + 510.644.4 + 656.7.022.1

ББК 22.185.432 + 22.126 + 39.580.3

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.В. Ключковым.*

*Поступила в редакцию 12.06.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*

# ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ФАКТОРАМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ<sup>1</sup>

Сысоев А. С.<sup>2</sup>, Сараев П. В.<sup>3</sup>, Погодаев А. К.<sup>4</sup>  
(ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический  
университет», Липецк)

Статья посвящена планированию эксперимента для проведения анализа чувствительности математических моделей, используемых в прогнозировании и управлении сложными системами. Основное внимание уделяется случаям, когда факторы распределены в пространстве неравномерно, что характерно для задач с нелинейными зависимостями, локальными особенностями и высокой вычислительной сложностью. В таких ситуациях отравданным является использование математического ремоделирования, когда модели, имеющие сложную структуру, заменяются (ремоделируются) объектами некоторого выбранного ремоделирующего класса, имеющими заданную структуру, что позволяет унифицировать исследование систем. Цель работы – разработка и сравнение стратегий планирования эксперимента, направленных на повышение эффективности анализа чувствительности. Рассматриваются методы, адаптированные к неравномерному распределению данных. В основе исследования чувствительности – метод анализа конечных изменений, построенный на применении теоремы Лагранжа о промежуточной точке. Численные эксперименты на тестовой функции и ее нейросетевой аппроксимации подтвердили, что предложенные алгоритмы (центральный композиционный план и адаптивный алгоритм на основе латинского гиперкуба) позволяют с высокой точностью идентифицировать значимые факторы. Указанные алгоритмы согласуются с классическими методами (индексы Соболя, метод Морриса) и существенно сокращают вычислительные затраты. Показано, что подход с ремоделированием уточняет оценки чувствительности и обеспечивает унификацию процедуры анализа для моделей сложной структуры.

Ключевые слова: анализ чувствительности, планирование эксперимента, ремоделирование.

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №24-21-00474, <https://rscf.ru/project/24-21-00474/>

<sup>2</sup> Антон Сергеевич Сысоев, к.т.н., доцент (sysoev\_as@stu.lipetsk.ru).

<sup>3</sup> Павел Викторович Сараев, д.т.н., доцент (psaraev@yandex.ru).

<sup>4</sup> Анатолий Кирьянович Погодаев, д.т.н., профессор (pak@stu.lipetsk.ru).

## **1. Введение**

Сложные системы, в основе которых лежат разнородные математические модели, требуют детального анализа перед использованием. Важным этапом идентификации математической модели, ее дальнейшего исследования или оптимизации является планирование эксперимента [1]. Во-первых, это важно делать из-за эффективности использования вычислительных ресурсов, так как планирование позволяет минимизировать количество необходимых запусков модели, сокращая время и стоимость исследования. Во-вторых, правильное планирование помогает избежать переобучения модели, построения недостоверных связей между факторами. В-третьих, планирование эксперимента позволяет выделить наиболее ключевые факторы и их возможные взаимодействия, особенно в случае нелинейных зависимостей. Использование чувствительности позволяет оценить, как вариации входных данных влияют на результат, что особенно критично для прогнозирования и управления рисками [2, 6]. Правильно выбранный план эксперимента позволяет сократить объем вычислений за счет сосредоточения на ключевых факторах, что особенно актуально для задач с большой размерностью, характеризующихся чрезвычайно большим числом возможных комбинаций входных данных.

Анализ чувствительности по факторам математических моделей представляет собой метод изучения влияния изменений факторов на поведение некоторого показателя. Этот подход помогает определить наиболее важные факторы, выявить ключевые зависимости в данных, произвести структурную оптимизацию модели. По типу проведения анализа выделяют локальный анализ (исследуются малые изменения факторов в окрестности рассматриваемой точки, например, применяются частные производные, конечные разности) и глобальный анализ (оцениваются влияния изменений факторов во всем диапазоне их возможных значений, например, применяется метод Морриса [8]). По используемым техникам выделяют: методы на основе диспер-

ции (оценивается вклад каждого фактора в общую дисперсию выходных данных, например, использование коэффициентов Соболя [2], дисперсионного анализа [6] и др.); методы на основе регрессионных моделей (строится аппроксимирующая модель и анализируются ее коэффициенты, например, используется стандартизированная регрессия); методы на основе выборки (используются случайные или квазислучайные выборки для оценки влияния факторов на выход, например, метод латинского гиперкуба [5]). В ситуациях, когда математическая модели системы имеет представление, сложное для анализа и оптимизации, оправданым является подход математического ремоделирования, который представляет собой замену модели системы или процесса на другую структуру из заданного заранее класса ремоделирующих моделей, методы исследования которых унифицированы [7]. Такой подход играет важную роль в исследовании чувствительности по факторам математических моделей.

Данное исследование посвящено построению планов проведения эксперимента при проведении анализа чувствительности, основанного на применении анализа конечных изменений [10]. Цель статьи – синтезировать алгоритмы планирования эксперимента и сравнить их эффективность.

## **2. Исследование чувствительности математической модели на основе анализа конечных изменений**

Пусть элемент рассматриваемой системы описывается скалярной функцией векторного аргумента  $f(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ .

Глобальный анализ чувствительности в таком случае предполагает получение результатов с учетом одновременных изменений всех факторов модели с целью учета возможных взаимодействий между ними. Наиболее известным примером глобальных мер чувствительности является индекс чувствительности первого порядка, предложенный Соболем [9]:

$$(1) \quad S_i = \frac{V_{X_i}(E_{\mathbf{X} \sim i}(f|X_i))}{V(f)},$$

где  $V(f)$  – безусловная дисперсия  $f$ , получаемая при варьировании всех факторов  $X_i$ ;  $V_{X_i}$  – условная дисперсия фактора  $X_i$ ;  $E_{\mathbf{X} \sim i}(f|X_i)$  – среднее значение  $f$  при фиксированном одном факторе.

В дополнение к индексам первого порядка (которые оценивают влияние отдельного фактора  $X_i$  без учёта взаимодействий), полные индексы Соболя позволяют количественно оценить суммарный вклад фактора, включая все его взаимодействия с другими переменными:

$$(2) \quad S_{T_i} = 1 - \frac{V_{\mathbf{X} \sim i}(E_{X_i}(f|\mathbf{X} \sim i))}{V(f)},$$

где  $S_{T_i}$  – полный индекс Соболя относительно фактора  $X_i$ ;  $V(f)$  – общая дисперсия выходной величины  $f$ ,  $E_{X_i}(f|\mathbf{X} \sim i)$  – условное математическое ожидание  $f$  при фиксированных всех факторах, кроме  $X_i$ ;  $V_{\mathbf{X} \sim i}(E_{X_i}(f|\mathbf{X} \sim i))$  – дисперсия этого условного ожидания.

Задача анализа конечных изменений заключается в построении для имеющейся математической модели новой модели зависимости конечного изменения отклика от конечных изменений оказывающих на отклик влияние факторов. Такую задачу можно рассматривать как замещение имеющейся модели новой моделью, описываемой в терминах приращений; в этом смысле процесс имеет аналогию с ремоделированием [7].

Рассмотрим изменение величины  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ , заданное в форме  $\mu(\mathbf{X}) = (\mu(X_1), \dots, \mu(X_n))$ , представленной конечными приращениями  $\mu(\mathbf{X}) = (\Delta X_1, \dots, \Delta X_n)$ . Задача анализа конечных изменений в таком случае может быть сформулирована следующим образом: пусть имеется структурно и параметрически идентифицированная модель

$$(3) \quad f(\mathbf{X}) = f(X_1, \dots, X_n), \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n,$$

определяющая связь между откликом  $f$  и его аргументами  $X_i$ . Необходимо привести модель (3) к виду

$$(4) \quad \Delta f = \phi(\Delta \mathbf{X}) = \phi(\Delta X_1, \dots, \Delta X_n),$$

описывающему связь между конечными изменениями отклика  $f$  и конечными изменениями  $\Delta X_i$  его аргументов.

Таким образом, основная задача анализа конечных изменений сводится к нахождению способа перехода от модели (3) к модели структуры (4).

Вычисление частных производных в начальных точках интервалов приращений факторов может дать приближение модели (4), однако теорема Лагранжа о промежуточной точке для функций нескольких переменных дает точное равенство. Она представлена следующим образом:

$$(5) \quad \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(X^*)}{\partial X_i} \cdot \Delta X_i,$$

$$X^* = (X_1^*, \dots, X_n^*), \quad X_i^* = X_i^0 + \alpha \cdot \Delta X_i, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь средние (или промежуточные) значения аргументов  $X_i^*$  определяются значением параметра  $\alpha$ .

Пусть в выбранной точке имеющегося плана эксперимента аргументы находятся в некотором начальном состоянии  $\mathbf{X}^0 = (X_1^0, \dots, X_n^0)$  и, соответственно, отклик имеет вид  $f(\mathbf{X}^0)$ . В следующей точке аргументы претерпели изменения и предста- вимы как  $\mathbf{X}^1 = (X_1^1, \dots, X_n^1)$ , соответственно отклик принимает вид  $f(\mathbf{X}^1)$ .

Таким образом, абсолютное приращение отклика можно определить, с одной стороны, как разность нового и предыдущего значений, а с другой стороны, по теореме Лагранжа (5). Такое определение приращения отклика приводит к уравнению относительно параметра  $\alpha$ :

$$(6) \quad f(\mathbf{X}^1) - f(\mathbf{X}^0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} (\dots, X_i^0 + \alpha \cdot \Delta X_i, \dots) \cdot \Delta X_i,$$

решение которого позволяет оценить влияние конечных изменений аргументов на конечное изменение отклика и получить модель вида

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_i} (\dots, X_i^{(0)} + \alpha \cdot \Delta X_i, \dots) \cdot \Delta X_i = \\ &= S_{x_1} \Delta X_1 + \dots + S_{x_n} \Delta X_n. \end{aligned}$$

Описанная выше процедура повторяется  $t$  раз (где  $t$  – количество доступных наблюдений); численные результаты анализа

должны быть усреднены для построения меры чувствительности [3]. В частности, можно применить процедуру нахождения среднего взвешенного Тьюки для построения точечной и интервальной оценки множества найденных мер чувствительности. Однако описанная процедура требует больших вычислительных ресурсов, что сказывается на времени проведения анализа. Актуальной становится задача построения набора точек (плана эксперимента), достаточных для проведения анализа чувствительности на приемлемом уровне.

### ***3. Планирование эксперимента при проведении анализа чувствительности***

Правильно спланированный эксперимент служит основой для статистически значимых выводов об относительной важности факторов модели. Методы на основе латинского гиперкуба и ортогональных планов особенно эффективны для задач большой размерности, где традиционные подходы становятся вычислительно нецелесообразными. Данные подходы позволяют сократить количество необходимых вычислительных экспериментов при сохранении требуемой точности оценок. Это особенно критично при работе с ресурсоемкими моделями, где прямое вычисление полного набора индексов Соболя или аналогичных мер чувствительности невозможно для практической реализации.

#### ***3.1. Центральный композиционный план анализа чувствительности***

Неадаптивные методы предполагают фиксированный набор точек при проведении эксперимента, которые определены до начала исследования. Такие подходы к планированию эксперимента применяются, когда нет возможности динамически корректировать условия анализа модели системы, требуется строгая воспроизводимость полученных результатов, или используемые ресурсы ограничены.

При моделировании реальных систем часто применяются модели с нелинейными зависимостями. В таком случае использо-

вание полных и дробных факторных экспериментов становится неэффективным из-за увеличения количества точек для анализа при увеличении количества уровней факторов и наличия при этом огромного количества избыточных точек, в которых необходим запуск моделей. Эти проблемы приводят к использованию центрального композиционного плана [11], направленного на построение оптимальных (или близких к ним) планов эксперимента при изучении влияния нескольких факторов на отклик в ситуациях, когда присутствует нелинейность их связи.

На начальной стадии описываемого далее алгоритма осуществляется выбор дискретных значений для определяющих модель факторов системы (общее число базовых значений факторов составляет  $k$ ). Одновременно задается параметр  $\gamma \in (0, 1)$ , регулирующий плотность дополнительных точек в пространстве параметров, включаемых в план эксперимента. Затем строится композиционный план, который состоит из трех основных частей: факторной (количество точек, включенных в эту часть, равно  $2^k$ ), дополнительных точек, учитывающих нелинейность связи (количество точек, включенных в эту часть,  $2k$ ), центральных точек, учитывающих дисперсию разброса значений факторов (количество таких точек  $n_0$ ). Таким образом, общее число точек в плане  $N = 2^k + 2k + n_0$ .

Синтезируем алгоритм построения плана эксперимента при проведении анализа чувствительности системы, основанный на применении центрального-композиционного плана.

В качестве целевой функции выберем модель системы, чувствительность которой необходимо исследовать  $f(\mathbf{X})$ , где  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ .

1. Формирование базового плана. Сформируем:

- факторные точки  $\mathbb{F} = \{-1, 1\}^k$ ;
- центральные точки  $\mathbb{C} = \{\mathbf{0}\}$ ;
- начальные дополнительные точки

$$\mathbb{S} = \{\pm \gamma \mathbf{e}_i \mid i = 1, \dots, k\},$$

где  $\mathbf{e}_i$  – базисный вектор.

2. Оценим чувствительность. Для этого необходимо:

– вычислить отклики для каждой из точек начального плана  $y = f(\mathbf{X})$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{F} \cup \mathbb{C} \cup \mathbb{S}$ ;

– для всех пар  $(\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b)$ , где  $\mathbf{X}_a \in \mathbb{F} \cup \mathbb{C}$ ,  $\mathbf{X}_b \in \mathbb{S}$  вычислить приращения факторов  $\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}_b - \mathbf{X}_a$  и отклика  $\Delta f = f(\mathbf{X}_b) - f(\mathbf{X}_a)$ ;

– найти параметры промежуточной точки  $\alpha \in (0, 1)$  из основного соотношения анализа конечных изменений:

$$\Delta f = \sum_{m=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_m} \Big|_{\mathbf{X}^{(i)} + \alpha \Delta \mathbf{X}} \cdot \Delta X_m;$$

– для каждой промежуточной точки  $X^*$  приращения определить чувствительность с помощью найденных параметров  $\alpha$  как

$$S_m = \left| \frac{\partial f}{\partial X_m} \Big|_{\mathbf{X}^{(i)} + \alpha \Delta \mathbf{X}} \right|.$$

3. Обновим план. Для этого необходимо:

– определить максимальную чувствительность

$$(8) \quad S_{\max} = \max_{X^*(S_m)} ;$$

– определить порог для включения точек в план

$$S_{threshold} = \lambda \cdot S_{\max};$$

– сформировать новый набор дополнительных точек:

$$\mathbb{S}_{new} = \{ \mathbf{X}^* \mid S(\mathbf{X}^*) \geq S_{threshold} \};$$

– сформировать итоговый план:

$$\mathbf{X} = (\mathbb{F} \cup \mathbb{C} \setminus \mathbb{S}) \cup \mathbb{S}_{new}.$$

### 3.2. Адаптивное планирование на основе метода латинского гиперкуба

Метод латинского гиперкуба представляет собой стратегию планирования экспериментов, обеспечивающая равномерное покрытие многомерного пространства факторов при ограниченном количестве испытаний. Каждая входная переменная разбивается на интервалы с равной вероятностью, из которых выбирается по одному значению. Эти значения комбинируются без повторения комбинаций, что обеспечивает сбалансированность выборки.

Существуют адаптивные модификации метода, динамически добавляющие точки на основе промежуточных результатов, что повышает эффективность эксперимента без потери точности.

Синтезируем адаптивный алгоритм построения плана эксперимента при проведении анализа чувствительности системы, основанный на применении латинского гиперкуба.

В качестве целевой функции выберем модель системы, чувствительность которой необходимо исследовать  $f(\mathbf{X})$ , где  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ . Зададим начальное число точек в плане и максимальное число точек  $N_0$  и  $N_{max}$  соответственно. Зададим значение константы  $\varepsilon$ , которое будем использовать в качестве критерия останова.

1. Генерация начального плана:

$$\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(N_0)}\}, \quad \mathbf{X}^{(i)} \in [X_i^{min}, X_i^{max}]^n,$$

$$f_0 = \{f(\mathbf{X}^{(1)}), \dots, f(\mathbf{X}^{(N_0)})\}.$$

2. Автоматический выбор числа ближайших точек.

– Для текущего плана  $\mathbf{X}$  вычислить средние расстояния до  $k$  ближайших точек:

$$D(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \|\mathbf{X}^{(i)} - \mathbf{X}^{(j)}\|, \quad k \in \{1, \dots, k_{max}\}.$$

– Определить оптимальное число  $k$  как точку перегиба:

$$k^* = \arg \max_k \left| \frac{\partial^2 D(k)}{\partial k^2} \right|.$$

3. Поиск промежуточных точек.

– Для каждой точки  $\mathbf{X}^{(i)}$  выбрать  $k^*$  ближайших точек  $N_i$ .

– Для каждой из выбранных точек  $\mathbf{X}^{(j)} \in N_i$  вычислить приращение:

$$\Delta f = f(\mathbf{X}^{(j)}) - f(\mathbf{X}^{(i)}), \quad \Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}^{(j)} - \mathbf{X}^{(i)},$$

и используя основное соотношение анализа конечных изменений найти параметр промежуточной точки  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$\Delta f = \sum_{m=1}^n \frac{\partial f}{\partial X_m} \Big|_{\mathbf{X}^{(i)} + \alpha \Delta \mathbf{X}} \cdot \Delta X_m.$$

4. Определение чувствительности.

- Для каждой промежуточной точки  $X^*$  приращения каждой из выбранных  $k$  соседних точек определить чувствительность с помощью найденных параметров  $\alpha$  как  $\left. \frac{\partial f}{\partial X_m} \right|_{\mathbf{X}^{(i)} + \alpha \Delta \mathbf{X}}$ .
  - Нормировать полученные оценки чувствительности:
- $$S_m(\mathbf{X}^*) = \left| \left. \frac{\partial f}{\partial X_m} \right|_{\mathbf{X} + \alpha \Delta \mathbf{X}} \right| \cdot (X_m^{\max} - X_m^{\min}).$$

### 5. Добавление новых точек в план.

- Определить точки с максимальной чувствительностью с учетом заданного порога  $\lambda$ :

$$\mathcal{X}_{top}^* = \{\mathbf{X}^* | S(\mathbf{X}^*) > \lambda \cdot \max S\}.$$

- Сгенерировать новые точки в окрестностях найденных:  $\mathbf{X}_{new} = \mathbf{X}^* + \delta$ ,  $\delta_m \sim U(-\xi \cdot (X_m^{\max} - X_m^{\min}), \xi \cdot (X_m^{\max} - X_m^{\min}))$ .
- Проверить, что найденные новые точки не совпадают с имеющимися в плане и не выходят за границы  $[X_i^{\min}, X_i^{\max}]$ .

### 6. Критерий останова. Остановить вычисления, когда

$$\max_m \left| \frac{S_m^{(t)} - S_m^{(t-1)}}{S_m^{(t-1)}} \right| < \varepsilon.$$

## 4. Численный пример

### 4.1. Описание исходных данных и анализируемых моделей

В качестве примера рассмотрим модификацию функции, представленной в работе [4], которая используется как тестовая при проведении анализа чувствительности:

$$(9) \quad f(\mathbf{X}) = \sin(\pi X_1 X_2) + 20X_3^2 + 10X_4 + 5X_5,$$

где входные факторы  $X_i$  равномерно распределены на интервалах  $0 \leq X_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, 5$ . Для модели (9) с помощью стандартных алгоритмов рассчитаны полные индексы Соболя и показатели чувствительности Морриса (см. таблицу 1).

В качестве моделей ремоделирующего класса использованы полносвязные нейронные сети следующей структуры:

$$(10) \quad f(\mathbf{X}) = \phi_1 \left( b_0 + \sum_{k=1}^{n_2} w_k \phi_2 \left( b_k + \sum_{i=1}^{n_1} w_{ki} \phi_3 \left( b_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} X_j \right) \right) \right),$$

где  $f \in \mathbb{R}$  – значение выхода;  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  – вектор входов;  $w_k$  – весовые коэффициенты выходного слоя;  $w_{ki}$  – весовые коэффициенты второго скрытого слоя;  $w_{ij}$  – весовые коэффициенты первого скрытого слоя;  $b_0$  – свободный коэффициент выходного слоя;  $b_k$  – свободные коэффициенты второго скрытого слоя;  $b_i$  – свободные коэффициенты первого скрытого слоя;

$$\phi_1(\text{net}) = \phi_2(\text{net}) = \phi_3(\text{net}) = \frac{1}{(1 + \exp(-\text{net}))} -$$

логистические функции активации.

*Таблица 1. Показатели чувствительности модели (9)*

Фактор	Полный индекс Соболя	Метод Морриса
$X_1$	0,07	0,15
$X_2$	0,09	0,17
$X_3$	0,68	0,39
$X_4$	0,16	0,19
$X_5$	0	0,09

#### 4.2. Планирование эксперимента и нахождение

чувствительности предлагаемыми алгоритмами

Вначале для модели (9) был построен центральный композиционный план, состоящий из 52 точек. Параметры алгоритма: порог отбора точек, обладающих наибольшей чувствительностью  $\lambda = 0,9$ , параметр выбора новых точек вокруг отобранных  $\gamma = 0,15$ . Результаты вычисления мер чувствительности представлены ниже на рис. 3.

С помощью адаптивного метода латинского гиперкуба для исследуемой модели (9) был построен план эксперимента, включающий 23 точки, полученные за 9 итераций. Динамика выбора количества ближайших точек  $k$  и добавления новых точек в план представлена на рис. 1. Далее был получен массив табуированных значений модели с шагом 0,25 по каждому фактору. С помощью структуры (10) восстановлена функция и проведен анализ чувствительности, в результате в плане получено 42 точки за 17 итераций. Динамика выбора количества ближайших точек  $k$  и добавления новых точек в план представлена на рис. 2.

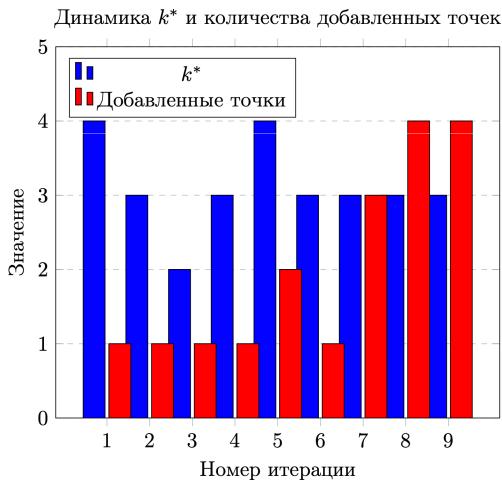


Рис. 1. Динамика выбора  $k$  ближайших точек при построении плана эксперимента и добавления точек в план (исходная модель)

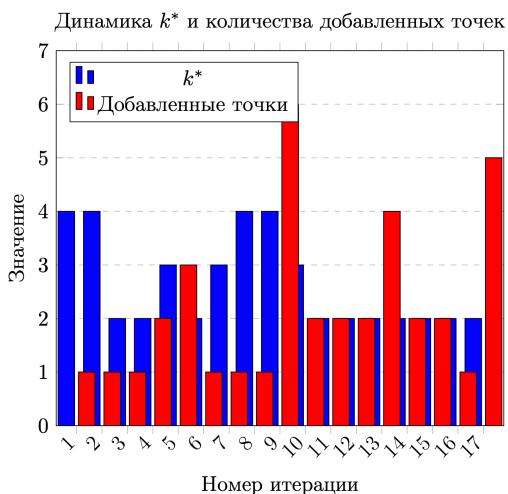
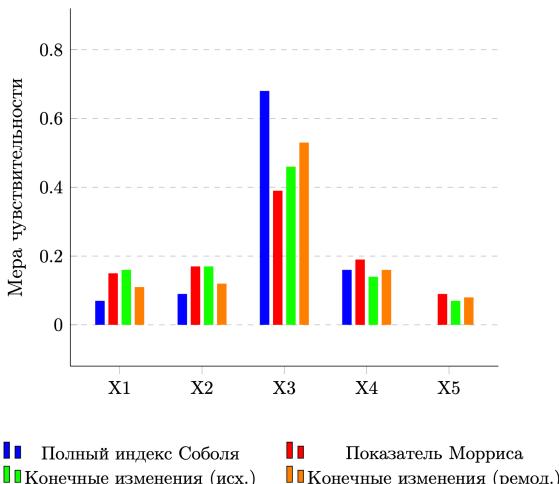


Рис. 2. Динамика выбора  $k$  ближайших точек при построении плана эксперимента и добавления точек в план (полученная ремоделированием модель)

В обоих случаях использованы следующие параметры алгоритма: начальных точек в плане  $N_0 = 5$ , максимальное число ближайших точек  $k_{\max} = 5$ , константа для определения максимальной чувствительности  $\lambda = 0,99$ , постоянная для построения окрестностей  $\xi = 0,15$ , точность останова  $\varepsilon = 0,05$ .



*Рис. 3. Сравнение мер чувствительности по факторам для разных методов анализа*

На рис. 3 представлены сравнительные результаты расчетов мер чувствительности, полученные различными методами. Из сравнения видно, что фактор  $X_3$  имеет самую высокую чувствительность, что говорит о его доминировании в модели, в то время как фактор  $X_5$  незначителен. Полные индексы Соболя выявляют более резкие различия между факторами, а метод Морриса дает более сглаженные оценки; оба варианта анализа конечных изменений дают схожие результаты, однако, анализ на модели, полученной ремоделированием, уточняет чувствительность модели. Относительный порядок ранжирования факторов сохраняется во всех вариантах анализа, что говорит о согласованности результатов. Стоит отметить, что центральный композиционный план дал результаты, схожие с методом Морриса, что подтверж-

ждает возможность его использования для быстрого скрининга модели, не погружаясь в исследование эволюции чувствительности на интервалах изменения значений факторов.

## **5. Выводы и перспективы**

Каждый из представленных методов имеет свои сильные и слабые стороны. Полные индексы Соболя применимы для глобального анализа чувствительности, однако их вычисление требует большого количества запусков модели, и метод сложен в случае большой размерности задачи. Метод Морриса применим для быстрого скрининга и отсева незначительных факторов, но он является менее точным. Анализ конечных изменений применим в случае, когда важна чувствительность к распределению выходных данных (а не только к их дисперсии, как в случае индексов Соболя), в связи с этим он применим для моделей с необычным распределением, к числу которых относятся нейросетевые модели. Подход ремоделирования в таком случае помогает унифицировать механизм анализа чувствительности и поиска плана для проведения качественного эксперимента по определению мер чувствительности. Одной из актуальных проблем в сфере анализа чувствительности является отсутствие универсального метода его проведения. Выбор зачастую зависит от размерности задачи, вычислительной стоимости модели, характера распределения данных. Перспективной является задача построения мета-алгоритма, который анализирует модель по указанным параметрам, автоматически определяет рациональный метод проведения анализа чувствительности и, при необходимости, применяет ремоделирование перед анализом чувствительности для упрощения исследования модели.

## ***Литература***

1. АДЛЕР Ю.П., МАРКОВА Е.В., ГРАНОВСКИЙ Ю.В. *Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий*. – М.: Наука, 1976. – 279 с.

2. СОБОЛЬ И.М., СТАТНИКОВ Р.Б. *Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями.* – М.: Дрофа, 2006. – 176 с.
3. ЩЕГЛЕВАТЫХ Р.В., СЫСОЕВ А.С. *Исследование нейросетевой модели обнаружения аномальных наблюдений в массивах данных* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2021. – №1. – С. 23–40.
4. HORIGUCHI A., PRATOLA M.T., SANTNER T.J. *Assessing variable activity for Bayesian regression trees* // Reliability Engineering & System Safety. – 2021. – No. 207. – P. 107391.
5. PETELET M., IIOSS B., ASSERIN O. et al. *Latin hypercube sampling with inequality constraints* // AStA – Advances in Statistical Analysis. – 2010. – No. 94(4). – P. 325–339.
6. SALTELLI A. *Global Sensitivity Analysis: the Primer.* – Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
7. SARAEV P., BLYUMIN S., GALKIN A. et al. *Mathematical remodeling concept in simulation of complicated variable structure transportation systems* // Transportation Research Procedia. – 2020. – No. 45. – P. 475-482.
8. SIN G., GERNAEY K.V. *Improving the Morris method for sensitivity analysis by scaling the elementary effects* // Computer aided chemical engineering. – 2009. – No. 26. – P. 925–930.
9. SOBOL I.M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates* // Mathematics and computers in simulation. – 2001. – No. 1–3. – P. 271–280.
10. SYSOEV A. *Sensitivity analysis of mathematical models* // Computation. – 2023. – No. 11(8). – P. 159.
11. SZPISJAK-GULYAS N., AL-TAYAWI A.N., HORVATH Z.H. et al. *Methods for experimental design, central composite design and the Box-Behnken design, to optimise operational parameters: A review* // Acta Alimentaria. – 2023. – No. 52(4). – P. 521–537.

## **DESIGN OF EXPERIMENT FOR SENSITIVITY ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODELS FROM DIFFERENT CLASSES**

**Anton Sysoev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,  
Cand.Sc., Associate Professor ([sysoev\\_as@stu.lipetsk.ru](mailto:sysoev_as@stu.lipetsk.ru)),

**Pavel Saraev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, D.Sc.,  
Associate Professor ([psaraev@yandex.ru](mailto:psaraev@yandex.ru)),

**Anatoly Pogodaev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,  
D.Sc., Professor ([pak@stu.lipetsk.ru](mailto:pak@stu.lipetsk.ru)).

*Abstract: The article focuses on design of experiment for conducting Sensitivity Analysis of mathematical models used in forecasting and controlling complex systems. Special attention is given to cases where factors are unevenly distributed in space, which is typical for problems with nonlinear dependencies, local features, and high computational complexity. In such situations, the application of mathematical remodeling is justified, whereby models with a complex structure are replaced (remodeled) by objects of a selected remodeling class that have a predefined structure, which allows unifying system research. The purpose of the study is the development and comparison of the design of experiment strategies aimed at improving the efficiency of Sensitivity Analysis. Methods adapted to uneven data distribution are considered. The foundation of sensitivity research is the analysis of finite fluctuations, built upon the application of the Lagrange mean value theorem. Numerical experiments on a test function and its neural network approximation confirmed that the proposed algorithms (central composite design and an adaptive Latin hypercube sampling-based method) enable highly accurate identification of significant factors, aligning with classical methods (Sobol indices, Morris method), while significantly reducing computational costs. It is shown that the remodeling approach refines sensitivity estimates and ensures a unified analysis procedure for models of complex structure.*

Keywords: sensitivity analysis, design of experiment, remodeling.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 01.08.2025.*

*Дата опубликования 30.09.2025.*

# МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПЛАТЫ ЗА ВНЕШНИЕ РЕСУРСЫ

Мусатова Е. Г.<sup>1</sup>, Лазарев А. А.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача построения расписания работ, выполняемых на одном приборе. Заданы отношения предшествования между работами, а также подмножество работ, требующих дополнительные внешние ресурсы, за аренду которых взимается плата. Для каждого внешнего ресурса однозначно определены крайние (первая и последняя) работы, выполняемые с использованием этого ресурса. Необходимо упорядочить работы, не нарушив отношения предшествования и минимизируя суммарные арендные выплаты. Доказана теорема об NP-трудности данной задачи в сильном смысле даже при условии одинаковой продолжительности всех работ и одинаковых цен на все внешние ресурсы. На основе свойств целевой функции для решения поставленной задачи предлагаются нижние оценки и метод ветвей и границ, в котором перебор ведется по допустимым перестановкам крайних работ, использующих внешние ресурсы. Проведенный вычислительный эксперимент показал эффективность предлагаемых нижних оценок целевой функции, позволяющих отсекать бесперспективные ветви в дереве поиска. Определен тип входных данных задачи, для которого разработанный метод работает лучше других известных вариантов точных методов, в которых перебор происходит на множестве всех работ. В частности, на задачах большей размерности при количестве внешних ресурсов меньше 20 данный метод оказывается эффективнее решателя CP Optimizer на базе программирования в ограничениях.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, теория расписаний, метод ветвей и границ, алгоритмы, минимизация использования внешних ресурсов.

## 1. Введение

Рассматривается задача построения расписания обслуживания работ на одном приборе. Все работы доступны в начальный момент времени и должны быть выполнены без прерывания, при этом прибор может обслуживать не более одной работы одновре-

<sup>1</sup> Елена Геннадьевна Мусатова, к.ф.-м.н. (nekolyap@mail.ru).

<sup>2</sup> Александр Алексеевич Лазарев, д.ф.-м.н., профессор (jobmath@mail.com).

менно. Установлен частичный порядок выполнения работ. Некоторые работы требуют для своего выполнения внешние ресурсы. В качестве таких ресурсов могут выступать услуги сторонних специалистов или дополнительное оборудование. Предполагается, что каждый требуемый ресурс берется в аренду один раз в течение планируемого периода. Выплата за аренду каждого ресурса начинается в момент первого его использования и заканчивается с окончанием его последнего использования. Необходимо минимизировать суммарные выплаты за все арендованные ресурсы.

На практике минимизация выплат за использование дополнительных ресурсов чаще возникает в задачах построения расписания работ на нескольких параллельных приборах или в задачах управления проектом с ресурсными ограничениями [7]. В таких системах, как правило, появляется дополнительное ограничение на длительность всего проекта, которое не требуется в одноприборной задаче, рассматриваемой в статье. Примеры таких задач могут быть найдены в строительной сфере при возведении многоэтажных зданий, прокладке трубопроводов, строительстве туннелей [19, 20]. Часто в этих задачах весь проект может быть разбит на этапы, на каждом из которых требуется использование дополнительного арендуемого оборудования [18, 22].

Кроме того, существует ряд задач, которые формально не имеют отношения к минимизации стоимости арендуемых ресурсов, хотя целевая функция в них имеет тот же вид. В таких задачах необходимо минимизировать длительность выполнения некоторых групп работ из-за технологических ограничений в производственной сфере (например, в сталелитейной промышленности [1, 16]) или для повышения качества услуг в сфере обслуживания или образования (например, для уменьшение «растянутости» учебных курсов [12]).

В связи с разнообразием приложений имеется большая вариативность в используемой терминологии. Так, помимо задачи минимизации использования внешних ресурсов можно встретить такие названия, как задача «минимизация простоя ресурсов (бригад)» [19], задача с ограничениями на непрерывность

работы (work continuity constraints) [22], где под ограничениями чаще всего понимаются мягкие ограничения, добавляемые в целевую функцию. Встречается также термин «hammock cost problem» [7], где под работой-гамаком (hammock activity) понимается искусственно введенная работа, начало и конец которой ассоциируются с началом и концом некоторых двух работ проекта [6, 9]. В этом случае длительность выполнения работы-гамака в точности совпадает с длительностью выполнения подмножества работ, требующих дополнительного ресурса, при условии, что первая и последняя работы данного подмножества определены однозначно. Близкой также является задача минимизации стоимости доступности ресурсов (resource availability cost problem, RACP) [14, 17], однако в такой постановке отсутствует предположение, что ресурс арендуется один раз за планируемый период до момента окончания его последнего использования.

Несмотря на важность данной целевой функции для практики, мы не обнаружили системных теоретических исследований подобного рода задач. Как правило, для каждой задачи, возникающей на практике, разрабатывается свой, чаще всего эвристический подход к решению.

Наиболее полное теоретическое исследование данной целевой функции проведено для одноприборной задачи [3], где рассмотрена задача с одним внешним ресурсом, работы поступают в различные моменты времени, а отношение предшествования отсутствует. Авторами рассмотрены несколько постановок, в которых или присутствует ограничение на длительность использования внешнего ресурса и минимизируется одна из четырех классических целевых функций теории расписаний (максимальное временное смещение, взвешенное количество опозданий, сумма моментов окончаний и взвешенная сумма моментов окончаний работ), или ограничивается значение одной из вышеуказанных целевых функций и минимизируется длительность использования ресурса. Для каждой из постановок либо предложен полиномиальный алгоритм решения, либо доказана NP-трудность. В [21] рассмотрена задача построения расписания для параллель-

ных машин также с одним внешним ресурсом, но в качестве целевой функции выступает время окончания всех работ.

Стоит отметить, что задачи планирования работы одного прибора — наиболее изученная область в теории расписаний [5]. При этом сложность такой задачи напрямую зависит от вида целевой функции. Так, например, одноприборная задача минимизации максимального временного смещения при наличии ограничений предшествования и одновременном поступлении работ является полиномиально разрешимой [10], а задача минимизации суммы взвешенных моментов окончаний при тех же ограничениях — NP-трудная в сильном смысле [11, 13]. Целевая функция, рассматриваемая в статье, близка по своей структуре к взвешенной сумме моментов окончаний работ. Однако, как правило, такая целевая функция рассматривается при условии неотрицательности весов, что влечет ее регулярность [4]. В нашем случае условие регулярности, т.е. неубывания по времени, не выполняется.

Ранее [2] нами уже была рассмотрена одноприборная задача с ограничениями предшествования и целевой функцией в виде суммарной платы за использование внешних ресурсов, доказана ее NP-трудность и предложен алгоритм, полиномиально зависящий от количества работ. Однако данный алгоритм включает полный перебор перестановок первых и последних работ каждого подмножества, требующего своего дополнительного ресурса. Поэтому алгоритм успешно работает для большого количества работ и малого количества внешних ресурсов. Данная работа является продолжением указанной статьи и посвящена разработке метода ветвей и границ, позволяющего значительно сократить перебор вариантов расположения первых и последних работ и решить задачи с большим количеством внешних ресурсов.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена математическая постановка задачи, а в разделе 3 доказана ее NP-трудность даже при одинаковых продолжительностях всех работ и одинаковых ценах на все ресурсы. В разделе 4 обсуждаются некоторые свойства задачи и кратко описаны ранее полученные результаты. Раздел 5 посвящен построению допу-

стимых перестановок первых и последних работ множеств, требующих дополнительные ресурсы, и дерева поиска на их основе. Далее в разделе 6 представлен метод построения нижних оценок, позволяющих уменьшить перебор. Раздел 7 включает результаты вычислительного эксперимента и сравнение предложенного подхода с популярным решателем на базе программирования в ограничениях.

## 2. Постановка задачи

Пусть задано множество работ  $J = \{1, \dots, n\}$ , где для каждой работы  $j \in J$  известна ее продолжительность обслуживания  $p_j$ . Все работы доступны в нулевой момент времени и должны быть обслужены на приборе без прерывания, при этом в каждый момент времени может обслуживаться только одна работа. Имеется частичный порядок выполнения работ, задаваемый ориентированным ациклическим графом  $G(J, E)$ , т.е. работа  $j$  не может быть выполнена раньше работы  $i$ , если  $(i, j) \in E$ . Будем писать  $i \rightarrow j$ , если в графе  $G(J, E)$  есть путь из вершины  $i$  в вершину  $j$ , а через  $A(j)$  и  $D(j)$  обозначим соответственно множество всех работ, предшествующих работе  $j$ , и множество всех работ, которые должны быть выполнены только после выполнения работы  $j$ .

Пусть  $J_k$ ,  $k \in K$ , – подмножество работ, требующих для своего выполнения дополнительного внешнего ресурса  $k$ , который берется в аренду по цене  $w_k > 0$  за единицу времени, где  $K$  – множество всех видов внешних ресурсов, используемых в проекте. Каждый ресурс может быть арендован только один раз. Пусть выполнено следующее условие:

Предположение 1. *Каждое подмножество  $J_k$ ,  $k \in K$ , содержит такие работы  $j_k^a, j_k^d$ , что  $j_k^a \rightarrow j$  для всех  $j \in J_k \setminus \{j_k^a\}$  и  $j \rightarrow j_k^d$  для всех  $j \in J_k \setminus \{j_k^d\}$ .*

Работы  $j_k^a, j_k^d$  будем называть крайними работами ресурса  $k$ . Через  $J^{ad}$  обозначим множество всех крайних работ, а через  $J^a$  и  $J^d$  – множества всех крайних работ, являющихся начальны-

ми и конечными соответственно. При выполнении данного предположения продолжительность аренды ресурса полностью определяется его крайними работами, а задача может быть идентифицирована как hammock cost problem (чем больше работ будет обслужено между крайними работами ресурса, тем дольше будет продолжительность аренды ресурса, т.е. сильнее растягивается «гамак», ассоциированный с выполнением крайних работ).

Очевидно, что независимо от порядка выполнения работ минимальная продолжительность проекта определяется как  $\sum_{j \in J} p_j$ .

Перерывы между работами не улучшают значение целевой функции, поэтому будем полагать, что перерывов нет и первая работа начинает обслуживаться в нулевой момент времени. Произвольное расписание  $\pi$  для каждой работы  $j \in J$  задает порядковый номер  $\pi(j)$  ее обслуживания. Обозначим через  $C_j(\pi)$  момент окончания работы  $j$ , равный  $\sum_{i \in J: \pi(i) \leq \pi(j)} p_i$ . Наша цель –

найти допустимое расписание, удовлетворяющее ограничениям предшествования, с минимальными суммарными выплатами за аренду внешних ресурсов, т.е. минимизировать функцию

$$(1) \quad H(\pi) = \sum_{k \in K} w_k \left( C_{i_k^d}(\pi) - C_{i_k^a}(\pi) + p_{i_k^a} \right).$$

Обозначим данную задачу через  $1|prec|H$  в соответствии с обозначениями, принятymi в теории расписаний [8], где 1 означает один прибор, «грес» – наличие частичного порядка между работами, а  $H$  – целевую функцию (1).

### 3. Сложность задачи

В [2] доказано, что данная задача является  $NP$ -трудной в сильном смысле даже в случае одинаковых продолжительностей работ. Однако, используя результаты полученные Лоулером в [11], можно доказать более сильное утверждение.

**Теорема 1.** *Задача  $1|prec|H$  является  $NP$ -трудной, даже если  $p_j = 1$ ,  $j \in J$ , и  $w_k = 1$ ,  $k \in K$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим специальную задачу минимизации суммарного взвешенного окончания работ на одном при-

боре, которая описывается следующим образом. Имеется множество  $n'$  работ  $J'$ , которые должны быть обслужены без прерывания на одном приборе с соблюдением отношений предшествования, задаваемых графом  $G'(J', E')$ . Работы доступны с нулевого момента времени, продолжительность каждой работы равна 1, а вес  $w'_j$  каждой работы  $j \in J'$  принадлежит множеству  $\{a, a+1, a+2\}$ . Необходимо построить расписание, минимизирующее функцию  $F(\pi') = \sum_{j \in J'} w'_j C'_j(\pi')$ , где  $C'_j(\pi')$  – момент окончания работы  $j$  в расписании  $\pi'$ . Доказано [11], что данная задача (обозначим ее через  $P_1$ ) является NP-трудной в сильном смысле для любого целого  $a$ .

Пусть  $a = -1$ , т.е. веса могут принимать значения  $-1, 0, 1$ , тогда

$$F(\pi') = \sum_{j \in J': w'_j=1} C'_j(\pi') - \sum_{j \in J': w'_j=-1} C'_j(\pi').$$

Обозначим через  $n_{-1}$  количество работ, имеющих вес  $-1$ , а через  $n_1$  – количество работ с весом 1.

Сведем данную NP-трудную задачу к следующему частному случаю задачи  $1|prec, p_i = 1, w_i = 1|H$ . Множество работ задается как  $J = J' \cup J^1 \cup J^{-1}$ , где  $J^1$  содержит  $n_1$  работ, а множество  $J^{-1}$  включает  $n_{-1}$  работ, т.е.  $n = n' + n_1 + n_{-1}$ . Все работы имеют единичную продолжительность и единичные веса. Множество дуг в графе отношения предшествования  $G(J, E)$  строится как  $E = E' \cup E^1 \cup E^{-1}$ , где новые подмножества дуг получены следующим образом. Работы множества  $J^1$  образуют цепь, причем последняя работа цепи должна предшествовать всем корневым вершинам графа  $G'$  (см. рис. 1).

Множество  $E^1$  есть множество дуг цепи плюс дуги, идущие к корневым вершинам. Аналогично строится множество дуг  $E^{-1}$ : работы множества  $J^{-1}$  соединяются последовательно в цепь, а все конечные вершины графа  $G'$  предшествуют первой вершине в этой цепи. Пусть в задаче имеется  $n_1 + n_{-1}$  внешних ресурсов. Каждый ресурс характеризуется парой крайних работ: первой и последней работами, использующими этот ресурс. Крайние работы ресурсов выберем следующим образом. Для первых

$n_1$  ресурсов первые работы – это работы множества  $J^1$ , последние работы – работы  $j$  из множества  $J'$ , веса  $w'_j$  которых в задаче  $P_1$  были равны 1. Распределение, каким ресурсам какая пара крайних работ соответствует, проведем произвольным образом. Для следующих  $n-1$  ресурсов в качестве первых работ выберем работы  $j$  из множества  $J'$  с весами  $w'_j = -1$ , а в качестве последних – работы из множества  $J^{-1}$ , сочетая их произвольным образом. Обозначим данную задачу через  $P_2$ .

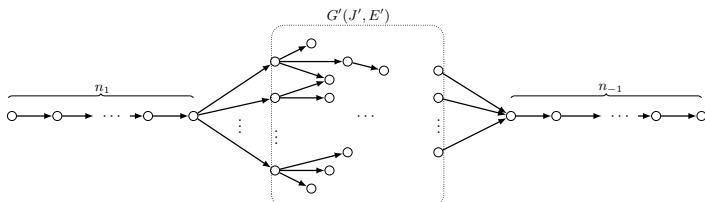


Рис. 1. Структура графа  $G(J, E)$  из доказательства теоремы 1

В силу структуры графа  $G(J, E)$  в любом допустимом расписании первыми будут выполнены  $n_1$  работ из множества  $J^1$ , а последними –  $n-1$  работ из  $J^{-1}$  в порядке, задаваемом ограничениями цепей. Поскольку перерывы в работе прибора не улучшают значение целевой функции, будем рассматривать только расписания без таких перерывов. Тогда расписание  $\pi$  задачи  $P_2$  может быть представлено как последовательность трех перестановок работ из непересекающихся множеств  $\pi = (\pi_1; \pi''; \pi_{-1})$ , где  $\pi_1, \pi_{-1}$  – фиксированные последовательности работ из множеств  $J^1$  и  $J^{-1}$  соответственно, а  $\pi''$  – перестановка работ из множества  $J'$ .

Покажем, что если расписание  $\pi$  является оптимальным в задаче  $P_2$ , то его компонента  $\pi''$  является оптимальным расписанием в задаче  $P_1$ . Несложно видеть, что  $\pi''$  является допустимым расписанием в  $P_1$ , поскольку удовлетворяет всем ограничениям предшествования, задаваемым графом  $G'$ . Исполь-

зуя (1), получаем

$$H(\pi) = \left( \sum_{j \in J': w'_j = 1} C_j(\pi) - \sum_{j \in J^1} C_j(\pi) + n_1 \right) + \\ + \left( \sum_{j \in J^{-1}} C_j(\pi) - \sum_{j \in J': w'_j = -1} C_j(\pi) + n_{-1} \right).$$

Учитывая, что  $\sum_{j \in J^1} C_j(\pi) = \frac{n_1(n_1+1)}{2}$  и

$$\sum_{j \in J^{-1}} C_j(\pi) = n_1 n_{-1} + n' n_{-1} + \frac{n_{-1}(n_{-1}+1)}{2},$$

а также тот факт, что выполнение работ из множества  $J'$  в задаче  $P_2$  начинается на  $n_1$  единиц времени позже, чем в задаче  $P_1$ , получаем

$$H(\pi) = \sum_{j \in J': w'_j = 1} C'_j(\pi'') - \sum_{j \in J': w'_j = -1} C'_j(\pi'') + \\ + \frac{n_1^2 + n_1 + 3n_{-1} + n_{-1}^2}{2} + n' n_{-1} = F(\pi'') + const.$$

Таким образом, найдя оптимальное расписание в задаче  $P_2$ , мы получаем оптимальное расписание в  $P_1$ , что доказывает теорему.

#### 4. Предварительные сведения

В [2] для решения задачи  $1|prec|H$  предложен алгоритм сложности  $O(|B|(n|K| + |E|))$ , где  $B$  – множество допустимых взаимных перестановок крайних работ, а через  $|\cdot|$  обозначена мощность множества. Идея метода основана на представлении целевой функции в следующем виде:

$$(2) \quad H(\pi) = \sum_{j \in J} W_j(\pi) p_j,$$

где

$$(3) \quad W_j(\pi) = \sum_{\substack{k \in K : \\ \pi(j) \geq \pi(j_k^a)}} w_k - \sum_{\substack{k \in K : \\ \pi(j) > \pi(j_k^d)}} w_k.$$

Иными словами, значение целевой функции зависит от взаимного порядка крайних работ, а каждая работа  $j$  дает свой вклад

в целевую функцию  $W_j(\pi)$  в зависимости от ее расположения относительно крайних работ. Идея метода заключается в переборе всех возможных взаимных перестановок крайних работ, и определении для каждой фиксированной перестановки оптимального расположения всех работ относительно крайних работ.

Пусть  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_e)$  – некоторая допустимая перестановка крайних работ. Будем рассматривать только расписания, в которых крайние работы выполняются в данном порядке. Заметим, что количество крайних работ  $e$  не обязательно равно  $2|K|$ , поскольку некоторые работы могут быть крайними для нескольких ресурсов. Обозначим данную задачу с дополнительным ограничением на порядок крайних работ через  $P_\Lambda$ .

Вспомогательная задача формируется следующим образом. Строится новый граф  $G'(J, E')$ , в котором добавляются дуги  $(\lambda_1, \lambda_2), \dots, (\lambda_{e-1}, \lambda_e)$ . Для каждой некрайней работы имеется (без учета ограничений предшествования)  $e+1$  вариант расположения между крайними работами. Будем говорить, что работа помещена в ячейку  $q$ , если она выполняется после крайней работы  $\lambda_q$ , но до крайней работы  $\lambda_{q+1}$ ,  $q \in \{1, \dots, e-1\}$ . Определим также ячейки 0 и  $e$  как варианты выполнения работы до всех крайних работ и после всех крайних работ соответственно. В [2] показано, что для каждой некрайней работы  $j$  может быть независимо выбрана оптимальная с точки зрения целевой функции ячейка. Для этого необходимо определить  $q_1(j)$ ,  $q_2(j)$  – соответственно минимальный и максимальный номера допустимых ячеек для работы  $j$  относительно ограничений предшествования, которые могут быть найдены по следующим формулам:

$$q_1(j) = \begin{cases} 0, & \text{если } j \notin D(\lambda_1), \\ \max\{g \in \{1, \dots, e\} \mid j \in D(\lambda_g)\} & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$q_2(j) = \begin{cases} e, & \text{если } j \notin A(\lambda_e), \\ \min\{g \in \{1, \dots, e\} \mid j \in A(\lambda_g)\} - 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда оптимальная ячейка для работы  $j$  определяется как

$$(4) \quad q^*(j) = \min\{t \mid f(t) = \min_{q_1(j) \leq q \leq q_2(j)} f(q)\},$$

где  $f(q)$  – стоимость ячейки  $q$ :

$$f(q) = \sum_{\substack{k \in K : \\ x(i_k^a) \leq q}} w_k - \sum_{\substack{k \in K : \\ x(i_k^d) \leq q}} w_k.$$

Тогда для каждого множества  $J_q$  некрайних работ, оптимальной для которых является ячейка  $q$ , может быть найден порядок выполнения этих работ  $\bar{\pi}_q(I_q, E_q)$  путем построения топологической сортировки подграфа  $\bar{G}(J_q, E_q)$ , где  $E_q \subset E$  – множество дуг, соединяющих работы из  $J_q$ . Доказана следующая

**Теорема 2** [2, с. 162]. *Расписание*

$\pi^\Lambda = (\bar{\pi}_0(I_0, E_0), \lambda_1, \bar{\pi}_1(I_1, E_1), \lambda_2, \bar{\pi}_2(I_2, E_2), \dots, \lambda_e, \bar{\pi}_e(I_e, E_e))$  является оптимальным в задаче  $P_\Lambda$ .

Таким образом, перебрав все возможные варианты перестановок крайних работ, можно найти оптимальное решение задачи. В [2] была показана эффективность данного подхода для плотных графов или небольшого количества ресурсов. Далее в статье предлагается использовать метод ветвей и границ для уменьшения перебора и возможности решать задачи с большим количеством внешних ресурсов.

## 5. Построение допустимых последовательностей крайних работ

Будем говорить, что расписание  $\pi$  соответствует частичной перестановке  $t$  крайних работ  $\Lambda_t = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ ,  $1 \leq t \leq e$ , если выполняется

$$(5) \quad \pi(\lambda_1) < \dots < \pi(\lambda_t) \text{ при } t > 1,$$

$$(6) \quad \pi(\lambda_t) < \pi(\lambda) \forall \lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}.$$

Назовем частичную перестановку крайних работ допустимой, если существует соответствующее ей допустимое расписание. Пустая перестановка  $\Lambda_0$  является допустимой, так как не добавляет никаких дополнительных ограничений в задачу.

**Лемма 1.** *Пусть частичная перестановка крайних работ  $\Lambda_t$ ,  $0 \leq t \leq e-1$ , является допустимой. Тогда перестановка*

$\Lambda_{t+1} = (\Lambda_t, \lambda_{t+1})$ , где  $\lambda_{t+1} \notin \Lambda_t$ , является допустимой тогда и только тогда, когда

$$(7) \quad \forall \lambda' \in J^{ad} \setminus \{\lambda : \lambda \in \Lambda_t\} \quad \lambda_{t+1} \notin P(\lambda').$$

**Доказательство.** Необходимость выполнения условия (7) очевидна, так как при его нарушении условие (6) не совместимо с выполнением ограничений предшествования. Докажем достаточность от противного. Пусть выполнено условие (7), но не существует допустимого расписания, соответствующего частичной перестановке  $\Lambda_{t+1}$ . Для  $t > 0$  это означает, что при добавлении в ациклический граф дуг  $(\lambda_t, \lambda_{t+1})$  и  $(\lambda_{t+1}, \lambda)$  для всех  $\lambda \in J^{ad} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_{t+1}\}$  в нем появляются циклы. Любой из таких циклов обязательно содержит  $\lambda_{t+1}$ , а также либо  $\lambda_t$ , либо некоторую работу  $\lambda' \in J^{ad} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_{t+1}\}$  (либо обе эти работы). Если цикл содержит только  $\lambda_t$ , то в исходном графе существовал путь из  $\lambda_{t+1}$  в  $\lambda_t$ , что противоречит допустимости частичной перестановки  $\Lambda_t$  (условию (6) в частности). Если же цикл содержит  $\lambda'$ , то это противоречит выполнению условия (7). Для  $t = 0$  доказательство проводится по той же схеме, но в упрощенной форме. Лемма доказана.

Множество допустимых перестановок крайних работ будем представлять с помощью деревьев, каждое из которых имеет в качестве корневой вершины некоторую начальную работу ресурса, не являющуюся потомком других крайних работ. Пусть количество таких работ равно  $v$ . Каждая корневая вершина соединяется дугами с другими крайними работами, удовлетворяющими лемме 1 при  $t = 1$ , и т.д. В результате получается лес из  $v$  деревьев. Каждая цепь, соединяющая лист одного из деревьев с его корневой вершиной (вершиной первого уровня) задает допустимую перестановку  $e$  крайних работ. При этом цепь, соединяющая вершину  $t$ -го уровня,  $1 \leq t \leq e - 1$ , с корневой вершиной, задает допустимую частичную перестановку.

## 6. Построение нижних оценок и отсечение бесперспективных ветвей

Описанный выше лес допустимых перестановок определяет схему перебора, однако при большом количестве вершин осуществление данного перебора занимает большое время. Для сокращения вычислений будем строить нижние оценки как для полных, так и для частичных перестановок.

Обозначим через  $\Omega_k$ ,  $k \in K$ , множество работ, лежащих на пути из  $j_k^a$  в  $j_k^d$  в графе  $G(J, E)$ , включая крайние работы  $j_k^a$  и  $j_k^d$ . Данное множество содержит работы, которые будут выполняться во время аренды  $k$ -го ресурса в любом расписании. Каждая работа имеет некоторый гарантированный вклад в целевую функцию в зависимости от того, в какие множества  $\Omega_k$  она входит, т.е. во время аренды каких ресурсов она будет выполняться в любом расписании. Данный вклад равен

$$\underline{W}_j = \sum_{k \in K : j \in \Omega_k} w_k.$$

Тогда в качестве нижней оценки целевой функции выступает следующая величина:

$$\underline{H} = \sum_{j \in J} \underline{W}_j p_j.$$

Определим вначале для каждой работы, в какие множества  $\Omega_k$ ,  $k \in K$ , она включена. Пусть функция  $out(j, k)$  принимает значение 1 для работы  $j$ , равной  $j_k^a$ , или если в графе  $G$  существует путь из работы  $j_k^a$  к работе  $j$ , и значение 0 в противном случае. Аналогично введем функцию  $in(j, k)$ , принимающую значение 1, если работа  $j$  равна  $j_k^d$  или существует путь из вершины  $j$  к  $j_k^d$ , и значение 0 в противном случае. Тогда  $j \in \Omega_k$ , если одновременно  $out(j, k) = 1$  и  $in(j, k) = 1$ . Пусть  $J_{sort}$  – произвольная топологическая сортировка графа  $G$ ,  $\bar{J}_{sort}$  – сортировка, обратная  $J_{sort}$ . Введем обозначения для множества родительских вершин  $Pr(i) = \{j \in J \mid (j, i) \in E\}$  и множества дочерних вершин  $Ch(i) = \{j \in J \mid (i, j) \in E\}$ . Алгоритм 1 описывает способ вычисления значений функций  $out(\cdot, \cdot)$  и  $in(\cdot, \cdot)$  для всех работ

и всех ресурсов. Сложность алгоритма составляет  $O(k(n + |E|))$  операций.

**Алгоритм 1.** (Вычисление значений  $out(\cdot, \cdot)$  и  $in(\cdot, \cdot)$ )

```

1: for all  $k \in K$  do
2:    $out(j_k^a, k) = 1$ 
3:    $in(j_k^d, k) = 1$ 
4: end for
5: for all  $i \in J_{sort}$  do
6:   for all  $k \in K$  do
7:     for all  $j \in Pr(i)$  do
8:       if  $out(j, k) == 1$  then
9:          $out(i, k) = 1$ 
10:        break
11:       end if
12:     end for
13:   end for
14: end for
15: for all  $i \in \bar{J}_{sort}$  do
16:   for all  $k \in K$  do
17:     for all  $j \in Ch(i)$  do
18:       if  $in(j, k) == 1$  then
19:          $in(i, k) = 1$ 
20:        break
21:       end if
22:     end for
23:   end for
24: end for
```

Рассмотрим частичную перестановку крайних работ  $\Lambda_t = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ . Если для некоторой работы  $j \in J$  выполняется  $j \in A(\lambda_i)$  хотя бы для одного  $i \in \{1, \dots, t\}$ , то  $q_2(j) \leq t$  и для данной работы уже может быть вычислена оптимальная ячейка по формуле (4) и соответствующая стоимость  $W_j^*(\Lambda_t) = f(q^*(j))$ , которая будет оптимальной для всех расписаний, соответствующих этой частичной перестановке. Обозначим множество всех таких работ через  $J_{\Lambda_t}$ . Тогда нижняя оценка для распи-

саний, соответствующих частичной перестановке  $\Lambda_t$ , может быть уточнена как

$$(8) \quad \underline{H}_{\Lambda_t} = \sum_{j \in J_{\Lambda_t}} W_j^*(\Lambda_t) p_j + \sum_{j \in J \setminus J_{\Lambda_t}} \underline{W}_j p_j.$$

По мере роста  $t$  нижняя оценка частичной перестановки будет уточняться:

$$\underline{H}_{\Lambda_{t+1}} = \sum_{j \in J_{\Lambda_t}} W_j^*(\Lambda_t) p_j + \sum_{j \in J_{\Lambda_{t+1}} \setminus J_{\Lambda_t}} W_j^*(\Lambda_{t+1}) p_j + \sum_{j \in J \setminus J_{\Lambda_{t+1}}} \underline{W}_j p_j,$$

а для  $t = e$ , т.е. для концевой вершины дерева, данная нижняя оценка  $\underline{H}_{\Lambda_e}$  в точности совпадет с оптимальным значением задачи  $P_\Lambda$  для  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_e)$ .

Таким образом, для отсечения бесперспективных ветвей можно действовать следующим образом. Пусть известно рекордное (минимальное) значение целевой функции  $H_{min}$  для некоторой полной перестановки крайних работ (т.е. значение нижней оценки для концевой вершины дерева). Данное значение  $H_{min}$  будем уточнять при достижении каждого очередного листа дерева. Если для некоторой промежуточной вершины на  $t$ -м уровне выполняется  $\underline{H}_{\Lambda_t} > H_{min}$ , то данная вершина может быть исключена из дальнейшего рассмотрения вместе со всеми исходящими из нее ветвями.

## 7. Вычислительный эксперимент

Метод ветвей и границ на основе разделов 5–6 был реализован на языке Python. Для получения начального значения величины  $H_{min}$  предварительно строилась произвольная топологическая сортировка графа. При выборе очередной крайней работы (при построении очередной ветви дерева поиска) использовалась следующая стратегия. Сначала выбирались работы из множества  $J^d$ , удовлетворяющие лемме 1, в порядке невозрастания весов ресурсов, а затем – допустимые работы из  $J^a$  в порядке неубывания весов ресурсов. Данный подход объясняется эмпирическим правилом: работы, использующие самые дорогие ресурсы, нужно начинать как можно позже, а заканчивать как можно раньше.

Данные для эксперимента генерировались следующим образом. Для заданных значений  $n$  и  $K$  продолжительности работ и веса внешних ресурсов генерировались случайным образом из интервала [1, 10]. Ориентированный граф строился с помощью библиотеки NetworkX, вероятность создания ребра задавалась равной 0,1, а далее проводилась процедура переориентации некоторых ребер для исключения цикличности графа. Крайние работы ресурсов выбирались произвольным образом так, чтобы не нарушить ограничения предшествования работ.

В таблице 1 представлены результаты тестирования алгоритма на задачах с 300 работами и разными количествами ресурсов. Несложно видеть, что количество допустимых перестановок крайних работ увеличивается очень быстро с ростом числа внешних ресурсов.

*Таблица 1. Характеристики метода ветвей и границ на задачах с 300 работами*

$K$	Общее количество допустимых перестановок	Количество рассмотренных перестановок	Количество отсечений
2	2	1	1
3	1	1	0
4	6	4	2
5	4	1	3
6	6	2	4
7	18	5	7
8	72	12	17
9	3	3	0
10	144	6	26
11	1920	13	145
12	1824	7	94
13	141344	21	2467
14	3072	2	260
15	1244160	4	2423
16	9763200	82	9104
17	37440	20	2619
18	90961920	109	30288
19	51612288	47	86362
20	357696000	111	259410

При этом в предлагаемом точном методе количество полностью рассмотренных перестановок, т.е. количество обработанных листьев в дереве поиска, невелико, что достигается срабатыванием нижних оценок и последующим отсечением ветвей (см. последний столбец). Таким образом, можно сделать вывод об эффективности данного подхода по сравнению с перебором.

На втором этапе эксперимента было проведено сравнение предлагаемого метода ветвей и границ с решателем CP Optimizer 22.1.0 (с использованием библиотеки docplex.cp) на базе программирования в ограничениях от IBM ILOG CPLEX [23]. В последние годы программирование в ограничениях стало одним из самых мощных инструментов для решения задач теории расписаний, превосходящим подходы, основанные на целочисленном линейном программировании [15]. Для запуска решателя использовалась стандартная для одноприборных задач модель ограничений (см. алгоритм 2).

Время работы алгоритмов для каждой задачи ограничивалось 5 минутами. На рис. 2 указаны результаты тестирования предлагаемого метода ветвей и границ (ВВ) и решателя CP Optimizer (CP) на задачах с различными значениями  $n$  и  $K$ . Цвет ячеек характеризует количество возможных допустимых перестановок крайних работ в сгенерированных задачах.

#### Алгоритм 2. (CP модель задачи)

- 1: // ПЕРЕМЕННЫЕ:
- 2:  $x_j \leftarrow intervalVar(size = p_j) \forall j = 1 \dots n$        $\triangleright$  Интервальные переменные работ
- 3: // ОГРАНИЧЕНИЯ:
- 4:  $endBeforeStart(x_j, x_i) \quad \forall (i, j) \in E(G)$        $\triangleright$  Ограничения предшествования
- 5:  $noOverlap([x_j \mid j = 1 \dots n])$        $\triangleright$  Запрет перекрытий работ
- 6: // ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ
- 7: **minimize**  $\sum_{k \in K} w_k \left( endOf(x_{i_k^d}) - startOf(x_{i_k^a}) \right)$

$n, K$	2	5	10	15	20	25	30	Цвет ячейки	Количество перестановок крайних работ
100	B<C	B<C	B<C	-	-	-	-	<10	<10
150	B<C	B>C	B<C	-	-	-	-	10-1000	10-1000
200	B<C	B<C	B<C	B<C	-	-	-	1000-500000	1000-500000
250	B<C	B<C	B<C	B	-	-	-	500000-50000000	500000-50000000
300	B<C	B<C	B<C	B	-	-	-	>50000000	>50000000
350	B<C	B<C	B<C	B	B	-	-	>50000000	>50000000
400	B<C	B<C	B<C	B<C	-	-	-	>50000000	>50000000
450	B<C	B>C	B<C	B	-	-	-	>50000000	>50000000
500	B<C	B<C	B<C	B	B	-	-	>50000000	>50000000
600	B	B	B	B	B	-	-	>50000000	>50000000
700	B	B	B	B	B	B	-	>50000000	>50000000
800	B	B	B	B	B	-	-	>50000000	>50000000
900	B	B	B	B	B	-	-	>50000000	>50000000
1000	B	B	B	B	B	-	-	>50000000	>50000000

Значения ячеек:

B<C	Оба алгоритма завершили работу, ВВ оказался быстрее CPLEX.
B	ВВ завершил работу, CPLEX не завершил работу.
-	Оба алгоритма не завершили работу.

Рис. 2. Сравнение ВВ и CPLEX при ограничении по времени счета в 5 минут

Во всех примерах, в которых оба алгоритма успевали закончить работу, ВВ находил решение раньше, чем СР. В задачах размерности выше 600 только ВВ укладывался в 5 мин. Таким образом, СР более чувствителен к увеличению размерности задачи. При этом отчетливо видна зависимость эффективности обоих алгоритмов от количества возможных перестановок крайних работ. Эксперимент показал, что на рассмотренном поле примеров ВВ демонстрирует большую эффективность, чем СР с точки зрения поиска гарантированного оптимального решения. Однако стоит отметить, что во всех случаях (кроме примеров  $(n, K) = (100, 15), (1000, 25)$ ), когда оба алгоритма не успели завершить работу, значение целевой функции, полученное с помощью СР было меньше, чем значение, полученное ВВ. Таким образом, можно заключить, что СР быстрее находит лучшее значение функции (лучшую верхнюю оценку), но, судя по примерам, где ВВ успел завершить работу, тратит больше времени, чтобы доказать оптимальность решения, т.е. перебрать все не отсеченные вершины дерева поиска.

## 8. Заключение

В работе рассмотрена одноприборная задача минимизации платы за аренду дополнительных ресурсов. Доказана ее NP-трудность в сильном смысле при равенстве всех продолжительностей работ и цен за арендуемые ресурсы. Предложен метод ветвей и границ, основанный на переборе допустимых перестановок крайних работ, использующих дополнительные ресурсы. Вычислительные эксперименты показали конкурентоспособность разработанного алгоритма по сравнению с ведущим решателем на базе программирования в ограничениях. Дальнейшие направления исследований могут касаться использования данного подхода для разработки эффективных эвристик для решения многоприборных задач минимизации трат на использование арендуемых ресурсов или задач управления проектом при минимизации суммарной длительности выполнения подпроектов.

## Литература

1. КИБЗУН А.И., РАССКАЗОВА В.А. *Модель целочисленного линейного программирования как математическое обеспечение системы оптимального планирования потокового производства на этапе оперативного графикования* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №5. – С. 113–132.
2. МУСАТОВА Е.Г., ЛАЗАРЕВ А.А. *Задача минимизации суммарной взвешенной длительности курсов для одного прибора с ограничениями предшествования* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №9. – С. 153–168.
3. BRISKORN D., DAVARI M., MATUSCHKE J. *Single-machine scheduling with an external resource* // European Journal of Operational Research. – 2021. – Vol. 293, No. 2. – P. 457–468.
4. BRUCKER P. *Scheduling algorithms*. – Springer: Heidelberg, 2007. – 371 p..
5. CHEN B., POTTS C.N., WOEGINGER G.J. *A review of machine scheduling: complexity, algorithms and*

- approximability // Handbook of Combinatorial Optimization.* – Boston, MA: Springer US, 1998. – P. 1493–1641.
6. CSEBFALVI A.B., CSEBFALVI G. *Hammock activities in project scheduling // Proc. of the Sixteenth Annual Conf. of POMS.* – Chicago, IL, 2005.
  7. ELIEZER O. *A new bi-objective hybrid metaheuristic algorithm for the resource-constrained hammock cost problem (RCHCP).* – Doctoral Dissertation. – Pecs, 2011. – 111 p.
  8. GRAHAM R.L., LAWLER E.L., LENSTRA J.K., KAN A.R. *Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey // Annals of discrete mathematics.* – 1998. –Vol. 5 –P. 287–326.
  9. HARHALAKIS G. *Special features of precedence network charts // European Journal of Operational Research.* – 1990. – Vol. 49, No. 1. – P. 50–59.
  10. LAWLER E.L. *Optimal sequencing of a single machine subject to precedence constraints // Management Science.* – 1973. – Vol. 19, No. 5. – P. 544–546.
  11. LAWLER E.L. *Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints // Annals of Discrete Mathematics.* – 1978. – Vol. 2 – P. 75–90.
  12. LAZAREV A., KHUSNULLIN N., MUSATOVA E. et al. *Minimization of the weighted total sparsity of cosmonaut training courses // Communications in Computer and Information Science.* – 2019. – Vol. 974. – P. 202–215.
  13. LENSTRA J.K., RINNOOY KAN A.H.G. *Complexity of scheduling under precedence constraints // Operations Research.* – 1978. – Vol. 26, No. 1. – P. 22–35.
  14. MOHRING R.H. *Minimizing costs of resource requirements in project networks subject to a fixed completion time // Operations Research.* – 1984. – Vol. 32, No. 1. – P. 89–120.
  15. NADERI B., RUIZ R., ROSHANAEI V. *Mixed-integer programming vs. constraint programming for shop scheduling problems: New results and outlook // INFORMS Journal on Computing.* – 2023. – Vol. 35, No. 4. – P. 817–843.

16. RASSKAZOVA V.A. *LIP model in solving RCPSP at the flow type production* // Communications in Computer and Information Science. – 2024. – Vol. 1913. – P. 75–88.
17. RODRIGUES S.B., YAMASHITA D.S. *An exact algorithm for minimizing resource availability costs in project scheduling* // European Journal of Operational Research. – 2010. – Vol. 206, No. 3. – P. 562–568.
18. TOMCZAK M., JASKOWSKI P. *Scheduling repetitive construction projects: Structured literature review* // Journal of Civil Engineering and Management. – 2022. – Vol. 28, No. 6. – P. 422–442.
19. VANHOUCKE M. *Work continuity constraints in project scheduling* // Journal of Construction Engineering and Management. – 2006. – Vol. 132, No. 1. – P. 14–25.
20. VANHOUCKE M. *Work continuity optimization for the Westerscheldetunnel Project in the Netherlands* // Tijdschrift voor economie en management. – 2007. – Vol. 52, No. 3. – P. 435–449.
21. ZHANG A., ZHEN T., CHEN Y., CHEN G. *An improved algorithm for parallel machine scheduling under additional resource constraints* // Optimization Letters. – 2023. – Vol. 17, No. 3. – P. 753–769.
22. ZOU X., WU G., ZHANG Q. *Work continuity constraints in repetitive project scheduling considering soft logic* // Engineering, Construction and Architectural Management. – 2021. – Vol. 28, No. 6. – P. 1713–1738.
23. <https://www.ibm.com/docs/es/icos/22.1.0> (дата обращения: 15.04.2025).

## **BRANCH-AND-BOUND ALGORITHM FOR SOLVING PROBLEM OF MINIMIZING FEES FOR EXTERNAL RESOURCES**

**Elena Musatova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (nekolyap@mail.ru).

**Alexander Lazarev**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (jobmath@mail.ru).

*Abstract: We consider a problem of scheduling jobs performed on a single machine. Precedence relations between jobs are established, as well as subsets of jobs that require additional external resources, for which a fee is charged. For each external resource, the extreme (first and last) job to be executed using that resource is uniquely determined. It is necessary to order the jobs without violating the precedence relations and minimizing total rent payments. We have proved that this problem is NP-hard in the strong sense, even if the processing times of all jobs are the same and the prices of all external resources are equal. Based on the properties of the objective function, lower bounds and the branch-and-bound method are proposed to solve the problem. In this method, enumeration is performed according to feasible permutations of extreme jobs using external resources. The computational experiment showed the efficiency of the proposed lower bounds of the objective function, which make it possible to cut off unpromising branches in the search tree. We also determined the type of input data for which the developed method is more successful than another known variant of exact methods that enumerate all jobs. In particular, for large-dimensional problems with fewer than 20 external resources, this method proves to be more efficient than CP Optimizer solver which is based on constraint programming.*

**Keywords:** discrete optimization, scheduling, branch-and-bound method, algorithms, minimizing the use of external resources.

УДК 519.854.2

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Е.Н. Хоботовым.*

*Поступила в редакцию 07.05.2025.*

*Дата опубликования 30.09.2025.*

## РАСЧЕТ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА

Ипатов Д. В.<sup>1</sup>, Петров К. В.<sup>2</sup>

(ФГБОУ ВО Московский политехнический университет,  
Москва)

Чернобрывец М. А.<sup>3</sup>

(ФГАОУ ВО Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана (Национальный  
исследовательский университет), Москва)

Кулагин К. А.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается разработка и исследование образовательного антропоморфного робота комплекта «СТЕМ Академия». Для анализа кинематических характеристик использована методика Денавита – Хартенберга. Для расчета действующих на робота внешних сил была составлена динамическая модель, учитывающая действующие на приводы силы тяжести на основе метода Ньютона – Эйлера. Построена модель зависимости точки нулевого момента от углов поворота сервоприводов с учетом положения центра масс каждого звена. Проведено экспериментальное определение точки нулевого момента с использованием датчиков деформации, результаты которого были сравнены с теоретическими данными. Введен новый термин «область гарантированной статической устойчивости» (ОГСУ), являющийся подмножеством понятия «области устойчивости» и дополняющийся учетом технологических факторов. Проведен экспериментальный анализ ОГСУ, который показал, что ОГСУ не соответствует размерам области устойчивости, описываемым физическим контуром стопы. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов показало, что рассчитанную математическую модель возможно интегрировать в систему управления антропоморфным роботом, а также в симулятор программирования движений для оценки статической устойчивости. Полученные результаты позволяют предсказывать устойчивость целевого положения в статике и могут служить основой для дальнейших исследований алгоритмов динамической стабилизации.

<sup>1</sup> Дмитрий Владимирович Ипатов, студент (ipatow.dima2014@yandex.ru).

<sup>2</sup> Константин Владимирович Петров, студент (r.92rab@gmail.com).

<sup>3</sup> Михаил Андреевич Чернобрывец, студент (misha8cher@gmail.com).

<sup>4</sup> Константин Александрович Кулагин, н.с. (Kka86@bk.ru).

Ключевые слова: антропоморфные роботы, анализ кинематических характеристик, анализ динамических характеристик, область устойчивости, область гарантированной статической устойчивости, точка нулевого момента.

## **1. Введение**

Современная робототехника ориентирована на создание антропоморфных систем, способных к безопасному взаимодействию с человеком в динамических средах. Основной проблемой таких роботов остается обеспечение устойчивости при движении.

Для решения этой проблемы используется комплексная математическая модель, объединяющая кинематические, динамические и балансовые аспекты, без которых невозможна устойчивая и безопасная работа системы. Основой такой модели выступают алгоритмы решения прямой и обратной задач кинематики. А чтобы сохранять устойчивость при динамических нагрузках, в модель интегрируется анализ точки нулевого момента, определяющей границы устойчивости.

Целью исследования является определение зависимости точки нулевого момента от углов поворота сервоприводов с учетом центра масс каждого звена, а также экспериментальное выявление области гарантированной статической устойчивости. При проведении исследования использовались классические методы управления, основанные на статическом балансе, игнорируя инерционные силы. Для оценки точности расчета математической модели также проводится экспериментальное определение точки нулевого момента с использованием датчиков деформации, которые устанавливаются на стопы робота. Исследование проводится с использованием сервоприводного антропоморфного робота образовательного робототехнического комплекта «СТЕМ Академия».

## **2. Обзор литературы**

В исследовании используется стандартная методика Денавита – Хартенберга [15], которая описывает матричное пред-

ставление кинематики, используемое в данной работе для построения геометрической модели человекоподобного робота и расчёта углов сервоприводов. Более детальное описание и применение методики для многозвенных систем представлено в работах Крейга [14].

Динамическое моделирование, необходимое для учета сил и моментов, рассматривается в работах [6, 20]. В рамках данного исследования динамическая модель строится на основе кинематической, что согласуется с подходом [4], где подчеркивается взаимосвязь кинематики и динамики для точного управления.

Устойчивость антропоморфных роботов анализируется через концепции центра масс (ЦМ) и точки нулевого момента (*ZMP*). Теоретическая база для расчёта *ZMP* заложена в работах [16] и [21]. Указанные подходы адаптированы в данной работе для расчёта области гарантированной статической устойчивости с учетом особенностей исследуемого робота с утяжеленными стопами.

Отдельным направлением является образовательная робототехника, где упор делается на доступность и простоту. В статье [22] описан инструмент на базе Physical Etoys для программирования робота Bioloid, но из-за отсутствия учета кинематической модели и динамики антропоморфный робот может потерять равновесие. Учитывая особую значимость кинематической и динамической моделей для повышения устойчивости системы управления, как показано в работах [15, 20], представленный инструмент для программирования может привести к повреждениям системы робота.

Текущее исследование объединяет классические теории кинематики [14, 15], современные подходы к устойчивости [16, 21]. Это позволяет создать комплексную математическую модель, адаптированную для сервоприводных гуманоидов.

### **3. Материалы и методы**

#### **3.1. КОНСТРУКЦИЯ РОБОТА**

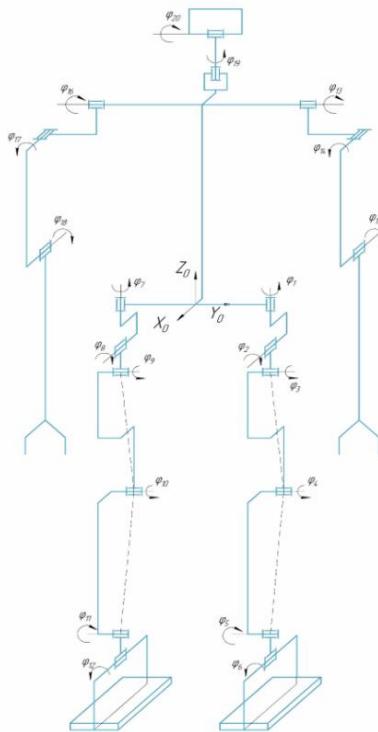
Антропоморфный робот комплекта «СТЕМ Академия» создан на базе конструктора Bioloid Premium, но с некоторыми модификациями. Использование алюминиевых и стальных ком-

понентов вместо пластмассовых увеличило массу с 1,8 кг до 3,175 кг. Это обеспечило повышенную жёсткость конструкции, но потребовало перераспределения масс для сохранения баланса. Высота робота увеличена с 385 мм до 410 мм. Масса стопы повышена с 39 г до 316,5 г за счет использования стальных пластин. Относительно предыдущих версий робота перераспределение масс позволило сместить проекцию центра масс ближе к опорной поверхности. Для текущей модели расчетная высота центра масс составляет 168,46 мм против 200,3 мм старой версии. Робот имеет 20 степеней свободы: по 6 звеньев в каждой ноге, по 3 звена в каждой руке, 2 звена в голове и туловище, к которому крепятся руки, ноги и голова. Каждое звено реализовано с помощью российских сервоприводов AR-S430-01, работающих по протоколу Dynamixel. Структурная схема робота представлена на рис. 1. В силу конструкции робота каждая нога имеет 2 пары шарниров, расстояния между центрами которых равны нулю, и их оси перпендикулярны: 2 и 3, а также 5 и 6 – для левой ноги, и симметричные им пары шарниров – для правой ноги.

Технические характеристики гуманоидного робота приведены в таблице 1.

Таблица 1. Технические характеристики гуманоидного робота

Параметр	Значение
Высота	410 мм
Общая масса	3,175 кг
Количество степеней свободы	20
Тип сервоприводов	AR-S430-01
Максимальный крутящий момент сервопривода	1,5 Н·м (при 12 В)
Масса одной стопы	316,5 г
Размер стопы	130 × 75 мм
Источник питания	LiPo аккумулятор 11,1В 2200 мАч
Система управления	Controller OpenCM9.04



*Рис. 1. Структурная схема робота с указанием расположения сервоприводов и основных узлов*

### 3.2. МЕТОДИКА ДЕНАВИТА – ХАРТЕНБЕРГА ДЛЯ АНАЛИЗА КИНЕМАТИКИ

Для анализа кинематических характеристик робота была использована методика Денавита – Хартенберга (*D-H*), которая позволяет систематически описывать геометрию кинематических цепей с помощью четырех параметров [9]:

- 1)  $a_i$  – длина звена;
- 2)  $\alpha_i$  – угол скручивания звена;
- 3)  $d_i$  – смещение звена;
- 4)  $\theta_i(\varphi_i)$  – угол поворота сочленения.

Для робота была построена полная кинематическая модель, включающая все 20 степеней свободы. Параметры *D-H* для конечностей робота представлены в таблицах 2–6.

Для заполнения таблиц *D-H* параметрами для ног робота в схему обозначения систем координат ног вводятся следующие обозначения:

- $L1$  – расстояние вдоль оси  $X_1$  между осями  $Z_0$  и  $Z_1$ ;
- $L2$  – расстояние вдоль оси  $Z_1$  между осями  $X_1$  и  $X_2$ ;
- $L3$  – расстояние вдоль оси  $X_3$  между осями  $Z_2$  и  $Z_3$ ;
- $L4$  – расстояние вдоль оси  $X_4$  между осями  $Z_3$  и  $Z_4$ ;
- $L5$  – расстояние вдоль оси  $X_5$  между осями  $Z_4$  и  $Z_5$ ;
- $L6$  – расстояние вдоль оси  $X_6$  между осями  $Z_5$  и  $Z_6$ ;
- $L7$  – расстояние вдоль оси  $X_7$  между осями  $Z_6$  и  $Z_7$ .

Таблица 2. Параметры для левой ноги

	$\theta_i(\varphi_i)$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	-90	0	- $L1$	0
1	$180 + \varphi_i$	- $L2$	0	90
2	$-90 + \varphi_i$	0	- $L3$	90
3	$-\delta + \varphi_i$	0	- $L4$	180
4	$-2\delta + \varphi_i$	0	- $L5$	180
5	$-\delta + \varphi_i$	0	- $L6$	-90
6	$\varphi_i$	0	- $L7$	0

Таблица 3. Параметры для правой ноги

	$\theta_i(\varphi_i)$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	-90	0	$L1$	0
1	$180 - \varphi_i$	- $L2$	0	90
2	$-90 - \varphi_i$	0	$L3$	90
3	$-\delta + \varphi_i$	0	$L4$	180
4	$-2\delta + \varphi_i$	0	$L5$	180
5	$-\delta + \varphi_i$	0	$L6$	-90
6	$-\varphi_i$	0	$L7$	0

На рис. 2 представлено обозначение систем координат и *D-H* параметров на схеме ног робота.

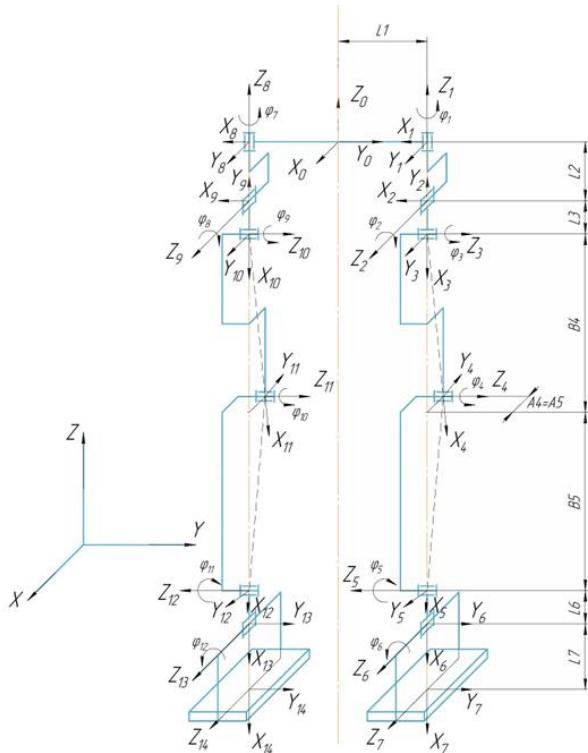


Рис. 2. Обозначения систем координат для ног

Из схемы бедра и голени робота (рис. 3) мы можем выделить формулы (1) и (2) для заполнения параметров таблиц 2 и 3:

$$(1) \quad \delta = \arctg \frac{A_4}{B_4}.$$

$$(2) \quad L4 = L5 = \sqrt{A_4^2 + B_4^2}.$$

Таким образом, измеренные и рассчитанные параметры в таблицах 2 и 3:  $L1 = 39,6$  мм;  $L2 = 26,25$  мм;  $L3 = 0$  мм;  $L4 = L5 = 80$  мм;  $L6 = 0$  мм;  $L7 = 29,25$  мм;  $\delta = 7,18$ .

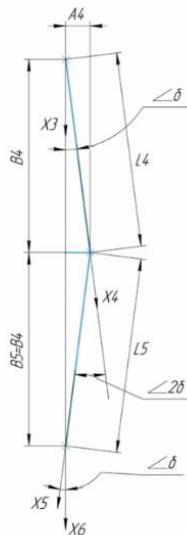


Рис. 3. Геометрическая схема бедра и голени

Для заполнения таблиц *D-H* параметрами для рук робота в схему обозначения систем координат рук вводятся следующие обозначения:

- $B1$  – смещение между пересечением оси  $Z_0$  с осью  $X_1$ ;
- $A1$  – расстояние вдоль оси  $X_1$  между осями  $Z_0$  и  $Z_1$ ;
- $L1$  – расстояние вдоль оси  $Z_1$  между осями  $X_1$  и  $X_2$ ;
- $A2$  – ширина плеча;
- $B2$  – расстояние между осями  $Z_1$  и  $Y_2$ ;
- $L3$  – расстояние вдоль оси  $X_3$  между осями  $Z_2$  и  $Z_3$ ;
- $L4$  – расстояние вдоль оси  $X_4$  между осями  $Z_3$  и  $Z_4$ .

На рис. 4 представлено обозначение систем координат и *D-H* параметров на схеме рук робота.

Таблица 4. Параметры для левой руки

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	0	$B1$	$-A1$	90
1	$-90 + \varphi_i$	$-(L1 + A2)$	$B2$	-90
2	$\varphi_i$	0	$L3$	180
3	$\varphi_i$	0	$L4$	0

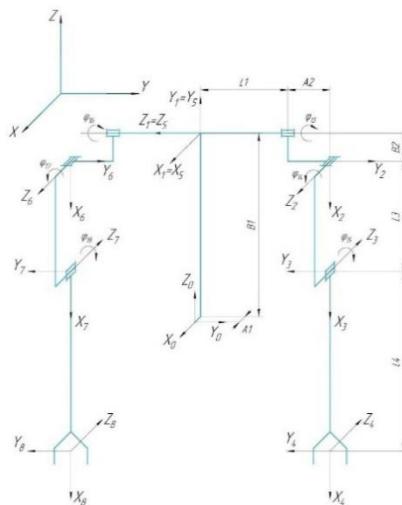


Рис. 4. Обозначение систем координат для рук

Таблица 5. Параметры для правой руки

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$a_i$
0	0	$B1$	$-A1$	90
1	$-90 + \varphi_i$	$L1 + A2$	$B2$	-90
2	$-\varphi_i$	0	$L3$	180
3	$-\varphi_i$	0	$L4$	0

В таблицах 4 и 5 измеренные и рассчитанные параметры равны:  $A1 = 1$  мм;  $B1 = 117,5$  мм;  $L1 = 56$  мм;  $A2 = 27$  мм;  $B2 = 18,03$  мм;  $L3 = 70,5$  мм;  $L4 = 115$  мм.

Для заполнения таблиц D-H параметрами для головы робота в схему систем координат головы вводятся следующие обозначения:

- $A1$  – смещение между пересечением оси  $Z_0$  с осью  $X_1$ ;
- $L1$  – длина звена между пересечением оси  $Z_0$  с осью  $X_1$ ;
- $L2$  – смещение между пересечением оси  $Z_1$  с осью  $X_2$ ;

На рис. 5 представлено обозначение систем координат и D-H параметров на схеме головы робота.

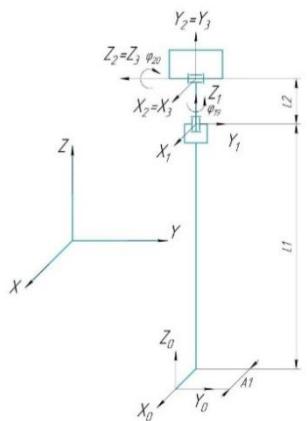


Рис. 5. Обозначение систем координат для головы

Таблица 6. Параметры для головы

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	0	L1	-A1	0
1	$\varphi_i$	L2	0	0
2	$\varphi_i$	0	0	0

В таблице 6 измеренные параметры равны:  $A1 = 14,8$  мм;  $L1 = 128,3$  мм;  $L2 = 24$  мм.

Имея параметры Денавита – Хартенберга для каждого сочленения, можно найти матрицы перехода  $T_i$  от  $(i - 1)$ -го к  $i$ -му звену, где углы  $\theta_i$  зависят от текущих положений углов моторов  $\varphi_i$ :

$$(3) T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС СОЧЛЕНЕНИЙ

Для нахождения координат центра масс всего робота воспользуемся данными о массах и координатах центра масс каждого

дого отдельного сочленения робота в той подвижной системе координат (ПСК), относительно которой этот центр масс будет неподвижен. Координаты центра масс каждого звена определены с использованием системы автоматизированного проектирования (САПР) Autodesk Inventor. Для этого были созданы 3D-модели звеньев с учетом их геометрии и плотности материалов, после чего программный модуль рассчитал положение центра масс. В таблице 7 представлены массы и координаты центра масс каждого сочленения робота. Некоторые сочленения робота состоят из нескольких отдельных ПСК, и расчет координат проводится отдельно для каждой.

Для начала необходимо найти массу всего робота:

$$(4) \quad M = M_{\text{тул}} + 2 * \sum_{i=1}^6 M_{\text{ног\_}i} + 2 * \sum_{i=1}^3 M_{\text{рук\_}i} + \sum_{i=1}^2 M_{\text{гол\_}i} .$$

Далее, зная матрицы перехода к каждому из звеньев из прямой задачи кинематики (ПЗК), найдем векторы центра масс каждого сочленения в неподвижной системе координат (НСК):

$$(5) \quad P_i = T_{0 \rightarrow i} * P_{mi} ,$$

где  $T_{0 \rightarrow i}$  – матрица перехода из НСК в  $i$ -ю ПСК;  $P_{mi}$  – вектор центра масс  $i$ -го сочленения в ПСК.

Координаты центра масс вычисляются по формуле

$$(6) \quad P_M = \frac{\sum_{i=1}^{21} P_i * m_i}{M} ,$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го сочленения.

Так как матрицы перехода к  $i$ -му сочленению  $T_{0 \rightarrow i}$  зависят от текущих положений углов серводвигателей  $\varphi_1, \dots, \varphi_{20}$ , то, следовательно, и координаты центра масс робота будут зависеть от этих углов.

*Таблица 7. Массы и координаты центра масс каждого сочленения робота в ПСК, связанной с этим сочленением*

Название сочленения	Масса, г	Левая сторона			Правая сторона		
		X, мм	Y, мм	Z, мм	X, мм	Y, мм	Z, мм
туловище	709,3	-12,8	0	69,75	-12,8	0	69,75
бедро 1	43,7	0,4	17,5	-1,3	-0,4	17,5	-1,3
бедро 2	155,2	14,35	-20,1	0,5	14,35	-20,1	-0,5
бедро 3	48,5	-37,8	-21,65	0,4	-37,8	-21,65	-0,4
голень 1	157,9	-59,01	2,4	0,4	-59,01	2,4	-0,4
голень 2	155,2	-14,05	-0,8	-20,2	-14,05	0,8	-20,2
стопа	316,5	-4,2	6,3	-2,7	-4,2	-6,3	-2,7
плечо	15,2	-13,03	-15,2	-1	-13,03	15,2	-1
предплечье	89,8	-48,73	0,1	2,4	-48,73	-0,1	2,4
кисть	97,6	-86,58	-1,7	2,3	-86,58	1,7	2,3
шея	15,1	0	-15,85	0	0	-15,85	0
голова	210,6	15,9	24,25	0,6	15,9	24,25	0,6

### 3.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОБОТА

Для расчета сил была составлена динамическая модель, учитывающая действующие на приводы силы тяжести. Вывод уравнений был осуществлен на основе метода Ньютона – Эйлера, который подразумевает последовательное вычисление моментов сил, действующих на звенья робота начиная с  $n$ -го до 1-го. Для этого необходимо вычислить координаты центра масс всех звеньев  $M(x_m, y_m, z_m)$ , которые находятся выше по кинематической цепи, чем  $i$ -е звено, и их суммарную массу  $m$  по методике, описанной выше. Также найдем точку  $O_i$  – координаты центра  $i$ -й ПСК  $O_iX_iY_iZ_i$  и орт оси вращения  $i$ -го сервопривода  $Z_i$  в системе координат  $OXZ$  той стопы, которая неподвижно стоит на земле и является мировой системой координат. Для этого найдем  $T_{foot \rightarrow i}$  – матрицу перехода от системы координат (СК) стопы, которая стала неподвижной к  $i$ -й ПСК:

$$(7) \quad T_{foot \rightarrow i} = T_{foot}^{-i} \times T_i,$$

где  $T_{foot}$  – матрица перехода от исходной СК робота к СК стопы;  $T_i$  – матрица перехода от исходной СК робота к СК  $i$ -го звена.

Извлечём из этой матрицы  $4 \times 4$  данные о центре координат  $O_i$  и орт-векторе  $\overline{z_{iO}}$  оси  $O_iZ_i$ :

$$(8) \quad x = O_{ix} = T_{foot \rightarrow i}(1,4), y = O_{iy} = T_{foot \rightarrow i}(2,4), z = O_{iz} = T_{foot \rightarrow i}(3,4).$$

$$(9) \quad z_{i0x} = T_{foot \rightarrow i}(1,3), z_{i0y} = T_{foot \rightarrow i}(2,3), z_{i0z} = T_{foot \rightarrow i}(3,3).$$

Момент  $\overline{M_{oi}}(mg)$  вокруг точки  $O_i$  силы  $mg$  рассчитывается по формуле (10), а вокруг оси  $Z_i$  – по формуле (11):

$$(10) \quad \overline{M_{oi}}(mg) = \overline{O_iM} \times mg,$$

где  $M_{oi}(mg)$  – момент вокруг точки  $O_i$  силы  $mg$ , вектор от центра ПСК до центра масс  $i$  – звена,  $m$  – масса звена  $i$ .

$$(11) \quad M_{zi}(mg) = \text{Пр}_{\overline{M_{oi}}(mg)} \overline{O_iZ_i},$$

где  $M_{zi}(mg)$  – момент силы тяжести  $mg$ , действующей на звено  $i$ , относительно оси вращения сервопривода  $Z_i$ , а  $\text{Пр}_{M_{oi}(mg)}$  – проекция вектора момента на ось  $Z_i$ ,  $\overline{O_iZ_i}$  – единичный вектор оси вращения сервопривода  $Z_i$ .

Расчётная схема представлена на рис. 6.

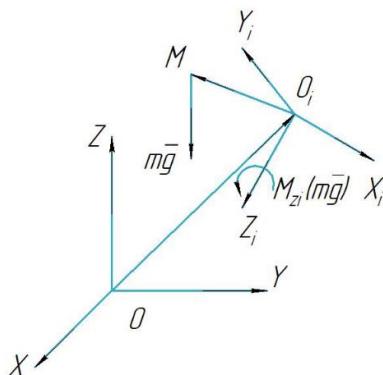


Рис. 6. Схема расчёта момента от силы тяжести, действующей на  $i$ -е звено

Формула (12) следует из того, что у силы тяжести нет горизонтальной составляющей:

$$(12) \quad \bar{m\vec{g}}_x = \bar{m\vec{g}}_y = 0.$$

Тогда окончательная формула для вычисления момента будет

$$(13) \quad M_{zi}(mg) = ((y - y_m) \times z_{i0x} + (x_m - x) \times z_{i0y}) \times mg,$$

где  $(x, y, z)$  – координаты точки  $O_i$ ;  $(x_m, y_m, z_m)$  – координаты центра масс;  $z_{i0x}$  и  $z_{i0y}$  – компоненты единичного вектора.

Также рассмотрим ситуацию, когда робот стоит на двух ногах одновременно и обе поверхности стопы соприкасаются с горизонтальной поверхностью целиком. В этом случае для каждого звена необходимо учесть дополнительный момент, возникающий при действии силы реакции опоры со стороны другой ноги, поэтому надо найти величину этих реакций и точки их приложения. Найдем сначала величины этих реакций.

Так как нижние две подвижности ноги робота пересекаются в одной точке и их оси фиксированы относительно стопы, будем искать реакции со стороны стоп  $R_1$  и  $R_2$  на конструкцию всего остального робота в точке пересечения этих осей. Для расчёта реакций найдем проекции на горизонтальную плоскость радиус-векторов до центра масс всего робота за вычетом стоп  $\overline{O_1M}$  и до

второй стопы  $\overline{O_1O_2}$  ПСК первой стопы, используя рассчитанные матрицы преобразования Денавита – Хартенберга. Тогда  $\overline{O_1H}$  – проекция  $\overline{O_1M}$  на  $\overline{O_1O_2}$  находится по формуле (14), силы реакций на конструкцию робота со стороны стоп  $R_1$  и  $R_2$  рассчитываются по формулам (15) и (16), в которых  $m$  – масса всего робота за вычетом масс стоп. Расчёчная схема приведена на рис. 7.

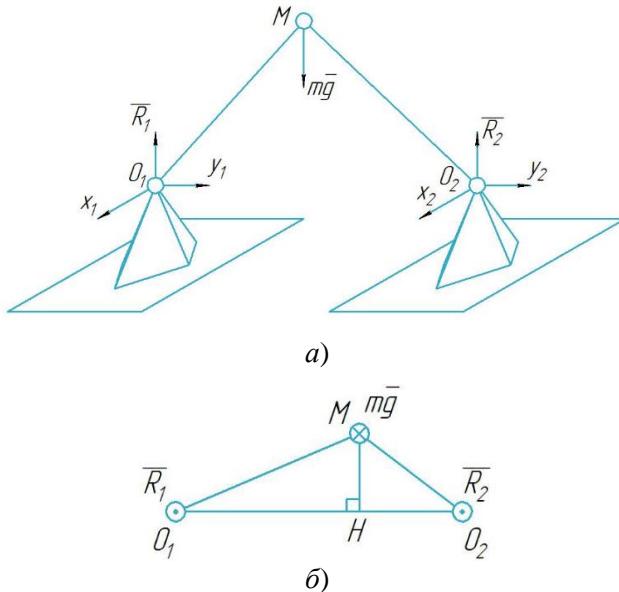


Рис. 7. Схема расчёта реакций а) в шарнирах стоп;  
б) в шарнирах стоп, проекция на горизонтальный план

$$(14) \overline{O_1H} = \text{Пр}_{\overline{O_1M}} \overline{O_1O_2},$$

где  $O_1H$  – расстояние от  $O_1$  до проекции центра масс,  $O_1O_2$  – расстояние между центрами стоп.

$$(15) R_1 = \frac{mg \times (O_1O_2 - O_1H)}{O_1O_2},$$

$$(16) R_2 = \frac{mg \times O_1H}{O_1O_2},$$

где  $R_1$  – вертикальная составляющая силы реакции опоры, действующей на первую стопу ( $O_1$ ) со стороны земли,  $R_2$  – вертикальная составляющая силы реакции опоры, действующей на вторую стопу ( $O_2$ ) со стороны земли.

Искомая точка, в которой приложена реакция со стороны опорной поверхности к стопе, будет совпадать с точкой нулевого момента, так как она является центром давления. Зная точку, приложения силы реакции и её величину, рассчитаем момент, который будет действовать на каждое звено ноги робота:

$$(17) \quad M_{zi}(R) = ((y_m - y) \times z_{i0x} + (x - x_m) \times z_{i0y}) \times (R + m_{foot}g),$$

$M_{zi}(R)$  – момент от силы реакции опоры  $R$  относительно оси сервопривода  $Z_i$ ;  $(x, y, z)$  – координаты точки  $O_i$  (начала СК звена  $i$ ) в системе координат опорной стопы;  $(x_m, y_m, z_m)$  – координаты точки приложения силы реакции  $R$  в СК опорной стопы;  $z_{i0x}$  и  $z_{i0y}$  –  $X$  и  $Y$  компоненты орта оси  $Z_i$  в СК стопы;  $R$  – сила реакции, действующая со стороны стопы другой ноги, рассчитанная по формулам (15) или (16), а  $m_{foot}g$  – сила тяжести стопы, где  $m_{foot}$  – масса одной ступни робота.

Тогда полученная финальная формула (18) момента на выходе динамической модели является суммой моментов от силы тяжести и реакции второй стопы, вычисляемые по формулам (13) и (17) соответственно, причем когда робот стоит на одной ноге,  $M_{zi}(R) = 0$ :

$$(18) \quad M_{zi} = M_{zi}(mg) + M_{zi}(R).$$

### 3.5. РАСЧЕТ ТОЧКИ НУЛЕВОГО МОМЕНТА

*ZMP* используется для оценки устойчивости гуманоидных роботов: если *ZMP* находится внутри опорного полигона (зоны контакта стопы с поверхностью), робот сохраняет равновесие. Расчёт *ZMP* необходим для планирования устойчивых движений и предотвращения падений.

Для расчёта *ZMP* в локальной системе координат стопы используются следующие формулы:

$$(19) \quad x_{ZMP} = \frac{\tau_y}{F_{R_z}},$$

$$(20) \quad y_{ZMP} = \frac{\tau_x}{F_{R_z}},$$

где  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  – компоненты суммарного момента в горизонтальной плоскости,  $F_{R_z}$  – вертикальная составляющая силы реакции опоры.

Суммарная сила реакции опоры определяется как

$$(21) \quad F_R = -F_A - F_G,$$

где  $F_A$  – внешняя сила;  $F_G$  – сила тяжести стопы.

Сумму моментов в горизонтальной плоскости можно найти по формуле

$$(22) \quad \tau_{total} = (r_{foot} \times F_G + \tau_A + r_A \times F_A) \cdot P_{xy},$$

где  $F_G$  – сила тяжести стопы;  $F_A$  и  $\tau_A$  – внешние сила и момент, приложенные к точке крепления сервоприводов;  $r_{foot}$  – вектор от центра стопы до её центра масс;  $r_A$  – вектор до точки приложения силы  $F_A$ ;  $P_{xy}$  – проекция на горизонтальную плоскость.

Внешняя сила  $F_A$  будет вычисляться по формуле (23), когда робот стоит на одной ноге, и по формуле (24), когда робот стоит одновременно на двух ногах:

$$(23) \quad F_A = mg,$$

где  $m$  – масса всего робота за вычетом массы одной ступни.

$$(24) \quad F_A = R,$$

где  $R$  – сила реакции, действующая со стороны робота, вычисляемая по формулам (15) и (16).

Момент  $\tau_A$  будет вычисляться следующим образом:

$$(25) \quad \tau_A = \tau_6 + \tau_5 * \cos(\varphi_6),$$

где  $\tau_5$  и  $\tau_6$  – вычисленные по динамической модели вектора моментов, приложенные к нижним двум подвижностям ноги, а  $\varphi_6$  – угол поворота нижней подвижности ноги.

В случае, когда робот стоит одновременно на двух ногах, мы не можем найти моменты, действующие на звенья робота, не зная точку нулевого момента и наоборот. Возникает задача нахождения неподвижной точки, которая была решена численно:

$$(26) \quad F(ZMP_{left}, ZMP_{right}) = (ZMP_{left}, ZMP_{right}),$$

где  $F$  – функция, которая принимает на вход точки нулевого момента левой и правой ног  $ZMP_{left}$  и  $ZMP_{right}$  соответственно,

рассчитывает по ним моменты, действующие на звенья робота, и по ним считает новые точки нулевого момента; таким образом если мы подадим на вход действительные точки, то на выходе их же и получим.

### 3.6. ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ

Классическое определение области устойчивости описывается теоретическим опорным многоугольником контура стопы, в пределах которого точка нулевого момента должна находиться, чтобы робот сохранял равновесие.  $ZMP$  определяется как точка на опорной поверхности стопы, где суммарный момент горизонтальных сил равен нулю. И если  $ZMP$  выходит за границы опорного многоугольника контура стопы, робот теряет устойчивость. Однако в реальной системе устойчивость ограничивается такими технологическими факторами, как деформация конструкции, люфты или ограниченные мощности сервоприводов в сочленениях, погрешности модели центра масс и сенсоров. Экспериментально измеряемая зона, где робот гарантированно сохраняет равновесие, далее именуется «областью гарантированной статической устойчивости» (ОГСУ). Она является подмножеством теоретического опорного полигона.

Для определения области гарантированной статической устойчивости формируется опорный многоугольник как выпуклая оболочка точек контакта робота с поверхностью, в которой робот гарантированно сохраняет устойчивость. Площадь ОГСУ может быть меньше опорного многоугольника контура стопы, но сохраняется в его пределах. Условие устойчивости:

$$(27) \quad (x_{ZMP}, y_{ZMP}) \in S,$$

где  $S$  – множество точек, образующих ОГСУ.

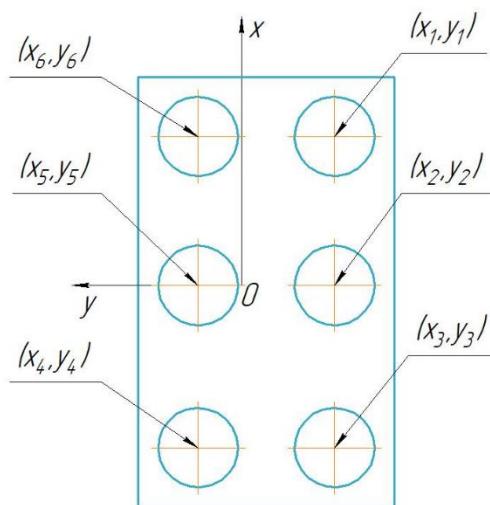
### 3.7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧКИ НУЛЕВОГО МОМЕНТА

Для проведения эксперимента был собран стенд, представляющий собой набор тензодатчиков, которые фиксируются на стопах антропоморфного робота. Схема расположения тензодатчиков на стопе представлена на рис. 8.

Требуется оценить точность расчёта *ZMP* математической моделью с результатами действительных значений, полученных на стенде. Ожидается, что теоретическая *ZMP* совпадает с действительной, но с учетом погрешности.

Для проведения эксперимента определены следующие переменные:

- 1) независимые: углы сочленений робота; количество и расположение точек опоры;
- 2) зависимые: координаты *ZMP*, полученные экспериментально; координаты *ZMP*, рассчитанные математической моделью;
- 3) контролируемые: фиксированные координаты датчиков, напряжение питания, сопротивление проводов, температура и влажность среды.



*Рис. 8. Схема расположения датчиков на стопе*

Для разработки стенда использовались следующие материалы:

- 1) тензорезисторы BF350-3АА;
- 2) микроконтроллер Atmega2560;
- 3) аналого-цифровой преобразователь hx711.

Для проведения эксперимента использовалось следующее программное обеспечение:

- 1) скетч Arduino для управления стендом;
- 2) симулятор-конфигуратор для робота;
- 3) программа, реализующая математическую модель на антропоморфном роботе.

Методика проведения эксперимента следующая. На стопы робота устанавливается стенд с тензодатчиками. Далее рассчитываются координаты положения каждого датчика относительно начала координат каждой стопы. Затем через симулятор-конфигуратор задается позиция гуманоида. После подвешиваем робота так, чтобы он не касался опоры. В этот момент требуется откалибровать датчики на стопе, после чего поставить гуманоида на опору. Затем снимаются показания координат *ZMP* со стендса и математической модели. Итоговый расчет координат точки нулевого момента проводился по формулам

$$(28) \quad x_{ZMP} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i * F_i)}{\sum_{i=1}^6 F_i},$$

$$(29) \quad y_{ZMP} = \frac{\sum_{i=1}^6 (y_i * F_i)}{\sum_{i=1}^6 F_i},$$

где  $F_i$  – значение тензодатчика;  $x_i$  – координата по оси *X* тензодатчика;  $y_i$  – координата по оси *Y* тензодатчика.

### 3.8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ГАРАНТИРОВАННОЙ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Требуется определить область гарантированной статической устойчивости, отражающую реальные границы баланса робота с учётом технологических ограничений.

Для проведения эксперимента определены следующие переменные:

- 1) независимые: углы сочленений робота; количество и расположение точек опоры;

2) зависимые: координаты ZMP, рассчитанные математической моделью;

3) контролируемые: напряжение питания, сопротивление проводов, температура и влажность среды.

Для проведения эксперимента использовался антропоморфный робот комплекта «СТЕМ Академия». Также использовалось следующее оборудование:

1) симулятор-конфигуратор для гуманоидного робота;

2) программа, реализующая математическую модель на антропоморфном роботе;

3) стенд для определения точки нулевого момента с помощью тензодатчиков.

Экспериментальное определение ОГСУ робота проводилось по следующей методике:

1. Робот устанавливался в исходное положение на горизонтальной поверхности. Вторая нога фиксируется над опорой.

2. Определено 10 точек на границах стопы (рис. 9), в направлении которых проводится смещение координат точки нулевого момента относительно начала координат стопы. Положения углов сервоприводов меняются таким образом, чтобы точка нулевого момента меняла координаты в направлении определенной точки до момента потери устойчивости (начало падения робота). После чего фиксируются координаты точки нулевого момента, в которых робот сохраняет устойчивость.

3. Для каждой конфигурации с помощью датчиков деформации измерялось положение координат точки нулевого момента на опорной поверхности.

4. Для повышения точности результатов каждый эксперимент повторялся 5 раз. На основе серии экспериментов вычислялись средние значения. Для построения ОГСУ в координатах стопы использовался метод параметрической кубической сплайн-интерполяции с ограничением граничных значений.

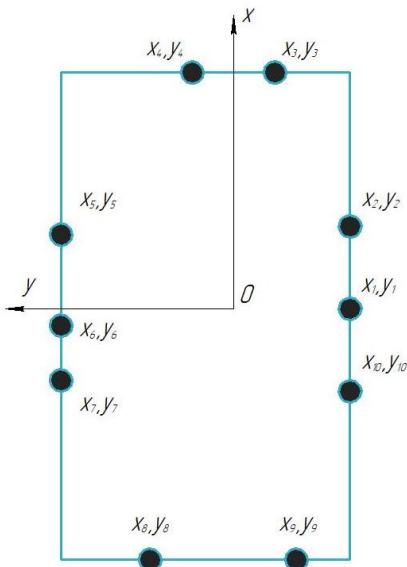


Рис. 9. Схема определения точек интереса, в направлении которых смещается ZMP

#### 4. Результаты проведенных экспериментов

##### 4.1. РАСЧЕТ ТОЧКИ НУЛЕВОГО МОМЕНТА

В ходе эксперимента была составлена таблица данных координат точки нулевого момента, относительно которой рассчитывались среднее значение и погрешность измерений. Итоговые результаты представлены в таблице 8.

Таблица 8. Результаты экспериментального определения точки нулевого момента

Числовая характеристика	Координата	
	$x_{ZMP}$	$y_{ZMP}$
Среднее измеренное значение, мм	-0,47	14,45
Абсолютная погрешность измерений, мм	0,30	0,11
Рассчитанное значение из модели, мм	-0,44	12,92
Абсолютная погрешность модели, мм	0,04	1,54

#### 4.2. ОБЛАСТЬ ГАРАНТИРОВАННОЙ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РОБОТА

Ниже представлены результаты эксперимента по определению ОГСУ. В таблице 9 представлены итоговые средние значения координат точки нулевого момента по пяти проведенным экспериментам. Также указаны погрешности полученных результатов.

Экспериментально определенная область гарантированной статической устойчивости робота представлена на рис. 10. Представленный опорный многоугольник получен с помощью интерполяции экспериментальных данных о координатах точки нулевого момента. Его площадь равна  $4303 \text{ мм}^2$ , что составляет 42,7% от теоретического полигона, площадь которого равна  $10075 \text{ мм}^2$ .

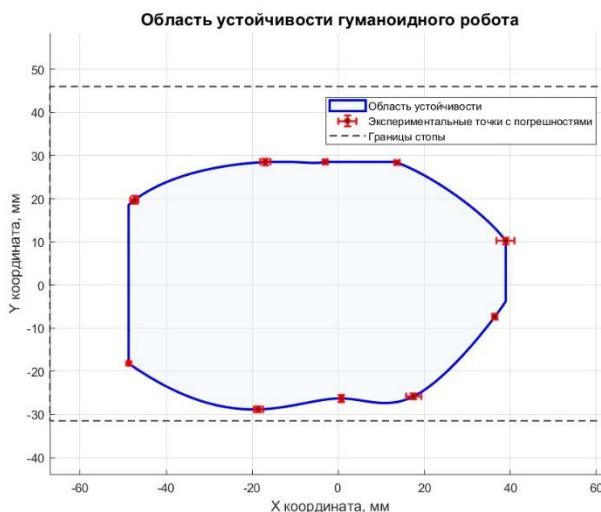


Рис. 10. Область гарантированной статической устойчивости антропоморфного робота

Таблица 9. Результаты экспериментального определения ОГСУ

Номер точки:	Координата $xzmp$ , мм	Абсолютная погрешность $xzmp$ , мм	Относительная погрешность $xzmp$ , %	Координата $yzmp$ , мм	Абсолютная погрешность $yzmp$ , мм	Относительная погрешность $yzmp$ , %	Координаты точек, в направлении которых смешалась ТНМ	
							$X$ , мм	$Y$ , мм
1	0,74	0,44	0,51	-26,29	0,84	1,46	0	-31,5
2	17,49	1,77	2,01	-25,83	0,62	1,08	18	-31,5
3	36,38	0,55	0,63	-7,37	0,7	1,22	63	-8
4	38,94	2,1	2,4	10,23	0,74	1,28	63	10
5	13,68	0,63	0,72	28,36	0,42	0,74	14	46
6	-3,03	0,45	0,52	28,53	0,4	0,69	-3	46
7	-16,92	1,16	1,33	28,5	0,81	1,41	-17	46
8	-47,31	0,92	1,05	19,71	0,88	1,54	-67	20
9	-48,72	0,27	0,32	-18,17	0,42	0,73	-67	-18
10	-18,59	1,09	1,25	-28,82	0,73	1,28	-19	-31,5

#### 4.3. ВЛИЯНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Основным фактором, влияющим на размер ОГСУ, является положение центра масс робота. Снижение центра масс уменьшает моменты сил, действующие на звенья, что снижает деформации и влияние люфтов. Это расширяет ОГСУ (рис. 9), приближая её к границам теоретического полигона. При высоком ЦМ даже малые погрешности ( $\geq 1$  мм) выводят реальный *ZMP* за пределы опоры. Идея гипотезы заключается в том, что изменение координат центра масс воздействует на границы зоны устойчивости, расширяя или сужая её в зависимости от высоты центра масс над опорой. Как итог, снижение координат центра масс, вызванное перераспределением масс в структуре робота, расширило границы зоны устойчивости.

При разработке конструкции робота необходимо учитывать координаты центра масс всего антропоморфного робота. При большой высоте центра масс ОГСУ будет покрывать меньшую площадь стопы, ограничиваясь небольшим опорным многоугольником. При достаточно низком положении возможно добиться наибольшей ОГСУ для антропоморфного робота вплоть до границ самой стопы.

Гипотетически можно описать связь между центром масс и *ZMP* следующим уравнением:

$$(30) \quad x_{ZMP} = x_{CoM} - \frac{h}{g} * \ddot{x}_{CoM},$$

где  $h$  – высота центра масс над опорой;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\ddot{x}_{CoM}$  – горизонтальное ускорение центра масс. Из выражения следует, что при нулевом ускорении ( $\ddot{x}_{CoM} = 0$ ) *ZMP* совпадает с проекцией центра масс.

#### 4.4. ИМПЛЕМЕНТАЦИЯ МОДЕЛИ В СИМУЛЯТОР РОБОТА

Полученный комплекс математических моделей возможно интегрировать в симулятор антропоморфного робота для получения визуализации, так как потенциальное наличие таких функций упростит подбор углов сервоприводов, минимизируя риск выхода *ZMP* за пределы опорного полигона, а также ускорит процесс тестирования новых поз.

Самым простым способом визуализации данных является отображение 3D-маркеров для отображения *ZMP* в реальном времени, чтобы пользователь мог быстрее определять проблему разрабатываемой позы или движения. Более продвинутый вариант реализации инструмента – создать модуль, анализирующий динамику поведения *ZMP* на стопах. В случае выхода за пределы ОГСУ этой точки будет проведена корректировка углов сервоприводов, указанных пользователем.

Также возможна интеграция мировой системы координат для указания целевых координат конечностей антропоморфного робота в реальном времени, вместо работы напрямую с углами сервоприводов.

## **5. Заключение**

В данной работе выполнено исследование зависимости точки нулевого момента от углов поворота сервоприводов с учетом положения центра масс каждого звена для образовательного антропоморфного робота. Основные результаты работы:

1. С использованием методики Денавита – Хартенберга построена полная кинематическая модель робота и получены аналитические выражения для расчета положения центра масс.
2. Для расчета сил была составлена динамическая модель, учитывающая действующие на приводы силы тяжести.
3. Экспериментально оценена точность расчета точки нулевого момента.
4. Экспериментально определена область гарантированной статической устойчивости робота.

Полученные результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение. С теоретической точки зрения, разработанные модели и методики могут быть использованы для дальнейших исследований в области антропоморфной робототехники. С практической точки зрения, модифицированная конструкция робота и усовершенствованный симулятор представляют собой продвинутый инструмент для образовательных целей, позволяющий наглядно демонстрировать принципы устойчивости и управления антропоморфными роботами.

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку алгоритмов динамической стабилизации робота при ходьбе с использованием информации о положении точки нулевого момента и области гарантированной статической устойчивости. Также планируется усовершенствовать существующие алгоритмы, добавив в математическую модель динамическое изменение ОГСУ.

### ***Литература***

1. БОРИСОВ О.И., ГРОМОВ В.С., ПАРКИН А.А. *Методы управления робототехническими приложениями: учебное пособие.* – СПб.: Университет ИТМО, 2016.
2. ГОРОБЦОВ А.С., АНДРЕЕВ А.Е., МАРКОВ А.Е. и др. *Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управляемого движения шагающих роботов* // Труды СПИИРАН. – 2019. – Т. 18, №1. – С. 85–122.
3. Грант РНФ N 24-29-00671 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://rscf.ru/project/24-29-00671> (дата обращения: 25.04.2025).
4. ЗЕНКЕВИЧ С.Л., ЮЩЕНКО А.С. *Основы управления манипуляционными роботами: учебник для вузов.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
5. КИЛИН А.А., КИЛИНА Н.А., МАМАЕВ И.С. *Динамика управляемых механических систем.* – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020. – 280 с.
6. КОЛЮБИН С.А. *Динамика робототехнических систем: учебное пособие.* – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 117 с.
7. ЛЕСКОВ А.Г., БАЖИНОВА К.В., СЕЛИВЕРСТОВА Е.В. *Описание кинематики антропоморфных роботов методом блочных матриц* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2018. – №6. – С. 123.
8. ПОПОВ Д.И., КЛИМЧИК А.С. *Моделирование жесткости для шагающих роботов* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т. 11, №4. – С. 631–651.
9. ПРОТОПОПОВ А.А., СТЕРЕХОВА В.С. *Исследование применимости методов стабилизации движения для малоразмерных антропоморфных роботов* // Молодежь и современ-

- ные информационные технологии : Сборник трудов XVI Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, 3-7 декабря 2018 г., Томск. – Томск: Изд-во ТПУ, 2019. – С. 344–345.
10. Секрет устойчивого хождения антропоморфного робота на двух ногах в автономном режиме [Электронный ресурс]: эссе. – URL: <https://streltsovaleks.narod.ru/WalkingRobots.htm> (дата обращения: 10.04.2025).
  11. СЕМЕНОВ В.А., МОРОЗОВ А.В. *Методы определения центра масс в образовательной робототехнике* // Робототехника и искусственный интеллект. – 2023. – №2. – С. 67–75.
  12. ФУ К., ГОНСАЛЕС Р., ЛИ К. *Робототехника*. – М.: Мир, 1989. – 624 с.
  13. ANGELES J. *Fundamentals of robotic mechanical systems: Theory, methods and algorithms*. – Springer, 2007.
  14. CRAIG J.J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. – Pearson Education, 2017. – 408 p.
  15. DENAVIT J., HARTENBERG R.S. *Kinematic notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices* // J. Appl. Mech. – 1955. – P. 215–221.
  16. GOSWAMI A. *Postural Stability of Biped Robots and the Foot-Rotation Indicator (FRI) Point* // Int. Journal of Robotic Research. – 1999. – P. 1–11.
  17. HWANG Y.-L., TA T.-N., CHEN C.-H. *Using Zero Moment Point Preview Control Formulation to Generate Nonlinear Trajectories of Walking Patterns on Humanoid Robots* // 12th Int. Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD). – 2015. – P. 2405–2412.
  18. KAJITA S., HIRUKAWA H., HARADA K. et al. *Introduction to Humanoid Robotics*. – Heidelberg: Springer, 2014.
  19. PINA FILHO A.C. de (ed.) *Humanoid Robots: New Developments*. – Croatia: Advanced Robotic Systems International, 2007.
  20. SPONG M.W., HUTCHINSON S., VIDYASAGAR M. *Robot Modeling and Control: First Edition*. – Hoboken: Wiley-Interscience, 2006. – 464 p.
  21. VUKOBRATOVIC M., BOROVAC B. *Zero-Moment Point — Thirty-Five Years of Its Life* // Int. Journal of Humanoid Robotics. – 2004. – Vol. 1, No. 1. – P. 157–173.

22. ZABALA M., MORAN R., BLANCO S. A New Educational Tool for Bioloid Kit // Proc. of 4th Int. Workshop Teaching Robotics, Teaching with Robotics & 5th Int. Conf. Robotics in Education. – Padova, Italy, 2014.

## CALCULATION AND DETERMINATION OF THE STABILITY AREA OF AN EDUCATIONAL ANTHROPOMORPHOUS ROBOT

**Dmitrii Ipatov**, Moscow Polytechnic University, Moscow, Student (ipatow.dima2014@yandex.ru).

**Konstantin Petrov**, Moscow Polytechnic University, Moscow, Student (r.92rab@gmail.com).

**Michael Chernobryvets**, Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Student (misha8cher@gmail.com).

**Konstantin Kulagin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Research Associate (Kka86@bk.ru).

*Abstract: This article discusses the development and study of the educational anthropomorphic robot of the STEM Academy kit. The robot design features increased mass and mass redistribution with heavier feet to lower the center of mass in order to improve stability. The Denavit – Hartenberg technique was used to analyze the kinematic characteristics. A dynamic model was compiled to calculate the external forces acting on the robot, taking into account the gravity forces acting on the drives based on the Newton – Euler method. A model was constructed for the dependence of the zero moment point on the servo rotation angles taking into account the position of the center of mass of each link. An experimental determination of the zero moment point was carried out using strain gauges, the results of which were compared with theoretical data. A new term, the "region of guaranteed static stability" (ROGSS), was introduced, which is a subset of the fundamental concept of the "region of stability", supplemented by taking into account technological factors. An experimental analysis of the stability area of the ROGSS robot was also conducted, which showed that the ROGSS does not correspond to the dimensions of the stability area described by the physical contour of the foot. Comparison of theoretical and experimental results showed that the calculated mathematical model can be integrated into the control system of an anthropomorphic robot, as well as into a simulator of motion programming for assessing static stability. The results obtained allow predicting the stability of the target position in statics and can serve as a basis for further research into dynamic stabilization algorithms.*

Keywords: anthropomorphic robots, analysis of kinematic characteristics, analysis of dynamic characteristics, stability region, zero moment point.

УДК 531.1

ББК 32.816

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии С.Л. Подвальным.*

*Поступила в редакцию 17.05.2025.*

*Опубликована 30.09.2025.*

# **АНАЛИЗ РАЗДЕЛИМОСТИ ДВИЖЕНИЙ УПРАВЛЕНИЕМ ДЛЯ ДВУХ ИДЕНТИЧНЫХ МАЯТНИКОВ**

**Сулиман Б.<sup>1</sup>**

(*Университет Алеппо, Сирия,*

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург*)

**Фрадков А.Л.<sup>2</sup>**

(*Институт проблем машиноведения РАН,*

*Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург*)

Исследуется возможность разделения движений двух идентичных управляемых маятников по их энергии при помощи одного скалярного воздействия, генерируемого механизмом обратной связи. Такая задача может возникнуть при неполноприводном (*underactuated*) управлении колебательными механическими системами, при избирательном (*селективном*) управлении системами отдельных молекул и т.п. Исследован типовой случай, когда разделение требуется произвести по уровню энергий подсистем. Для решения задачи предложено синтезировать управление с обратной связью. Алгоритм управления строится на основе метода скоростного градиента, модифицированного для решения задач с фазовыми ограничениями. Для синтеза управления с ограничениями используется идея метода штрафных функций. Для задачи управления идентичными несвязанными маятниками при помощи одного управления компьютерным моделированием показано, что даже небольшая разница в начальных состояниях маятников позволяет реализовать требуемое разделение, причем результат слабо зависит от существенных изменений параметров объекта и от наличия возмущений. Показано также, что результат слабо зависит от параметров регулятора (коэффициента усиления  $\gamma$ ) и от силы штрафа  $\alpha$ . Результаты моделирования подтверждают достаточно высокую скорость сходимости алгоритма.

**Ключевые слова:** гамильтоновы системы, управление энергией, фазовые ограничения, управление механическими системами, связанные маятники, штрафная функция, метод скоростного градиента, скорость сходимости, численное моделирование.

---

<sup>1</sup> Сулиман Башар, аспирант (*st102994@student.spbu.ru*).

<sup>2</sup> Александр Львович Фрадков, д.т.н., профессор (*fradkov@mail.ru*).

## 1. Введение

Многие практические задачи управления физическими и механическими системами требуют учета ограничений, наложенных на переменные состояния системы. Однако решение задач с ограничениями может быть очень сложным, особенно для задач оптимального управления. Ограничения, которые должны выполняться в каждый момент времени, могут существенно изменить динамические свойства замкнутой системы. Трудности становятся еще больше для нелинейных и неопределенных систем.

Сложные механические системы обычно состоят из нескольких подсистем. Одной из практических задач управления ими является селективное возбуждение, когда требуется увеличить энергию одной подсистемы и ограничить энергию другой. К числу таких задач относятся, например, управление прохождением через зону резонанса [14], селективное возбуждение молекул [2]. Известно, что для решения подобных задач применяется метод скоростного градиента [3, 4, 10, 1]. Метод скоростного градиента применим для случая, когда цель управления задана как асимптотическая минимизация скалярной целевой функции состояния системы. Он позволяет сконструировать обратную связь по состоянию, позволяющую достичь цели управления при определенных естественных условиях. Метод применялся к различным задачам нелинейного и адаптивного управления физическими и механическими системами [10]. Однако фазовые ограничения в виде неравенств ранее не учитывались (случай ограничений типа равенства рассмотрен в книге [8]). В работах [5, 6] был предложен подход к управлению при фазовых ограничениях типа неравенства, основанный на расширенной версии метода скоростного градиента. Ограничения учитываются с помощью версии штрафных (барьерных) функций, хорошо известных в математическом программировании [7]. Приведен общий результат, дающий условия достижения цели управления при ограничениях, заданных скалярной функцией ограничений. Применение метода проиллюстрировано на примере пары маятников, находящихся под воз-

действием одной управляющей силы. Целью является достижение заданного значения энергии одного маятника при соблюдении ограничения на энергию другого маятника. Как аналитическое исследование, так и численные результаты подтверждают хорошую работу предлагаемого регулятора. Однако исследование работы метода при вариациях параметров системы в [5, 6] не проводилось.

В настоящей работе проводится систематическое исследование поведения замкнутой системы из двух идентичных маятников при изменении параметров и начальных условий маятников, а также параметров синтезированного регулятора. Основная цель исследования – анализ разделимости движений по энергии при помощи управления.

## **2. Алгоритм управления: постановка задачи и синтез регулятора**

Опишем, следуя [5], постановку задачи и ее решение на основе метода скоростного градиента. Рассмотрим управляемую систему, описываемую уравнениями состояния:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = F(x, u), \quad x(0) \in X_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R},$$

где  $x$  – вектор состояния;  $u$  – управляющий вход;  $t$  – время;  $X_0$  – множество возможных начальных состояний;  $F(x, u)$  – гладкая функция по обоим аргументам. Цель управления задается с помощью неотрицательной гладкой функции  $Q(x)$  (далее – целевая функция):

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} Q(x(t)) = 0,$$

где  $x(t)$  – решение (1) с некоторым допустимым  $u(t)$  и  $x(0) \in X_0$ . Фазовые ограничения задаются неравенством для гладкой функции  $B(x)$  (далее – функция ограничений):

$$(3) \quad B(x(t)) > 0 \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad \text{и} \quad x(0) \in X_0.$$

Предполагается, что  $B(x) > 0$  для  $x \in X_0$ . Цель управления – минимизировать целевую функцию  $Q(x)$  без пересечения множества  $B^{-1}(0)$ , где  $B^{-1}(0) = x \in X_0 : B(x) = 0$ . Для синтеза алгоритма управления используется идея метода скоростного

градиента для случая без ограничений. Для этого предлагается ввести штрафную функцию для минимизации без ограничений:

$$(4) \quad V(x, \alpha) = Q(x) + \frac{\alpha}{B(x)},$$

где  $\alpha > 0$  — штрафной параметр. В отличие от стандартного метода штрафных функций (внутренней точки) [7], в предлагаемом подходе штрафной параметр не устремляется к нулю с ростом  $t$ , а остается постоянным. Таким образом, в данной работе исследуется возможность приближенного решения задачи в этом случае на основе метода скоростного градиента и оценивается погрешность решения при различных значениях штрафного параметра  $\alpha > 0$ .

Согласно методу скоростного градиента вычисляется скалярная функция  $w(x, u, \alpha)$ :

$$(5) \quad w(x, u, \alpha) = \mathcal{L}_F V(x, \alpha) = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\alpha}{B(x)^2} \frac{\partial B}{\partial x} \right) F(x, u),$$

где  $\mathcal{L}_F$  означает производную вдоль траекторий системы (1), а  $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x}$  — векторы-строки частных производных. Затем вычисляется градиент  $w(x, u, \alpha)$  по управляющим переменным:

$$(6) \quad \nabla_u w(x, u, \alpha) = \left( \frac{\partial w}{\partial u} \right)^\top = \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)^\top \left( \nabla_x Q(x) - \frac{\alpha}{B(x)^2} \nabla_x B(x) \right).$$

Алгоритм изменения  $u(t)$  определяется уравнением

$$(7) \quad u(t) = u_0 - \gamma \left( \frac{\partial F}{\partial u} \right)^\top \left( \nabla_x Q(x) - \frac{\alpha}{B(x)^2} \nabla_x B(x) \right),$$

где  $u_0$  — начальное значение управляющей переменной (например,  $u_0 = 0$ ), а  $\gamma = \gamma^\top > 0$  — положительно определённая матрица усиления. Если  $\alpha = 0$ , то (7) преобразуется в алгоритм скоростного градиента в конечной форме без фазовых ограничений.

Алгоритм (7) определен только в области  $\{x : B(x) > 0\}$ .

### 3. Управление энергией гамильтоновых систем с ограничением

Аналитическое исследование задачи в общем случае затруднительно, поэтому ниже рассмотрим частный случай задачи:

управление энергией гамильтоновой системы при ограничении на энергию другой идентичной гамильтоновой системы. Специфика задачи в том, что требуется разделить движения двух одинаковых систем при помощи всего лишь одного управления, не нарушая ограничения в течение всего процесса функционирования систем.

Рассмотрим гамильтонову систему

$$(8) \quad \frac{dp^k}{dt} = -\frac{\partial H(p, q, u)}{\partial q^k}, \quad \frac{dq^k}{dt} = \frac{\partial H(p, q, u)}{\partial p^k}, \\ k = 1, \dots, n, \quad (q(0), p(0)) \in X_0.$$

Здесь  $q = (q^1, \dots, q^n)^\top$ ,  $p = (p^1, \dots, p^n)^\top$  — векторы обобщённых координат и импульсов, составляющие вектор состояния  $(p, q)$ ;  $H(p, q, u)$  — управляемый гамильтониан;  $u \in \mathbb{R}^m$  — вход (обобщённая сила);  $X_0$  — множество начальных состояний. Предположим, что гамильтониан аффинен по управлению:

$$(9) \quad H(p, q) = H_0(p, q) + H_1(p, q)^\top u,$$

где  $H_0(p, q)$  — внутренний гамильтониан,  $H_1(p, q)$  —  $m$ -мерный вектор (столбец) потенциалов взаимодействия [12]. Предположим, что система состоит из двух подсистем, и рассмотрим задачу избирательного возбуждения, когда требуется увеличить энергию одной подсистемы и ограничить энергию другой (например, прохождение через резонанс [14], избирательное возбуждение молекулы [2]). Пусть  $q_1, p_1$  — векторы обобщённых координат и импульсов первой подсистемы, а  $q_2, p_2$  — соответственно, второй. Будем считать, что подсистемы независимы, т.е.

$$(10) \quad H_0(p, q) = H_0^1(p_1, q_1) + H_0^2(p_2, q_2),$$

где  $H_0^1$  — гамильтониан первой подсистемы;  $H_0^2$  — гамильтониан второй подсистемы.

Задача избирательного возбуждения формализуется следующим образом. Цель управления — стабилизация энергии первой подсистемы на заданном значении  $E_1$ :

$$(11) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} H_0^1(p_1(t), q_1(t)) = E_1$$

при ограничении энергии второй подсистемы значением  $E_2$ :

$$(12) \quad H_0^2(p_2(t), q_2(t)) < E_2, \quad t \geq 0.$$

Предполагается, что начальное состояние системы удовлетворяет ограничению (12).

Вводятся целевая функция и функция ограничений:

$$(13) \quad Q(p_1, q_1) = \frac{1}{2} (H_0^1(p_1, q_1) - E_1)^2,$$

$$(14) \quad B(p_2, q_2) = E_2 - H_0^2(p_2, q_2).$$

Тогда цель управления (11) принимает вид (2), а ограничение (12) — вид (3). Согласно (4) штрафная функция:

$$(15) \quad V(p, q, \alpha) = Q(p_1, q_1) + \frac{\alpha}{B(p_2, q_2)} = \\ = \frac{(H_0^1(p_1, q_1) - E_1)^2}{2} + \frac{\alpha}{E_2 - H_0^2(p_2, q_2)}.$$

Для задачи избирательного возбуждения (11), (12) гамильтоновой системы (8) закон управления (7) принимает вид

$$(16) \quad u(t) = u_0 - \gamma \nabla_u \mathcal{L}_F V(p(t), q(t), \alpha),$$

где  $\mathcal{L}_F$  — производная вдоль траекторий системы (11);  $u_0$  — начальное значение управления;  $\gamma = \gamma^\top > 0$  — матрица усиления;  $\alpha > 0$  — параметр.

#### 4. Два маятника под действием одной силы

Для демонстрации предложенных алгоритмов исследуется задача избирательного управления энергией двух маятников. Рассмотрим два независимых нелинейных маятника, находящихся под действием одной силы (рис. 1). Уравнения системы:

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = (ml^2)^{-1} p_1, \\ \dot{p}_1 = -mgl \sin q_1 + ul \cos q_1, \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{q}_2 = (ml^2)^{-1} p_2, \\ \dot{p}_2 = -mgl \sin q_2 + ul \cos q_2. \end{cases}$$

Точка над переменной обозначает её производную по  $t$ ;  $q_1$ ,  $p_1$  — угловая координата и импульс первого маятника;  $q_2$ ,  $p_2$  — второго;  $g$  — ускорение свободного падения. Маятники имеют одинаковую массу  $m$ , длину  $l$ . Управляющий момент  $u$  приложен к оси подвеса маятников и создает врачающее воздействие относительно этой оси.

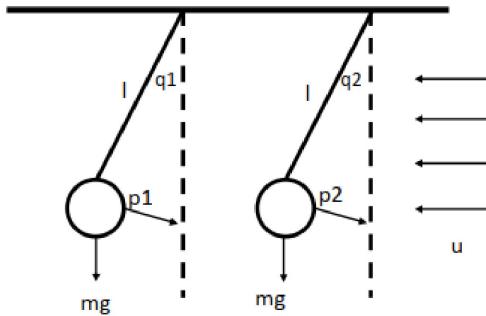


Рис. 1. Два независимых нелинейных маятника под действием единой управляемой силы  $u$

Перепишем систему (17), (18) в гамильтоновой форме (8), (9), (10). Гамильтониан каждого маятника:

$$(19) \quad H_0^k(p_k, q_k) = \frac{1}{2ml^2} p_k^2 + mgl(1 - \cos q_k), \quad k = 1, 2.$$

Маятники независимы, поэтому справедливо соотношение (10).

Гамильтониан взаимодействия:

$$(20) \quad H_1(p, q) = -l(\sin q_1 + \sin q_2).$$

Отметим, что в системе (17), (18) две регулируемые величины и всего лишь одно управляющее воздействие. Эта ситуация соответствует соответствует английскому термину «underactuated system», означающему систему, у которой размерность множества управлений меньше, чем размерность целевого множества (множества регулируемых величин). В случае механической системы общего положения это свойство выполнено, если число управляющих переменных меньше числа степеней свободы системы. В таком случае часто используется термин «неполноприводная система». Отметим, что, в силу идентичности маятников, если  $q_1(t) = q_2(t)$  и  $p_1(t) = p_2(t)$  при каком-то  $t > 0$ , то они останутся равными для всех  $t$  при любом управлении  $u(t)$ .

#### 4.1. Постановка задачи управления

Требуется синтезировать управление, которое раскачивает первый маятник до заданного уровня энергии  $E_1$  и ограничивает энергию второго значением  $E_2$ . Цель формализуется соотношением (11), ограничение – (12). Необходимо найти закон обратной связи  $u(p, q)$ , обеспечивающий цель (11) и ограничение (12).

Предположим, что начальные условия маятников различны:

$$(21) \quad (p_1(0), q_1(0)) \neq (p_2(0), q_2(0)),$$

и удовлетворяют ограничению (12):

$$(22) \quad H_0^2(p_2(0), q_2(0)) < E_2.$$

#### 4.2. Синтез алгоритма управления

Согласно подходу, представленному в предыдущем разделе, алгоритм синтезируется на основе уравнения (15) при  $u_0 = 0$  и уравнения (16) при  $u_0 = 0$ .

$$(23) \quad \begin{aligned} u(p, q) &= -\gamma \nabla_u \mathcal{L}_F \mathbb{V}(p, q, \alpha) = \\ &= -\gamma \nabla_u \mathcal{L}_F \left[ \frac{(H_0^1(p_1, q_1) - E_1)^2}{2} + \frac{\alpha}{E_2 - H_0^2(p_2, q_2)} \right], \\ u(p, q) &= -\gamma \left( \frac{p_1 \cos q_1}{ml} (H_0^1(p_1, q_1) - E_1) + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \frac{p_2 \cos q_2}{ml} (H_0^2(p_2, q_2) - E_2)^{-2} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma > 0$  – скалярный коэффициент,  $\alpha > 0$  – коэффициент штрафа.

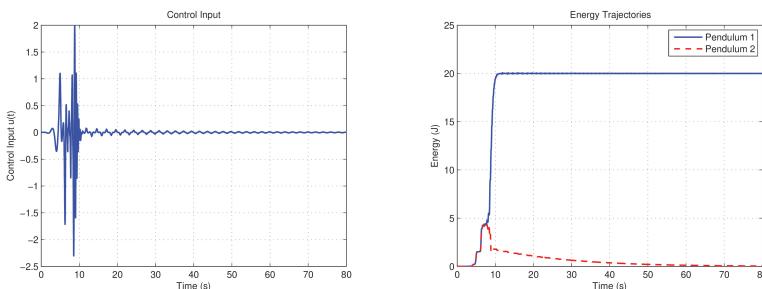
### 5. Численный анализ разделимости движений одинаковых маятников общим управлением

#### 5.1. Исследование задачи без возмущений

Для исследования способности регулятора обеспечивать достижение цели управления при выполнении заданных фазовых ограничений было проведено компьютерное моделирование. Были выбраны следующие базовые значения параметров системы и начальных условий, удовлетворяющие ограничению на энергию второго маятника:

- параметры каждого маятника:  $m = 0,1$ ,  $l = 1$ ,  $g = 10$ ;
- начальные условия:  $q_1 = 0$ ,  $q_2 = 0,05$ ,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ;
- целевое значение энергии для первого маятника:  $E_1 = 20$ ;
- ограничение по энергии для второго маятника:  $E_2 = 5$ ;
- время моделирования: 80 с.

Результаты моделирования представлены на рис. 2.



*Рис. 2. Результаты моделирования при  $\gamma = 0,015$ ,  $\alpha = 10$ .  
Слева – динамика управляющего воздействия, справа –  
динамика энергий маятников*

Из рисунка видно, что при  $\gamma = 0,015, \alpha = 10$  управляющее воздействия после некоторого периода активных колебаний становится малым. Первый маятник достигает заданного уровня энергии, а энергия второго маятника находится в заданных пределах и также становится малой.

Анализ для  $\gamma = 0,03, \alpha = 10$  показывает (рис. 3), что с ростом коэффициента усиления  $\gamma$  амплитуда управления остаётся небольшой, а требования к энергиям обоих маятников также удовлетворяются. При этом промежуток времени, в течение которого разделения движений маятников не происходит, несколько возрастает.

Анализ результатов моделирования для  $\gamma = 0,015, \alpha = 1$  показывает (рис. 4), что уменьшение коэффициента штрафа для второго маятника приводит к дальнейшему увеличению промежутка времени, на котором движения маятников не разделены по энергиям, хотя асимптотические требования к поведению энергий выполняются.

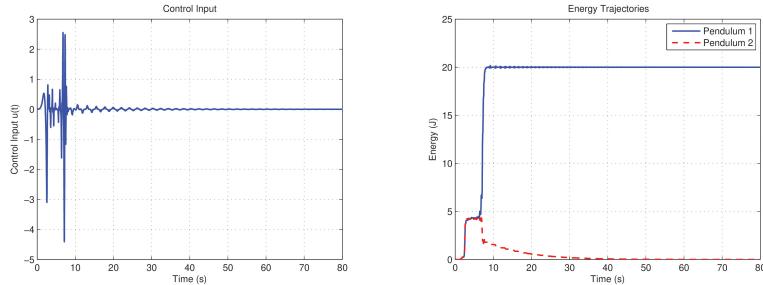


Рис. 3. Результаты моделирования при  $\gamma = 0,03, \alpha = 10$

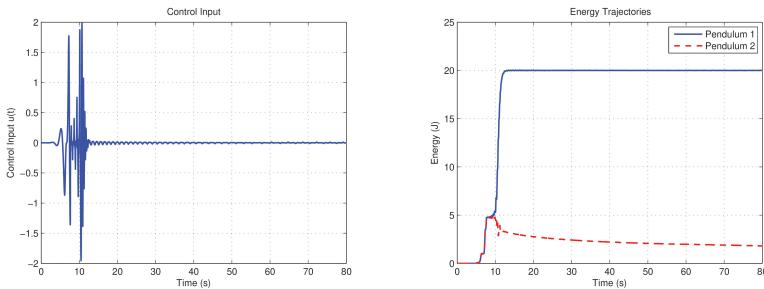


Рис. 4. Результаты моделирования при  $\gamma = 0,015, \alpha = 1$

## 5.2. Исследование влияния демпфирования

Мы будем исследовать влияние потерь энергии в первом и во втором маятнике по отдельности. Возмущенные уравнения маятников имеют вид

$$(24) \quad \begin{cases} \dot{q}_1 = (ml^2)^{-1} p_1, \\ \dot{p}_1 = -mgl \sin(q_1) - K_1 p_1 + ul \cos(q_1), \end{cases}$$

$$(25) \quad \begin{cases} \dot{q}_2 = (ml^2)^{-1} p_2, \\ \dot{p}_2 = -mgl \sin(q_2) - K_2 p_2 + ul \cos(q_2), \end{cases}$$

где  $K_1, K_2$  – коэффициенты трения для 1-го и 2-го маятника соответственно.

На рис. 5 видно, что слабые потери ( $K_1 = 0,01$ ) не оказывают существенного влияния на процессы в системе.

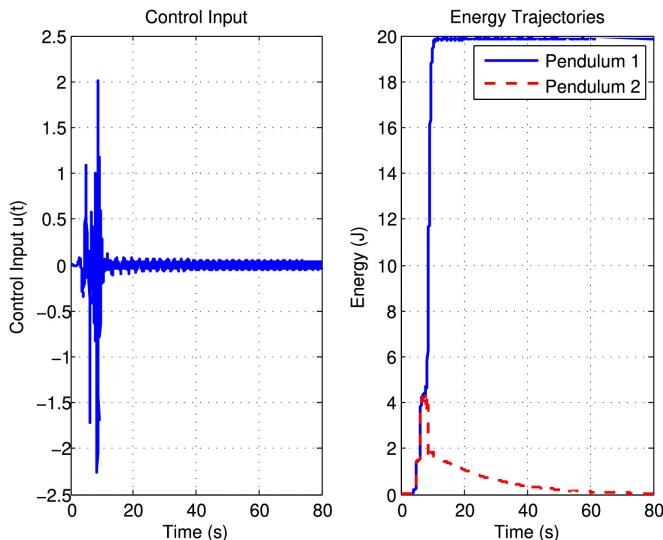


Рис. 5. Результаты моделирования при  $k_1 = 0,01, k_2 = 0$

Следующие графики (рис. 6, 7) показывают, что увеличение демпфирования ( $K_1 = 0,1$ ) не дает возможность первому маятнику достичь желаемого значения энергии, несмотря на существенный рост амплитуды колебаний управляющего воздействия.

Были проведены также эксперименты по моделированию процессов в условиях демпфирования второго маятника, но они показали, что этот тип возмущения не ухудшает свойства разделимости процессов по энергии маятников.

### 5.3. Исследование влияния начальных условий

Как уже было сказано, нетривиальность рассматриваемой задачи состоит в исследовании возможности разделять движения двух идентичных механических систем при помощи одного управления, т.е. в условиях неполной управляемости системы. Теоретически было показано [5], что такое разделение возможно при неодинаковых начальных состояниях маятников, однако практическая возможность и характер динамики системы вблизи

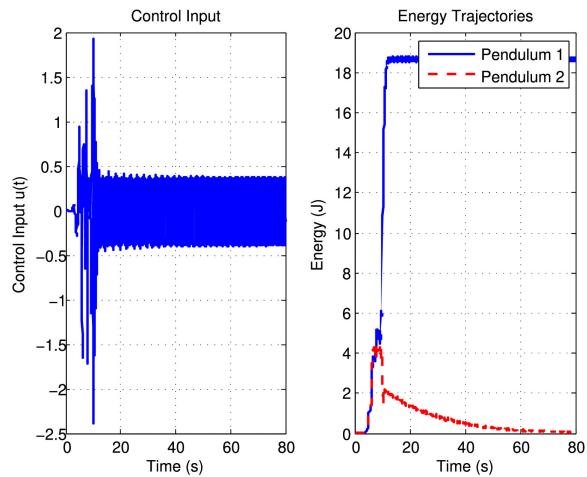


Рис. 6. Результаты моделирования при  $k_1 = 0.1$ ,  $k_2 = 0$

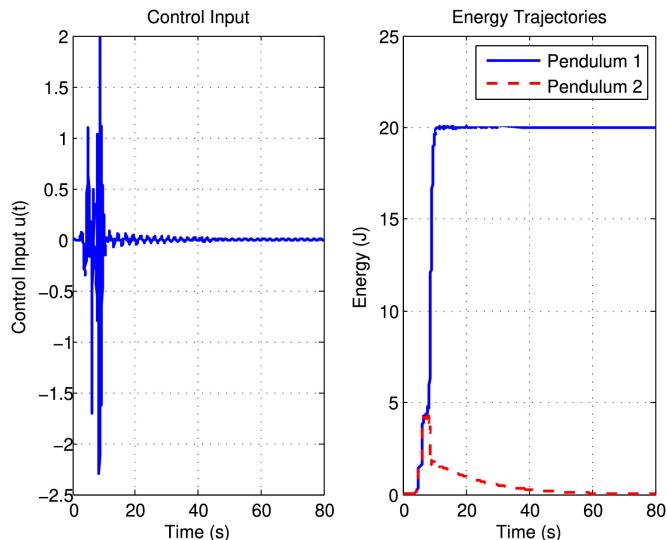
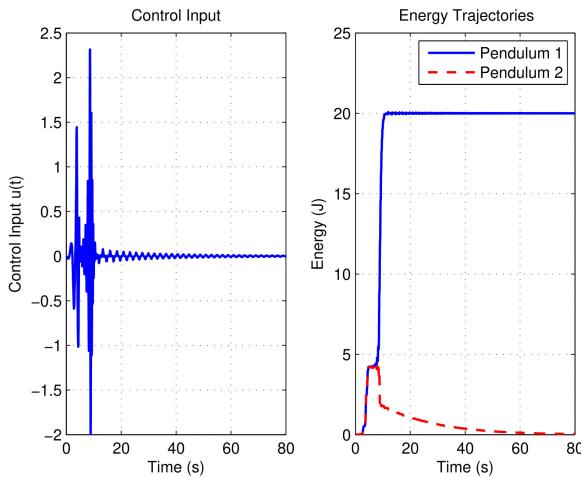


Рис. 7. Результаты моделирования при  $k_2 = 0.01$ ,  $k_1 = 0$

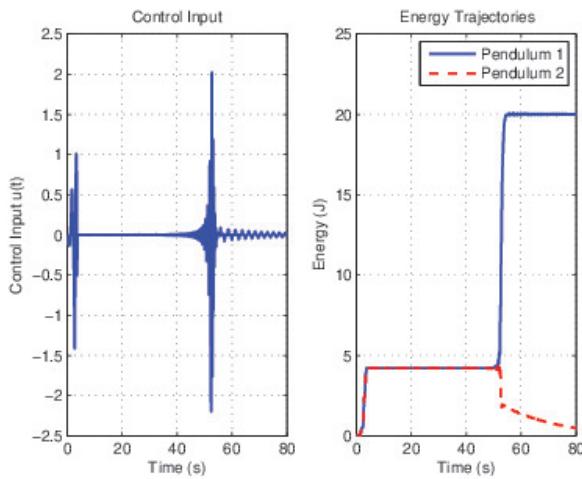
совпадающих начальных условий не исследовалась. Ниже демонстрируется характер поведения системы управления при сближающихся начальных условиях.

Рисунок 8 показывает, что уменьшение разности начальных условий в 5 раз (до  $10^{-2}$ ) изменяет динамику процессов незначительно.

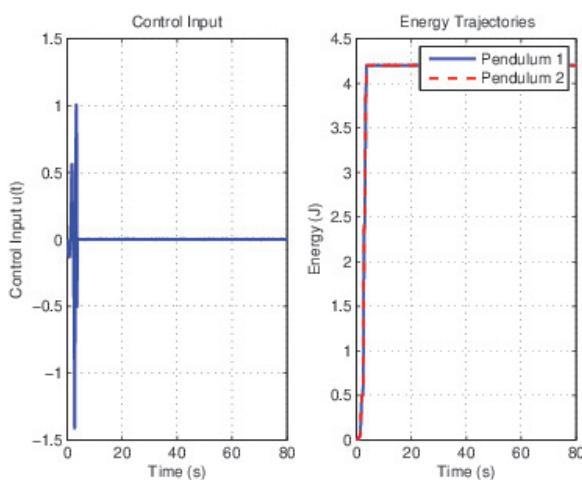


*Рис. 8. Результаты моделирования  
при  $q_1(0) = 0, q_2(0) = 0,01, p_1(0) = 0, p_2(0) = 0$*

Уменьшение же разности начальных условий до  $10^{-5}$  приводит к существенному затягиванию фазы, когда движения по энергии не разделены. Тем не менее ожидаемое разделение характера движений маятников происходит, при этом в момент разделения величина управляющего воздействия резко возрастает (рис. 9). И только когда начальные условия маятников полностью совпадают, разделения движений не происходит, причем ценой такого свойства является появление мгновенной ошибки численного интегрирования, приводящей к скачку траекторий через энергетический барьер (рис. 10).



*Рис. 9. Результаты моделирования*  
при  $q_1(0) = 0,05$ ,  $q_2(0) = 0,04999$ ,  $p_1(0) = 0$ ,  $p_2(0) = 0$



*Рис. 10. Результаты моделирования*  
при  $q_1(0) = 0,05$ ,  $q_2(0) = 0,05$ ,  $p_1(0) = 0$ ,  $p_2(0) = 0$

## **6. Заключение**

В работе исследована возможность разделения движений двух идентичных динамических систем при помощи одного скалярного воздействия, генерируемого механизмом обратной связи. Такая задача может возникнуть при неполноприводном (underactuated) управлении колебательными механическими системами, при избирательном (селективном) управлении системами отдельных молекул и т.д. Исследован типовой случай, когда в качестве динамических систем рассматриваются идентичные нелинейные маятники, а разделение требуется произвести по уровню энергий подсистем. Для решения задачи предложено синтезировать управление с обратной связью. Алгоритм управления строится на основе метода скоростного градиента, расширенного для решения задач с фазовыми ограничениями. Для синтеза управления с ограничениями используется идея метода штрафных функций, работоспособность которого в данном случае следует из инвариантности энергий подсистем, см [5, 6].

Показано, что даже небольшая разница в начальных состояниях маятников позволяет реализовать требуемое разделение, причем результат слабо зависит от существенных изменений параметров объекта и от наличия возмущений. Показано также, что результат слабо зависит от параметров регулятора (коэффициента усиления  $\gamma$ ) и от силы штрафа  $\alpha$ .

Сказанное подтверждает перспективность предложенного подхода.

## **Литература**

1. АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Метод скоростного градиента и его приложения* // Автоматика и телемеханика. — 2021. — №9. — С. 3–72; Autom. Remote Control. — 2021. — Vol. 82, No. 9. — P. 1463–1518.
2. АНАНЬЕВСКИЙ М.С. *Селективное управление наблюдаемыми в ансамбле квантовомеханических молекулярных систем* // Автоматика и телемеханика. — 2007. — №8. —

- C. 32–43; *Autom. Remote Control.* — 2007. — Vol. 68, No. 8. — P. 1322–1332.
3. ФРАДКОВ А.Л. *Схема скоростного градиента и ее применение в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика.* — 1979. — №9. — С. 90–101; *Autom. Remote Control.* — 1980. — Vol. 40, No. 9. — P. 1333–1342.
  4. ФРАДКОВ А.Л. *Адаптивное управление в сложных системах.* — М.: Наука, 1990. — 296 с.
  5. ANANYEVSKII M.S., FRADKOV A.L., NIJMEIJER H. *Control of Mechanical Systems with Constraints: Two Pendulums Case Study // Proc. 17th IFAC World Congress.* — Seoul, 2008. — P. 7690–7694.
  6. ANANYEVSKII M.S., FRADKOV A.L., NIJMEIJER H. *Swinging control of two-pendulum system under energy constraints // Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems / Ed. by G. Leonov, H. Nijmeijer, A. Pogromsky, A. Fradkov.* — Singapore: World Scientific, 2010. — P. 167–180.
  7. FIACCO A.V., MCCORMICK G.P. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques.* — SIAM, 1990. — 210 p.
  8. FRADKOV A.L. *Cybernetical physics.* — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — 241 p.
  9. FRADKOV A.L., MIROSHNIK I.V., NIKIFOROV V.O. *Nonlinear and adaptive control of complex systems.* — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 500 p.
  10. FRADKOV A.L., POGROMSKY A.YU. *Introduction to Control of Oscillations and Chaos.* — Singapore: World Scientific, 1998. — 320 p.
  11. KHALIL H.K. *Nonlinear systems.* — Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002. — 750 p.
  12. NIJMEIJER H., VAN DER SCHAFT A.J. *Nonlinear dynamical control systems.* — New York: Springer-Verlag, 1990. — 467 p.
  13. POGROMSKY A.YU., BELYKH V.N., NIJMEIJER H. *A study of controlled synchronization of Huijgens' pendula // Group coordination and cooperative control / Ed. by K.Y. Pettersen,*

- J.T. Gravdahl, H. Nijmeijer. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. — Vol. 336. — P. 205–216.
14. TOMCHINA O.P., TOMCHIN D.A., FRADKOV A.L. *Speed-gradient control of passing through resonance in one-and two-dimensional motion* // 16th IFAC World Congress Autom. Control. — June 2005. — 6 p.

## ANALYSIS OF MOTION SEPARATION BY CONTROL FOR TWO IDENTICAL PENDULUMS

**Bashar Suliman**, Aleppo University, Syria, Saint Petersburg State University, Russia, PhD Student, (st102994@student.spbu.ru).

**Alexander Fradkov**, Dr. Sci. (Eng.), Institute for Problems in Mechanical Engineering RAS, Saint Petersburg State University, Russia, Professor (fradkov@mail.ru).

*Abstract: The paper studies the possibility of separating the motions of two identical dynamic systems using a single scalar action generated by a feedback mechanism. Such a problem may arise with underactuated control of oscillatory mechanical systems, with selective control of individual molecule systems, etc. A typical case is studied when separation must be performed based on the energy level of subsystems. To solve the problem, it is proposed to synthesize feedback control. The control algorithm is based on the speed gradient method extended to account for constraints. To design control under constraints the inner penalty function is used. Its operability in this case follows from the invariance of the subsystem energies in the absence of control. It is shown that even a small difference in the initial states of the controlled systems allows the required separation to be achieved, and the result depends weakly on significant changes in the parameters of the controlled system and on the presence of disturbances. Finally, the result depends weakly on the parameters of the controller (gain  $\gamma$ ) and the strength of the penalty  $\alpha$ .*

**Keywords:** Hamiltonian systems, energy control, phase constraints, control of mechanical systems, coupled pendulums, penalty functions, convergence rate, numerical simulation.

УДК 681.5

ББК 22.21

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Б.Р. Андриевским.*

*Поступила в редакцию 08.05.2025.*

*Дата опубликования 30.09.2025.*

## СИНТЕЗ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ИЗМЕРЯЕМОМУ ВЫХОДУ ПРИ ВЫПОЛНИМОСТИ УСЛОВИЯ КИМУРЫ<sup>1</sup>

Мухин А. В.<sup>2</sup>

(Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород)

Многие задачи управления, такие, например, как поиск стабилизирующих законов управления по измеряемому выходу, выражаются в виде билинейных матричных неравенств. Решение таких неравенств на основе итерационных алгоритмов сопровождается немалыми временными затратами, особенно в случае больших размерных систем. Если при данных начальных значениях решение не найдено, то повторение вычислений с иными начальными значениями не гарантирует успеха. Причина кроется в невыпуклости множеств допустимых значений билинейных матричных неравенств. В статье исследована возможность сведения билинейных матричных неравенств к линейным матричным неравенствам путем замены произвольной матрицы функции Ляпунова блочно-диагональной. Достаточное условие для такой замены – выполнение условия Кимуры. Доказано, что необходимые условия разрешимости линейного матричного неравенства удовлетворяются с помощью двух обратимых линейных преобразований базиса системы. Для исследования разрешимости задачи синтеза в рамках линейных матричных неравенств проводились вычислительные эксперименты, в которых случайным образом генерировались 1000 линейных систем. На основании результатов вычислительных экспериментов высказана гипотеза, согласно которой, условие Кимуры является достаточным условием сведения билинейных матричных неравенств к линейным матричным неравенствам с непустыми множествами допустимых значений.

Ключевые слова: законы управления по измеряемому выходу, условие Кимуры, линейные матричные неравенства, гурвицева матрица.

### 1. Введение

Несмотря на наличие итерационных алгоритмов решения билинейных матричных неравенств [1, 4, 9–13, 18], желание свести задачу к решению линейного матричного неравенства вполне обосновано. Как следует из [20], в общем случае это

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Министерство науки и высшего образования РФ, государственное задание FSWR-2023-0034.

<sup>2</sup> Алексей Валерьевич Мухин, м.н.с. ([muhin-aleksei@yandex.ru](mailto:muhin-aleksei@yandex.ru)).

вряд ли возможно. Тем не менее в некоторых частных случаях и отдельных классах задач это удается. Обзор некоторых из них приведен в работах [2, 19]. Следует отметить, что их количество пополняется, о чем свидетельствуют работы [6, 7, 16, 17].

В статье показано, что если выполняется условие Кимуры нулевого порядка [15], т.е. сумма размерностей векторов входа и выходов превышает размерность пространства состояний линейной управляемой и наблюдаемой системы, то решение задачи синтеза стабилизирующих регуляторов по измеряемому выходу можно свести к решению линейного матричного неравенства. Результаты вычислительных экспериментов дают основания считать, что полученное линейное матричное неравенство имеет непустое множество допустимых значений. По итогам вычислительных экспериментов сформулирована соответствующая гипотеза.

## 2. Формулировка задачи

Для поиска стабилизирующих законов управления по измеряемому выходу для управляемой и наблюдаемой линейной системы, определяемой в произвольном базисе тройкой матриц  $\tilde{\Sigma} = (A, B, C)$ , в общем случае требуется решить матричное неравенство

$$(1) \quad A_c Y + Y A_c^T = (A + B K C) Y + Y (A + B K C)^T = A Y + B K C Y + (*)^T < 0$$

относительно  $Y \in R^{n \times n} > 0$  и  $K \in R^{m \times p}$ . Здесь  $A \in R^{n \times n}$  – матрица системы,  $B \in R^{n \times m}$  – матрица входа и  $C \in R^{p \times n}$  – матрица выхода. Разрешимость (1) означает, что существует положительно определенная матрица  $Y$  и матрица  $K$ , обеспечивающие отрицательную определенность матрицы  $A_c Y + Y A_c^T$ . Не умаляя общности, полагаем, что матрицы  $B$  и  $C$  имеют полный столбцовый и строчный ранг соответственно. Для определенности будем считать, что  $p \geq m$ . Это требование всегда может быть обеспечено транспонированием системы. Трудность решения (1) связана с невыпуклостью множества допустимых значений. Применив лемму исключения матрицы  $K$  [5, 14], неравенство

(1) заменяется двумя линейными матричными неравенствами относительно двух взаимообратных матриц:

$$(2) \quad \mathcal{N}_{B^T}^T (AY + (*)^T) \mathcal{N}_{B^T} < 0,$$

$$\mathcal{N}_C^T (XA + (*)^T) \mathcal{N}_C < 0,$$

где матрицы  $\mathcal{N}_{B^T}$  и  $\mathcal{N}_C$  образуют ядра  $B^T$  и  $C$  соответственно.

Равенство  $XY = I$  не позволяет решать (2) методами выпуклой оптимизации. Заметим, что к подобной системе неравенств сводятся и многие другие задачи синтеза [1, 3]. Итак, в общем случае решение задачи поиска стабилизирующей матрицы  $K$  представляет задачу невыпуклой оптимизации. Труднорешаемость (1) доказана в [20]. Исследуем возможность замены (1) линейным матричным неравенством для задач, в которых выполняется условие Кимуры нулевого порядка [15]:

$$(3) \quad m + p > n.$$

Ввиду того, что цель стабилизирующих законов управления состоит в обеспечении устойчивости системы, то достаточно, чтобы линейное матричное неравенство, которым заменяется (1), имело непустое множество допустимых значений. Так как (3) есть достаточное условие разрешимости задачи о назначении полюсов для управляемой и наблюдаемой системы [8, 15], то оно является также достаточным условием разрешимости более слабой задачи – стабилизации. Однако из (3) еще не следует явно, что (1) можно заменить линейным матричным неравенством. Исследованию этой задачи посвящены последующие разделы.

### **3. Решение (1) в классе блочно-диагональных матриц функции Ляпунова**

Матрица функции Ляпунова  $Y > 0$  в (1) является произвольной положительно определенной матрицей. Рассмотрим (1), когда матрица функции Ляпунова имеет блочно-диагональную структуру. Предположим, что матрица выхода задана в виде

$$(4) \quad C = (I_p \quad 0_{p \times (n-p)}).$$

Произведение  $CY$  принимает в таком случае вид

$$CY = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix},$$

где  $Y_{11} \in R^{p \times p}$ .

Обозначив  $\tilde{M} = KY_{11}$ , видим, что неравенство (1) преобразуется в линейное матричное неравенство:

$$(5) \quad A \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} + BKY_{11}C + (*)^T < 0.$$

Таким образом, если матрица функции Ляпунова блочно-однородная и матрица выхода удовлетворяет (4), то (1) преобразуется в линейное матричное неравенство (5). Прежде чем переходить к исследованию разрешимости (5), выясним необходимые условия разрешимости. Для этого приведем сумму матриц в левой части (5) к одной симметрической матрице. Разобьем матрицы системы  $\tilde{\Sigma}$  на блоки следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \end{pmatrix},$$

где  $A_{11} \in R^{p \times p}; B_{11} \in R^{p \times m}; C_{11} \in R^{p \times p}$ .

После этого левая часть (5) принимает вид симметрической матрицы с неизвестными  $Y_{11} > 0, Y_{22} > 0$  и  $\tilde{M}$ :

$$(6) \quad \begin{pmatrix} A_{11}Y_{11} + B_{11}\tilde{M} + (*)^T & A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T + \tilde{M}^T B_{21}^T \\ (*)^T & A_{22}Y_{22} + (*)^T \end{pmatrix} < 0.$$

В случае разрешимости (6) матрица регулятора находится из равенства  $K = \tilde{M}Y_{11}^{-1}$ . Для отрицательной определённости (6) необходимо, чтобы оба диагональных блока были отрицательно определены. Таким образом, для разрешимости (5) необходимо, чтобы удовлетворялись три условия:

$$(7) \quad C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix},$$

$$(8) \quad \sigma_{max}(A_{22}) \in R^{(n-p) \times (n-p)} < 0,$$

$$(9) \quad \text{rank}(\lambda I - A_{11} - B_{11}) = p \quad \forall \lambda \in \left\{ \sigma(A_{11}) \cap (\mathbb{C}^+ \cup 0) \right\}.$$

Под символом  $\sigma_{max}(*)$  в (8) понимается спектральная абсцисса матрицы. Условие (9) равносильно стабилизируемости пары

$(A_{11}, B_{11})$ . Понятно, что если  $B_{11} = 0$ , то пара  $(A_{11}, B_{11})$  не может быть стабилизируемой. Так как  $B_{11} = CB$ , а из (3) следует, что  $CB \neq 0 \forall C, B$ , то и  $B_{11} \neq 0$ , т.е. условие (3) есть достаточное условие для  $B_{11} \neq 0$ . Ненулевое произведение матриц  $C$  и  $B$  возможно и в случаях, когда условие (3) не выполняется.

#### 4. Преобразования базиса системы

Докажем, что существует такой базис в пространстве состояний системы  $\tilde{\Sigma}$ , в котором совместно выполняются условия (7)–(8).

**Теорема 1.** *Существует такой базис в пространстве состояний для системы  $\tilde{\Sigma}$ , в котором совместно выполняются условия (7)–(8).*

**Доказательство.** Выполним линейное преобразование базиса системы  $\tilde{\Sigma}$  посредством обратимой блочной матрицы

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} C \\ (\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C)^{-1} \mathcal{N}_C^T \end{pmatrix},$$

где  $\mathcal{N}_C$  – ядро матрицы  $C$ .

Из равенства  $\mathcal{T} \mathcal{T}^{-1} = I$  находим обратную матрицу:

$$\mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} C^T (CC^T)^{-1} & \mathcal{N}_C \end{pmatrix}.$$

Выполнив линейное преобразование вида  $\mathcal{T} \Sigma \mathcal{T}^{-1}$ , получим матрицы системы в новом базисе:

$$A = \mathcal{T} A \mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CAC^T (CC^T)^{-1} & CA\mathcal{N}_C \\ (\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C)^{-1} \mathcal{N}_C^T AC^T (CC^T)^{-1} & (\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C)^{-1} \mathcal{N}_C^T A \mathcal{N}_C \end{pmatrix},$$

$$B = \mathcal{T} B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} CB \\ (\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C)^{-1} \mathcal{N}_C^T B \end{pmatrix},$$

$$C = C \mathcal{T}^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix}.$$

Получаем систему  $\hat{\Sigma} = (A, B, C)$ , в которой условие (7) удовлетворено. Так как система  $\tilde{\Sigma}$  наблюдаема, то и подобная ей система  $\hat{\Sigma}$  также наблюдаема. Из этого следует разрешимость линейного матричного неравенства:

$$(10) \quad \mathcal{N}_C^T \left( \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + (*)^T \right) \mathcal{N}_C \prec 0.$$

где  $\mathcal{N}_C$  – ядро матрицы  $C$ ;  $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix} \succ 0$ .

Обозначим сумму матриц в левой части (10) как  $\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{12}^T & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$ , где  $\mathcal{L}_{11} \in R^{p \times p}$ . Так как  $C = (I_p \ 0_{p \times (n-p)})$ , то  $\mathcal{N}_C = \begin{pmatrix} 0_{p \times (n-p)} \\ I_{(n-p)} \end{pmatrix}$ . Тогда (10) преобразуется к виду:

$$\mathcal{N}_C^T \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{12}^T & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix} \mathcal{N}_C = \mathcal{L}_{22} = X_{22}A_{22} + X_{12}^TA_{12} + (*)^T \prec 0.$$

Перепишем  $\mathcal{L}_{22} \prec 0$  в виде неравенства Ляпунова:

$$(11) \quad \mathcal{L}_{22} = X_{22}(A_{22} + X_{22}^{-1}X_{12}^TA_{12}) + (*)^T \prec 0.$$

Так как  $\mathcal{L}_{22} \prec 0$ , то матрица  $A_{22} + X_{22}^{-1}X_{12}^TA_{12}$  гурвицева. Выполним линейное преобразование системы  $\hat{\Sigma}$  с помощью матрицы

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \\ X_{22}^{-1}X_{12}^T & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Из условия  $\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1} = I$  находим

$$\mathcal{S}^{-1} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \\ -X_{22}^{-1}X_{12}^T & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

После преобразования  $\mathcal{S}\Sigma\mathcal{S}^{-1}$  получаем систему  $\Sigma = (A, B, C)$ , блоки матриц которой определяются следующим образом:

$$(12) \quad A_{11} = A_{11} - A_{12}X_{22}^{-1}X_{12}^T,$$

$$A_{12} = A_{12},$$

$$A_{21} = X_{22}^{-1}X_{12}^TA_{11} + A_{21} - (X_{22}^{-1}X_{12}^TA_{12} + A_{22})X_{22}^{-1}X_{12}^T,$$

$$A_{22} = A_{22} + X_{22}^{-1}X_{12}^TA_{12},$$

$$B = \mathcal{S}B = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} \\ X_{22}^{-1}X_{12}^TB_{11} + B_{21} \end{pmatrix},$$

$$C = CS^{-1} = C = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что в силу (11) блок  $A_{22}$  гурвицев. Условие (8) также выполнено, а условие (7) сохраняется. Теорема доказана.

**Замечание.** Условия (7) и (8) будут выполняться и в случае, когда  $CB = 0$ . Однако для выполнения условия (9) необходимо, чтобы  $CB \neq 0$ .

## 5. Вычислительные эксперименты

Неравенство (5) для системы  $\Sigma = (A, B, C)$  примет вид

$$A \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} M (I_p \quad 0) + (*)^T < 0,$$

где  $M = KY_{11}$ .

Для численного решения в пакете MATLAB перепишем его в виде блочной матрицы:

$$(13) \begin{pmatrix} A_{11}Y_{11} + B_{11}M + (*)^T & A_{12}Y_{22} + Y_{11}A_{21}^T + M^T B_{21}^T \\ * & A_{22}Y_{22} + (*)^T \end{pmatrix} < 0.$$

Для исследования разрешимости (13) при условии (3) была проведена серия вычислительных экспериментов, в которых случайным образом генерировались по  $j_1 = 1000$  линейных систем. Размерность пространства состояний изменялась в пределах  $n = 5, \dots, 15$ . Для моделирования линейных систем использовались следующие функции пакета MATLAB:

$A = \text{randn}(n)$ ,

$B = \text{randn}(n, m)$ ,

$C = \text{randn}(p, n)$ .

Относительно размерностей  $m$  и  $p$  во всех случаях выполнялось равенство  $m + p = n + 1$ . Так как  $m + p > n$ , то в соответствии с условиями Кимуры задача стабилизации для всех  $j_1 = 1000$  линейных управляемых и наблюдаемых систем разрешима. Обозначим количество разрешимых задач  $j_2$ . Для удовлетворения необходимых условий разрешимости (13) применялась теорема 1. Покажем эти действия на примере одной из линейных систем:

$$A = \text{randn}(5) = \begin{pmatrix} 0,5377 & -1,3077 & -1,3499 & -0,2050 & 0,6715 \\ 1,8339 & -0,4336 & 3,0349 & -0,1241 & -1,2075 \\ -2,2588 & 0,3426 & 0,7254 & 1,4897 & 0,7172 \\ 0,8622 & 3,5784 & -0,0631 & 1,4090 & 1,6302 \\ 0,3188 & 2,7694 & 0,7147 & 1,4172 & 0,4889 \end{pmatrix},$$

$$B = \text{randn}(5, 3) = \begin{pmatrix} -0,1022 & -0,0301 & -0,8637 \\ -0,2414 & -0,1649 & 0,0774 \\ 0,3192 & 0,6277 & -1,2141 \\ 0,3129 & 1,0933 & -1,1135 \\ -0,8649 & 1,1093 & -0,0068 \end{pmatrix}$$

$$C = \text{randn}(3, 5) = \begin{pmatrix} 1,0347 & 0,2939 & -1,1471 & -2,9443 & -0,7549 \\ 0,7269 & -0,7873 & -1,0689 & 1,4384 & 1,3703 \\ -0,3034 & 0,8884 & -0,8095 & 0,3252 & -1,7115 \end{pmatrix}.$$

Для первого преобразования использовалась следующая матрица:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} C \\ (\mathcal{N}_C^T \mathcal{N}_C)^{-1} \mathcal{N}_C^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0347 & 0,2939 & -1,1471 & -2,9443 & -0,7549 \\ 0,7269 & -0,7873 & -1,0689 & 1,4384 & 1,3703 \\ -0,3034 & 0,8884 & -0,8095 & 0,3252 & -1,7115 \\ 0,8133 & 0,3523 & 0,4046 & 0,1931 & -0,1160 \\ -0,1917 & 0,8179 & -0,1498 & -0,0602 & 0,5179 \end{pmatrix}.$$

После линейного преобразования матрица выхода удовлетворяет (7). Далее из решения линейного матричного неравенства (11) было найдено произведение  $X_{22}^{-1} X_{12}^T$ :

$$X_{22}^{-1} X_{12}^T = \begin{pmatrix} 0,1110 & -0,0372 & 0,1666 \\ 0,0114 & -0,0224 & -0,0734 \end{pmatrix}.$$

Выполнив второе преобразование линейное преобразование системы с помощью матрицы

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times (n-p)} \\ X_{22}^{-1} X_{12}^T & I_{n-p} \end{pmatrix},$$

окончательно получим следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 3,0497 & -0,4064 & -1,5976 & -5,7853 & -14,2755 \\ -0,1403 & 2,2450 & 1,3507 & 3,9813 & 8,1910 \\ 0,9104 & -0,4093 & -1,5673 & 1,2548 & -4,8408 \\ 0,4104 & 0,0218 & -0,8145 & -0,5000 & -3,0417 \\ -0,7498 & -0,7957 & -0,8181 & 3,0417 & -0,5000 \\ -0,8111 & -4,8559 & 3,8054 & & \\ -0,9606 & 2,5296 & -1,0020 & & \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1,1401 & -2,1885 & 0,9632 \\ 0,2573 & -0,7440 & -0,7603 \\ -0,7639 & 0,3345 & 0,4690 \end{pmatrix},$$

$$C = (I_3 \quad 0_{3 \times 2}).$$

Находим, что блок

$$A_{22} = \begin{pmatrix} -0,5 & -3,0417 \\ 3,0417 & -0,5 \end{pmatrix}$$

гурвицев:  $\sigma_{\max}(A_{22}) = -0,5$ . Условия (9) оказывается также выполненным. В этом можно убедиться, проверив разрешимость линейного матричного неравенства

$$A_{11}Y_{11} + B_{11}Z + (*)^T < 0.$$

Решая линейное матричное неравенство (13), находим матрицу  $K$ :

$$K = \begin{pmatrix} -4,4952 & 97,0356 & 21,7672 \\ 2,3571 & 47,8898 & 11,3364 \\ -2,5381 & 26,3320 & 7,0735 \end{pmatrix}.$$

Проверяем и убеждаемся, что матрица замкнутой системы действительно гурвицева:

$$\sigma_{\max}(A + BKC) = -0,4194.$$

Проведённые эксперименты для  $n = 5, \dots, 15$  показали разрешимость (13) во всех случаях ( $j_2 = j_1$ ). Это значит, что множество допустимых значений (13) при условии (3) не пусто. Таким образом, есть основания полагать, что условие (3) совместно с теоремой 1 обеспечивает достаточные условия преобразования билинейных матричных неравенств к линейным матричным неравенствам с непустым множеством допустимых значений. Сформулируем гипотезу:

**Гипотеза.** *Множество допустимых значений линейного матричного неравенства (13) при условии (3) не пусто.*

## 6. Заключение

Статья посвящена решению задачи синтеза стабилизирующих законов управления по измеряемому выходу. Показано, что если выполняется условие Кимуры, то задача может быть сведена к решению линейного матричного неравенства. Результаты вычислительных экспериментов убедительно показывают, что множества допустимых значений соответствующих неравенств не пусты. Несмотря на то, что получается лишь некоторое частное решение, тем не менее, главное требование к закону управления – устойчивость системы – обеспечивается. Сформулирована соответствующая гипотеза. Интерес представляет поиск доказательства. Дальнейшей задачей является проверка полу-

ченного результата для более широкого класса задач, в котором выполнение условие Кимуры не требуется, а необходимо лишь, чтобы произведение матриц выхода и входа давало ненулевую матрицу.

Автор благодарит Дмитрия Владимировича Баландина за полезные советы.

### **Литература**

1. БАЛАНДИН Д.В., КОГАН М. М. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимно-обратных матриц // Автоматика и телемеханика. – 2005. – №1. – С. 82–99.
2. ШУМАФОВ М.М. Стабилизация линейных систем управления. Проблема назначения полюсов. Обзор // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6(64). – Вып. 4. – С. 564–591.
3. ЧАЙКОВСКИЙ М.М. Синтез анизотропийных субоптимальных регуляторов заданного порядка на основе полуопределенного программирования и алгоритма поиска взаимообратных матриц // Управление большими системами. – 2012. – Вып. 39. – С. 95–137.
4. APKARIAN P., TUAN H. D. Robust control via concave minimization local and global algorithms // IEEE Trans. Automat. Control. – 2000. – Vol. 45, No. 2. – P. 299–305.
5. EL GHAOUI L., GAHINET P. Rank minimization under LMI constraints: a framework for output feedback problems // Proc. Eur. Control Conf. Groningen. – 1993. – P. 1176–1179.
6. ELIAS A. A Novel relaxation of the static output feedback problem for a class of plants // Automatica. – 2023. – No. 158. – P. 111285–111290.
7. ELIAS A., POCCINI J., PAPACHRISTODOULOU A. Static Output Feedback for a Certain Class of Systems of Order Four // European Control Conf. (ECC). – 2024. – P. 2586–2592.
8. EREMENKO A., GABRIELOV A. Pole placement by static output feedback for generic linear system // SIAM J. Control Optim. – 2002. – Vol. 41. – P. 303–312.

9. GOH K.-C., SAFONOV M.G., PAPAVASSIOPOLUS G.P. *A global optimization approach for the BMN problem* // Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control. – IEEE Press, Piscataway, NJ. – 1994. – P. 2009–2014.
10. HASSIBI A., HOW J., BOYD S. *A path following method for solving BMI problems in control* // Proc. of American Control Conf. – 1999. – Vol. 2. – P. 1385–1389.
11. HENRION D., LOEFBERG J., KOCVARA M. et al. *Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI* // Proc. Joint IEEE Conf. Decision Control and Europ. Control Conf. – 2005. – P. 7581–7586.
12. IWASAKI T. *The dual iteration for fixed order control* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1999. – Vol. 44, No. 4. – P. 783–788.
13. IWASAKI T., SKELTON R. E. *The XY-centering algorithm for the dual LMI problem: a new approach to fixed order control design* // Int. Journal of Control. – 1995. – Vol. 62, No. 6. – P. 1257–1272.
14. IWASAKI T., SKELTON R.E. *Parameterization of all stabilizing controllers via quadratic Lyapunov functions* // J. Optim. Theory Appl. – 1995. – Vol. 77. – P. 291–307.
15. KIMURA H. *On pole placement by gain output feedback* // IEEE Trans. Automat. Control. – 1975. – Vol. 20. – P. 509–519.
16. MUSHTAQ T., SEILER P., HEMATI M. S. *On the convexity of static output feedback control synthesis for systems with lossless nonlinearities* // Automatica. – 2024. – No. 159. – P. 111380–111385.
17. RODRIGUES L. *From LQR to Static Output Feedback: a New LMI Approach* // Proc. of IEEE 61<sup>st</sup> Conf. on Decision and Control. – 2022. – P. 4878–4883.
18. RÖBENACK K., VOSWINKEL R., FRANKE MIRCO et al. *Stabilization by static output feedback: a quantifier elimination approach* // Proc. Int. Conf. Syst. Theory, Control, Computing (ICSTCC-2018). – 2018. – P. 715–721.
19. SADABADI M.S., PEAUCELLE D. *From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey* // Annual Reviews in Control. – 2016. –Vol. 42. –P. 11–26.
20. TOKER O., OZBAY H. *On the NP hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static*

*output feedback // Proc. of the American Control Conf. – 1995. – Vol.4. – P. 2525–2526.*

## **SYNTHESIS OF STATIC OUTPUT FEEDBACK CONTROL LAWS SUBJECT TO FEASIBILITY THE KIMURA CONDITION**

**Aleksey Mukhin**, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod,  
Junior Researcher (myhin-aleksei@yandex.ru).

*Abstract: A lot of control tasks, such as, for example, the synthesis of static output feedback, are expressed in the form of bilinear matrix inequalities. Solving such tasks based on iterative algorithms attended with considerable time, especially in the case of large-scale systems. If no solution is found for the initial values, then repeating calculations with different initial values does not guarantee success. The reason is the non-convexity of the feasible sets. The article investigates the possibility of bilinear matrix inequalities reducing to linear matrix inequalities by replacing of Lyapunov function matrix arbitrary to block-diagonal matrix. A sufficient condition for such a replacing is Kimura condition feasibility. It is proved that the necessary conditions for the linear matrix inequality feasibility are satisfied by two linear non-generate transformations of the system basis. To the synthesis problem investigating within the framework of linear matrix inequalities computational experiments were performed, in which 1000 linear systems were randomly generated. Based on the results of computational experiments, a hypothesis is proposed according to which the Kimura condition is a sufficient condition for bilinear matrix inequalities reducing to linear matrix inequalities with nonempty feasible sets.*

**Keywords:** static output feedback, Kimura condition, linear matrix inequalities, Hurwitz matrix.

УДК 517.977

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

*Поступила в редакцию 02.06.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*

## ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ PnP-ЗАДАЧИ НА ОСНОВЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ВЕКТОРОМ РОДРИГА<sup>1</sup>

Абраменков А. Н.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача позиционирования подвижного объекта на основе изображений, получаемых с камеры. В ряде случаев данная задача может быть сведена к известной проблеме PnP (*perspective-n-point*), для решения которой в настоящей работе предлагается использовать оптимизационный алгоритм. В качестве функционала для минимизации рассматривается ошибка репроекции, использующая параметризацию матрицы поворота вектором Родрига. Предлагается подход с заменой переменных, для которого выводятся аналитические частные производные. Особенностью задачи позиционирования подвижного объекта можно считать то, что новое решение в большинстве случаев находится в окрестности предыдущего. Благодаря этому обходится основной недостаток оптимизационного подхода – необходимость вычислять начальное приближение. Также это позволяет обходить проблему с вектором Родрига, который неограниченно возрастает при приближении угла поворота к 180 градусам. Для решения оптимизационной задачи был использован численный алгоритм BFGS. Предложена эвристика для выбора начального приближения обратного гессиана и первого шага одномерного поиска, ускоряющая сходимость алгоритма. На синтетических данных проведено сравнение предложенного подхода с известными реализациями из библиотеки OpenCV. Эксперимент показал, что рассматриваемый подход обладает высокой скоростью вычисления, при этом не уступая по точности другим решениям.

Ключевые слова: визуальная одометрия, оптимизационный алгоритм, ошибка репроекции.

### 1. Введение

Необходимость определения положения подвижного объекта возникает во многих практических задачах. Часто для этого используют решения на основе глобальной навигационной

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-19-00338, <https://rscf.ru/project/23-19-00338/>

<sup>2</sup> Александр Николаевич Абраменков, н.с. (aabramenkov@asmon.ru).

спутниковой системы (ГНСС). Однако не во всех случаях она бывает доступна. Например, при навигации подвижного объекта в помещении использование ГНСС становится невозможным. В этом случае возникает необходимость в альтернативных подходах. Среди них – визуальная одометрия, предполагающая для определения положения использование данных с видеокамеры. Более развитые SLAM-подходы (*simultaneous localization and mapping*) предполагают одновременно решать задачу позиционирования и построения карты.

Во многих случаях при рассмотрении подходов визуальной одометрии в том или ином виде возникает проблема PnP (perspective-n-point) [5, 20], которая заключается в определении положения камеры по известным положениям точек в трёхмерном пространстве и их проекциям на изображении. К данной проблеме также может быть сведена задача определения положения камеры в пространстве, размеченном специальными метками [13, 16]. В этом случае в качестве точек в трёхмерном пространстве, относительно которых решается задача, могут выступать, например, уголки меток. В работе [4] исследуются методы решения PnP-задачи для позиционирования относительно светодиодов с известными координатами.

Таким образом, PnP-проблема является важной подзадачей в задачах позиционирования. Существует большое количество подходов к решению данной проблемы, которые глобально можно разделить на итеративные и неитеративные.

Итеративные подходы в большинстве своём рассматривают PnP-задачу как оптимизационную и решают её с использованием методов Гаусса – Ньютона или Левенберга – Марквардта. Считается, что они обеспечивают лучшую точность, но при этом требуют больше вычислительных затрат [25, 19]. Главным недостатком этих методов является необходимость знать начальное приближение, которое потом итеративно уточняется. К этой группе можно отнести SQPnP [22], который использует схему последовательного квадратичного программирования, чтобы найти области локальных минимумов, с гарантией, что среди них будет глобальный.

Неитеративные подходы позволяют обеспечить нахождение решения, не используя начальное приближение. В минимально возможном случае трёх точек (Р3Р) при отсутствии шума задача может иметь аналитическое решение, описывающее до четырёх геометрически реализуемых конфигураций [9]. Задача Р3Р может являться составной частью других решений. Например, используя схему RANSAC [7], она может быть обобщена до большего количества точек. Более общими и наиболее известными подходами являются DLS [11] и EPnP [14].

Неитеративные подходы могут быть объединены с оптимизационными схемами. Например, авторы EPnP рекомендуют использовать результат их алгоритма как начальное приближение для последующей оптимизации [14]. Ряд подходов в качестве одного из шагов могут использовать метод Гаусса – Ньютона для уточнения результата. К ним можно отнести CPnP [24], Hidden PnP [19] и ACEPnP [21], который является развитием EPnP. В работе [26] для дальнейшего уточнения решения используют алгоритм L-BFGS.

Часть подходов акцентируют внимание на наличии шумов в измеряемых данных, например, GMLPnP [25] и EPnPU [23]. В работе [25] предлагается метод, который использует итеративную процедуру для одновременного нахождения позиции и оценки неопределенности.

Некоторые подходы рассматривают решение частных задач для заданного количества точек. Например, в [3] рассматривается задача Р2Р для определения угловых и пространственных координат по двум реперным точкам. В работе [1] рассматривается случай 4 точек (Р4Р). В [2] решение задачи Р4Р используется для определения позиции относительно реперных точек.

Повышение вычислительной эффективности методов решения РnP задачи может быть важным при использовании на маломощных бортовых вычислительных системах. Для этого, например, в работе [15] предлагается реализация решения на ПЛИС.

Особенностью определения положения по данным с видеокамеры является то, что положение подвижного объекта не мо-

жет меняться моментально. Это предположение можно использовать, чтобы обойти основной недостаток оптимизационного подхода, беря в качестве начального приближения результат, полученный в предыдущий момент времени.

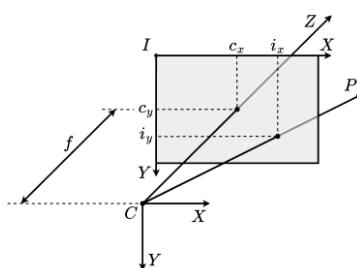
В данной работе для решения проблемы РпР предлагается использовать оптимизационный алгоритм BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno). Далее будет показано, что такой подход при определённых условиях способен демонстрировать высокую производительность, сравнимую с лучшими решениями, не уступая им по точности.

## 2. Предлагаемый подход

### 2.1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Все скалярные величины будем обозначать строчными буквами, а векторы и матрицы – заглавными.

Для описания построения плоского изображения наблюдаемого реального трехмерного пространства будем использовать модель камеры-обскуры [10]. На рис. 1 приведена геометрическая интерпретация данной модели.



*Рис. 1. Геометрическая интерпретация математической модели камеры-обскуры*

Точка  $P = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  из трехмерного пространства с координатами, заданными в системе координат (СК) камеры  $CXYZ$ , проецируется в точку на плоском изображении, имеющую координаты  $[i_x \ i_y]^T$  в СК плоскости изображения (экрана)  $IXY$ . Координаты проекции описываются следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} i_x \\ i_y \end{bmatrix} = \frac{f}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \end{bmatrix}.$$

Здесь  $[i_x \ i_y]^T$  – координаты проекции точки, отсчитанные от верхнего левого угла изображения;  $[c_x \ c_y]^T$  – координаты центра изображения;  $f$  – расстояние от центра изображения до отверстия камеры-обскуры.

Поведение реальной оптической системы не может быть точно описано элементарной моделью камеры-обскуры, но при разработке методов решения PNP-задачи этим обстоятельством пренебрегают [10].

В дальнейшем для описания проекций точек трёхмерного пространства на плоскость изображения будем использовать нормированные безразмерные координаты:

$$N = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \frac{1}{f} \begin{bmatrix} i_x - c_x \\ i_y - c_y \end{bmatrix}.$$

Здесь  $[n_x \ n_y]^T$  – нормированные координаты проекции точки. Таким образом из дальнейших выражений исключаются параметры математической модели камеры ( $f$  и  $[c_x \ c_y]^T$ ).

Введём оператор проецирования  $H$ , который отображает на изображение точку  $P = [p_x \ p_y \ p_z]^T$  из трёхмерного пространства в СК камеры:

$$N = H(P) = \frac{1}{p_z} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}.$$

Для описания положения и ориентации объекта будем использовать пару  $M$ , состоящую из вектора линейного переноса  $T$  и матрицы поворота  $R$ :

$$M = \{T, R\}.$$

Преобразования точки  $P$  из трёхмерного пространства описывается следующим выражением:

$$MP = RP + T.$$

Ниже приведены основные соотношения для  $M$ :

$$M_1 M_2 = \{R_1 T_2 + T_1, R_1 R_2\},$$

$$M^{-1} = \{-R^{-1}T, R^{-1}\}.$$

## 2.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в выбранной СК известно положение  $m$  точек. Также известны их нормированные координаты на изображении. Необходимо определить положение камеры  $M_c$  в выбранной СК мира. Данная задача может быть сформулирована как оптимизационная, если ввести функционал ошибки  $e_r$  следующего вида:

$$(1) \quad e_r = \frac{1}{m} \sum_k^m \|N_k - H(M_p P_k)\|^2.$$

Здесь  $N_k$  – измеренная проекция  $k$ -ой точки;  $P_k$  – положение  $k$ -й точки в выбранной СК. Решением является неизвестный параметр  $M_p$ , при котором функционал достигает минимума. Требуемое положение камеры определяется выражением

$$M_c = M_p^{-1}.$$

Выражение (1) можно переписать таким образом, чтобы решение искалось как изменение начального приближения. Для этого введём обозначение:

$$M_p = M'_p M_0.$$

Здесь  $M_0$  – начальное приближение;  $M'_p$  – изменение решения. Теперь ошибка  $e_r$  будет иметь вид

$$(2) \quad e_r = \frac{1}{m} \sum_k^m \|N_k - H(M'_p P'_k)\|^2.$$

Здесь  $P'_k = M_0 P_k$  – положение точки в трёхмерном пространстве относительно начального приближения.

Если использовать предположение о небольшом перемещении подвижного объекта и в качестве начального приближения брать результат с предыдущего момента времени, то минимум выражения (2) будет достигаться при значении параметров близких к нулю.

Самое первое начальное приближение может быть получено любым доступным алгоритмом РнР, например, SQPnР.

## 2.3. ВЕКТОР РОДРИГА

Матрица поворота содержит девять переменных, поэтому её обычно параметризуют представлением вращения меньшей

размерности. Среди них наиболее известны углы Эйлера и кватернион. В данной работе для описания вращения будет использоваться вектор Родрига [6]:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \operatorname{tg}\left(\frac{a}{2}\right) \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}.$$

Здесь  $[r_x \ r_y \ r_z]^T$  – элементы вектора Родрига;  $[u_x \ u_y \ u_z]^T$  – единичный вектор, вокруг которого осуществляется поворот на угол  $a$ . Благодаря такому представлению, матрица поворота будет иметь вид

$$(3) \quad R = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} 1 + r_x^2 - r_y^2 - r_z^2 & 2(r_x r_y - r_z) & 2(r_x r_z + r_y) \\ 2(r_x r_y + r_z) & 1 - r_x^2 + r_y^2 - r_z^2 & 2(r_y r_z - r_x) \\ 2(r_x r_z - r_y) & 2(r_y r_z + r_x) & 1 - r_x^2 - r_y^2 + r_z^2 \end{bmatrix}.$$

Здесь  $s = 1 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$ . Данное выражение может быть получено, например, с использованием формулы для матрицы поворота через единичный вектор и угол [6].

Выражение (3) является вычислительно эффективным представлением, так как требует всего 3 параметра и не использует тригонометрических функций. Единственный недостаток заключается в том, что при приближении угла  $a$  к 180 градусам элементы вектора Родрига неограниченно возрастают. Данный недостаток легко обходится, если искать решение относительно начального приближения, как было предложено ранее.

Раскроем функцию проекции  $H$  из выражения (1) и подставим в него матрицу поворота (3), получим следующие выражения:

$$(4) \quad \begin{aligned} x_k &= (1 + r_x^2 - r_y^2 - r_z^2) p_{xk} + 2(r_x r_y - r_z) p_{yk} + 2(r_x r_z + r_y) p_{zk} + s t_x, \\ y_k &= 2(r_x r_y + r_z) p_{xk} + (1 - r_x^2 + r_y^2 - r_z^2) p_{yk} + 2(r_y r_z - r_x) p_{zk} + s t_y, \\ z_k &= 2(r_x r_z - r_y) p_{xk} + 2(r_y r_z + r_x) p_{yk} + (1 - r_x^2 - r_y^2 + r_z^2) p_{zk} + s t_z. \end{aligned}$$

Здесь:  $P_k = [p_{xk} \ p_{yk} \ p_{zk}]^T$ ;  $T = [t_x \ t_y \ t_z]^T$  – неизвестный вектор линейного перемещения. Теперь ошибка  $k$ -й точки по каждой координате будет иметь вид

$$e_{xk} = n_{xk} - x_k / z_k; \quad e_{yk} = n_{yk} - y_k / z_k.$$

Ниже приведена итоговая запись ошибки репроекции с учётом введённых обозначений:

$$(5) \quad e_r = \frac{1}{m} \sum_k^m (e_{xk}^2 + e_{yk}^2).$$

Можно заметить, что делитель  $s$  из (3) в выражении (4) стал множителем к неизвестному вектору линейного перемещения. Сделаем в (4) следующую замену переменных:

$$[t'_x \ t'_y \ t'_z]^T = s[t_x \ t_y \ t_z]^T.$$

В данной работе новые неизвестные переменные со штрихом предлагаются считать независимыми от элементов вектора Родрига, что сделает последующий расчёт аналитических частных производных немного проще. Далее на экспериментальных данных будет показано, что такое допущение не влияет на точность находимого решения.

#### 2.4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Продифференцируем (5) по неизвестным переменным. Итоговый результат с учётом группировки для минимизации количества вычислений будет иметь вид:

$$(6) \quad \begin{aligned} \partial e_r / \partial t'_x &= -(2/m) \sum_k^m e'_{xk}, \\ \partial e_r / \partial t'_y &= -(2/m) \sum_k^m e'_{yk}, \\ \partial e_r / \partial t'_z &= (2/m) \sum_k^m e'_{xyk}, \\ \partial e_r / \partial r_x &= -(4/m) \sum_k^m (e'_{xk}s_{0k} - e'_{yk}s_{3k} - e'_{xyk}s_{2k}), \\ \partial e_r / \partial r_y &= -(4/m) \sum_k^m (e'_{xk}s_{3k} + e'_{yk}s_{0k} + e'_{xyk}s_{1k}), \\ \partial e_r / \partial r_z &= (4/m) \sum_k^m (e'_{xk}s_{2k} - e'_{yk}s_{1k} + e'_{xyk}s_{0k}). \end{aligned}$$

В выражении (6) используются следующие обозначения:

$$e'_{xk} = e_{xk}/z_k; \quad e'_{yk} = e_{yk}/z_k; \quad e'_{xyk} = (e'_{xk} + e'_{yk})/z_k,$$

$$s_{0k} = p_{xk}r_x + p_{yk}r_y + p_{xz}r_z,$$

$$s_{1k} = p_{xk}r_z - p_{yk}r_z + p_{zk}r_y,$$

$$s_{2k} = p_{yk} + p_{xk}r_z - p_{zk}r_x,$$

$$s_{3k} = p_{zk} - p_{xk}r_y + p_{yk}r_x.$$

## 2.5. АЛГОРИТМ BFGS

В данной работе для решения оптимизационной задачи предлагается использовать BFGS алгоритм [17]. Он относится к классу квазиньютоновских методов, не требующих вычисления матрицы Гессе в явном виде. Среди особенностей BFGS можно выделить, что в процессе выполнения алгоритма вычисляется оценка сразу для обратного гессиана. Это позволяет обойтись без процедуры обращения матрицы. Несмотря на то, что рассматриваемая задача имеет небольшую размерность (6 неизвестных), эта особенность может дать дополнительный прирост производительности.

Алгоритм BFGS может быть описан следующей последовательностью шагов. Сначала выбирается начальное приближение для решения  $X_0$  и обратной матрицы Гессе  $B_0^{-1}$ , вычисляются вектор частных производных  $\partial F_0$  функции в точке  $X_0$ . Устанавливается номер итерации  $k = 0$ .

В качестве неизвестных параметров  $X$  в данном случае выступают значения линейного переноса и параметры матрицы поворота. Так как решение ищется относительно начального приближения  $M_0$ , то  $X_0$  берётся равной нулю. В качестве функции  $f$  используется выражение (5), а её частные производные  $\partial F$  приведены в выражении (6).

Первый шаг заключается в определении направления поиска решения  $D_k$ , для чего используется оценка обратного гессиана:

$$D_k = -B_k^{-1} \partial F_k.$$

На втором шаге, используя процедуру одномерного поиска, выбирается величина шага  $a_k$ , удовлетворяющего условию Вольфе [17]. Для этого используется аппроксимация функции кубическим полиномом и в качестве нового пробного шага берётся значение, при котором полином достигает минимума [17]. Поиск продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие Вольфе.

Вычисляется новое решение:

$$X_{k+1} = X_k + a_k D_k.$$

На третьем шаге, используя значения частных производных в новой точке  $\partial F_{k+1}$ , обновляется оценка обратного гессиана  $B_k^{-1}$ . Для этого применяется формула [8], которая достаточно эффективна в вычислительном плане, так как может быть реализована без умножений матрицы на матрицу:

$$B_{k+1}^{-1} = B_k^{-1} + \frac{S_k S_k^T}{S_k^T Y_k} \left( 1 + \frac{Y_k^T B_k^{-1} Y_k}{S_k^T Y_k} \right) - \frac{S_k Y_k^T B_k^{-1} + B_k^{-1} Y_k S_k^T}{S_k^T Y_k}.$$

Здесь  $S_k = X_{k+1} - X_k$ ;  $Y_k = \partial F_{k+1} - \partial F_k$ .

После обновления обратного гессиана алгоритм повторяется с первого шага, изменяя номер текущей итерации на  $k = k + 1$ . Критерием остановки является достижение нормы  $\partial F_k$  некоторого порога или ограничение на общее количество итераций.

Важным аспектом для эффективной работы алгоритма является выбор хорошего начального приближения для  $B_0^{-1}$ . Часто для этого используют единичную матрицу. В данной работе предлагаются два подхода к ускорению алгоритма.

Первый подход заключается в эмпирическом подборе  $B_0^{-1}$ , который позволит в большинстве случаев ускорить сходимость алгоритма применительно к рассматриваемой задаче. Для этого предлагается использовать диагональную матрицу с разными значениями коэффициентов:

$$(7) \quad B_0^{-1} = \text{diag}\{b_1, b_1, b_1, b_2, b_2, b_2\}.$$

Далее на экспериментальных данных, будет показано, что хорошим выбором может являться  $b_1 = 20$  и  $b_2 = 0,5$ .

Второй подход заключается в модификации алгоритма одномерного поиска. Обычно для первого пробного шага используют  $a_k = 1$ . В данной работе предлагается следующая эвристическая зависимость:

$$(8) \quad a_k = \min \left( 2 \left| \frac{f_k}{\partial F_k P_k} \right|, 1 \right).$$

Здесь  $f_k$  – значение функции в точке  $X_k$ .

На экспериментальных данных будет показано, что такая модификация может давать небольшой прирост производительности.

В работе применялась самостоятельно написанная на языке программирования C++ реализация BFGS алгоритма [12], позволяющая использовать предложенные подходы.

### 3. Эксперимент на синтетических данных

#### 3.1. ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Для сравнения предложенных подходов использовались синтетически полученные данные. Ниже приведён алгоритм их генерации.

Метрические параметры математической модели камеры, в соответствии с требованиями распространенных библиотек и пакетов программ машинного зрения [18], задавались в пикселях и составили значения: размер изображения  $1280 \times 720$  пикселей,  $f = 600$  пикселей, что соответствует углу обзора примерно в 90 градусов. Изменение этих параметров в определённых пределах качественно не влияло на результат.

На изображении случайным образом создавалось требуемое количество проекций точек. Для каждой точки случайным образом из диапазона 0,5–10 м определялось расстояние до камеры. Полученные точки случайным образом перемещались и поворачивались в пространстве. Координаты вектора линейного перемещения выбирались из диапазона от  $-0,5$  до  $0,5$  м. Поворот осуществлялся вокруг случайной оси на угол из диапазона от  $-0,5$  до  $0,5$  рад.

Для каждой проекции точки добавлялся шум, представляющий из себя изменение координат на случайную величину из диапазона от  $-\delta$  до  $\delta$  пикселей. Приведённые далее результаты были получены при значении  $\delta = 1$ . Увеличение этого параметра качественно не влияло на результат и приводило к пропорциональному увеличению величины ошибок. Особым случаем является отсутствие шумов, чего обычно не бывает в реальных данных, и поэтому далее не рассматривалось.

Для ошибки по расстоянию  $e_p$  использовалось следующее выражение:

$$e_p = \|T_r - T_m\|.$$

Здесь  $T_r$  – вектор истинного значения перемещения;  $T_m$  – вектор рассчитанного значения перемещения.

Метрика ошибки поворота  $e_a$  представляет собой угол кратчайшего поворота между истинной и рассчитанной ориентацией. Для её вычисления использовалось следующее выражение:

$$Q_d = [q_w, q_x, q_y, q_z] = Q_r Q_m^{-1},$$

$$e_a = 2 \arccos(q_w).$$

Здесь:  $Q_r$  – кватернион истинной ориентации;  $Q_m$  – кватернион рассчитанной ориентации;  $Q_d$  – кватернион разности двух ориентаций.

Каждая итерация теста заключалась в генерации  $10^6$  наборов данных, на которых решалась PnP-задача. Для каждого набора вычислялись значения ошибок и засекалось время выполнения алгоритма. Для сравнения использовались медианные значение.

Все вычисления проводились на компьютере с процессором Intel Core i5-9300H под управлением операционной системы Ubuntu-18.

### *3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ*

На рис. 2 приведены значения ошибок в зависимости от количества точек при использовании предложенной замены переменных ( $b$ ) и без ( $a$ ). В этих случаях частные производные вычислялись численно. В дополнение на графиках также представлен вариант с аналитическими частными производными ( $c$ ). Результаты получены без использования предложенной модификации первого шага одномерного поиска и с единичной матрицей в качестве начального приближения обратного гессиана. Видно, что с точки зрения точности все варианты демонстрируют практически идентичные показатели. Из этого можно сделать вывод, что подход с заменой переменных не влияет на точность решения, а аналитические частные производные выведены корректно.

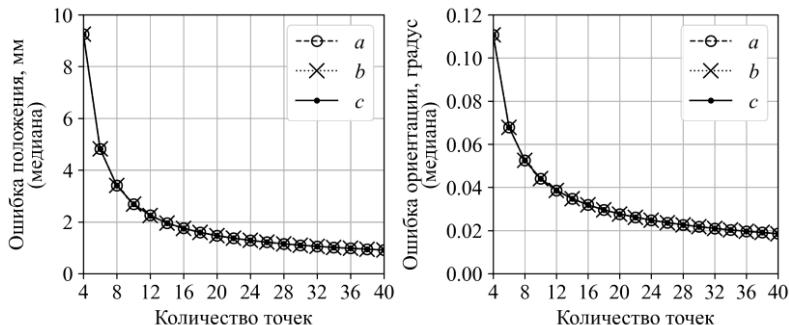


Рис. 2. Значения ошибок для случая без замены переменных (а), с заменой (б) и с аналитическими производными (с)

На рис. 3 для рассмотренных вариантов приведено время расчёта. Вариант с заменой переменных оказался незначительно быстрее, чем без замены. Использование аналитических производных позволило практически в два раза ускорить алгоритм.

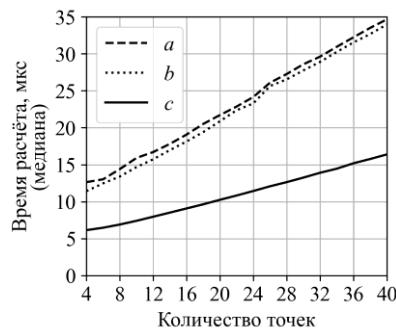
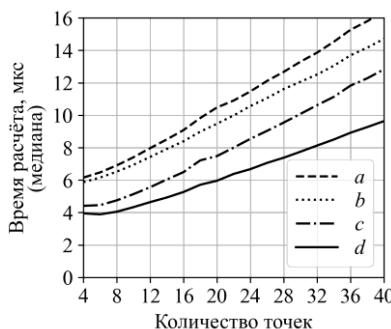


Рис. 3. Время расчёта для случая без замены переменных (а), с заменой (б) и с аналитическими производными (с)

Далее рассмотрим влияние выбора начального приближения для обратной матрицы Гессе и предложенного подхода для выбора первого шага одномерного поиска. Эксперимент проводился на рассмотренном варианте с заменой переменных и аналитическими частными производными (6). На рис. 4 приведены результаты медианного времени расчёта для нескольких вари-

антов. Графики *a* и *b* соответствуют выбору в качестве начального приближения для  $B_0^{-1}$  единичной матрицы, а графики *c* и *d* – предложенному выбору согласно выражению (7) с эмпирически подобранными коэффициентами  $b_1 = 20$  и  $b_2 = 0,5$ . Видно, что такой подход обеспечивает повышение вычислительной эффективности алгоритма. Для вариантов *b* и *d* была использована предложенная зависимость (8) для модификации первого шага одномерного поиска, а варианты *a* и *c* соответствуют стандартному выбору. Здесь также видно, что предложенная модификация первого шага одномерного поиска более эффективна в вычислительном плане. Совместное использование обоих предложенных подходов (*d*) демонстрируют наилучшее время расчёта.



*Рис. 4. Время расчёта для стандартного выбора начально приближения обратного гессиана (*a*, *b*) и предложенного (*c*, *d*), с модификацией первого шага одномерного поиска (*b*, *d*) и без (*a*, *c*)*

Показатели точности для всех вариантов в результате эксперимента были практически одинаковыми, повторяя результат на рис. 2.

### 3.3. СРАВНЕНИЕ С СУЩЕСТВУЮЩИМИ ПОДХОДАМИ

Для сравнения с существующими подходами решения проблемы РnР были выбраны несколько алгоритмов из библиотеки компьютерного зрения OpenCV [18]. Она является наиболее из-

вестной библиотекой с открытым исходным кодом и активно развивается огромным сообществом. Написана на языке программирования C++ и повсеместно используется во многих программных решениях. Это позволяет предполагать, что реализованные в ней алгоритмы хорошо оптимизированы. Ниже кратко рассмотрим выбранные алгоритмы и то, как они будут обозначаться.

SQPnP является одним из самых быстрых алгоритмов по приведённым в [25] результатам. При этом по точности он уступал только GMLnP, который оказался заметно медленнее.

EPnP является самым известным неитеративным алгоритмом. Его часто используют для сравнения в различных публикациях [19, 22, 24, 25].

LM – итеративный подход, использующий оптимизационный алгоритм Левенберга – Марквардта.

BFGS – предложенное решение, использующее аналитические частные производные и рассмотренные подходы к повышению скорости.

На рис. 5 приведены результаты сравнения точности рассматриваемых решений. Предложенный подход демонстрирует лучшую точность, аналогичную LM.

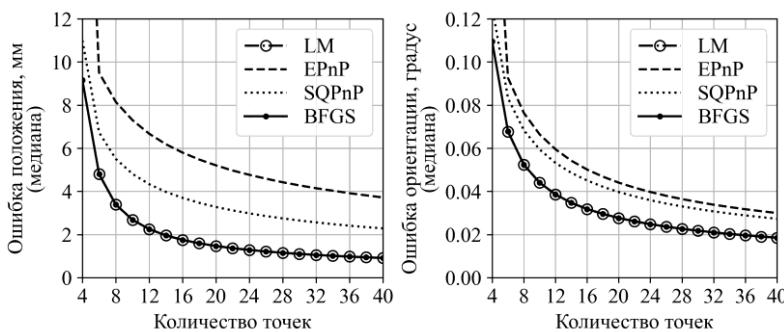


Рис. 5. Значения ошибок для сравниваемых решений

На рис. 6 приведены результаты времени расчёта где предложенное решение и SQPnP демонстрируют заметно более высокую производительность.

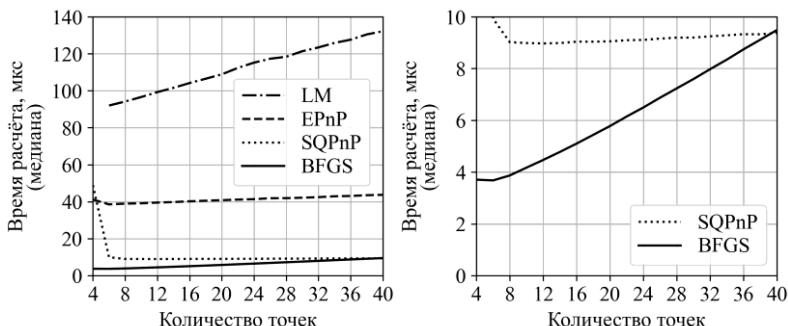


Рис. 6. Время расчёта для сравниваемых решений при разном масштабе по оси ординат

Видно, что производительность предложенного решения сильнее зависит от количества точек, чем SQPnP. По результатам данного эксперимента на 40 точках предложенное решение начинает уступать по скорости SQPnP, при этом оставаясь всё ещё более точным.

Стоит отметить особый случай четырёх точек, на которых LM не работает, а EPnP демонстрирует наиболее плохие результаты по точности. Производительность SQPnP на четырёх точках заметно ухудшается. При этом предложенное решение не демонстрирует никаких особых изменений в поведении.

#### 4. Заключение

В работе было представлено оптимизационное решение PnP-задачи с использованием BFGS алгоритма. Рассмотрены различные способы повышения вычислительной эффективности. Среди них – вариант параметризации поворота через вектор Родрига и вывод аналитических частных производных. Было предложено два подхода к модификации BFGS алгоритма, которые в рамках рассматриваемой задачи привели к повышению скорости вычисления. Благодаря этому предложенное решение демонстрирует высокую производительность при сохранении точности, что может быть полезно при решении задач позицион-

нирования на маломощных бортовых системах подвижных объектов.

Стоит отметить, что если в процессе вычисления на каком-либо шаге будет получено некорректное решение, то дальнейшее его использование в качестве начального приближения может привести к непредсказуемым результатам. Анализ данной ситуации требует дальнейшего исследования.

### **Литература**

1. БЕКЛЕМИШЕВ Н.Д. *Прямое нахождение оценки положения камеры центральной проекции по четырем опорным точкам* // Математическое моделирование. – 2020. – Т. 32, №10. – С. 91–104.
2. КУДИНОВ И.А., ПАВЛОВ О.В., ХОЛОПОВ И.С. *Реализация алгоритма определения пространственных координат и угловой ориентации объекта по реперным точкам, использующего информацию от одной камеры* // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, №3. – С. 413–419.
3. ХОЛОПОВ И.С., КАЛИНКИН А.И. *Оценка погрешности определения угловых координат объекта с двумя реперными излучателями* // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. – 2019. – №69. – С. 52–59.
4. APARICIO-ESTEVE E., URENA J., HERNANDEZ A. et al. *Using Perspective-n-Point Algorithms for a Local Positioning System Based on LEDs and a QADA Receiver* // Sensors. – 2021. – Vol. 21, No. 19. – 6537.
5. CUI J., MIN C., FENG D. *Research on pose estimation for stereo vision measurement system by an improved method: uncertainty weighted stereopsis pose solution method based on projection vector* // Optics Express. – 2020. – Vol. 28, No. 4. – P. 5470–5491.
6. DAI J.S. *Euler–Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections* // Mechanism and Machine Theory. – 2015. – Vol. 92. – P. 144–152.
7. FISCHLER M.A., BOLLES R.C. *Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis*

- and automated cartography // Communications of the ACM. – 1981. – Vol. 24, No. 6. – P. 381–395.*
- 8. FLETCHER R. *Practical Methods of Optimization*. – Wiley, 2000. – 436 p.
  - 9. GAO X.S., HOU X.R., TANG J. et al. *Complete solution classification for the perspective-three-point problem // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. – 2003. – Vol. 25, No. 8. – P. 930–943.
  - 10. HARTLEY R., ZISSEMAN A. *Multiple View Geometry in Computer Vision*. – New York: Cambridge University Press, 2003.
  - 11. HESCH J.A., ROUMELIOTIS S.I. *A Direct Least-Squares (DLS) method for PnP // 2011 Int. Conf. on Computer Vision*. – 2011.
  - 12. *Implementation of the BFGS algorithm in C++ [Электронный ресурс]. – URL: <https://github.com/IOdissey/bfgs> (дата обращения: 27.03.2025)*.
  - 13. KAWECKI A., DĄBROWSKI P., JANUSZKO S. et al. *AR Tags Based Absolute Positioning System // 8th Int. Conf. on Automation, Robotics and Applications (ICARA)*. – 2022. – P. 62–67.
  - 14. LEPETIT V., MORENO-NOGUER F., FUA P. *EPnP: An Accurate  $O(n)$  Solution to the PnP Problem // Int. Journal of Computer Vision*. – 2008. – Vol. 81. – P. 155–166.
  - 15. LV H., WU Q. *An Energy-Efficient Field-Programmable Gate Array (FPGA) Implementation of a Real-Time Perspective-n-Point Solver // Electronics*. – 2024. – Vol. 13, No. 19. – 3815.
  - 16. *Map-based navigation with ArUco markers [Электронный ресурс]. – URL: [https://clover.coex.tech/en/aruco\\_map.html](https://clover.coex.tech/en/aruco_map.html) (дата обращения: 24.03.2025)*.
  - 17. NOCEDAL J., WRIGHT S.J. *Numerical Optimization*. – New York: Springer New York, 2006. – 664 p.
  - 18. *OpenCV – Open Computer Vision Library [Электронный ресурс]. – URL: <https://opencv.org/> (дата обращения 12.08.2025)*.
  - 19. QIAO R., XU G., WANG P. et al. *An Accurate, Efficient, and Stable Perspective-n-Point Algorithm in 3D Space // Applied Sciences*. – 2023. – Vol. 13, No. 2. – 1111.

20. SCARAMUZZA D., FRAUNDORFER F. *Visual Odometry [Tutorial]* // IEEE Robotics & Automation Magazine. – 2011. – Vol. 18, No. 4. – P. 80–92.
21. SUN Q., ZHANG T., ZHANG G. et al. *Efficient Solution to PnP Problem Based on Vision Geometry* // IEEE Robotics and Automation Letters. – 2024. – Vol. 9, No. 4. – P. 3100–3107.
22. TERZAKIS G., LOURAKIS M. *A Consistently Fast and Globally Optimal Solution to the Perspective-n-Point Problem* // European Conf. on Computer Vision. – 2020. – P. 478–494.
23. VAKHITOV A., FERRAZ L., AGUDO Aet al. *Uncertainty-aware camera pose estimation from points and lines* // Proc. of IEEE/CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). – 2021. – P. 4659–4668.
24. ZENG G., CHEN S., MU B. et al. *CPnP: Consistent Pose Estimator for Perspective-n-Point Problem with Bias Elimination* // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). – 2023. – P. 1940–1946.
25. ZHAN T., XU C., ZHANG C. et al. *Generalized Maximum Likelihood Estimation for Perspective-n-Point Problem* // IEEE Robotics and Automation Letters. – 2025. – Vol. 10, No. 2. – P. 1752–1759.
26. ZHUANG S., ZHAO Z., CAO L. et al. *A Robust and Fast Method to the Perspective-n-Point Problem for Camera Pose Estimation* // IEEE Sensors Journal. – 2023. – Vol. 23, No. 11. – P. 11892–11906.

## OPTIMIZATION APPROACH TO SOLVING PNP PROBLEM BASED ON PARAMETERIZATION BY RODRIGUES VECTOR

**Alexander Abramenkov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Researcher ([aabramenkov@asmon.ru](mailto:aabramenkov@asmon.ru)).

*Abstract: In many cases, the task of positioning a moving object using camera images can be reduced to well-known PnP (perspective-n-point) problem. For solving it, optimization algorithm is considered. The reprojection error using the parameterization of the rotation matrix by the Rodrigues vector is considered. Analytical partial derivatives were obtained for it. A feature of the task of positioning a moving object is that the new solution in most cases is in the neighborhood of the previous*

*one. The main disadvantage of the optimization approach is the need to calculate the initial solution. It can be eliminated using the solution from the previous iteration. This also helps to eliminate the problem with the Rodrigues vector, which increases indefinitely as the rotation angle reaches 180 degrees. The BFGS numerical algorithm was used to solve the optimization problem. A heuristic for selecting the initial approximation of the inverse Hessian and the first step of the linear search is proposed. This made it possible to speed up the algorithm. The proposed approach is compared with known implementations from the OpenCV library on synthetic data. The experiment showed that the proposed approach has good performance in terms of accuracy and execution speed.*

Keywords: visual odometry, optimization algorithm, reprojection error.

УДК 004.02

ББК 32.97

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

*Поступила в редакцию 01.04.2025.*

*Опубликована 30.09.2025.*

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ RFID-МЕТОК С СЕНСОРНОГО ПОЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БПЛА

Абрамян В.Л.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Технология *RFID* (*Radio Frequency Identification*) находит широкое применение в научных и инженерных задачах, включая взаимодействие с беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) для идентификации объектов в труднодоступных зонах. Одними из ключевых характеристик таких систем являются вероятность успешного считывания метки и время, затраченное на считывание, которые могут быть количественно описаны с помощью моделей полумарковских процессов. В данной работе рассматриваются два принципиально различных сценария. В первом случае предполагается разреженное размещение меток, исключающее коллизии. Для него предложена аналитическая модель взаимодействия считывателя и метки. Во втором случае метки размещены плотно, что приводит к коллизиям; для оценки параметров работы системы в таких условиях разработана дискретно-событийная имитационная модель. В модели учитываются особенности протокола *EPC Gen2*, параметры радиоканала, геометрия размещения меток и стратегия чтения данных. Проведено сравнение аналитических и имитационных результатов, а также исследовано влияние плотности меток, объёма данных и высоты полёта на характеристики чтения.

Ключевые слова: *RFID*, БПЛА, сенсорная метка, симуляция, аналитика.

### 1. Введение

Радиочастотная идентификация (*RFID*) — это технология маркировки и автоматической идентификации объектов, при которой данные, хранящиеся в *RFID*-метках,читываются или записываются с помощью радиосигналов. Базовая *RFID*-система состоит минимум из двух компонентов: меток (радиоэлектронных устройств, закрепляемых на объектах) и считывателей (активных устройств, инициирующих обмен данными). Одной из ключевых особенностей *RFID*-систем является использование, как правило, пассивных меток, не имеющих собственного источника питания. Эти устройства активируются сигналом считывателя, что делает их простыми и недорогими, благодаря чему они

<sup>1</sup> Абрамян Вильмен Левонович, м.н.с. (*abramian.vl@phystech.edu*).

широко применяются в повседневной жизни, например, в розничной торговле (бирки одежды), библиотечном деле (метки на книгах) и других сферах [2]. Помимо традиционных областей RFID также активно используется в транспорте [5, 10, 11]. Потенциал технологии позволяет расширять сферы её использования: RFID-системы находят применение в строительстве, логистике, отслеживании и контроле движения специализированного транспорта, а также его парковке [17, 19].

Одним из потенциальных применений RFID-систем является использование их совместно с беспилотными летательными аппаратами (БПЛА), которые находят широкое применение как в гражданской, так и в оборонной промышленности для решения множества задач [1, 3, 12]. Один из популярных сценариев включает установку считывателя на БПЛА для опроса меток, размещенных на идентифицируемых объектах [7]. Например, в работах [14, 15] рассматривается использование БПЛА для сбора данных о растениях на сельскохозяйственных полях. В этих исследованиях описаны эксперименты по определению оптимальной высоты полета БПЛА, а также других параметров, влияющих на вероятность успешного чтения RFID-меток. Авторы в [15] также представили эксперименты, направленные на изучение различных алгоритмов полета БПЛА с RFID-считывателем для оптимизации скорости пролета над каждой меткой с целью её считывания с заданной вероятностью.

Определение состояния почвы на больших территориях также может быть выполнено с использованием БПЛА, которые опрашивают метки со встроенными датчиками (температуры, влажности и других параметров) [4]. Датчики RFID-меток, установленные на БПЛА, могут использоваться для сбора данных о температуре или влажности воздушных масс [8, 9]. Пространственную карту окружающей среды можно строить с использованием роя сверхмалых БПЛА, оснащённых бортовыми датчиками в RFID-метках, и более крупного дрона с RFID-считывателем [8]. Также исследователи уделяют внимание вопросам беспроводного канала связи в подобных системах [18, 20]

Тем не менее упор в перечисленных работах сделан в первую очередь на проведении реальных и численных экспериментов с находящимися в движении считывателем или меткой без построения аналитической модели подобного взаимодействия, что может осложнить масштабирование полученных в этих работах результатов и поиск потенциально новых применений БПЛА совместно с RFID-системами. В то же время в работах, в которых строятся аналитические модели взаимодействия метки и считывателя (например, [6]), напротив, не приводится экспериментальная верификация полученных моделей. В связи с этим актуальной задачей является построение аналитической модели взаимодействия RFID-метки с движущимся RFID-считывателем и её сравнение с результатом численного эксперимента, реализованного с помощью имитационной модели. При этом выбор в сторону численного (а не реального) эксперимента обусловлен большей гибкостью к модификации программируемой модели по сравнению с реальной, а также более простой реализацией.

В настоящей статье рассматривается задача оценки времени считывания данных с сенсорных RFID-меток с помощью считывателя, установленного на БПЛА. Рассматривается технология UHF RFID, работающая в диапазоне 860–960 МГц и регламентируемая стандартом EPC Class 1 Gen.2 [16]. В данной работе проводится анализ различных сценариев (стратегий) чтения сенсорных меток при разных расстояниях между считывателем и меткой, а также объёме считываемых данных. Проводится оценка среднего времени, необходимого для считывания данных с метки в рамках каждой стратегии. При этом всесторонний анализ энергопотребления БПЛА в процессе полета и считывания меток выходит за рамки данного исследования. В разделе 2 перечисляются используемые в настоящей статье методы и их границы применимости, в том числе описывается зависимость параметров сигнала метки от физических характеристик (высоты полёта, мощности сигнала и пр.), анализируется влияние использования различных стратегий чтения сенсорных меток и времени задержки чтения данных. В разделе 3 описывается аналитическая мо-

дель расчёта среднего времени успешного чтения RFID-метки. Рассматриваются полумарковские процессы как в случае отсутствия повторной передачи сигнала от метки, так и в случаях с повторной передачей. Раздел 4 посвящена сравнению полученных при помощи аналитической модели предсказаний с результатами, получаемыми из имитационной модели. В разделе 5 рассматривается имитационное моделирование системы с коллизиями. В заключении приводятся выводы и дальнейшие потенциальные направления исследования.

## 2. Применяемые методы

### 2.1. ОПИСАНИЕ ИССЛЕДУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Обозначим высоту расположения RFID-считывателя на БПЛА как  $h$ , а расстояние до метки по земле – как  $x$ . Под расстоянием по земле подразумевается расстояние от метки до точки на земле, находящейся строго под БПЛА (рис. 1). Предположим, что БПЛА либо замирает в заданной точке, либо движется с постоянной скоростью, при этом антенна считывателя направлена строго вниз, антенна метки – строго вверх.

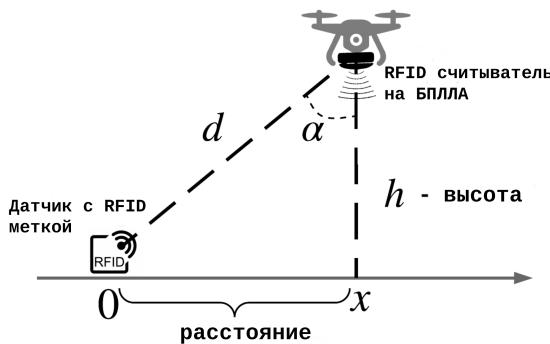


Рис. 1. Геометрия системы, включающей RFID считыватель на БПЛА и сенсорную метку

Аналитические формулы для расчёта мощности излучения, падающего на метку и считыватель, а также потерь в канале, бы-

ли взяты из работы [13]. При этом если полученная меткой мощность сигнала меньше пороговой чувствительности, она не включается и не может ответить считывателю. Численный пример расчета мощности и потерь на пути показан на рис. 2.

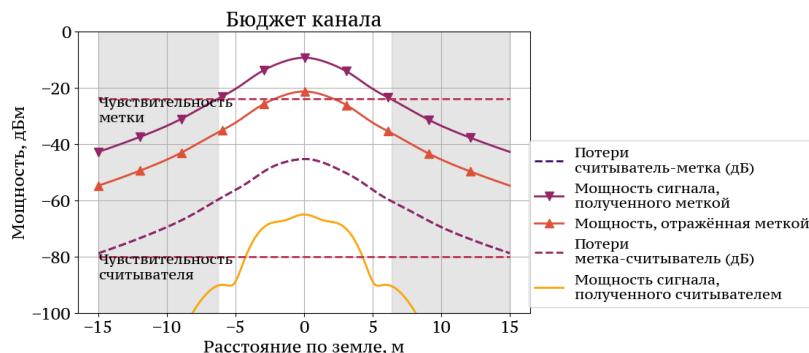


Рис. 2. Оценка бюджета связи при размещении RFID-считывателя на БПЛА на разных расстояниях от сенсорной метки на высоте 5 м. Пороговая чувствительность метки составляет  $-22 \text{ дБм}$ , передаваемая мощность считывателя составляет  $31 \text{ дБм}$

Потери в канале зависят от расстояния между считывателем и меткой, а также от угла между осью антенны и направлением луча прямой видимости. Таким образом, максимальное расстояние по земле, на котором возможно соединение, зависит от текущей высоты БПЛА, а также от мощности передачи считывателя и чувствительности метки.

Мощность, принимаемая считывателем, подвергается влиянию потерь на пути дважды: в прямом и обратном направлениях, так как метка не имеет собственного источника питания и может использовать только энергию, полученную от считывателя.

Из-за обратного рассеяния (способ, с помощью которого метка передаёт радиосигнал) мощность сигнала, принимаемая считывателем от метки, значительно ниже мощности, принимаемой меткой от считывателя, поэтому ошибки гораздо более ве-

роятны на стороне считывателя при приёме ответа метки. В данной работе предполагается, что если метка имеет достаточную мощность для включения, то она всегда способна правильно декодировать команду считывателя. Поэтому любая ошибка связи возникает на стороне считывателя из-за ненулевой вероятности битовой ошибки (BER).

## 2.2. СТРАТЕГИИ ЧТЕНИЯ СЕНСОРНЫХ МЕТОК

Рассмотрим случай, при котором метки расположены на достаточно большом расстоянии друг от друга. Тогда можно сделать предположение о том, что раунд инвентаризации (т.е. законченный набор обменов сигналами между считывателем и метками) может содержать только один слот ( $Q = 0$ ) [16], причём в начале нового раунда инвентаризации считыватель выбирает такие флаги сессии, чтобы метка в его области чтения всегда могла принять участие в раунде. Однако из-за ненулевого BER некоторые ответы сенсорной метки могут быть потеряны. Ключевой характеристикой здесь является время, необходимое для идентификации метки и получения данных с датчика.

Если считыватель не получил ответ от метки, он может либо повторно отправить последнюю команду, либо перейти к следующему раунду инвентаризации. Благодаря этому возникает вопрос о предпочтительной стратегии (или сценарии) поведения меток: с повторной передачей или без. Более того, поскольку данные с датчика можно считывать как с помощью одной команды Read, так и с помощью отправки последовательности команд для получения только частей (фрагментов) данных, кажется важным сравнить между собой и эти возможные стратегии. Таким образом кажется последовательным рассмотреть следующие 3 сценария поведения меток:

1. Всякий раз, когда ответ метки получен с ошибкой, считыватель начинает новый раунд.

2. После любой ошибки считыватель повторно отправляет последнюю команду до тех пор, пока не получит ответ или метка не отключится (БПЛА улетел от метки). Для чтения данных считыватель отправляет одну команду Read.

3. Аналогично предыдущему варианту, но считыватель получает данные от датчика с помощью последовательности команд Read, считывая данные блоками по 2 слова (т.е. 32 бита).

Рисунок 3 демонстрирует типичный раунд инвентаризации и обработку ошибок в рамках этих стратегий. Первая стратегия может быть использована для идентификации быстро движущихся меток (она была изучена в [5]).

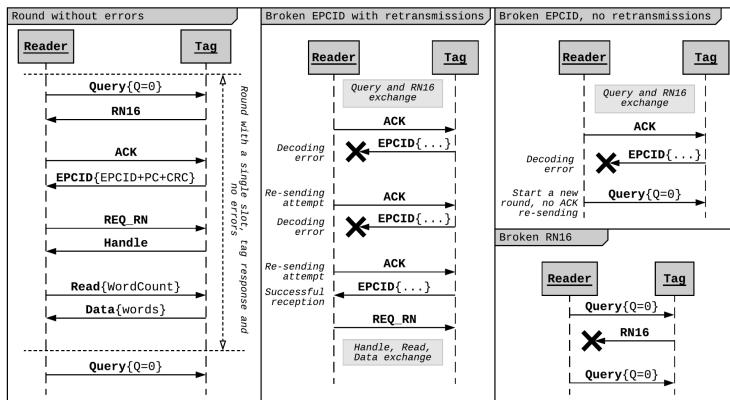


Рис. 3. Раунд инвентаризации (левый столбец); обработка ошибок с повторной отправкой последней команды (средний столбец) или без повторной отправки (вверху справа); ошибки при передаче RN16 обрабатываются одинаково во всех сценариях (внизу справа)

Рисунок 4 показывает разницу между второй и третьей стратегиями. Третья стратегия неудобна тем, что при каждом ответе на команду Read метка передает дополнительные 33 бита (1 бит – заголовок, 16 бит – текущий случайный дескриптор и 16 бит – контрольная сумма).

В качестве примера рассмотрим случай, когда считывателю нужно получить 10 слов. При второй стратегии, если не возникает ошибок, метка передает  $10 * 16 + 33 = 193$  бита, а при третьей стратегии –  $5 * (2 * 16 + 33) = 325$  бит.

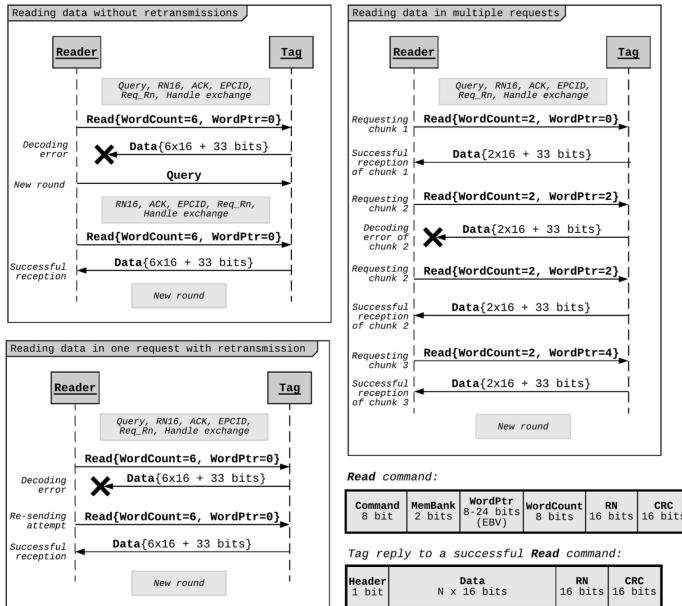


Рис. 4. Стратегии чтения данных: чтение без повторных передач (вверху слева), чтение с повторными передачами при ошибках и фрагментации данных (вверху справа), повторные передачи без фрагментации (внизу слева); Форматы команд чтения и ответов меток (внизу справа)

Пусть BER равен  $p_{er} = 10^{-3}$ , тогда передача одиночного ответа будет успешной с вероятностью  $(1 - p_{er})^{193} \approx 0,824$  при использовании стратегии без фрагментации и  $(1 - p_{er})^{65} \approx 0,937$  при использовании фрагментации. В случае одиночной ошибки метка передает 386 бит без фрагментации и 390 бит в противном случае. При большем количестве ошибок в передаче данных стратегия с фрагментацией начинает выигрывать с 455 бит против 579 бит без фрагментации. При этом здесь не учитывается время, необходимое для передачи дополнительных команд Read. Однако тенденция не меняется: чем больше данных требуется передать и чем хуже канал, тем больше времени нужно, если фрагментация не используется.

### 2.3. ЗАДЕРЖКИ ЧТЕНИЯ ДАННЫХ

Предположим, что считывателю необходимо получить  $N$  слов от сенсорной метки, и обозначим длину ответа как  $|msg|$ , а  $P_{msg}$  — вероятность того, что ответ «msg» будет успешно получен. Здесь предположено, что BER не меняется во время передачи ответа, поэтому  $P_{msg} = (1-p_{er})^{|msg|}$ . Если используется фрагментация, то ответ с фрагментом данных будем называть «Chunk» (он содержит 2 слова). Если размер данных нечетный, то последний chunk, содержащий одно слово, будет рассмотрен и учтён отдельно. Задержки доступа к данным для всех определенных ранее стратегий могут быть описаны с помощью случайных полумарковских поглощающих процессов, показанных на рис. 5–7. Задержка доступа является случайной величиной, равной времени от начала до поглощения. Обозначим эти случайные величины как  $\tau_1(N)$ ,  $\tau_2(N)$  и  $\tau_3(N)$  соответственно, где  $N$ , как определено выше, — это количество слов, которые нужно прочитать.

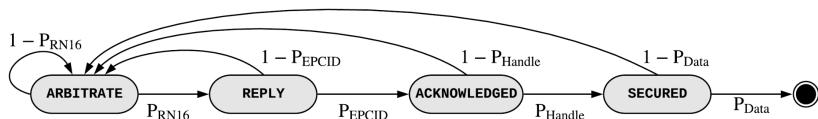


Рис. 5. Случайный процесс оценки задержки чтения данных без повторных передач

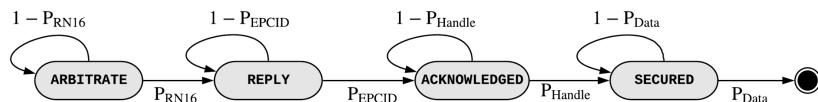


Рис. 6. Случайный процесс оценки задержки чтения данных с повторными передачами и без фрагментации

Поведение RFID-метки моделируется с помощью случайных процессов в соответствии с её рабочими режимами, описанными в стандарте EPC Class 1 Gen. 2 [16]. Состояние метки изменяется после успешной передачи ответа (см. рис. 3 для иллюстрации раунда инвентаризации).

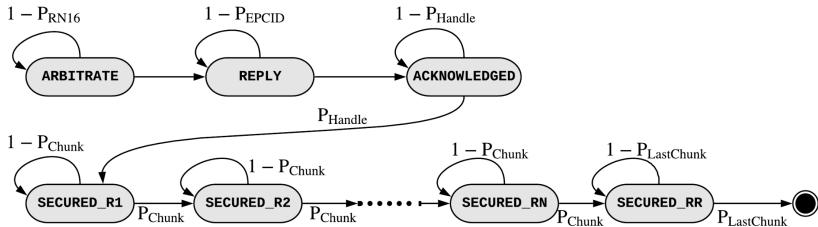


Рис. 7. Случайный процесс оценки задержки чтения данных с повторными передачами при ошибках и фрагментации данных

– Arbitrate: метка получает команду «Query» с  $Q = 0$ , генерирует случайное слово RN16 и передает его считывателю;

– Reply: метка получает команду Ack с правильным RN16 и передает обратно свой EPCID вместе со вспомогательными данными (PC, CRC);

– Acknowledged: после успешной отправки EPCID считыватель запрашивает новый случайный дескриптор через команду Req\_RN, а метка возвращает его в ответе Handle. В отличие от первого ответа, он отправляется контрольную сумму вместе со сгенерированным дескриптором;

– Secured: метка получает команду «Read» и передает свои данные в виде заданного количества слов из банка USER;

– Secured\_Ri, Secured\_LC: эти состояния похожи на состояние Secured, но используются в моделировании третьего сценария для отслеживания текущего фрагмента (Secured\_Ri). Если было запрошено нечетное количество слов, состояние Secured\_LC указывает на то, что передается последний фрагмент с одним словом. В противном случае предполагается, что состояние Secured\_LC имеет нулевую длительность, и переход в поглощающее состояние выполняется с вероятностью  $P_{LastChunk} = 1$ .

Предположим, что EPCID составляет 96 бит и считыватель запрашивает  $N$  слов из банка памяти USER (данные датчика). Форматы ответов меток определены в [16], а их длина в битах составляет:  $L_{RN16} = 16$ ,  $L_{EPC} = 128$  (EPCID, PC, CRC),  $L_{Handle} = 32$  (RN, CRC),  $L_{Data} = 16N + 33$ ,  $L_{Chunk} = 65$  и  $L_{LastChunk} = 49$ .

Обозначим время, проведенное в состоянии  $S$ , как  $T\{S\}$ , время, необходимое для передачи команды или ответа «msg», – как  $T_{msg}$ , а задержку распространения – как  $\delta$ . Согласно [16], обозначим время от передачи считывателя до ответа метки как  $T_1$ , а интервал между последним фиктивным битом ответа метки и началом передачи считывателя как  $T_2$ . Тогда время, проведенное процессом в состояниях, можно определить следующим образом:

$$(1) \quad \begin{aligned} T\{\text{Arbitrate}\} &= T_{Query} + T_1 + T_{RN16} + T_2 + 2\delta, \\ T\{\text{Reply}\} &= T_{Ack} + T_1 + T_{EPC} + T_2 + 2\delta, \\ T\{\text{Acknowledged}\} &= T_{Req\_RN} + T_1 + T_{Handle} + T_2 + 2\delta, \\ T\{\text{Secured}\} &= T_{Read} + T_1 + T_{Data} + T_2 + 2\delta, \\ T\{\text{Secured\_Ri}\} &= T_{Read} + T_1 + T_{Chunk} + T_2 + 2\delta, \\ T\{\text{Secured\_LC}\} &= T_{Read} + T_1 + T_{LastChunk} + T_2 + 2\delta. \end{aligned}$$

Длительность ответа можно найти как  $T_{resp} = m/BLF(L_p + L_{resp} + 1)$ , где  $L_p$  – длительность преамбулы; 1 добавлена для учета последнего фиктивного бита;  $m$  – порядок кода Миллера, а  $BLF$  – частота обратного рассеяния,  $BLF = DR/TRcal$ . Длительность команд оценить не просто: считыватель использует PIE (pulse interval encoding – кодирование длительностью импульса), поэтому нужно знать точное количество нулей и единиц, поскольку эти символы имеют разную длительность. Для оценки длительности команд в данной работе строятся эти команды, кодируются их содержимое и определяется количество нулей и единиц. Для упрощения вычислений некоторые поля заполняются равным количеством нулей и единиц, например поля контрольной суммы. Также предполагается, что  $T_1$  имеет номинальное значение  $T_1 = \max(RTcal, 10T_{pri})$  и  $T_2$  имеет минимальное значение  $T_2 = 3T_{pri}$ .

### **3. Аналитический метод расчета времени передачи данных**

Как было отмечено ранее, в работе рассмотрены три сценария передачи данных меткой: без пересылки данных в случае

ошибки, с пересылкой данных в случае ошибки и с пересылкой данных и их фрагментацией. Каждый сценарий передачи представляет собой случайный полумарковский процесс с единственным поглощающим состоянием  $\xi = (n, t), n = \overline{1, N}, t \geq 0$ , где  $n$  – номер состояния, а  $N$  – число состояний. В данном случае поглощающим состоянием является состояние с номером  $n = N$ . Попадание процесса в состояние с данным номером является завершением передачи данных меткой. Основной задачей является расчет математического ожидания времени до попадания процесса в поглощающее состояние при заданных вероятностях успешной передачи и среднем времени передачи на каждой фазе. Таким образом, аналитической моделью рассматриваемого процесса будет математическое ожидание времени, необходимого для попадания процесса в поглощающее состояние, как функция от времени каждой фазы и вероятностей успешного перехода между ними для всех трёх описанных ранее сценариев.

### 3.1. СЦЕНАРИЙ БЕЗ ПОВТОРНОЙ ПЕРЕДАЧИ

На рис. 8 показан граф переходов случайного процесса, описывающего передачу данных от метки к считывателю без повторной отправки. Процесс может находиться в пяти состояниях: первые четыре характеризуют отправку данных, пятое – поглощающее состояние, характеризующее окончание передачи данных.

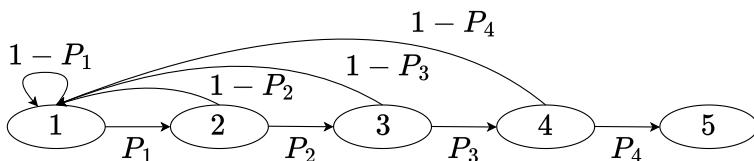


Рис. 8. Граф переходов случайного процесса, описывающего передачу данных метки без повторной передачи

Кратко опишем, каким образом происходят переходы. Начальным состоянием процесса является состояние 1. После чего через время  $T_1$  процесс с вероятностью  $P_1$  переходит в состояние 2 и с вероятностью  $1 - P_1$  остается в состоянии 1, после

чего по истечении времени  $T_1$  повторяется процедура перехода. Аналогично устроены переходы из состояний  $i = 2, 3, 4$ : после ожидания времени  $T_i$  процесс с вероятностью  $P_i$  переходит в состояние  $i+1$  и с вероятностью  $1 - P_i$  возвращается в состояние 1.

Траекторией процесса является последовательность состояний, в которых был процесс до перехода в поглощающее состояние. Например, траекторий является  $(1, 2, 3, 4)$ , когда процесс последовательно прошел все состояния без возврата в состояние 1. Также примером траектории является  $(1, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 4)$ , где процесс дважды вернулся в состояние 1: первый раз из состояния 3 и второй раз – из состояния 1. Также любой траектории можно сопоставить элемент вида  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$ , где  $n_i \geq 0, i = \overline{1, 4}$ , – число возвратов процесса из состояния  $i$  в состояние 1. Можно заметить, что одному элементу  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  соответствует  $\frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}$  различных неповторяющихся траекторий. Обозначим множество  $(n_1, n_2, n_3, n_4), n_i \geq 0, i = \overline{1, 4}$ , как  $\Omega$ .

Среднее время до перехода в поглощающее состояние:

$$(2) \quad T = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega T_\omega,$$

т.е. равно сумме вероятности реализации траектории, умноженной на время до поглощающего состояния. Или, что то же самое:

$$(3) \quad T = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega (s_1 T_1 + s_2 T_2 + s_3 T_3 + s_4 T_4),$$

где  $s_i$  – число пребываний процесса в состоянии  $i$  для траектории  $\omega$ ,  $s_i \geq 1, i = 1, 2, 3, 4$ , для любой траектории  $\omega \in \Omega$ .

Для любой траектории число нахождений в состоянии  $i$  можно представить в виде суммы  $s_i = m_i + n_i$ , где  $m_i$  – число переходов в  $(i+1)$ -е состояние, а  $n_i$  – число переходов в состояние 1. Тогда между числами, характеризующими любую траекторию, можно найти следующие закономерности:

$$(4) \quad \begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=1}^4 n_i + 1, & s_2 &= \sum_{i=2}^4 n_i + 1, \\ s_3 &= \sum_{i=3}^4 n_i + 1, & s_4 &= n_4 + 1; \end{aligned}$$

прибавление единицы к каждому значению  $s_i$  означает удачный переход в поглощающее состояние. Таким образом, уравнение (3) можно переписать в виде:

$$(5) \quad T = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left[ \left( \sum_{i=1}^4 n_i + 1 \right) T_1 + \left( \sum_{i=2}^4 n_i + 1 \right) T_2 + \left( \sum_{i=3}^4 n_i + 1 \right) T_3 + (n_4 + 1) T_4 \right],$$

а время до поглощения для траектории  $\omega$  равно соответственно:

$$(6) \quad T_\omega = T_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} = \left( \sum_{i=1}^4 n_i + 1 \right) T_1 + \left( \sum_{i=2}^4 n_i + 1 \right) T_2 + \left( \sum_{i=3}^4 n_i + 1 \right) T_3 + (n_4 + 1) T_4.$$

Вероятность  $p_\omega$  реализации траектории определяется как

$$(7) \quad p_\omega = \prod_{i=1}^4 p_i^{m_i} (1 - p_i)^{n_i},$$

или, с учетом уравнения (4):

$$(8) \quad \begin{aligned} p_\omega &= p_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} = \\ &= p_1^{n_2+n_3+n_4+1} (1-p_1)^{n_1} \cdot p_2^{n_3+n_4+1} (1-p_2)^{n_2} \cdot \\ &\quad \cdot p_3^{n_4+1} (1-p_3)^{n_3} \cdot p_4 (1-p_4)^{n_4}. \end{aligned}$$

При переходе от суммирования по множеству всевозможных траекторий к суммированию по  $n_i, i = \overline{1, 4}$ , стоит учесть, что одному элементу суммы  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  соответствует  $C_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} = \frac{(n_1+n_2+n_3+n_4)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}$  различных различных траекторий. Поэтому при переходе к сумме по  $n_i, i = \overline{1, 4}$ , получаем окончательную формулу для вычисления математического ожидания времени перехода в поглощающее состояние:

$$(9) \quad T(p_i, T_i) = \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} C_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} p_{(n_1, n_2, n_3, n_4)} T_{(n_1, n_2, n_3, n_4)}.$$

Поскольку  $n_i \geq 0$ , а верхней границы у них, вообще говоря, нет, сумма в формуле (9) является бесконечной. Тем не менее, поскольку  $p_i \leq 1$ ,  $p_{(n_1, n_2, n_3, n_4)}$ , будучи произведением показательных функций от  $n_i$  очень быстро убывает, а потому ряд в правой

части (9) является сходящимся. Подставив в него конкретные значения  $p_i$  и  $T_i$  и просуммировав получившийся ряд, можно получить математическое ожидание времени перехода в поглощающее состояние.

### 3.2. СЦЕНАРИЙ С ПОВТОРНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ ДАННЫХ

Как было отмечено ранее, возможна модификация чтения метки, при которой повторная передача осуществляется с момента неправильно переданного фрагмента. С точки зрения переходов случайного процесса это означает, что при неудачной отправке данных переход из состояния  $i, i = \overline{1, 4}$ , процесс остается в этом же состоянии (см. рис. 9).

Обозначим  $p(n_1, n_2, n_3, n_4)$  – вероятность того, что процесс находился  $n_i$  раз в  $i$ -м состоянии; она вычисляется по следующей формуле:

$$(10) \quad p(n_1, n_2, n_3, n_4) = \prod_{i=1}^4 (1 - p_i)^{n_i} p_i.$$

Тогда математическое ожидание времени перехода в поглощающее состояние можно посчитать как

$$\begin{aligned} (11) \quad T &= \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} p(n_1, n_2, n_3, n_4) \sum_{i=1}^4 (n_i + 1) T_i = \\ &= \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} \prod_{i=1}^4 (1 - p_i)^{n_i} p_i \sum_{i=1}^4 (n_i + 1) T_i = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (1 - p_1)^{n_1} p_1 (n_1 + 1) + \sum_{n_2=0}^{\infty} (1 - p_2)^{n_2} p_2 (n_2 + 1) + \\ &\quad + \sum_{n_3=0}^{\infty} (1 - p_3)^{n_3} p_3 (n_3 + 1) + \sum_{n_4=0}^{\infty} (1 - p_4)^{n_4} p_4 (n_4 + 1) = \\ &= \overline{T_1} + \overline{T_2} + \overline{T_3} + \overline{T_4}, \end{aligned}$$

т.е. математическое ожидание времени перехода в поглощающее состояние равно сумме математических ожиданий времен нахождения в непоглощающих состояниях.

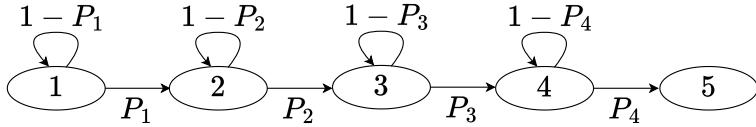


Рис. 9. Граф переходов случайного процесса, описывающего передачу данных с повторной передачей

### 3.3. СЦЕНАРИЙ С ПОВТОРНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ И ФРАГМЕНТАЦИЕЙ ДАННЫХ

Математическое ожидание времени перехода в поглощающее состояние в случайном процессе, который характеризует передачу с разбиением данных на части (рис. 10), вычисляется таким же образом, как и для случая с повторной отправкой данных, но с учетом всех состояний, где происходит передача данных. Формула для вычисления имеет следующий вид:

$$(12) \quad T = \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3 + M\bar{T}_c,$$

где  $M$  – число частей, на которые разбиваются данные, а  $T_c$  – время передачи части данных.

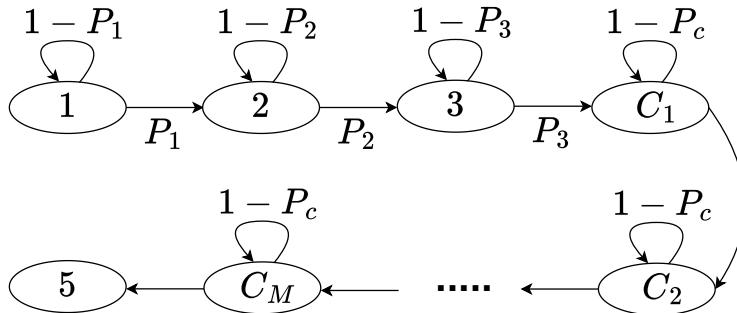


Рис. 10. Граф переходов случайного процесса, описывающего передачу данных с повторной передачей и фрагментацией данных

## 4. Результаты

### 4.1. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ RFID СИСТЕМЫ

RFID-считыватель размещается на борту БПЛА и, как правило, использует тот же источник питания. Важно, чтобы считыватель мог надёжно взаимодействовать с сенсорными метками, не подлетая слишком близко к ним. Это особенно актуально при полёте над объектами, к которым невозможно приблизиться на малой высоте.

В отличие от традиционных беспроводных систем, RFID-считыватель должен постоянно излучать несущую волну, которая используется меткой для питания и обратного рассеивания своих данных. Поэтому длительность времени, когда считыватель включен, напрямую влияет на общее количество ресурсов, затрачиваемых на обмен данными. При значительных расстояниях между метками возможен режим, при котором считыватель активен только при пролёте над предполагаемой зоной обнаружения.

В этом разделе приводится оценка таких зон — высоты полёта БПЛА и расстояния до метки по земле — при которых возможно корректное считывание при заданном уровне BER в канале. Далее анализируется продолжительность обмена данными в зависимости от стратегии чтения и объёма считываемой информации. Предполагается, что БПЛА движется с постоянной скоростью. Все численные параметры приведены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры, используемые в численном эксперименте для оценки производительности системы RFID

Параметр	Значение
Усиление антенны считывателя	7 дБм
Усиление антенны метки	2 дБм
Чувствительность метки	-22 дБм
Поляризационные потери	-3 дБ
Потери обратного рассеивания	-10 дБ
Шум на считывателе	-80 дБм

## 4.2. ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ ЧТЕНИЯ

Задержки доступа к данным определяются как случайные величины  $\tau_1(N)$ ,  $\tau_2(N)$  и  $\tau_3(N)$ , описывающие время до поглощения в полумарковских случайных процессах  $\xi_1$  (см. рис. 5),  $\xi_2$  (рис. 6) и  $\xi_3$  (рис. 7) соответственно. Численная оценка задержек доступа к данным в зависимости от BER для различных значений  $N$  дает результаты, показанные на рис. 11–14.

Для проверки аналитически полученных в предыдущей главе результатов были разработаны имитационные модели. Средняя погрешность между аналитическим расчетом и имитационным моделированием не превысила 0,5%.

Результаты для первого сценария показаны на рис. 11. Этот сценарий соответствует ситуации, когда в процессе обмена данными метка теряет сигнал от считывателя и отключается (так как не имеет собственного источника питания). Для второго сценария это же время существенно меньше, что видно из рис. 12. Это объясняется тем, что в случае ошибки отправки ответа метка не теряет сигнал от считывателя и остается в текущем состоянии. Благодаря этому она не тратит лишнее время на прохождение всего пути до поглощающего состояния с самого начала. Легко заметить, что в обоих случаях с ростом количества переданных слов увеличивается время, необходимое для считывания метки.

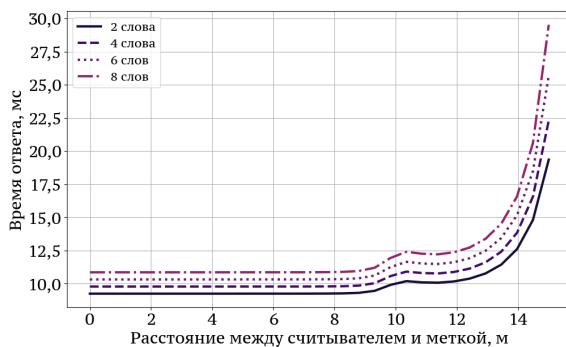


Рис. 11. Время чтения для первого сценария



Рис. 12. Время чтения для второго сценария

В случае передачи большого объема данных (более 16 слов) время считывания метки может увеличиться на порядок (рис. 13). Это связано с тем, что при высоких значениях BER слишком длинный ответ метки, содержащий все необходимые считывателю данные, скорее всего, будет потерян. В связи с этим при значениях расстояния более 10 м (BER больше 0,004) выгоднее разбить большой пакет данных на несколько частей, что соответствует сценарию 3 (рис. 14). В этом случае потеря одного из фрагментов не приведет к серьезным потерям времени.

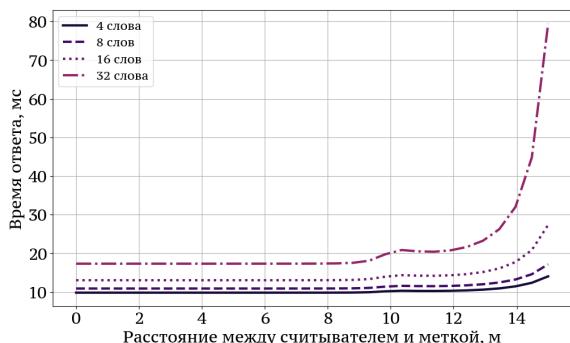
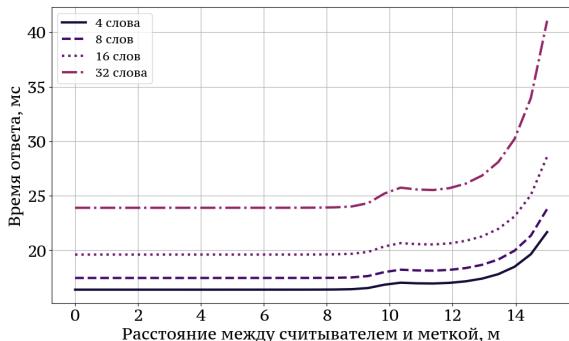


Рис. 13. Время чтения для второго сценария при чтении большого количества данных



*Рис. 14. Время чтения для третьего сценария при чтении большого количества данных*

## **5. Оценка времени считывания меток при наличии интерференций**

Данный раздел посвящен разработке и исследованию имитационной модели, учитывающей взаимодействие подвижного RFID-считывателя с метками в случае интерференций (коллизий). Используемая модель построена по принципу дискретно-событийной имитации, в которой события инициируют переходы между состояниями системы. Событиями являются, к примеру: включение считывателя, генерация метки в зоне чтения, движение считывателя, создание транзакции и прочее. Модель реализована при помощи объектно-ориентированного программирования на языке Python.

В основе модели лежит взаимодействие между тремя объектами: считывателем, меткой и каналом. Каждый из этих объектов реализован как публичный класс (Reader, Tag и Channel соответственно). Класс Reader содержит в качестве внутренних параметров, в частности, мощность генерируемого сигнала,  $Tari$ , высоту и скорость движения, и генерирует команды согласно протоколу EPC Gen2 (Query, QueryRep, Ack и прочие). Аналогично, класс Tag также характеризуется большим количеством параметров (положение на земле, усиление антенны, чувствительность

приёмника, возможность включения/выключения по питанию). Наконец, класс Channel отвечает за моделирование распространения сигнала (расчёт мощности, BER, SNR согласно работе [13]) с учётом расстояния и эффекта Допплера.

На каждом шаге для считывателя, перемещающегося с заранее заданной скоростью, пересчитываются относительные положения меток и определяется, какие из них находятся в зоне считывания, происходит перерасчёт BER и реализуется детальная логика EPC Gen2: просчитываются раунды инвентаризации, слоты внутри раундов, обработка коллизий, управление  $Q$ , учёт флагов сессий. При этом для меток поддерживается протоколирование состояний: для каждой метки создаётся Python-объект журнала, в котором хранится каждый факт чтения, время каждого чтения, количество раундов, в котором метка успела принять участие, принимаемая мощность во время обмена данными со считывателем.

В качестве результатов имитационная модель возвращает:

- вероятность успешной идентификации;
- вероятность чтения пользовательского банка памяти, основанную на доле меток, успешно считанных хотя бы один раз;
- среднее время идентификации, вычисляемое как среднее по временным промежуткам от включения метки до первого чтения;
- количество коллизий, число слотов без ответов.

Важной особенностью созданной модели является поддержка многопроцессорных расчётов. Это позволяет запускать несколько параллельных симуляций, что в разы сокращает время получения результатов.

На рис. 15 представлено среднее времени, необходимого для чтения одной метки, в зависимости от высоты полёта БПЛА. Можно заметить, что в случае большого количества меток среднее время чтения одной метки значительно увеличивается (более чем в 5 раз для высоты полёта в 1 м). Однако с увеличением высоты полёта относительный вклад в среднее время чтения одной метки начинает уменьшаться.

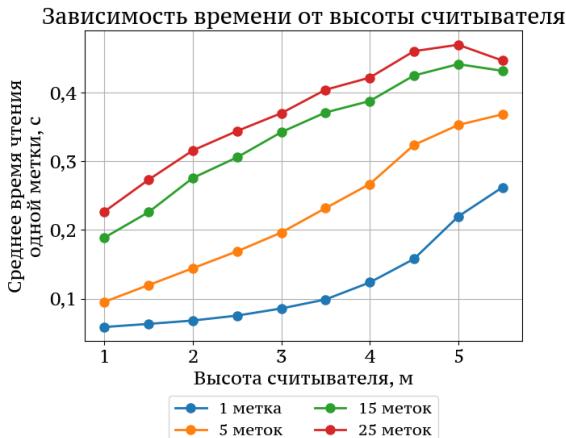


Рис. 15. Зависимость среднего времени, необходимого для чтения одной сенсорной метки, от высоты полёта в случае различного количества меток, находящихся одновременно в зоне чтения

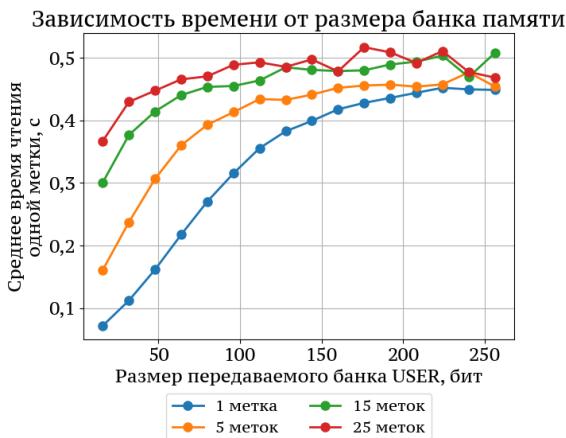


Рис. 16. Зависимость среднего времени, необходимого для чтения одной сенсорной метки, от размера передаваемого банка памяти в случае различного количества меток, находящихся одновременно в радиусе чтения

Аналогично уменьшение вклада от увеличения количества меток на среднее время чтение заметно и в случае увеличения среднего размера передаваемого банка памяти. Как видно из рис. 16, при увеличении объёма передаваемых данных коллизии перестают быть главным фактором, влияющим на среднее время чтения, из-за чего разница между всеми четырьмя линиями существенно сокращается, когда размер передаваемого банка превышает 200 бит.

Таким образом, можно сделать вывод, что приближение отсутствия коллизий является близким к реальности даже в случае наличия в зоне чтения считывателя более чем одной метки, при большой высоте полёта и большом объёме передаваемых данных.

## 6. Заключение

В данной статье исследуется время считывания RFID-меток с помощью считывателя, установленного на БПЛА. Для оценки состояния канала использовалась модель с белым гауссовым шумом. Были рассмотрены три сценария передачи данных: без повторной передачи фрагментов, с повторной передачей, а также с применением повторной передачи и фрагментацией. Для каждого из них разработаны соответствующие математические и имитационные модели.

Особое внимание удалено двум характерным случаям размещения меток. В первом случае метки расположены на значительном расстоянии друг от друга, благодаря чему в каждом раунде инвентаризации участвует не более одной метки и вероятность коллизий отсутствует. Для этого случая представлена аналитическая модель, показывающая зависимость времени идентификации от расстояния между считывателем и меткой.

Во втором случае метки размещены более плотно, что приводит к коллизиям в канале связи. Для анализа такой ситуации разработана дискретно-событийная имитационная модель, учитывающая высоту полёта, скорость движения БПЛА, параметры протокола RFID и другие характеристики системы. Проведённый анализ позволил оценить влияние плотности размещения меток

на время идентификации.

### **Литература**

1. CHOI H.W., KIM H.J., KIM S.K. *An Overview of Drone Applications in the Construction Industry* // Drones. – 2023. – Vol. 7, No. 8. – Art. No. 515.
2. FINKENZELLER K. *RFID Handbook*. – New York: John Wiley and Sons, 2003.
3. GOPE P., MILLWOOD O., SAXENA N. *A Provably Secure Authentication Scheme for RFID-Enabled UAV Applications* // Computer Communications. – 2021. – Vol. 166. – P. 19–25.
4. GORTSCHACHER L.J., GROSINGER J. *UHF RFID Sensor System Using Tag Signal Patterns: Prototype System* // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2019. – Vol. 18, No. 10. – P. 2209–2213.
5. LARIONOV A.A., IVANOV R.E., VISHNEVSKY V.M. *UHF RFID in Automatic Vehicle Identification: Analysis and Simulation* // IEEE J. Radio Freq. Identif. – 2017. – Vol. 1, Iss. 1. – P. 3–12. – DOI: 10.1109/JRFID.2017.2751592.
6. LAZARO A., GIRBAU D., VILARINO R. *Effects of interferences in UHF RFID systems* // Progress In Electromagnetics Research. – 2009. – Vol. 98. – P. 425–443.
7. LI C. et al. *ReLoc 2.0: UHF-RFID Relative Localization for Drone-Based Inventory Management* // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement. – 2021. – Vol. 70. – P. 1–13. – Art. No. 8003313. – DOI: 10.1109/TIM.2021.3069377.
8. LONGHI M., MARROCCO G. *Ubiquitous Flying Sensor Antennas: Radiofrequency Identification Meets Micro Drones* // IEEE Journal of Radio Frequency Identification. – 2017. – Vol. 1, No. 4. – P. 291–299.
9. LONGHI M., CASATI G., LATINI D. *RFIDrone: Preliminary Experiments and Electromagnetic Models* // Proc. of the 2016 URSI Int. Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS-2016). – 2016. – P. 450–453.

10. LUBNA et al. *IoT-Enabled Vacant Parking Slot Detection System Using Inkjet-Printed RFID Tags* // IEEE Sensors Journal. – 1 April 2023. – Vol. 23, No. 7. – P. 7828–7835.
11. MA Y. et al. *RAPP: A Radio Tomography Localization Method Characterized by Performance Parameterization in Rapid-Moving RFID System* // IEEE Trans. on Vehicular Technology. – 2023. – Vol. 72, No. 1. – P. 1265–1278.
12. MOHSAN S.A.H., OTHMAN N.Q.H., LI Y. et al. *Unmanned Aerial Vehicles (UAVs): Practical Aspects, Applications, Open Challenges, Security Issues, and Future Trends* // Intelligent Service Robotics. – 2023. – Vol. 16, No. 1. – P. 109–137.
13. NIKITIN P.V., RAO K.V.S. *Performance limitations of passive UHF RFID systems* // IEEE Antennas and Propagation Symposium. – 2006. – P. 1011–1014.
14. QUINO J., MAJA J.M., ROBBINS J. et al. *RFID and Drones: The Next Generation of Plant Inventory* // Agri. Engineering. – 2021. – Vol. 3, No. 2. – P. 168–181.
15. QUINO J., MAJA J.M., ROBBINS J. et al. *The Relationship between Drone Speed and the Number of Flights in RFID Tag Reading for Plant Inventory* // Drones. – 2022. – Vol. 6, No. 1. – DOI: 10.3390/drones6010002.
16. *EPC<sup>TM</sup> Radio-Frequency Identity Protocols Generation-2 UHF RFID Standard. Specification for RFID Air Interface Protocol for Communications at 860 MHz – 960 MHz*, rel. 2.1. – Wellington: EPCGlobal, 2015.
17. SHARMA D.K., MAHTO R.V., HARPER CH. et al. *Role of RFID Technologies in Transportation Projects: A Review* // Int. Journal of Technology Intelligence and Planning. – 2020. – Vol. 12, No. 4. – P. 349–377.
18. TAJIN M.A.S., JACOVIC M., DION G. et al. *UHF RFID Channel Emulation Testbed for Wireless IoT Systems* // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 68523–68534. – DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3077845.
19. XU H., YIN X., ZHU F. et al. *RF-Ray: Sensing Objects in the Package via RFID Systems* // IEEE Systems Journal. –

- March 2023. – Vol. 17, No. 1. – P. 558–568. – DOI: 10.1109/JSYST.2022.3196462.
20. XUE C., LI T., LI Y. et al. *Radio-Frequency Identification for Drones With Nonstandard Waveforms Using Deep Learning* // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 2023. – Vol. 72. – P. 1–13. – Art. No. 5503713. – DOI: 10.1109/TIM.2023.3306822.

## **IDENTIFICATION OF RFID TAGS FROM A SENSOR FIELD USING UAVS**

**Vilmen Abramian**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher ([abramian.vl@phystech.edu](mailto:abramian.vl@phystech.edu)).

*Abstract:* Radio Frequency Identification (RFID) technology is widely used in scientific and engineering applications, including integration with Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) for object identification in hard-to-reach environments. Two key performance characteristics of such systems are the probability of successful tag reading and the reading time, both of which can be quantitatively described using semi-Markov process models. This paper considers two fundamentally different scenarios. In the first scenario, tags are sparsely distributed, which eliminates collisions. An analytical model is proposed to describe the interaction between the reader and a single tag. In the second scenario, densely placed tags lead to collisions. To evaluate system performance in this case, a discrete-event simulation model is developed. The model takes into account the specifics of the EPC Gen2 protocol, radio channel parameters, spatial configuration of tags, and data reading strategies. The paper compares analytical and simulation results and investigates how tag density, data volume, and UAV altitude affect reading performance metrics.

**Keywords:** RFID, UAV, sensor tag, simulation, analytics.

УДК 001.57

ББК 30Ф

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.А. Печниковым.*

*Поступила в редакцию 25.03.2025.  
Дата опубликования 30.09.2025.*

## ПРИМЕНЕНИЕ LLM-МОДЕЛЕЙ НА ОДНОПЛАТНЫХ КОМПЬЮТЕРАХ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ АВТОНОМНОГО ПОЛЕТА БПЛА<sup>1</sup>

Анисимов Р. О.<sup>2</sup>, Дворников А. Д.<sup>3</sup>, Кулагин К. А.<sup>4</sup>,

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Титова С. А.<sup>5</sup>, Петров К. В.<sup>6</sup>

(Московский Политехнический Университет, Москва)

Рассматривается применение больших языковых моделей (LLM) для управления беспилотными летательными аппаратами (БПЛА) с помощью естественно-языковых команд. Исследование направлено на решение ключевой проблемы – несоответствия между высокими вычислительными требованиями LLM и ограниченными ресурсами бортовых компьютеров. Основное внимание уделено оптимизации LLM для работы на энергоэффективных одноплатных компьютерах с нейропроцессорами, таких как OrangePi 5B на базе Rockchip RK3588S. В работе представлены результаты тестирования квантованных моделей Qwen2.5-Coder, демонстрирующих сохранение качества генерации кода при скорости обработки до 17,8 токенов/с. Разработан специализированный тест (бенчмарк) для оценки эффективности интеграции LLM в архитектуру автономного управления БПЛА и корректности генерации кода, включающий 125 сценариев. Результаты подтверждают возможность практического применения LLM в автономных системах управления дронами, хотя и выявляют типичные ошибки, связанные с обработкой данных датчиков и системами координат. Работа предлагает перспективное направление для развития интеллектуальных систем управления БПЛА с естественно-языковым интерфейсом (NLP). В рамках исследования были реализованы как научная – создание специализированного теста, так и технологическая новизна – проведение анализа производительности на одноплатных компьютерах, направленные на интеграцию LLM в архитектуру автономного управления БПЛА.

---

<sup>1</sup> Исследование поддержано РНФ, грант № 24-29-00671, <https://rsrf.ru/project/24-29-00671/>.

<sup>2</sup> Родион Олегович Анисимов, магистр (rodion\_anisimov@mail.ru).

<sup>3</sup> Алексей Дмитриевич Дворников, магистр (applskyp@gmail.com).

<sup>4</sup> Константин Александрович Кулагин, н.с. (kka8686@mail.ru).

<sup>5</sup> Софья Алексеевна Титова, студент (titovas63059@gmail.com).

<sup>6</sup> Константин Владимирович Петров, студент (r.92rab@gmail.com).

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, большая языковая модель, квантование, одноплатный компьютер, автономное управление, естественно-языковой интерфейс.

## **1. Введение**

Современные беспилотные летательные аппараты (БПЛА) находят применение в критически важных областях: от мониторинга инфраструктуры до экстренного реагирования. Однако существующие системы управления требуют либо ручного контроля оператора, либо сложного программирования автономных миссий.

Интеграция больших языковых моделей (англ. Large Language Models – LLM) [3] предлагает революционный подход – преобразование естественно-языковых команд в исполняемый код в реальном времени, что значительно расширяет доступность и гибкость управления БПЛА.

Современные одноплатные компьютеры (англ. Single-Board Computers – SBCs) [1] предлагают значительную вычислительную мощность при компактных размерах и энергоэффективности, что делает их идеальными для применения в БПЛА [15].

Существует несколько успешных проектов, направленных на интеграцию LLM в системы управления БПЛА, например:

1. DroneGPT [13]. В данном проекте применяется квантованная языковая модель GPTQ-4bit, реализованная на аппаратной платформе NVIDIA Jetson Xavier NX, оснащённой 384 CUDA-ядрами и 8 ГБ оперативной памяти. Система демонстрирует способность БПЛА интерпретировать голосовые команды и преобразовывать их в полетные задания. Например, команда «Облети здание и найди открытые окна» преобразуется в траекторию полета.

2. Autonomous Aerial Exploration System [7]. В этом исследовании используется модель TinyLlama, развернутая на одноплатном компьютере Raspberry Pi 5 с нейронным процессором Coral (4 TOPS). Система обеспечивает автономную навигацию в ранее неизвестной среде и обладает функцией генерации объяснений на естественном языке, поясняющих принятые решения.

3. Emergency Response Drone [12]. Проект реализован на базе модели Phi-2, работающей на Jetson Nano с 128 CUDA-ядрами и 4 ГБ оперативной памяти. Дрон автономно оценивает ситуации при стихийных бедствиях, проявляя способность к пониманию визуального контекста и принятию решений на его основе.

Несмотря на достигнутый прогресс, существует ряд ограничений, препятствующих широкому внедрению LLM в системы управления БПЛА. Одним из ключевых факторов является высокое энергопотребление: даже оптимизированные модели требуют значительных вычислительных ресурсов. Так, применение языковой модели TinyLlama на платформе Jetson Xavier NX приводит к сокращению времени полёта дрона до 15–20 мин. по сравнению с 30–35 мин., характерными для традиционных систем [8]. Задержка обработки данных также представляет собой критический параметр в условиях динамического управления. Время обработки данных для квантованных моделей на одноплатных компьютерах составляет от 50 до 300 мс, что недостаточно для реализации оперативной реакции в реальном времени. А надёжность и безопасность эксплуатации осложняются вероятностной природой LLM, способной приводить к неоптимальным или непредсказуемым решениям. Для повышения устойчивости работы модели LLM требуется внедрение дублирующих систем и механизмов контроля, а также ограничений операционной области для предотвращения опасных ситуаций. Законодательные ограничения в ряде юрисдикций накладывают жёсткие требования на использование БПЛА, включая обязательство поддержания визуального контакта с оператором и запреты на эксплуатацию в определённых зонах.

Целью настоящей работы является разработка и экспериментальная верификация архитектуры автономного управления БПЛА, основанной на специально оптимизированных LLM с 2–3 млрд параметров и на энергоэффективных одноплатных компьютерах, оснащённых нейронным процессором.

В рамках исследования были реализованы как научная, так и технологическая новизна, направленные на интеграцию LLM в архитектуру автономного управления БПЛА. К научной новизне относится разработка специализированного теста

(бенчмарк, англ. *benchmark*) для оценки эффективности интеграции LLM в архитектуру автономного управления БПЛА, а также проведение экспериментальной оценки точности и производительности предложенной архитектуры. Технологическая новизна заключается в проведении анализа производительности на одноплатных компьютерах, таких как Jetson, Rockchip и Raspberry Pi, при выполнении вычислений с LLM, а также в сравнении различных методов оптимизации моделей, включая квантование, дистилляцию знаний и сжатия части параметров предобученной модели (прунинг нейронных сетей).

## **2. Постановка задачи**

Требуется разработать архитектуру автономного управления БПЛА, работающую на основе автоматической генерации программного кода на языке Python и обработки естественного языка (англ. Natural Language Processing – NLP) по текстовому описанию миссии полета. Сгенерированный код должен корректно взаимодействовать с заданным API дрона, обеспечивая безопасное и точное выполнение миссий.

Важным требованием архитектуры автономного управления БПЛА является способность в текущей ситуации принимать решения с учётом контекстуальных факторов окружающей среды, что обеспечит адаптацию к непредвиденным обстоятельствам за счёт корректировки планов полёта при обнаружении препятствий или иных факторов. Кроме того, архитектура должна включать мультимодальный анализ, предусматривающий интеграцию данных с различных сенсорных устройств для комплексной оценки обстановки.

Пример генерации кода по описанию миссии полета. Инструкция: «*Взлет, установить высоту 1,5 м, лететь в точку (-1, 4) по одометрии. Искать ArUco-маркер с ID = 5 в бесконечном цикле. Если найдется, включить зеленый свет, иначе – красный. Обнулить одометрию и лететь в точку (0, 0) в глобальных координатах.*

Ответ модели Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct (процессор Rockchip RK3588S):

```
1 from drone_control_api import Drone
2 import numpy as np
3 drone = Drone()
4 drone.connect(ip="trackingcam3.local", port="1233")
5 drone.takeoff()
6 drone.setHeight(1.5)
7 drone.gotoXYodom(-1, 4)
8
9 while True:
10     arucos = drone.getArucos()
11     for aruco in arucos["response"]:
12         if aruco["id"] == 5:
13             drone.setDiod(0, 255, 0)
14             break
15         else:
16             drone.setDiod(255, 0, 0)
17     drone.setZeroOdomOpticflow()
18     drone.gotoXYdrone(0, 0)
```

Согласно данным исследования [18], эффективная архитектура автономного управления БПЛА предполагает разделение функциональных задач между LLM и традиционными алгоритмами. Большие языковые модели отвечают за стратегическое планирование, интерпретацию контекста и принятие сложных решений, тогда как классические алгоритмы реализуют тактическое управление и обеспечивают оперативную реакцию на непредвиденные ситуации. Поэтому необходимо применить гибридный режим функционирования системы, при котором часть вычислительных задач выполняется локально, а часть, при наличии стабильного соединения, передается на более мощные серверные ресурсы для обработки.

### **3. Решение**

#### *3.1. АППАРАТНАЯ ПЛАТФОРМА*

Для реализации автономного управления БПЛА с использованием LLM необходим одноплатный компьютер, который

должен обладать высокими вычислительными возможностями, включая встроенный нейронный процессор с производительностью 6 TOPS и поддержку современных методов квантования, таких как INT4/INT8 и W8A8, что обеспечивает выполнение вывода языковых моделей размером до 2 млрд параметров. Важным преимуществом является энергоэффективность платформы, т.е. потребляемая мощность при работе нейронного процессора должна составлять 5–8 Вт с пассивной системой охлаждения, которая минимизирует энергопотребление.

### *3.2. ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛИ LLM*

Для работы на одноплатных компьютерах существуют специальные облегченные версии LLM:

1. TinyLlama – с 1,1 млрд параметров, что более чем в 100 раз меньше по сравнению с GPT-4, и которая способна работать на OrangePi.
2. Phi-2 – 2,7 млрд параметров, оптимизирована для встраиваемых систем.
3. MiniGPT – 350 млн параметров, идеальна для ограниченных ресурсов.
4. Llama2-7B-GPTQ – квантованная до 4 бит версия Llama 2, требует около 3,5 ГБ памяти.
5. Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct и Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct – высокая скорость вывода при сохранении качества генерации кода. Оптимизирована для работы на нейронных процессорах с квантованием до 4 бит.

При развертывании моделей LLM на ограниченных по ресурсам устройствах и в условиях необходимости быстрого отклика (токен/с) применяются методы оптимизации, направленные на уменьшение объёма вычислений и требований к памяти при минимальных потерях в качестве.

Рассмотрим основные подходы, используемые нами при проведении исследования:

1. **Квантование.** Предполагает снижение разрядности представления весов и активаций модели (например, с 32-битных чисел с плавающей точкой (FP32) до 8-битных целых (INT8) или даже 4-битных (INT4)). Такой подход позволяет су-

щественно сократить объём памяти и ускорить вычисления за счёт работы с меньшим числом бит на параметр.

Модель MiniLLM, квантованная до 4 бит, демонстрирует сокращение требований к памяти до 8 раз при снижении точности менее чем на 5%, что указывает на эффективность данного метода для практических применений [10].

Для формального описания процесса квантования применяется метод W8A8, при котором веса и активации моделируются 8-битными числами. Квантование весов и активаций можно записать как

$$(1) \quad W_q = \text{round}\left(\frac{W}{s_w}\right), \quad s_w = \frac{\max(|W|)}{127},$$

$$(2) \quad A_q = \text{round}\left(\frac{A}{s_a}\right), \quad s_a = \frac{\max(|A|)}{127},$$

где  $W$  и  $A$  – исходные веса и активации соответственно,  $s_w$  и  $s_a$  – масштабные коэффициенты. Де-квантование (обратное преобразование) выполняется по формулам

$$(3) \quad \tilde{W} = W_q \cdot s_w, \quad \tilde{A} = A_q \cdot s_a.$$

При вычислениях на компьютерах с нейронным процессором (NPU) матричное умножение весов и активаций производится в квантованном виде с последующим масштабированием:

$$(4) \quad NPU_{op}(W_q, A_q) = \text{MatMul}(W_q, A_q) \cdot (s_w \cdot s_a).$$

Для повышения точности квантования в моделях Qwen2.5-Coder применяется групповое квантование (group-wise quantization), при котором веса разбиваются на группы, и для каждой группы рассчитывается свой масштабный коэффициент:

$$(5) \quad s_w^{(g)} = \frac{\max(|W_g|)}{127}, \quad g = 1, \dots, G,$$

где  $W_g$  – веса  $g$ -й группы,  $G$  – общее количество групп. Такая локализация масштабирования позволяет снизить ошибку квантования на 15–20% по сравнению с глобальным квантованием, что особенно важно для моделей с размером 0,5–1,5 млрд параметров, где каждый параметр оказывает значительное влияние на качество.

2. **Дистилляция знаний.** Это передача знаний от большой модели-учителя к компактной модели-ученику. Процесс обучения компактной модели происходит с использованием выходов предварительно обученной, более крупной модели-учителя. Такой подход позволяет уменьшить размер и вычислительную сложность модели при минимальных потерях в точности. Например, модель DistILM демонстрирует сжатие в 3–4 раза с сохранением до 95% первоначальной производительности [16].

Метод широко используется при переносе крупных моделей на бортовые вычислительные устройства, включая вычислительные модули на БПЛА [9, 11].

3. **Сжатие (прунинг).** Направлен на удаление наименее значимых параметров предобученной модели, что уменьшает её размер и ускоряет вычисления без заметного ухудшения качества. Вес  $w_i$  обнуляется, если его модуль меньше заданного порога  $\theta$ :

$$(6) \quad \hat{w}_i = \begin{cases} 0, & \text{если } |w_i| < \theta, \\ w_i, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Метод SparseGPT позволяет удалять до 60% параметров с минимальной потерей точности [4].

## **4. Эксперимент**

### *4.1. АНАЛИЗ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ОДНОПЛАТНЫХ КОМПЬЮТЕРОВ И ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РАБОТЫ МОДЕЛЕЙ СЕМЕЙСТВА QWEN2.5-CODER-INSTRUCT*

В рамках эксперимента проверялась работоспособность системы интерпретации текстовых команд для управления дроном, а также корректность выполнения полётного задания в условиях ограниченного пространства и наличия препятствий.

**Входными данными** служило текстовое описание задачи, сформулированное на естественном языке:

*«Взлететь на 2 м, пролететь 3 м вперёд, развернуться на 180 градусов и вернуться в точку старта».*

Кроме того, учитывалась спецификация API дрона, включающая методы управления (взлёт, движение, повороты), си-

стему координат и ограничения по скорости, высоте и углам поворота. Также учитывался контекст окружения – начальное положение дрона, наличие препятствий и параметры используемых датчиков (их тип, точность и дальность).

В решении использовалось квантование W8A8 для семейства моделей Qwen2.5-Coder-Instruct. Основное внимание уделено сравнению производительности и качества моделей на тестах HumanEval [5] и Mostly Basic Python Problems (MBPP) [2], которые оценивают качество генерации кода на языке Python, что напрямую связано с целевой задачей.

HumanEval – это набор из 164 задач, включающих написание функций на Python. Задачи охватывают алгоритмические конструкции, работу со строками и структурами данных. Основная метрика – pass@1, отражающая вероятность того, что сгенерированный код успешно проходит все тесты с первой попытки. Этот тест позволяет оценить способность модели не только синтаксически корректно генерировать код, но и логически правильно решать поставленные задачи.

MBPP содержит 974 задачи базового уровня. Они охватывают более широкий спектр задач, включая работу с файлами, парсинг строк, базовые структуры данных и обработку информации. Также используется метрика pass@1. В отличие от HumanEval, MBPP позволяет дополнительно оценить обобщающую способность модели на типичные пользовательские задачи.

Модели Qwen2.5-Coder построены на трансформерной архитектуре [17] с несколькими ключевыми модификациями для эффективной работы на встраиваемых системах. В их основе лежат следующие компоненты:

*Механизм многоголового внимания* [17]:

$$(7) \quad \text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax} \left( \frac{QK^T}{\sqrt{d_k}} \right) V,$$

где  $Q$ ,  $K$ ,  $V$  – матрицы запроса, ключа и значения соответственно;  $d_k$  – размерность ключа.

*Позиционные векторные представления (embedding) с вращением по методу позиционного кодирования* (англ. Rotary Positional Embedding – RoPE) [14]:

$$(8) \quad \int RoPE(x_m, m) = x_m e^{im\Theta},$$

где  $x_m$  – входное представление для позиции  $m$ ;  $\Theta$  – параметр вращения.

*Активация SwiGLU* в полносвязном слое сети прямого распространения (англ. Feed-Forward Network – FFN):

$$(9) \quad SwiGLU(x, W, V, b, c) = Switch(xW + b) \otimes (xV + c),$$

где  $\otimes$  – поэлементное умножение;  $Switch$  – функция активации  $Switch(x) = x \cdot \sigma(\beta x)$  с  $\sigma$  – сигмоидой.

Такая архитектура обеспечивает хорошее соотношение между качеством и вычислительной эффективностью, особенно в условиях низкоразрядного квантования и работы на нейронных процессорах [6].

В таблице 1 представлены результаты тестирования на двух аппаратных платформах одноплатных компьютеров – Nvidia RTX4090 и Rockchip RK3588S – с использованием двух языковых моделей Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct (полная модель) и Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct (компактный вариант). Оценка производилась на тестах HumanEval и MBPP по входным данным в виде текстового описания задачи, указанного выше по тексту.

*Таблица 1. Результаты тестов для аппаратных платформ и языковых моделей Qwen2.5-Coder*

Модель	Платформа	HumanEval (pass@1)	MBPP (pass@1)	Скорость (токен/с)
Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct	Nvidia RTX4090	0,630	0,510	
Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct	Rockchip RK3588S	0,597	0,492	9,60
Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct	Nvidia RTX4090	0,463	0,336	
Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct	Rockchip RK3588S	0,420	0,302	17,84

Как видно из таблицы 1, при квантовании в формате W8A8 и запуске на компьютерах с нейронными процессорами каче-

ство моделей не падает, а скорость обработки (токен/с) значительно увеличивается. Модель Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct демонстрирует более высокие показатели качества на тестах HumanEval ( $\text{pass}@1 = 0,63$ ) и MBPP ( $\text{pass}@1 = 0,51$ ) при выполнении на платформе Nvidia RTX4090 по сравнению с результатами на платформе Rockchip RK3588S (0,597 и 0,492 соответственно), при этом скорость генерации на Rockchip составляет 9,6 токен/с. Модель меньшего размера – Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct – характеризуется снижением качества на обеих платформах, однако обеспечивает существенно более высокую скорость генерации на платформе Rockchip (17,84 токен/с), что свидетельствует о ее пригодности для применения в условиях ограниченных вычислительных ресурсов и необходимости ускоренного вывода результатов.

#### *4.2. РАЗРАБОТКА СПЕЦИАЛИЗИРОВАННОГО ТЕСТА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНТЕГРАЦИИ LLM В АРХИТЕКТУРУ АВТОНОМНОГО УПРАВЛЕНИЯ БПЛА*

По аналогии с тестами HumanEval и MBPP, использующимися для оценки качества генерируемого языковой моделью кода, мы разработали специализированный тест для оценки способности языковых моделей генерировать корректный код управления беспилотными летательными аппаратами. Тест основан на реальном API для управления дроном и оценивает:

- 1) корректность подключения и инициализации дрона;
- 2) правильность работы с системами координат;
- 3) правильность обработки данных от датчиков;
- 4) точность выполнения навигационных команд;
- 5) безопасность и надежность сгенерированного кода.

Оценка эффективности интеграции LLM в архитектуру автономного управления БПЛА производится по метрике  $\text{pass}@1$ . Для оценки качества генерации кода используется 125 тестовых примеров, равномерно распределенных по 5 категориям, представленным в таблице 2. Общий результат вычисляется как среднее значение  $\text{pass}@1$  по всем категориям с весовыми коэффициентами, учитывающими сложность задач.

*Таблица 2. Распределение тестовых примеров по категориям*

Категория	Описание	Количество примеров
Базовые операции	Тестирование основных команд: подключение, взлёт, посадка, управление высотой	25
Движение по координатам	Проверка работы с глобальной и локальной системами координат (методы <code>gotoXYdrone</code> , <code>gotoXYodom</code> )	25
Движение со скоростью и повороты	Проверка работы с глобальной и локальной системами координат (методы <code>setVelXY</code> , <code>setVelXYZYaw</code> , <code>setYaw</code> )	25
Работа с датчиками	Интеграция с лидаром, камерой, ArUco-маркерами, оптическим потоком	25
Дополнительные сценарии	Комплексные задания (поиск маркеров, облёт препятствий, патрулирование)	25

#### 4.2.1. ПРИМЕРЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

Для оценки функциональности разработанного теста сформированы тестовые задания, сгруппированные по ключевым категориям.

Тестовые задания включают сценарии, предусматривающие взлёт, полёт к заданным точкам с координатами (например, (2, 0) и (2, 2)), установку высоты на 1,7 м, зависание на 3 с и последующую посадку.

Движение по координатам проверяет способность управления дроном с использованием различных систем координат. В задачи входит полёт до точек (3, 0) и (3, 3) с применением одометрии и абсолютных координат, а также возврат в исходную точку. Дополнительно рассматривается движение назад на 1 м в абсолютных координатах и влево на 1 м по одометрии.

Движение со скоростью включает выполнение поворотов на заданные углы (например, 0,1 радиан против часовой стрелки), а также перемещение вперёд со скоростью 1 м/с и влево со скоростью 0,25 м/с с последующими остановками.

Работа с датчиками оценивается на основе задач по обнаружению ближайших препятствий с использованием лидаров и остановке на безопасном расстоянии в 1 м от них, а также идентификации ArUco-маркеров с  $ID = 5$  с выводом их координат.

Дополнительные сценарии включают более сложные манёвры, такие как облёт квадрата со стороной 3 м с паузами в углах и движение по спирали с постепенным увеличением радиуса и поворотом.

#### 4.2.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ И АНАЛИЗ ОШИБОК

Для проведения экспериментов с генерацией кода управления БПЛА были использованы несколько версий языковых моделей Qwen2.5-Coder: Qwen2.5-Coder-3B-Instruct, Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct и Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct. Каждая из этих моделей отличается числом параметров, что позволяет оценить влияние модели на корректность выполненных заданий по генерируемому коду с первого запуска. Результаты специализированного теста семейства моделей Qwen2.5-Coder-Instruct представлены в таблице 3.

Таблица 3. Сравнение моделей Qwen на специализированном teste

Модель	Параметры (кол-во)	Метрика (pass@1)	Скорость (токен/с)	Память (ГБ)	Оценка эффективности
Qwen2.5-Coder-3B-Instruct	3 млрд	0,81	7,2	4,8	1,215
Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct	1,5 млрд	0,76	9,6	3,2	2,28
Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct	500 млн	0,55	17,8	1,5	6,53

Тестирование проводилось с использованием встроенного нейронного процессора на Rockchip RK3588S и квантования в формате W8A8.

Основные типы ошибок в сгенерированном коде:

- 1) путаница в системах координат;
- 2) ошибки работы с датчиками, некорректная обработка возвращаемой информации.

Модель Qwen2.5-Coder-3B-Instruct с наибольшим количеством параметров (3 млрд) демонстрирует лучшую точность на тесте ( $\text{pass}@1 = 0,81$ ), однако уступает в скорости генерации (7,2 токен/с) и требует больше памяти (4,8 ГБ) по сравнению с меньшими моделями. Модель среднего размера (1,5 млрд параметров) обеспечивает хороший баланс между качеством (0,76) и скоростью (9,6 токен/с), а самая компактная модель (500 млн параметров) работает быстрее всего (17,8 токен/с) при минимальном потреблении памяти (1,5 ГБ), но с заметно меньшей точностью (0,55).

Оценка эффективности показывает количество генерации ( $\text{pass}@1 \times \text{скорость}$ ) на единицу потребляемой памяти. Таким образом, специализированный тест способствует более обоснованному выбору моделей с оптимальным соотношением производительности и точности для реальных сценариев эксплуатации БПЛА.

В виде схемы отображается процесс реализации операций автономного управления БПЛА с применением LLM, см. рис. 1.

Оператор формулирует задачу, например, «*Взлететь, установить высоту 2 м*». Запрос может вводиться текстом в чат-интерфейсе или голосом через микрофон. Если запрос продиктован голосом, модуль STT преобразует аудио в текстовое сообщение (промпт – prompt), сохраняя смысл и ключевые параметры. При вводе с клавиатуры этот блок пропускается. Большая языковая модель LLM принимает текстовое сообщение, анализирует требования и генерирует исполняемый код или миссию для дрона. Сгенерированный код передаётся на борт дрона по выбранному каналу связи – Wi-Fi, LTE или радиомодему с MAVLink-мостом.

Одноплатный компьютер – Jetson, Raspberry Pi, Orange Pi – принимает код и при необходимости компилирует или интерпретирует его, запускает в контейнере или в виртуальном окружении (реализация гибридного режима), конвертирует высококо-

уровневые действия («лети к точке X») в низкоуровневые приказы для полётного контроллера.

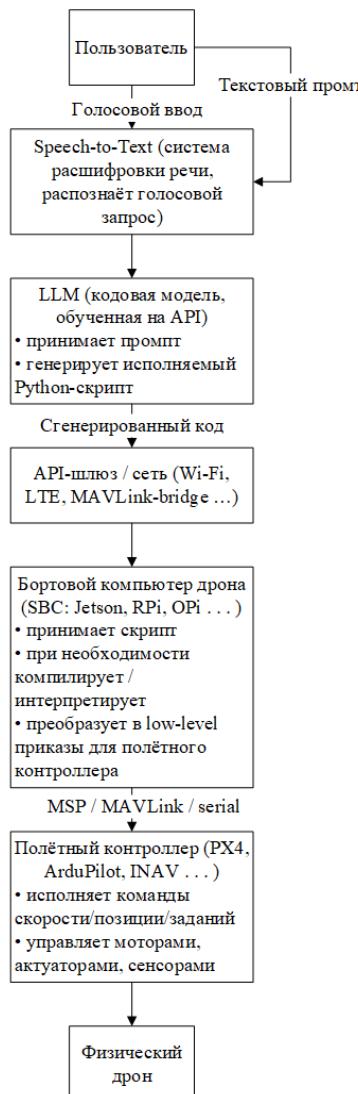


Рис. 1. Схема автономного управления БПЛА с применением LLM

PX4, ArduPilot, INAV или другой автопилот получает команды и генерирует сигналы для моторов, управляет стабилизацией, использует данные инерциального измерительного блока, GPS, барометра. Далее физический дрон выполняет манёвры, собирает телеметрию (позиция, батарея, видео). Эти данные могут возвращаться в LLM для уточнения следующих сообщений.

## **5. Выводы**

Результаты показывают, что использование компьютеров с нейронным процессором на Rockchip RK3588S позволяет достичь лучшей скорости 17,8 токен/с. Это особенно важно для задач, требующих быстрого принятия решений, таких как автономный полет БПЛА. Все варианты моделей (Qwen2.5-Coder-3B-Instruct, Qwen2.5-Coder-1.5B-Instruct, Qwen2.5-Coder-0.5B-Instruct) демонстрируют стабильное качество на разработанном тесте, что подтверждает их пригодность для использования в системах с ограниченными ресурсами. В данной работе представлен специализированный тест для оценки способности языковых моделей генерировать корректный код управления БПЛА. Разработанный тест полностью адаптирован для проверки сгенерированного кода полетных заданий БПЛА.

## **Литература**

1. ARIZA J.A., BAEZ H. *Understanding the role of single-board computers in engineering and computer science education: a systematic literature review* // Computer Applications in Engineering Education. – 2022. – Vol. 30(1). – P. 304–329. – DOI: 10.1002/cae.22439.
2. AUSTIN J., OZI A., DRAZNER S. *Program synthesis with large language models* // Journal of Artificial Intelligence Research. – 2021. – Vol. 71. – P. 355–420.
3. BROWN T.B. et al. *Language models are few-shot learners* // arXiv:2005.14165. – 2020. – 75 p.

4. CHEN K., WILLIAMS D., TAYLOR M. *SparseGPT: pruning large language models for embedded applications* // Journal of Artificial Intelligence Research. – 2024. – Vol. 55. – P. 213–229.
5. CHEN M., TWIGHT B., LEWIS M. *Evaluating large language models trained on code* // arXiv:2107.03374. – 2021.
6. DETTMERS T., ZETTLEMOYER L., LEWIS M. *LLM.int8(): 8-bit matrix multiplication for transformers at scale* // arXiv:2208.07339. – 2022.
7. JOHNSON T., LEE M., CARTER P. *Autonomous aerial exploration using compact language models. MIT computer science and artificial intelligence laboratory* // Technical Report MIT-CSAIL-TR-2024-03. – 2024.
8. KIM S., PAK D., LEE J. *Energy consumption analysis of LLM-powered UAVs* // Journal of Unmanned Aerial Systems. – 2024. – Vol. 12, No. 3. – P. 178–192.
9. KIM Y., PARK J., SHIN J. *PQK: practical quantization and pruning for on-device vision transformers* // arXiv:2106.14681. – 2021.
10. LEE D., SMITH R., PARKER A. *Minillm: extreme quantization for large language models on resource-constrained platforms* // Proc. of the Conf. on Machine Learning and Systems. – 2024. – P. 1243–1255.
11. LIU D., LI H., SHEN Y., et al. *KeepEdge: lightweight real-time detection for UAV applications* // IEEE Trans. on Industrial Informatics. – 2023. – Vol. 19(4). – P. 2873–2885.
12. MULLER A., SCHMIDT K., WEBER R. *Emergency response drone system with on-board decision making* // ETH Zurich Robotics and Perception Group Research Reports. – 2023.
13. RAMIREZ M., AL-HADITI F., NEIM S. *DroneGPT: natural language control for unmanned aerial vehicles* // Stanford AI Lab Technical Report, SAIL-TR-2023-04. – 2023.
14. SU J. et al. *RoFormer: enhanced transformer with rotary position embedding* // arXiv:2104.09864. – 2021.
15. TING L., JOHNSON M., CHEN K. *Performance evaluation of edge computing platforms for AI applications in UAVs* // IEEE Trans. on Robotics and Automation. – 2023. – Vol. 38, No. 2. – P. 112–127.

16. VAN X., BROWN T., ANDERSON J. *DistilLLM: knowledge distillation methods for efficient deployment of language models in UAVs* // Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). – 2023. – P. 775–782.
17. VASWANI A. et al. *Attention is all you need* // 31st Conf. on Neural Information Processing Systems (NIPS–2017), Long Beach, CA, USA. – arXiv:1706.03762v7. – 2 Aug 2023. – P. 1–15.
18. ZHANG Y., LI W., MARTINEZ K. *Hybrid LLM-traditional architectures for autonomous UAV navigation* // Robotics and Autonomous Systems Journal. – 2024. – Vol. 152. – P. 45–62.

## THE USE OF LLM MODELS ON SINGLE-BOARD COMPUTERS FOR THE IMPLEMENTATION OF AUTONOMOUS UAV FLIGHT

**Rodion Anisimov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, master (rodion\_anisimov@mail.ru).

**Alexey Dvornikov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, master (applsksyp@gmail.com).

**Konstantin Kulagin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Research Associate (kka8686@mail.ru).

**Sofya Titova**, Moscow Polytechnic University, student (titovas63059@gmail.com).

**Konstantin Petrov**, Moscow Polytechnic University, student (r.92rab@gmail.com).

*Abstract: This paper examines the use of large language models (LLM) to control unmanned aerial vehicles (UAVs) using natural language commands. The research is aimed at solving a key problem – the discrepancy between the high computing requirements of LLM and the limited resources of on-board computers. The main focus is on optimizing LLM for operation on energy-efficient single-board computers with neuroprocessors, such as OrangePi 5B based on Rockchip RK3588S. The paper presents the results of testing Qwen2.5-Coder quantized models, demonstrating the preservation of code generation quality at processing speeds of up to 17.8 tokens/s. A specialized test (benchmark) was developed to evaluate the effectiveness of LLM integration into UAV autonomous control architecture and the correctness of code generation, including 125 scenarios. The results confirm the feasibility of LLM in autonomous drone control systems, although they reveal typical errors associated with sensor data processing and coordinate systems. The study proposes a promising direction for the development of intelligent UAV control systems with a*

*natural language interface (NLP). The study included both a scientific approach (development of a specialized test) and a technological innovation (performance analysis on single-board computers) aimed at integrating LLM into UAV autonomous control architecture.*

Keywords: unmanned aerial vehicle, large language model, quantization, single-board computers, autonomous control, natural language processing.

УДК 004.93 + 004.8

ББК 39.52

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Н.А. Коргиным.*

*Поступила в редакцию 13.05.2025.*

*Опубликована 30.09.2025.*

## МОДЕЛЬ КОДИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ ИНТЕРВАЛОВ АКТИВНЫМИ АГЕНТАМИ

Жилякова Л. Ю.<sup>1</sup>, Базенков Н. И.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Интервальное кодирование времени – способность воспринимать и оценивать длительность в диапазоне от секунд до минут – представляет собой один из ключевых когнитивных процессов, лежащих в основе адаптивного поведения живых организмов. Эта способность позволяет извлекать временные закономерности из окружающей среды, оптимизировать стратегии добывчи ресурсов, координировать коммуникацию и формировать прогнозы о будущих событиях. В работе описана модель активного агента с внутренней структурой, представленной ансамблем, способным генерировать ритмическую активность в заданных временных интервалах. Ансамбль состоит из трёх узлов: полуцентрового осциллятора (два узла, возбуждающих друг друга в противофазе) и узла-триггера с памятью. Полуцентральный осциллятор возбуждает триггер, который накапливает возбуждение в памяти. При достижении возбуждением порогового значения триггер срабатывает и, тем самым, передаёт сигнал агенту. Частота активации триггера зависит от его параметров: весов рецепторов, коэффициента дисконтирования, порогового значения. Предложенная модель временного кодирования такими агентами демонстрирует свойства, характерные для биологических систем: соответствие закону Вебера (прямая зависимость дисперсии оценки от длительности сигнала), затухание памяти при отсутствии стимула, возврат к гомеостатическим параметрам, смещение оценок к средним значениям. Исследования в области биологически инспирированного кодирования интервалов не только углубляют понимание восприятия, оценки и прогнозирования времени, но и стимулируют разработку адаптивных систем ИИ, робототехники и интерфейсов «человек – машина».

Ключевые слова: ритмическая активность, кодирование времени, полуцентральный осциллятор, модель внутренних часов.

### 1. Введение

Исследование кодирования времени – нейронных и когнитивных механизмов, лежащих в основе оценки длительности тех или иных событий, – имеет критическое значение для углубления

---

<sup>1</sup> Людмила Юрьевна Жилякова, д.ф.-м.н (zhilyakova@ipu.ru).

<sup>2</sup> Николай Ильич Базенков, к.т.н. (bazenkov@ipu.ru).

понимания нейробиологических механизмов и процессов, происходящих в мозге. С другой стороны, восприятие времени является объектом пристального внимания когнитивной психологии. Обзор современного состояния исследований в этой области представлен в [1]. Полученные результаты, помимо нейробиологии и психологии, представляют особенную ценность в робототехнике и построении систем искусственного интеллекта. В биологических системах точная обработка временной информации поддерживает важнейшие функции, включая сенсомоторную координацию, принятие решений и консолидацию памяти. Исследование «клеток времени», которые динамически кодируют временные последовательности [3], и скалярного свойства временной вариабельности [12, 16] раскрывает эволюционные механизмы, оптимизированные для адаптивного поведения. Эти принципы становятся все более важными для интеллектуального моделирования, где агенты должны ориентироваться в реальных средах, требующих синхронизации сенсорной информации в масштабе миллисекунд и планирования действий в масштабе секунд. Поскольку агенты, основанные на сетях глубокого обучения с подкреплением, демонстрируют биологически правдоподобные стратегии временной обработки [7], понимание этих механизмов связывает нейронауку и машинное обучение, предлагая проверяемые модели для искусственного временного восприятия и кодирования.

Системы ИИ в настоящее время испытывают трудности с временной согласованностью, что ограничивает их применение в критичных ко времени областях. Однако интеграция моделей интервального времени, таких как масштабируемые паттерны активации префронтальной коры [17] или зависящая от состояния сетевая динамика [12], в архитектуры ИИ может обеспечить более надежную обработку временной информации. Примером этой синергии могут послужить алгоритмы машинного обучения, которые уточняют временные прогнозы при проектировании интегральных схем [5].

Объединяя биологические знания с вычислительными моделями, исследования времени не только углубляют наше понимание познания, но и стимулируют инновации в адаптивном ИИ, робототехнике и интерфейсах «человек – машина».

Восприятие временных интервалов демонстрирует значительную согласованность среди многих видов позвоночных, что проявляется в ряде универсальных статистических признаков, включая скалярную изменчивость, асимметрию распределения ответов и смещение оценок к средним значениям [2]. Эти свойства указывают на существование эволюционно консервативных механизмов, что стало стимулом для многолетних исследований, направленных на понимание того, как мозг обрабатывает временную информацию. Задача заключается не только в объяснении этих поведенческих феноменов, но и в разработке биологически правдоподобных моделей, способных описать весь спектр временных проявлений, наблюдавшихся как в лабораторных, так и в естественных условиях.

Традиционные подходы к моделированию интервального восприятия времени в основном были сосредоточены на специализированных механизмах, таких как системы «генератор – накопитель» или специализированные нейронные осцилляторы [11]. Однако недавние достижения в области вычислительной нейронауки, а также обнаружение «временных клеток» в гиппокампе и энторинальной коре [13], открыли новые направления для понимания того, как информация о длительности временных интервалов может кодироваться и обрабатываться нейронными популяциями. Эти открытия подчеркнули важность рассмотрения временных процессов не как изолированной когнитивной функции, а как эмерджентного свойства активных нейронных систем с сложной внутренней динамикой.

Настоящая работа вносит вклад в развивающуюся область исследований, предлагая математическую и вычислительную модель на основе активных агентов со структурированной внутренней динамикой. Агент способен запоминать временные интервалы посредством регулирования своего порогового значения. При воздействии периодических внешних сигналов агент синхронизирует свою активность в соответствии со стимулом. В отсутствие сигналов происходит постепенное забывание, возвращающее порог к гомеостатическому базовому уровню. Биологически правдоподобное запоминание интервалов достигается через популяционное кодирование, когда агенты кодируют интервалы не одновременно, а со временными сдвигами, причем

только подмножество популяции реагирует на каждый новый сигнал. Данный механизм отражает ключевые особенности биологических систем: постепенное обучение (вместо мгновенного усвоения информации), моделирование закона Вебера (увеличение дисперсии оценок с ростом длительности интервалов), регрессия оценок к среднему значению.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе описываются концептуальные модели кодирования времени, близкие к формализму, предложенному в данной работе. В третьем разделе описываются активные агенты и их внутренняя структура, описываются все параметры и их взаимосвязи. Приводятся точные формулы зависимости пороговых значений агентов и воспроизводимых ими временных интервалов. Исследуются свойства предложенной модели и обосновывается выполнение закона Вебера. Четвертый раздел закладывает основы популяционного кодирования времени созданными агентами. В Заключении подводятся итоги и делаются направления будущих исследований.

## **2. Концептуальные модели временного кодирования и закон Вебера**

Перед тем как описать модель активного агента и ее применение для воспроизведения биологически правдоподобных механизмов запоминания временных интервалов, обратимся к двум известным моделям, наиболее тесно связанным с предложенной. Эти модели были разработаны достаточно давно, однако до сих пор остаются самыми влиятельными феноменологическими моделями биологического кодирования временных интервалов. Они обладают базовыми свойствами, присущими биологическим организмам при восприятии и воспроизведении времени, в частности, удовлетворяют закону Вебера.

### **2.1. ЗАКОН ВЕБЕРА И СКАЛЯРНОЕ СВОЙСТВО**

Закон Вебера – эмпирический психологический закон, который, однако, имеет математическую формализацию и широко используется во многих психологических и нейробиологических исследованиях. Он может быть выражен формулой  $\Delta I/I = k$ , где

$\Delta I$  – минимальная обнаруживаемая разница стимула (пороговое различие);  $I$  – исходная величина стимула;  $k$  – коэффициент Вебера (константа для данной сенсорной модальности).

Он означает, что изменчивость суждений о стимуле (например, длительность, интенсивность) масштабируется пропорционально величине самого стимула. В соответствии с этим законом различимость двух стимулов зависит от их *относительного различия*, а не от их абсолютных значений.

В контексте восприятия времени в литературе закон Вебера получил название *скалярного свойства*.

Скалярное свойство утверждает, что точность синхронизации линейно ухудшается с длиной интервала. Например, различие 1 с и 1,2 с ( $\Delta t = 0,2$  с) так же сложно, как различие 10 с и 12 с ( $\Delta t = 2$  с), поскольку оба имеют коэффициент Вебера  $k = 0,2$ .

Прямыми следствием соблюдения этого свойства является увеличение дисперсии по мере увеличения длительности запоминаемого интервала.

## 2.2. МОДЕЛЬ «ВНУТРЕННИХ ЧАСОВ» М. ТРЕЙСМАНА

Модель Мишеля Трейсмана, известная как модель «внутренних часов», стала пионерской в осмыслении восприятия времени как внутреннего когнитивного процесса, включающего механизм «генератор – накопитель» [14]. Укрупненно структуру модели можно представить тремя основными блоками: генератор (пейсмейкер), накопитель (аккумулятор) и модуль памяти. Генератор вырабатывает импульсы, которые накапливаются накопителем каждый раз, когда начинается временной интервал. Во время выполнения задач на оценку времени полученное число импульсов сохраняется в памяти и сравнивается с эталонными значениями.

Модель запоминает длину некоторого стимула. Происходит это следующим образом. Начало стимула замыкает переключатель между пейсмейкером и накопителем, который начинает накопление тактов (т.е. временных единиц) на протяжении всего стимула. В конце стимула количество накопленных тактов сохраняется в модуле памяти для извлечения и сравнения с будущими длительностями (рис. 1).



Рис. 1. Модель М. Трейсмана, состоящая из трех основных блоков: генератор (пейсмейкер), накопитель и модуль памяти

Как когнитивному психологу, Трейсману было важно подчеркнуть, что для точного измерения времени необходимы не только часы, но и надёжные процессы памяти и механизмы принятия решений – так называемый «когнитивный часовой механизм». Такой подход позволил осуществлять точные количественные предсказания временных оценок и объяснять источники вариабельности в суждениях о времени, такие как ошибки при накоплении импульсов или их извлечении из памяти. Было показано, что предложенная модель отражает свойства восприятия и оценки временных интервалов людьми, полученные в нескольких сериях экспериментов, и удовлетворяет закону Вебера. Для функции Вебера вида  $\Delta T = k(T + a)$ , где  $k$  и  $a$  – эмпирические параметры, были найдены их значения для различных серий экспериментов.

Позднее М. Трейсман расширил свою модель, введя концепцию «калиброванного генератора», в которой выход генератора может регулироваться специальным калибрующим блоком, чувствительным к уровню возбуждения [15].

## 2.2. ТЕОРИЯ СКАЛЯРНОГО ОЖИДАНИЯ

Вторая модель основана на первой и расширяет её до теории, известной как теория скалярного ожидания (Scalar Expectancy Theory, SET). Она была разработана Дж. Гиббоном [8] и дополнена Р.М. Черчем [6, 9]. Эта теория, как и модель М. Трейсмана,

основывается на схеме «генератор – накопитель», но дополняет её чётким акцентом на скалярном свойстве временного поведения [6]. SET расширяет модуль памяти во внутренних часах Трейсмана. Один общий блок заменен на три: *рабочая память*, *эталонная (референтная) память* и блок принятия решения для определения того, похожа ли измеряемая длительность на ранее закодированные длительности («да» или «нет») (рис. 2).

Согласно SET, внутренние часы, рабочая память, эталонная память и процесс принятия решений совместно определяют временные суждения. Изначально SET была сформулирована для объяснения поведения животных при фиксированных интервалах подкрепления, но впоследствии стала доминирующей моделью в исследованиях восприятия времени животных и человека.

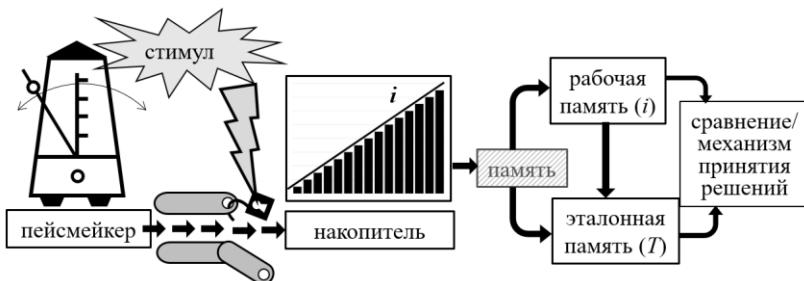


Рис. 2. Расширенный модуль памяти в SET

Хотя модели Трейсмана и SET имеют общие ключевые механизмы – генератор, накопитель, память и компаратор, – SET формализует взаимосвязь между вариабельностью временных оценок и длительностью интервала, а также даёт более всестороннее объяснение временного поведения у различных видов и в разных экспериментальных парадигмах [9]. Основное различие заключается в акценте SET на скалярном свойстве и её более широком эмпирическом применении, тогда как исходная модель М. Трейсмана была более ориентирована на когнитивную архитектуру временных процессов у человека.

### 3. Структура активного агента и его параметры

За основу представленной в статье модели взята структура сложных агентов, предложенная и исследованная в [18]. Архитектура агента, его параметры и аналитические формулы, определяющие связь между длительностью интервала активации и параметрами агента, подробно описаны в [19]. Определения в этом разделе в целом соответствуют определениям в [19], однако полученные там формулы получили более законченный вид и структуру.

#### 3.1. ВНУТРЕННЯЯ СЕТЬ АГЕНТА

Агенты являются активными, поскольку генерируют эндогенную активность, обусловленную их внутренней динамикой. Внутренние процессы агента  $A_i$  определяются сетью из трёх узлов, функционирующих в дискретном времени  $t = 1, 2, \dots$ . Два из них,  $N_{i1}$  и  $N_{i2}$ , образуют *полуцентровый осциллятор*, представляющий собой пару узлов, соединенных возбуждающими связями и активирующими в противофазе. Сила связей между ними способна поддержать активность в отсутствие внешних воздействий. Оба узла осциллятора, активируясь, воздействуют не только друг на друга, но и на третий элемент  $N_{i3}$ , названный *триггером*.

Триггер аккумулирует память или потенциал активации  $U_i(t)$ . При достижении потенциалом порогового значения  $Th_i$  ( $U_i(t) \geq Th_i$ ) триггер активируется и активирует агента  $A_i$ . Такая внутренняя сеть функционирует как встроенный пейсмейкер. Триггер характеризуется следующими параметрами: глубиной памяти  $\Theta_i$ , коэффициентом дисконтирования (забывания)  $\mu_i \in (0, 1]$ , пороговым значением  $Th_i > 0$  и весами двух рецепторов  $w_{i1} > 0$  и  $w_{i2} > 0$ , воспринимающих возбуждение от узлов  $N_{i1}$  и  $N_{i2}$  соответственно.

Если глубина памяти не ограничена, ее накопление происходит в соответствии с формулой

$$(1) \quad U_i(t) = \begin{cases} w_{i1} \sum_{j=1}^{\frac{t}{2}} \mu_i^{2j-1} + w_{i2} \sum_{j=1}^{\frac{t}{2}} \mu_i^{2j-2}, & t = 2k, \\ w_{i1} \sum_{j=1}^{\frac{t+1}{2}} \mu_i^{2j-2} + w_{i2} \sum_{j=1}^{\frac{t-1}{2}} \mu_i^{2j-1}, & t = 2k - 1, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Если  $\Theta_i$  конечно, то при  $t > \Theta_i$  потенциал перестает возрастать и остается постоянным. Если он не достигает порогового значения, агент с такими параметрами может активироваться лишь при дополнительном внешнем воздействии. Такие случаи в данной модели не рассматриваются.

Если агент  $A_i$  активируется в момент времени  $t \leq \Theta_i$ , т.е.  $U_i(t) \geq Th_i$ , то в следующий момент память сбрасывается до нуля и накопление начинается заново.

Если  $\mu_i < 1$ , все суммы в формуле (1) представляют собой убывающие геометрические прогрессии. При бесконечной глубине памяти предельное значение потенциала  $U_i^\infty$  – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Таким образом, память всегда ограничена сверху. Устремив  $t$  к бесконечности в строке  $k_1 \in \{1, 2\}$  формулы (1), получим величину  $U_i^\infty$ :

$$(2) \quad U_i^\infty = w_{ik_1} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i^{2j-1} + w_{ik_2} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_i^{2j-2} = \frac{w_{ik_1} \mu_i + w_{ik_2}}{1 - \mu_i^2}.$$

Для простоты модели положим, что  $w_{i1} = w_{i2} = w_i$ . Тогда формулы (1) и (2) значительно упростятся до вида

$$(3) \quad U_i(t) = w_i \sum_{j=0}^{t-1} \mu_i^j = \frac{w_i(1 - \mu_i^{t-1})}{1 - \mu_i},$$

$$(4) \quad U_i^\infty = \frac{w_i}{1 - \mu_i}.$$

Внутренняя сеть агента  $A_i$  представлена на рис. 3.

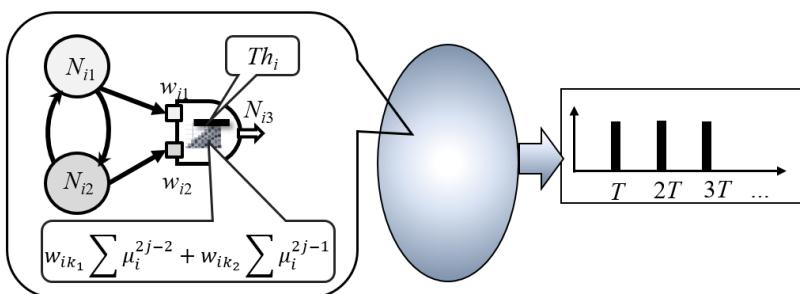


Рис. 3. Агент  $A_i$ , его внутренняя сеть и параметры; активация агента происходит с периодом  $T$  (правый фрагмент рисунка)

Отметим, что ансамбль из трех элементов может порождать простые ритмы, и агенты с такой структурой также должны быть

просты. Однако, создавая сети из таких агентов, т.е. собирая ансамбли из ансамблей и комбинируя между собой разные ритмы с разными периодами, можно добиться достаточно сложных паттернов активности, а мета-агенты, наделенные такими сетями, способны генерировать сложное поведение (рис. 4).

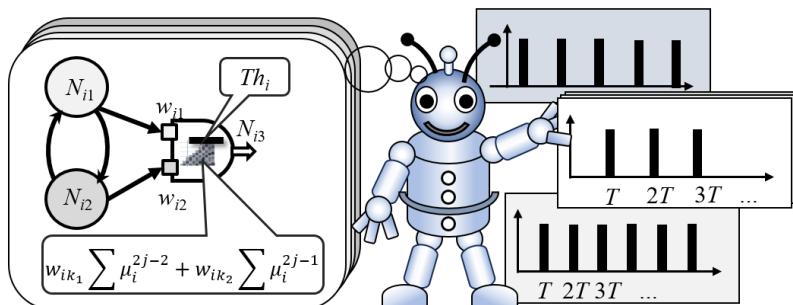


Рис. 4. Ансамбли из простых агентов способны воспроизводить сложную моторную динамику

Скоординированной работе нескольких ансамблей будут посвящены дальнейшие исследования. Однако одна описанная сеть из трех элементов достаточна для решения задачи запоминания временного интервала. Для биологически правдоподобной модели будет использовано популяционное кодирование, описанное в четвертом разделе.

### 3.2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПОРОГОВЫМ ЗНАЧЕНИЕМ АГЕНТА И ИНТЕРВАЛОМ ЕГО АКТИВАЦИИ

Если пороговое значение  $Th_i$  меньше, чем  $U_i^\infty$ , агент будет активироваться через некоторые равные промежутки времени. Длительность этих интервалов зависит от параметров триггера:  $\mu_i$ ,  $Th_i$ ,  $w_i$ . Будем полагать, что величина  $\mu_i$  задана и неизменна. Величины  $Th_i$  и  $w_i$  линейно зависимы, таким образом, будем считать, что управление агентом происходит посредством изменения его порогового значения  $Th_i$ . Интервал между двумя соседними активациями будем обозначать через  $T_i$ .

Будем различать две задачи: прямую и обратную. Прямая задача состоит в определении временного интервала между активациями при заданных параметрах. Обратная задача заключается в подборе параметров для достижения заданного временного интервала  $T_i$ . Решение обеих задач представлено в [19] при условии, что  $w_{i1} = w_{i2} = w_i$ .

Прямая задача имеет решение

$$(5) \quad T_i = \left\lfloor \log_{\mu_i} \left( \frac{\mu_i - 1}{w_i} Th_i + 1 \right) \right\rfloor.$$

Обратная задача имеет решение

$$(6) \quad Th_i = w_i \frac{1 - \mu_i^{T_i}}{1 - \mu_i}.$$

Заметим, что в отличие от прямой задачи, которая имеет решение только при условии  $Th_i < U_i^\infty$ , обратная задача имеет решение всегда. С другой стороны, с увеличением запоминаемого интервала  $T_i$  при фиксированном дискретном временном шаге  $\Delta t$  значения  $Th_i$  будут все менее отличаться друг от друга, что приводит к увеличению разброса запомненных временных интервалов при одной и той же точности для порогового значения. Как было показано в предыдущем разделе, эта особенность не является недостатком модели – это выполнение скалярного свойства (закона Вебера применительно ко времени), присущего биологическим организмам при оценке сенсорных стимулов.

В предлагаемой модели это свойство достигается с помощью механизма затухания памяти при  $\mu < 1$ .

Из формулы (6) для каждого временного интервала  $T$  и заданного коэффициента Вебера  $k$  можно определить как величину дисперсии  $Th_i$ , так и «минимальную обнаруживаемую разницу»  $\Delta Th_i$  и  $\Delta t$ :

$$\frac{Th_i(T + \Delta t) - Th_i(T)}{Th_i(T)} = \frac{\mu_i^T - \mu_i^{T+\Delta t}}{1 - \mu_i^T} = k,$$

откуда

$$\Delta t = \left\lfloor \log_{\mu_i} \left( 1 - k \frac{1 - \mu_i^T}{\mu_i^{T+\Delta t}} \right) \right\rfloor.$$

Отметим, что скалярное свойство здесь заключается в том, что в полученной формуле  $\Delta t$  не зависит от весов  $w_i$ , хотя сами пороги, разумеется, зависят от весов рецепторов.

Например, пусть  $\mu_i = 0,95$ , коэффициент Вебера  $k = 0,2$ , как в примере выше. Тогда для  $T = 4$

$$\Delta t = \left\lfloor \log_{0,95} \left( 1 - 0,2 \frac{1-0,95^4}{0,95^4} \right) \right\rfloor = \lfloor 0,91 \rfloor = 1.$$

Для  $T = 10$   $\Delta t = \lfloor 2,81 \rfloor = 3$ .

Это означает, что интервалы длины 4 и 5 различаются так же, как интервалы длины 10 и 13. В модели с непрерывным временем можно получить более точные оценки. Конечно, для интервалов в диапазоне секунд вариация весьма значительна, однако модель может быть скорректирована изменением значений параметров.

Рост дисперсии с увеличением  $T$  продемонстрирован на рис. 5.

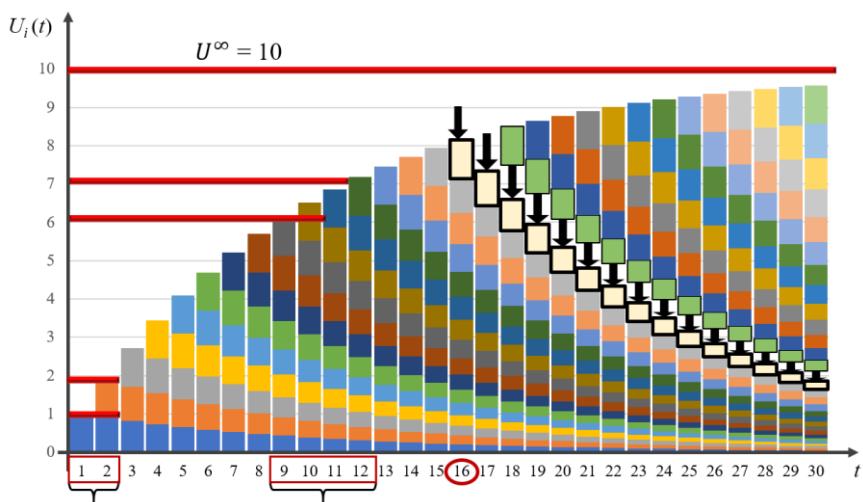


Рис. 5. Накопление потенциала с механизмом затухания с параметрами  $\mu_i = 0,9$ ,  $w_i = 1$ . Показан диапазон вариации длин временных интервалов для одной и той же разности  $\Delta U_i(t) = 1$  для  $U_i(t) = 1$  и  $U_i(t) = 6$ .

Здесь изображено накопление памяти с каждым тактом. Возбуждение, полученное на определенном такте, находится вверху соответствующего столбика и обозначено цветом. Далее видно, как оно с ходом времени начинает «проседать» под более свежими полученными порциями возбуждения. В диаграмме стрелками выделена динамика возбуждения, полученного на такте 16.

#### **4. Популяционное кодирование временных интервалов**

В настоящее время в исследовании и моделировании тайминга произошло значительное смещение. В ряде работ ([4, 10, 12, 20, 21] и многие другие) было показано, что кодирование времени распределено по нескольким отделам мозга и является результатом скоординированной активности больших популяций нейронов и нейронных сетей.

Наша работа преследует две цели: с одной стороны, достичь биологического правдоподобия, создав модель, устойчивую к шуму и обладающую скалярным свойством; с другой же стороны, остаться в рамках феноменологии. Мы не моделируем физические процессы, происходящие в живых нейронах и нейронных сетях. Наши агенты – простая идеальная модель, обладающая необходимым минимумом параметров для воспроизведения временного кодирования с заданным набором свойств, поддающаяся аналитическому описанию.

##### **4.1. ПРОБЛЕМА ВОСПРИЯТИЯ И ЗАПОМИНАНИЯ ИНТЕРВАЛОВ**

Для воспроизведения интервалов заданной длины были получены точные формулы (см. раздел 3). Однако для того чтобы интервал *воспроизвести*, его нужно сначала *воспринять* и затем *запомнить*. В модели внутренних часов и в SET эти процессы происходят в блоке памяти и включают в себя «заслонки». Начало сигнала открывает заслонку между пейсмейкером и аккумулятором и начинается накопление тактов; конец сигнала закрывает эту заслонку и открывает канал между аккумулятором и памятью. Таким образом, происходит восприятие и запоминание.

В нашей модели агент запоминает длительность интервала, изменения соответствующим образом свой порог  $Th_i$ . Получая сигнал, соответствующий началу измеряемого интервала, агент сбрасывает свой потенциал  $U_i(t)$  до нуля и начинает накопление в соответствии с формулой (1) или ее частным случаем (3). Когда приходит сигнал окончания интервала, агент активируется и обновляет свой порог до текущего значения потенциала:  $Th_i = U(T)$ . Таким образом, длина интервала  $(0, T)$  сохраняется в памяти, после чего агент начнет активироваться с периодом  $T$ .

Однако при том, что механизм угасания памяти влечет за собой выполнение закона Вебера, такой алгоритм неустойчив к шуму и, в целом, ему не хватает биологической адекватности. Мы хотим получить систему, обладающую следующими основными свойствами механизмов кодирования времени живыми системами.

- Способность к обучению с подкреплением: обучение может не происходить с первой попытки, а требовать нескольких повторений.

- Неидеальное запоминание: в оценке интервалов могут быть небольшие смещения как в большую, так и в меньшую стороны.

- Забывание: если подкрепление перестает поступать, запомненный интервал постепенно забывается и агент возвращается к своему изначальному ритму.

Для выполнения этих свойств будет использовано популяционное кодирование времени. В данной работе мы приведем основные характеристики популяционной модели.

#### 4.2. ПОПУЛЯЦИЯ АГЕНТОВ И ЕЕ СИНХРОНИЗАЦИЯ

Рассмотрим популяцию из  $N$  агентов со внутренней структурой, описанных в разделе 3. Каждый из агентов обладает гомеостатической величиной порогового значения  $Th_i$ ; вообще говоря, все  $Th_i$  в популяции могут быть различны. В присутствии периодических сигналов с заданным интервалом, каждый новый сигнал воспринимает некоторая доля агентов  $p < 1$ . Если агент воспринял сигнал, он сбрасывает свой накопленный потенциал

и начинает ожидать сигнал, символизирующий окончание интервала. После этого данная часть популяции обновляет свои пороги:  $Th_i := Th^*$  и начинает активироваться синхронно. С многократным повторением сигнала всё большая часть популяции начинает синхронизировать свои фазы.

Однако если сигналы прекращаются или если в какой-то момент агент не смог отреагировать на сигнал, через некоторое время его порог начинает смещаться к гомеостатической величине. Поскольку каждый сигнал воспринимает только часть популяции, пороги агентов не только концентрируются вокруг значения  $Th^*$ , но также и незначительно расползаются в стороны. Таким образом, популяция в целом демонстрирует некоторый разброс во временах активации.

#### *4.3. МЕХАНИЗМ ЗАБЫВАНИЯ И СМЕЩЕНИЕ К СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЯМ*

Практически во всех исследованиях запоминания и воспроизведения времени отмечается эффект смещения оценок к средним значениям: испытуемые склонны занижать оценку длинных интервалов и завышать оценку коротких. Но что такое длинные и короткие? Не являются ли такие оценки субъективными и относительными? В экспериментальных исследованиях приводятся абсолютные величины запоминаемых интервалов. Наша модель использует другой метод, на наш взгляд, более универсальный. Смещение оценок в нашей модели происходит в сторону средней величины гомеостатических пороговых значений агентов.

В отсутствие стимулов пороги смещаются от запомненного значения к гомеостатическим величинам по сигмоидным функциям.

Разброс оценок интервалов популяцией будет увеличиваться с увеличением длины интервала, поскольку в этом случае увеличится разница между пороговыми значениями агентов в популяции и запомненной величиной. Таким образом, популяционная модель в целом также удовлетворяет закону Вебера.

Проиллюстрируем запоминание временного интервала  $T$  популяцией из 10 агентов с разными порогами и параметром  $p = 0,2$ . Это означает, что каждый сигнал окончания интервала  $T$  воспринимают 20% агентов, в частности, для  $N = 10$  эта доля равна 2.

Начальное распределение порогов представлено на рис. 6. Порог, соответствующий интервалу  $T$ , обозначен через  $Th^*$ .

По оси абсцисс отложено время, по оси ординат – пороги агентов. Из рисунка видно, что часть агентов (агенты  $A_1$  –  $A_7$ ) имеют пороги ниже заданного, другая часть (агенты  $A_8$  –  $A_{10}$ ) – выше заданного.

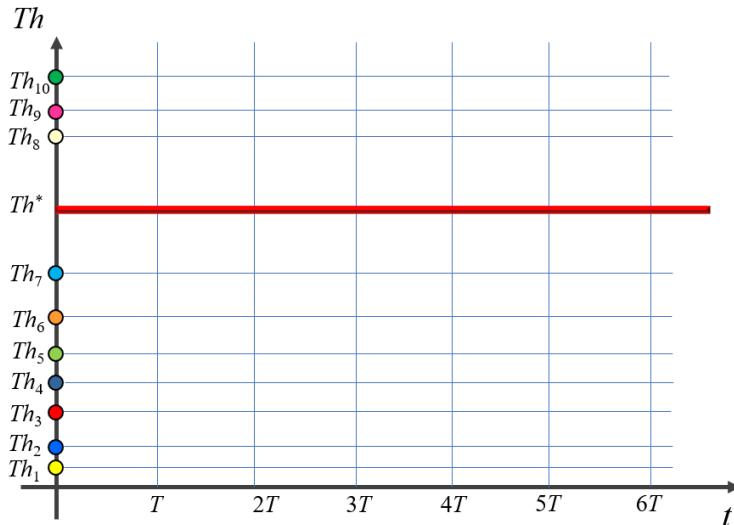


Рис. 6. Начальное распределение порогов агентов в популяции

На первом такте (конец первого интервала  $T$ ) случайные два агента воспринимают сигнал и изменяют пороги к значению  $Th^*$  (рис. 7).

Далее продолжается та же динамика. Распределение порогов к моменту времени  $6T$  показана на рис. 8.

На рис. 8 стрелками показаны переходы пороговых значений на каждом такте. Следует отметить, что поскольку каждый раз два агента выбираются случайным образом, некоторые агенты, уже изменившие свои пороги, будут выбираться повторно, в то время как в популяции всё еще будут агенты, имеющие гомеостатические значения порогов. На рис. 8 это происходит на тактах  $3T$  и  $5T$ , когда агенты, уже изменившие свои пороги, уточняют их значения и вновь приближаются к  $Th^*$ , т.е. между  $2T$  и  $3T$ , а также между  $4T$  и  $5T$  присутствует одна стрелка вместо двух.

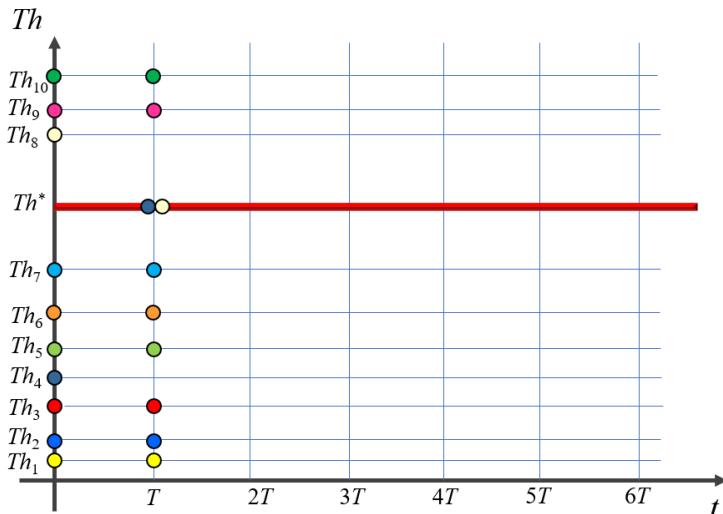


Рис. 7. Изменение состояния популяции после первого шага: два агента ( $A_4$  и  $A_8$ ) изменили свои пороги на значение  $Th^*$

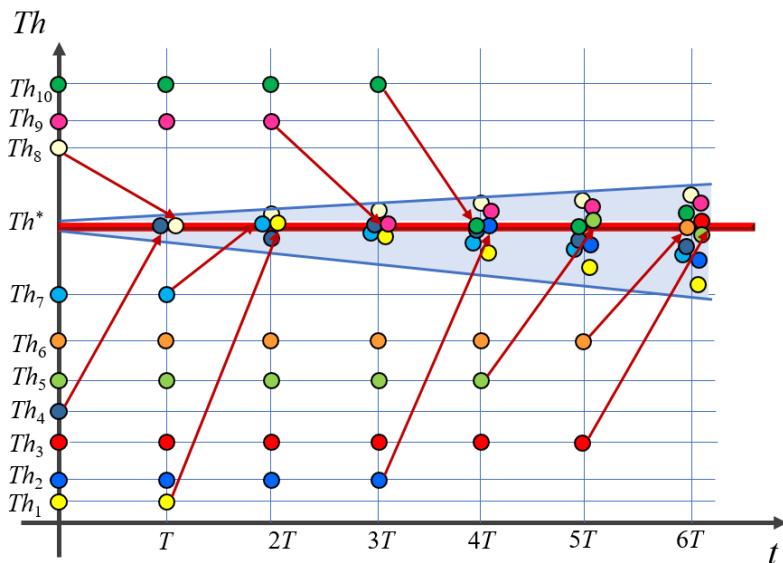


Рис. 8. Состояние популяции на такте  $6T$

На этом же рисунке видна еще одна закономерность. Агенты, не получающие подкрепление, постепенно сдвигают свои пороги в сторону своих гомеостатических значений. Таким образом, с одной стороны, со временем агенты «сплачиваются» вокруг порогового значения и за несколько тактов вся популяция входит в одну фазу, с другой стороны, вокруг этого значения вырастает разброс.

На примере становится видно, что означает «стремление оценок к среднему значению». Поскольку здесь большинство агентов имеют пороги ниже желаемого, то смещение разброса также идет вниз. При этом для каждого агента есть предпочтительная частота, которую он воспроизводит безошибочно.

Если популяция агентов более гомогенна и имеет небольшой разброс порогов, то смещение оценок будет происходить также более консолидировано в сторону общего центра масс. При отсутствии новых сигналов агенты вернутся к своим гомеостатическим характеристикам.

## **5. Заключение**

В работе представлена биологически правдоподобная модель кодирования временных интервалов. Предложена структура единичного агента и его поведение; представлены механизмы запоминания агентом временного интервала и формулы зависимости длины генерируемого интервала от порогового значения.

Описаны основные свойства временного кодирования, присущие биологическим видам. Проанализированы модели, реализующие данные свойства.

Предложена популяционная модель, реализующая базовые свойства тайминга, присущие многим видам позвоночных. Хотя в настоящее время существуют более сложные модели, основанные на последних нейробиологических открытиях, нашей главной целью было оставаться в рамках феноменологического подхода. Предложенная модель охватывает ключевые свойства биологических систем, оставаясь при этом простой и поддающейся аналитической обработке. Кроме того, модель значительно расширяет теорию скалярного ожидания и может быть полезна в робототехнике и приложениях искусственного интеллекта.

## Литература

1. КУЛИЕВА А.К., БЕРЕЗНЕР Т.А., ШИШУНОВА А.Н. и др. *Когнитивные теории восприятия времени* // Вестник Санкт-Петербургского университета. Психология. – 2025. – Т. 15. – Вып. 1. – С. 51–65.
2. BALCI F., SIMEN P. *Neurocomputational Models of Interval Timing: Seeing the Forest for the Trees* // Neurobiology of Interval Timing. – 2024. – P. 51–78.
3. BIGUS E.R., LEE H.W., BOWLER J.C. et al. *Medial entorhinal cortex mediates learning of context-dependent interval timing behavior* // Nature Neuroscience. – 2024. – Vol. 27, No. 8. – P. 1587–1598.
4. BUONOMANO D.V., LAJE R. *Population clocks: motor timing with neural dynamics* // Trends in Cognitive Sciences. – 2010. – Vol. 14, No. 12. – P. 520–527.
5. CHHABRIA V.A., JIANG W., KAHNG A.B. et al. *A Machine Learning Approach to Improving Timing Consistency between Global Route and Detailed Route* // arXiv:2305.06917. – 2023.
6. CHURCH R.M., GIBBON J. *Temporal generalization* // Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes. – 1982. – Vol. 8, No. 2. – P. 165.
7. DEVERETT B., FAULKNER R., FORTUNATO M. et al. *Interval timing in deep reinforcement learning agents* // arXiv:1905.13469. – 2019.
8. GIBBON J. *Scalar expectancy theory and Weber's law in animal timing* // Psychological review. – 1977. – Vol. 84, No. 3. – P. 279.
9. GIBBON J., CHURCH R.M. *Representation of time* // Cognition. – 1990. – Vol. 37, No. 1–2. – P. 23–54.
10. GOEL A., BUONOMANO D.V. *Timing as an intrinsic property of neural networks: evidence from in vivo and in vitro experiments* // Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences. – 2014. – Vol. 369, No. 1637. – P. 20120460.
11. HARTCHER-O'BRIEN J., BRIGHOUSE C., LEVITAN C.A. *A single mechanism account of duration and rate processing via the pacemaker–accumulator and beat frequency models* // Current Opinion in Behavioral Sciences. – 2016. – Vol. 8. – P. 268–275.

12. PATON J.J., BUONOMANO D.V *The neural basis of timing: distributed mechanisms for diverse functions* // Neuron. – 2018. – Vol. 98, No. 4. – P. 687–705.
13. TACIKOWSKI P., KALENDER G., CILIBERTI D. et al. *Human hippocampal and entorhinal neurons encode the temporal structure of experience* // Nature. – 2024. – Vol. 635, No. 8037. – P. 160–167.
14. TREISMAN M. *Temporal discrimination and the indifference interval: Implications for a model of the "internal clock"* // Psychological Monographs: General and Applied. – 1963. – Vol. 77, No. 13. – P. 1.
15. TREISMAN M., FAULKNER A., NAISH P.L. et al. *The internal clock: Evidence for a temporal oscillator underlying time perception with some estimates of its characteristic frequency* // Perception. – 1990. – Vol. 19, No. 6. – P. 705–742.
16. XIE T., HUANG C., ZHANG Y. et al. *Influence of recent trial history on interval timing* // Neuroscience Bulletin. – 2023. – Vol. 39, No. 4. – P. 559–575.
17. XU M., ZHANG S.Y., DAN Y. et al. *M. Representation of interval timing by temporally scalable firing patterns in rat prefrontal cortex* // Proc. of the National Academy of Sciences. – 2014. – Vol. 111, No. 1. – P. 480–485.
18. ZHILYAKOVA L. *Modeling Neuron-Like Agents with a Network Internal Structure* // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VII. NEUROINFORMATICS 2023. Studies in Computational Intelligence. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. – Vol. 1120. – P. 300–307.
19. ZHILYAKOVA L. *Direct and Inverse Problems of Time Encoding by Neuron-Like Agents* // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VIII. N I 2024. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2024. – P. 353–361.
20. ZHOU S., BUONOMANO D.V. *Neural population clocks: Encoding time in dynamic patterns of neural activity* // Behavioral Neuroscience. – 2022. – Vol. 136, No. 5. – P. 374.
21. ZHOU S., MASMANIDIS S.C., BUONOMANO D.V. *Neural sequences as an optimal dynamical regime for the readout of time* // Neuron. – 2020. – Vol. 108, No. 4. – P. 651–658. e5.

## MODEL OF ENCODING TIME INTERVALS BY ACTIVE AGENTS

**Liudmila Zhilyakova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Leading Researcher (zhilyakova@ipu.ru).

**Nikolay Bazenkov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD., Senior Researcher (bazenkov@ipu.ru).

*Abstract: Interval time coding, i.e. the ability to perceive and estimate duration in the range from seconds to minutes, is one of the key cognitive processes underlying the adaptive behavior of biological species. This ability allows individuals to extract temporal patterns from the environment, optimize resource extraction strategies, coordinate communication, and form forecasts about future events. The paper describes a model of an active agent with an internal structure represented by an ensemble capable of generating rhythmic activity in given time intervals. The ensemble consists of three nodes: a half-center oscillator (two nodes exciting each other in antiphase) and a trigger node with memory. The half-center oscillator excites a trigger that accumulates excitation in memory. When excitation reaches a threshold value, the trigger is activated and, thus, transmits a signal to the agent. The trigger activation frequency depends on its parameters: receptor weights, discount coefficient, threshold value. The proposed model of temporal coding by such agents demonstrates properties inherent in biological systems: compliance with Weber's law (direct dependence of the variation of the estimate on the duration of the signal), memory fading in the absence of a stimulus, a return to homeostatic parameters, and a shift in estimates to average values. Research in the field of biologically inspired interval coding not only deepens our understanding of time perception, evaluation, and prediction, but also stimulates the development of adaptive AI systems, robotics, and human-machine interfaces.*

Keywords: rhythmic activity, time coding, half-center oscillator, internal clock model.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Ф.Т. Алексеровым.*

*Поступила в редакцию 27.06.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*

## МЕХАНИЗМЫ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА ПУТЕМ КАПИТАЛЬНОГО РЕМОНТА ТЕПЛОВОЗОВ

Цыганов В. В.<sup>1</sup>, Еналеев А. К.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Савушкин С. А.<sup>3</sup>

(ФГБУН Институт проблем транспорта  
им. Н.С. Соломенко РАН, Москва)

Разработан организационный механизм планирования и стимулирования устойчивого развития организационной системы. Найдены достаточные условия оптимальности этого механизма. На основе полученных результатов рассмотрена проблема устойчивого развития железнодорожного транспорта путем капитального ремонта тепловозов. Разработан организационный механизм снижения выбросов вредных веществ тепловозом в результате капитального ремонта. Этот механизм включает алгоритм нормирования и категорирования показателей выбросов основных вредных веществ, алгоритм свертки категорий показателей выбросов и формирования категории экологичности тепловоза, а также процедуру стимулирования за капитальный ремонт тепловоза. Нормативы выбросов вредных веществ формируются на основе отечественных стандартов, а также национальных и региональных требований за рубежом. При этом категория выбросов вредных веществ определенного типа признается удовлетворительной, если показатель этих выбросов не превышает нормы, указанной в соответствующем отечественном экологическом стандарте, хорошей – если этот показатель также соответствует требованиям национальных или региональных экологических стандартов стран передового тепловозостроения, и отличной – если этот показатель соответствует лучшим мировым стандартам. Алгоритм свертки этих категорий определяет комплексную оценку экологичности тепловоза после капитального ремонта. В зависимости от этой оценки осуществляется стимулирование заинтересованных лиц. Приведены примеры расчетов категорий экологичности отечественных и зарубежных тепловозов. Разработанные нормативы показателей выбросов основных вредных веществ могут использоваться в качестве ориентиров при капитальном ремонте тепловозов. Полученные результаты использованы при разработке

---

<sup>1</sup> Владимир Викторович Цыганов, д.т.н., профессор (bbc@ipu.ru).

<sup>2</sup> Анвер Касимович Еналеев, к.т.н., с.н.с. (anverena@mail.ru).

<sup>3</sup> Сергей Александрович Савушкин, к.ф-м.н., с.н.с. (ssavushkin@mail.ru).

*концепции требований к тепловозам ОАО «РЖД» в области охраны окружающей среды.*

Ключевые слова: организация, устойчивое развитие, планирование, стимулирование, тепловоз, выбросы загрязняющих веществ

## **1. Введение**

Устойчивое развитие (УР) больших систем подразумевает такое их функционирование, при котором обеспечивается долгосрочное существование и развитие в экономическом, социальном и экологическом аспектах [6]. Текущие цели глобального УР [26] включают эффективное использования ресурсов и уменьшение выбросов, вредных для здоровья людей и окружающей среды. В результате достижения этих целей формируется баланс между текущими потребностями и интересами организации с одной стороны, и охраны окружающей среды – с другой, при сохранении возможности удовлетворения потребностей в будущем [9].

Устойчивое развитие организации предполагает:

- экономическую устойчивость, обеспечивающую эффективным использованием ресурсов, внедрением инноваций и повышением конкурентоспособности;
- экологическую устойчивость, обеспечивающую минимизацией негативного воздействия на окружающую среду, рациональным использованием невозобновляемых природных ресурсов, внедрением экологически чистых технологий и снижением выбросов.

Примеры УР организаций связаны с повышением эффективности использования ресурсов, внедрением «зеленых» технологий и снижением выбросов [9]. Устойчивое развитие организации обеспечивает:

- долгосрочную стабильность и выживание вследствие лучшей адаптации к изменениям и снижения рисков;
- улучшение репутации организации, поскольку ответственное отношение к экологическим вопросам укрепляет её имидж и повышает доверие со стороны потребителей, инвесторов и общества;

- конкурентное преимущество, поскольку устойчивые организации часто становятся лидерами в своих отраслях, внедряя инновации и предлагая услуги, отвечающие потребностям УР;
- разрешение глобальных проблем, таких как изменение климата.

Проблемы УР больших систем требуют комплексного изучения. В частности, необходимы исследования и разработки, позволяющие связать организационные механизмы обеспечения устойчивости социально-экономических и природных систем. Основой таких исследований является теория организационного управления, в которой разработан широкий спектр моделей и методов, создающих предпосылки для эффективного внедрения ее результатов [7, 13].

Однако попытки применения этих моделей и методов на практике сталкиваются со сложностью идентификации параметров реального объекта управления, в составе которого присутствуют люди со своими целями и представлениями об объекте и применяемой системе управления. При этом характеристики конкретного объекта управления обычно уникальны и редко подходят под стандартизованные описания, принятые в математических моделях. Кроме того, они не известны точно органу управления (Центру) и трудно измеримы на практике. В этом случае применение математических моделей, основанное на попытках детализации параметров объекта управления, их идентификации и последующем использовании точных значений этих параметров, не приводит к улучшению качества управления. Более того, возможно ухудшение качества управления вследствие введения Центра в заблуждение относительно реального состояния системы.

Видятся два подхода к решению указанных проблем внедрения результатов теории организационного управления. Первый подход связан со стремлением к максимально точному описанию объекта управления, позволяющему непосредственно применить математические модели, разработанные в теории организационного управления. Этот подход связан с расширением спектра моделей и методов, используемых при уточнении значений неизвестных характеристик объекта управления для по-

вышения адекватности описания и управления объектом. К ним относятся, в частности, модели и методы адаптивного управления, обучения и самоорганизации [11, 12, 18].

Второй подход связан с заведомо приближенным описанием объекта управления и использованием только ключевых характеристик объекта, отражающих самые существенные его свойства. Часто это не количественные, а качественные характеристики объекта. При этом снижаются требования к детализации и идентификации параметров объекта управления, а также к точности решений, вычисляемых на выходе системы управления. Пример – переход к выработке управлений, измеряемых в порядковых шкалах, значения которых называются категориями. Для этого широко используются процедуры матричной свертки [1–3, 14, 16, 18, 25, 28].

В [1] исследуются вопросы применения обобщенных медианных механизмов согласования мнений агентов в процедурах комплексного оценивания. В [2] рассмотрена задача и метод поиска матричных сверток, при которых комплексная оценка равна оценке, получаемой с помощью экспертов. В [3, 14, 25, 28] рассмотрена проблема идентификации процедур комплексного оценивания на основе набора статистических данных. Предложены алгоритмы построения соответствующих деревьев и матричных сверток.

Процедуры матричной свертки используются и для решения прикладных задач управления, в частности, на железнодорожном транспорте. В [18] рассмотрена комплексная оценка влияния изменения климата на устойчивость транспортной инфраструктуры для принятия решений по её адаптации. В [16] предложена процедура комплексного оценивания вредных воздействий локомотивов на окружающую среду.

Заметим, что задача выбора процедуры комплексного оценивания тесно связана со спецификой объекта такого оценивания. При этом часто трудно или даже невозможно получить статистические данные об объекте в объеме, достаточном для идентификации процедур комплексного оценивания. В этом случае приходится прибегать к использованию мнений экспер-

тов и на их основе формировать порядковые шкалы для оценки состояний объекта.

На практике для обеспечения адекватности комплексного оценивания объектов приходится сочетать формальные и экспертные методы. Пример такого оценивания экологичности капитально отремонтированных тепловозов рассмотрен в разделах 3–6 настоящей статьи. При этом для получения оценок отдельных вредных выбросов этими тепловозами используются формализованные методы измерений их состояний (раздел 4), а также их нормирования и категорирования (раздел 5). Затем эти оценки объединяются с помощью мнений экспертов (раздел 6). Полученная при этом комплексная оценка экологичности тепловоза используется в организационном механизме снижения выбросов (раздел 7). Рассмотрены примеры применения этой процедуры комплексного оценивания на практике (раздел 8).

Учитывая вышесказанное, далее в разделе 2 будем предполагать, что процедура комплексного оценивания так или иначе увязана со спецификой объекта управления. Это позволяет рассматривать задачу синтеза оптимальной системы стимулирования агента. Именно, для случая оценки результатов действий (стратегий) агентов, измеряемых в категориях, будем адаптировать и развивать результаты синтеза механизмов согласованного управления и устойчивого функционирования активных систем [5, 17].

## **2. Математическая модель механизма планирования и стимулирования**

Рассмотрим двухуровневую организационную систему УР, на нижнем уровне которой находится агент, а на верхнем – управляющий орган (Центр). Агент выбирает некоторый набор действий (стратегий)  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $u_i \in U_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $U_i$  – компактные множества допустимых значений действий  $u_i$ , где  $i$  обозначает компоненту действия агента из набора действий  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ . Предположим, что Центр (исходя из соображе-

ний, которые будут рассмотрены ниже) разбивает множества  $U_i$  на непересекающиеся подмножества  $V_i^j$ ,  $U_i = \bigcup_{j=0}^{m_i} V_i^j$ ,

$\bigcap_{j=0}^{m_i} V_i^j = \emptyset$ . Если  $m_i = 0$ , то  $U_i = V_i^0$ , т.е. разбиение тривиально. Поэтому будем считать, что  $m_i \geq 1$ . Каждому подмножеству  $V_i^j$  присваивается категория  $k_i^j$ , измеряемая в целых числах.

Примем, что для каждого  $i$  множества  $V_i^j$  пронумерованы по  $j$  так, что  $k_i^j = j$ ,  $j = 0, \dots, m_i$ .

Выбранная процедура разбиения множеств  $U_i$  для определения категорий действий агента задается отображением  $K_i: U_i \rightarrow J_i$ , где множества  $J_i = \{0, \dots, m_i\}$  определяют шкалу категорий для показателя  $i$ .

Пример, иллюстрирующий способ разбиения, основывается на использовании нормативов для  $u_i$ . Пусть в этом примере  $u_i$  принимает значение на числовой полуоси,  $u_i \geq 0$ , и для  $u_i$  заданы нормативные значения  $r_i^j$ , где  $1 \leq j \leq m_i$ . Примем, что последние упорядочены по убыванию, т.е.  $r_i^1 > r_i^2 > \dots > r_i^{m_i-1} > r_i^{m_i}$  при  $m_i > 1$ . Если выбранное агентом действие  $u_i$  попадает в отрезок  $u_i \in [0, r_i^{m_i}]$ , то этому действию приписывается максимальная категория  $k_i = m_i$ , если  $u_i \in (r_i^{m_i}, r_i^{m_i-1}]$  и  $m_i > 1$ , то категория  $k_i$  равна  $m_i - 1$ , и т.д., если  $u_i > r_i^1$ , то выбору действия агента присваивается категория  $k_i = 0$ .

Набор категорий, соответствующих действиям агента  $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ , обозначим  $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$ .

Для оценки результативности выбора действий с использованием набора категорий предположим, что выбрана процедура  $Q$  свертки этого набора в интегральную категорию  $Q: \bar{k} \rightarrow q$ , где  $q$  обозначает интегральную категорию, принимающую значение в порядковой шкале  $(0, 1, \dots, m)$ . По сути, процедура  $Q$  преобразует многокритериальный выбор к одному критерию  $q$ .

Выбранная процедура разбиения множеств  $U_i$  для определения категорий действий  $K_i: U_i \rightarrow J_i$  агента в совокупности с процедурой свертки  $Q$  задает отображение  $\tilde{K}: U = \{U_i\} \rightarrow \{0, 1, \dots, m\}$ , которое назовем процедурой комплексного оценивания деятельности агента. Примерами таких процедур являются процедуры матричной свертки [1–3, 14, 16, 18, 25, 28].

В рамках описания оценки деятельности агента, использующего понятие категории  $q$ , предположим, что целевая функция агента равна

$$f(x, q, z) = s(x, q) - \zeta(q, z),$$

где  $s(x, q)$  – функция стимулирования, устанавливаемая Центром;  $x$  – план, назначаемый Центром;  $z$  – параметр функции затрат  $\zeta(q, z)$  агента на реализацию им интегральной категории  $q$ . Обычно, план  $x$  интерпретируется как желаемое для Центра значение интегральной категории. Предполагается, что функция затрат  $\zeta(q, z)$  возрастает по  $q$ . Параметр  $z$  определяет «степень крутизны роста» функции затрат либо предельно достижимое агентом значение  $q$ . Примерами функций затрат являются  $\zeta(q, z) = aq^2/2z$  и  $\zeta(q, z) = -a \ln(1 - q/z)$ , где  $a > 0$  – коэффициент, характеризующий функцию затрат. Для функции затрат  $\zeta(q, z) = -a \ln(1 - q/z)$  естественно потребовать  $m < z$ .

Пусть целевая функция Центра, которую он стремится максимизировать, равна

$$F(x, q/z) = \Psi(q/z) - \gamma s(x, q),$$

где  $\Psi(q/z)$  – функция выигрыша Центра, монотонно возрастающая по  $q$ ,  $\gamma > 0$  – коэффициент, дающий соизмерение выигрыша Центра с потерями от величины поощрения  $s(x, q)$ , выплачиваемого агенту; отношение  $q/z$  характеризует удельное значение категории к параметру  $z > 0$ .

Примем, что агент при заданной процедуре комплексного оценивания  $\tilde{K}$  и функции стимулирования  $s(\cdot, \cdot)$  выбирает свои действия таким образом, чтобы максимизировать целевую функцию  $f(x, q, z)$  по  $q$ . Обозначим через  $q^* = q^*(x, s, z)$  категорию, при которой достигается максимум функции  $f(x, q, z)$  по  $q$

при  $q \in [0, m]$ . Тогда Центр получает выигрыш  $F(x, q^*/z) = \Psi(q^*/z) - \gamma s(q, z)$ .

Таким образом, в расширенном представлении *постановка задачи* для Центра может быть сформулирована следующим образом: найти на заданном множестве  $\mathcal{M}$  допустимых механизмов  $M = (\tilde{K}, x, s)$  организационный механизм  $M^* = (\tilde{K}^*, x^*, s^*)$ , при котором выполняется неравенство

$$(1) \quad F(x^*, q^*(x^*, s^*, z), z) = \Psi(q^*(x^*, s^*, z)/z) - \gamma s^*(x^*, q^*(x^*, s^*, z)) \geq \sup_{\mathcal{M}} F(x, q(x, s, z), z) - \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$ .

Задача выбора организационного механизма (при заданной процедуре комплексного оценивания) сводится к определению механизма планирования и стимулирования  $\mu^* = (x^*, s^*)$ , дающее-го решение задачи (1) для случая, когда множество допустимых механизмов задается следующими требованиями:

$$(2) \quad x \in [0, m], \quad 0 \leq s(x, q) \leq g,$$

где  $g$  – заданный максимальный размер стимулирования.

Рассмотрим два случая: 1) полная информированность – Центру известна функция затрат (в том числе значение параметра  $z$ ); 2) неполная информированность – Центр не знает значение  $z$  и запрашивает его оценку у агента.

Рассмотрим сначала случай полной информированности. Для определения решения задачи (1), (2) воспользуемся утверждением 1 из [17]. Из этого утверждения следует, что при  $g \geq \max_{0 \leq q \leq m} \zeta(q, z)$  оптимальная функция стимулирования равна

$$s^* = s^*(x, q) = \begin{cases} L + \zeta(x, z), & \text{если } q = x, \\ 0, & \text{если } q \neq x; \end{cases} \quad L = \max_{0 \leq q \leq m} [-\zeta(q, z)].$$

Если предположить, что затраты агента для достижения нулевой категории  $q = 0$  равны 0, то для рассматриваемой модели получаем  $L = 0$ .

Оптимальный план в этом случае определяется условием  $x^* = \arg \max_{0 \leq x \leq m} [\Psi(x/z) - \gamma(L + \zeta(x, z))]$ . Функция стимулирова-

ния в [7, 17] называется компенсаторной, поскольку компенсирует агенту его затраты.

При  $g < \max_{0 \leq q \leq m} \zeta(q, z)$  определим категорию  $q^{\#} < m$ , такую что  $\zeta(q^{\#}, z) = g^{\#} \leq g$  и  $\zeta(q^{\#} + 1, z) > g$ . Тогда оптимальная функция стимулирования равна

$$s^* = s^*(x, q) = \begin{cases} g^{\#}, & \text{если } q = x \geq q^{\#}, \\ L + \zeta(x, z), & \text{если } q = x < q^{\#}, \\ 0, & \text{если } q \neq x; \end{cases}$$

а оптимальный план определяется условием  $x^* = \arg \max_{0 \leq x \leq q^{\#}} [\Psi(x / z) - \gamma(L + \zeta(x, z))]$ . При полной информированности Центра функция стимулирования является оптимальной как на множестве  $[0, m]$  значений  $q$ , представляющем собой отрезок числовой оси, так и на множестве дискретных значений категорий из набора целых чисел  $\{0, 1, \dots, m\}$ .

Исследуем теперь случай неполной информированности Центра о параметре  $z$ , где  $0 < z \leq z^0$ .

Центр просит сообщить агента значение параметра  $z$ . Заметим, что агент может сообщить вместо  $z$  значение  $p \neq z$ , если это позволит получить более выгодный для него план и величину поощрения при использовании Центром механизма планирования и стимулирования, который был оптимальным для случая полной информированности [5, 7, 17].

Рассмотрим подход к построению оптимального механизма  $\mu^* = (x^*, s^*)$ , где  $x^* = x^*(p)$  – оптимальная процедура планирования,  $s^* = s^*(x, q)$  – оптимальная процедура стимулирования.

Заметим, что в условиях неполной информированности Центр перед решением задачи синтеза оптимального механизма не знает выбора категории  $q^*$  агентом и не знает размера стимула, который будет выплачен агенту. Поэтому можно предположить, что он рассчитывает на возможность максимального использования фонда стимулирования. Следовательно, примем, что при решении задачи синтеза он ориентируется на выраже-

ние своей целевой функции  $F^*(x, z) = \Psi(q^*/z) - \gamma g$ , которая отражает использование всего фонда стимулирования.

Далее для построения механизма для рассматриваемой дискретной модели сначала исследуем модель, описываемую для переменных  $x, q$ , принимающих значения на всем связном отрезке  $[0, m]$ , где  $z > 0$ .

Предположим также, что функция затрат  $\zeta(q, z)$  агента дважды дифференцируема по первой переменной, существует смешанная производная  $\ddot{\zeta}_{qz}(q, z)$  и выполнены следующие условия:

$$(3) \quad \dot{\zeta}_q(q, z) > 0, \quad \ddot{\zeta}_{qq}(q, z) > 0, \quad \dot{\zeta}_z(q, z) < 0, \quad \ddot{\zeta}_{qz}(q, z) < 0.$$

Заметим, что функции затрат в приведенных выше примерах удовлетворяют этим условиям.

Далее будем рассматривать функции стимулирования вида

$$(4) \quad s(x, q) = \begin{cases} \sigma(x), & \text{если } q = x, \\ 0, & \text{если } q \neq x. \end{cases}$$

Для таких функций обеспечивается выполнение плана, так как выигрыш агента  $f(x, q, z) \leq 0$  при  $q \neq x$ .

В [5] отмечено, что необходимым и достаточным условием сообщения агентом достоверной информации является выполнение для назначаемого агенту Центром плана условий совершенного согласования, которые для рассматриваемой модели записываются следующим образом:

$$(5) \quad \forall p \in [0, m]: \quad f(x(p), x(p), p) = \max_{0 \leq v \leq m} f(v, v, p).$$

Известно [5, 17], что оптимальная процедура планирования  $x^*(p)$  содержится среди процедур планирования, удовлетворяющих условию совершенного согласования. В предположении о дифференцируемости функции  $\sigma(x)$  из (4), необходимые условия для (5) можно представить (за исключением граничной точки  $x = m$ ) в виде

$$(6) \quad \dot{\sigma}(x) = \dot{\zeta}_x(x, p).$$

В [5] показано: при выполнении условий (3), процедура планирования  $x(p)$ , удовлетворяющая необходимым условиям совершенного согласования (6) является неубывающей.

Обозначим  $\lambda$  некоторый достижимый уровень значений целевой функции Центра  $F^*(x, z)$  при всех допустимых значениях пар  $(x, p)$ . Тогда можно записать

$$(7) \quad \Psi(x/p) - \gamma g \leq \lambda$$

Рассмотрим уравнение  $\Psi(x/p) = \lambda + \gamma g$  и разрешим его относительно  $x$ . Предполагается, что функция  $\Psi(x/p)$  монотонно возрастает по  $x$  при всех  $p$ . Обозначим обратную функцию к  $\Psi(x/p)$  через  $\varphi(\cdot)$ . Тогда существует решение уравнения  $x = p\varphi(\lambda + \gamma g)$ . Отсюда  $p = x/\varphi(\lambda + \gamma g)$ .

Построим теперь функцию стимулирования  $\tilde{\sigma}(x)$ , для которой условие (6) выполняется для пар  $(x, p)$ , описываемых соотношением  $p = x/\varphi(\lambda + \gamma g)$ . Такая функция при выполнении условий монотонности (3) равна  $\tilde{\sigma}(x) = \int_0^x \dot{\zeta}_t(t, t/\varphi(\lambda + \gamma g)) dt$ , где  $\dot{\zeta}_t(t, t/\varphi(\lambda + \gamma g))$  – частная производная функции затрат по первой переменной и  $x \leq m$ . Справедливость выражения для  $\tilde{\sigma}(x)$  проверяется подстановкой  $\tilde{\sigma}(x)$  в (6) при  $p = x/\varphi(\lambda + \gamma g)$ .

**Теорема.** Оптимальный механизм  $\mu^* = (x^*, s^*)$  определяется следующими соотношениями:

$$(8) \quad x^* = x^*(p, \lambda^*, g) = \begin{cases} p\varphi(\lambda^* + \gamma g), & \text{если } p\varphi(\lambda^* + \gamma g) < m, \\ m, & \text{если } p\varphi(\lambda^* + \gamma g) \geq m; \end{cases}$$

$$(9) \quad s^* = s^*(x, q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q = 0 \text{ или } q \neq x, \\ \int_0^x \dot{\zeta}_t(t, t/\varphi(\lambda^* + \gamma g)) dt, & \text{если } q = x, x \leq m\varphi(\lambda^* + \gamma g) \leq m, \\ g, & \text{если } x > m\varphi(\lambda^* + \gamma g); \end{cases}$$

где оптимальное значение целевой функции Центра  $\lambda^*$  вычисляется из уравнения

$$(10) \quad g = \int_0^{x^*(p, \lambda^*, g)} \dot{\zeta}_t(t, t/\varphi(\lambda^* + \gamma g)) dt.$$

**Доказательство.** Из оптимальности принципа открытого управления (см. например [5]) и используемого уравнения  $\Psi(x/p) = \lambda + \gamma g$  определяется план  $x = p\varphi(\lambda + \gamma g)$ , который обеспечивает значение целевой функции Центра, равное  $\lambda$ . Функция стимулирования (9) построена таким образом, чтобы план  $x^*$ , определяемый выражением (8), удовлетворял условию (5). Условие (10) обозначает, что при заданном фонде  $g$  устанавливается максимальное значение  $\lambda^*$  параметра  $\lambda$ . Таким образом, механизм (8)–(10) обеспечивает оптимальность выбора агентом категории  $q^* = x^*$ . Теорема доказана.

При использовании формул (3)–(10) и в формулировке теоремы предполагается, что значение  $q$  определено на всем отрезке  $[0, m]$ . При использовании понятия категорий действия агента  $q$  соответствующий план принимает дискретные значения из набора целых чисел  $\{0, 1, \dots, m\}$ . Применим теорему для такого измерения действий агентов. Справедливо следующее следствие теоремы.

**Следствие.** Применение процедур планирования (8) и стимулирования (9) обеспечивают эффективность  $F^*(x^*, z) = \Psi(x^*/z) - \gamma g = \lambda^*$ , когда  $q^* = x^*$  принимает значения из шкалы категорий (т.е. дискретные значения из набора целых чисел  $\{0, 1, \dots, m\}$ ) и  $p \in [0, m/\varphi(\lambda^* + \gamma g)]$ .

**Доказательство.** Рассмотрим значения  $s^*(x, q)$  функции стимулирования (9) и значения планов  $x^*(p, \lambda^*, g)$  из процедуры планирования (8) в точках  $q^* = x^* \in (0, 1, \dots, m)$ . Из теоремы следует, что для этих точек, поскольку они принадлежат отрезку  $[0, m]$  при  $p \in [0, z^0]$ , где  $z^0 = m/\varphi(\lambda^* + \gamma g)$ , значение эффективности механизма, измеряемого значением целевой функции равно  $\lambda^* = F^*(x^*, z) = \Psi(x^*/z) - \gamma g$ .

**Замечание 1.** При использовании механизма (8), (9), выполнены условия совершенного согласования (5), когда агенту назначается выгодный план. В этом случае вместо достоверного значения параметра  $p = z$  агент может сообщить в Центр значение выгодного для него плана  $x^* = x^*(p, \lambda^*, g)$ , реализуя метод встречного планирования [7].

**Замечание 2.** Центр при выполнении условий (5) может не запрашивать встречный план, поскольку  $q^* = x^*$ , а получать результат выбора действия агента в виде реализации категории  $q^*$ .

**Пример применения теоремы.** Пусть  $\Psi(q/z) = q/z$ ,  $\zeta(q, z) = aq^2/z$ . Тогда неравенство (7) принимает вид  $x/p - \gamma g \leq \lambda$ . Следовательно, процедура планирования (8) приобретает вид  $x^*(p, \lambda^*, g) = p(\lambda^* + \gamma g)$ . Вычислим

$$\int_0^x \dot{\zeta}_t(t, t/\varphi(\lambda^* + \gamma g)) dt = \int_0^x at/(t/\lambda^* + \gamma g) dt = ax(\lambda^* + \gamma g).$$

Отсюда получаем вид оптимальной функции стимулирования

$$s^* = s^*(x, q) = \begin{cases} 0, & \text{если } q = 0 \text{ или } q \neq x, \\ ax(\lambda^* + \gamma g), & \text{если } q = x, x \leq m(\lambda^* + \gamma g), \\ g, & \text{если } x > m(\lambda^* + \gamma g). \end{cases}$$

Значение параметра  $\lambda^*$  вычисляется из уравнения

$$am(\lambda^* + \gamma g)^2 = g, \text{ или } \lambda^* = \sqrt{g/m} - \gamma g.$$

Этот пример показывает, что при естественных предположениях о функции затрат и целевой функции Центра, в которой доход пропорционален категории, получаем линейную зависимость функции стимулирования от значения категории.

### 3. Устойчивое развитие железнодорожного транспорта и капитальный ремонт тепловозов

Рассмотрим применение теоретических результатов, полученных в разделе 2, для анализа и разработки механизмов УР железнодорожного транспорта (ЖДТ). Ключевое значение для УР ЖДТ имеет расширение локомотивного парка, поскольку к 2036 году прогнозируется нехватка около 1,5 тыс. локомотивов [10]. Однако существующих мощностей российских машиностроительных заводов недостаточно для производства нужного количества новых локомотивов (с учетом их выбытия из-за окончания срока службы). Ликвидировать дефицит можно за счет капитального ремонта существующих тепловозов, который, к тому же, намного дешевле их производства. В связи с этим Минпромторг РФ, Минтранс РФ и ОАО «РЖД» подготовили

программу капитального ремонта тягового подвижного состава до 2030 года.

Однако при её выполнении необходимо учитывать, что тепловозы выбрасывают в атмосферу отработавшие газы (ОГ) с продуктами горения, в том числе оксиды азота и твердые частицы, создающие проблемы со здоровьем людей [24], а также оксиды углерода и углеводороды, относящиеся к парниковыми газами (наряду с оксидами азота) [23]. В связи с этим возрастаёт актуальность решения проблемы УР тепловозов при капитальном ремонте, при котором эффективно используются ресурсы и снижаются выбросы, вредные для здоровья людей и окружающей среды.

При решении этой проблемы необходимо учитывать, что выбросы тепловозами вредных веществ (кратко – ВВ) в ОГ происходят в основном в результате сгорания углеводородного топлива. Поэтому снижение выбросов тепловозами ВВ в ОГ коррелирует со снижением потребления таких не возобновляемых природных ресурсов, как нефть и газ. Таким образом, УР тепловоза можно характеризовать снижением выбросов ВВ в ОГ.

Базовые национальные, региональные и мировые требования к экологичности тепловозов касаются ограничений выбросов в ОГ основных ВВ – оксидов азота, оксида углерода, углеводородов и твердых частиц [4, 15, 19, 27]. Помимо национальных требований (таких, например, как требования Агентства по охране окружающей среды США – Environmental Protection Agency, или EPA [19, 27]), существуют и региональные требования (например, требования Европейского агентства по охране окружающей среды – Europeen Environmental Agency, или EEA [15]). При этом перспективные отечественные экологические стандарты [4], а также самые высокие национальные и региональные зарубежные требования [15, 19, 27] определяют мировой уровень экологичности тепловозов.

В этих условиях возрастаёт значение устойчивого – экономичного и экологичного капитального и капитально-восстановительного ремонта (кратко – капремонта) эксплуатируемых тепловозов. В русле концепции устойчивого развития

железнодорожного транспорта существующие практики устойчивого капремонта улучшают экологические характеристики тепловозов. В связи с этим компании должны тщательно оценивать капремонт тепловозов с точки зрения улучшения экологичности тепловозов.

Традиционно требования к их экологичности отражаются в национальных и региональных стандартах [4, 15, 19, 27]. Они лежат в основе стратегических организационных механизмов, стимулирующих повышение экологичности тепловозов в долгосрочной перспективе. Однако продолжением достоинств этих стандартов являются их недостатки. Именно, в XXI веке эти стандарты не меняются в течение десятилетий. В это же время появляются новые, более экологичные технологии. Однако устаревшие стандарты подчас не стимулируют их внедрение. В первую очередь это касается уже эксплуатируемых тепловозов, которые изначально удовлетворяли указанным стандартам. В результате до настоящего времени отсутствуют организационные механизмы, которые бы стимулировали применение новых технологий для повышения экологичности в процессе капремонта эксплуатируемых тепловозов.

В связи с этим весьма актуально создание организационного механизма, стимулирующего разработку и внедрение инноваций для улучшения экологичности эксплуатируемых тепловозов в процессе капремонта, в то время как национальные и региональные экологические стандарты неизменны.

#### ***4. Требования к выбросам вредных веществ отремонтированными тепловозами***

Как указывалось выше, базовые национальные и региональные требования к выбросам ВВ в ОГ тепловозов касаются четырех типов ВВ: оксидов азота (для краткости; присвоим этому типу ВВ номер  $i$ , равный 1): ( $i = 1$ ); оксида углерода ( $i = 2$ ); углеводородов ( $i = 3$ ); твердых частиц ( $i = 4$ ). ГОСТ 33754–2016 ([4], таблица 5.1) ограничивает допустимые удельные средневзвешенные выбросы этих ВВ в ОГ в зависимости от того, на какой стадии развития тепловозостроения был создан тепловоз

и его двигатель. Для тепловозов после капитального ремонта допустимые значения выбросов оксида углерода и твердых частиц увеличиваются на 10% по отношению к указанным в таблице 5.1 [4], а углеводородов – на 5%.

Тепловоз, подлежащий капитальному ремонту, может относиться к одной из трех стадий, номера и определения которых даны в таблице 1. При этом номер стадии  $c$  принимает значения от 0 до 2 (кратко –  $c = 0, 1, 2$ ). Обозначим допустимые удельные средневзвешенные выбросы ВВ под номером  $i$  тепловозом стадии  $c$  через  $a_{ic}$ , где  $i$  принимает значения от 1 до 4 (кратко –  $i = 1, \dots, 4$ ). Предельные значения этих выбросов при сертификационных испытаниях тепловоза стадии  $c$  после капитального ремонта указаны в таблице 1 для оксидов азота ( $a_{1c}$ ), оксида углерода ( $a_{2c}$ ) и углеводородов ( $a_{3c}$ ).

Как видно из таблицы 1, выбросы твердых частиц при сертификационных испытаниях тепловозом стадии  $c$  после капитального ремонта не ограничиваются. Формально это означает, что  $a_{4c} = \infty$  при  $c = 0, 1, 2$ .

*Таблица 1. Допустимые удельные средневзвешенные выбросы ВВ в ОГ тепловоза после капитального ремонта по ГОСТ [4]*

	Отремонтированные тепловозы	Допустимые средневзвешенные выбросы, г/кВт·ч		
		Оксидов азота $a_{1c}$	Оксида углерода $a_{2c}$	Углеводородов $a_{3c}$
0	С двигателями, поставленными на производство до 2000 г.	25	11	$\infty^*$
1	Постройки до 2016 г. с двигателями, поставленными на производство до 2000 г.	18	6,6	2,52
2	С двигателями, поставленными на производство с 2000 г. до 2020 г.	12	3,85	1,05

\* Математический символ « $\infty$ » («бесконечность») формально отражает тот факт, что ГОСТ [4] не ограничивает выбросы соответствующего ВВ тепловозом данной стадии.

Проведем обзор и рассмотрим возможность сопоставления и соизмерения с ГОСТ [4] базовых требований к экологичности

отремонтированных тепловозов в странах с развитым тепловозостроением – в США и Европейским Союзом (ЕС), касающихся ограничения выбросов основных ВВ – оксидов азота и углерода, углеводородов и твердых частиц.

В США отремонтированный тепловоз сертифицируется по финальным правилам EPA [19] – в зависимости от соответствия удельных средневзвешенных выбросов основных ВВ (измеряемых в США, по традиции, в г/л.с.-ч) одному из уровней стандартов (Tier of standards), определяемых периодом постройки данного тепловоза (т.е. стадией  $c$  в терминах таблицы 1). Именно, для отремонтированных тепловозов постройки до 2001 года (по сути, стадии  $c = 0$ ) EPA принят уровень ограничений выбросов ВВ Tier 0, постройки 2002–2004 годов (аналог стадии  $c = 1$ ) – Tier 1, постройки после 2004 года (стадии  $c = 2$ ) – Tier 2 [19].

Для сопоставления и соизмерения с ГОСТ [4] указанных уровней EPA Tier необходимо выразить в г/кВт·ч ограничения на удельные средневзвешенные выбросы ВВ отремонтированных тепловозов, принятые в правилах EPA. Эти ограничения указаны в таблице 2, сформированной на основе финальных правил EPA [19] по образу и подобию таблицы 1 из ГОСТ [4]. Рассмотрим особенности формирования некоторых из этих ограничений, обусловленные разной степенью детализации требований ГОСТ [4] и правил EPA [19].

В правилах EPA [19] указаны ограничения на выбросы оксидов азота, углеводородов и твердых частиц. Заметим, что в таблице III-1 документа [19] указаны допустимые выбросы ВВ Tier 0 для отремонтированных магистральных тепловозов с отдельным контуром охлаждения всасываемого воздуха и без такого контура. С другой стороны, как видно из таблицы 1, в ГОСТ [4] такая детализация допустимых выбросов ВВ российскими тепловозами не предусмотрена. Поэтому для сопоставления и соизмерения с российскими требованиями [4] в таблице 2 указано среднее значение допустимых выбросов ВВ, соответствующее уровню Tier 0 для отремонтированных тепловозов с отдельным контуром охлаждения всасываемого воздуха и без него.

Аналогичным образом в таблицах III.-1 и III.-2 правил EPA [19] указаны допустимые выбросы оксидов азота, углеводородов и твердых частиц для магистральных и маневровых тепловозов, соответственно. Как видно из таблицы 1, подобная детализация (для магистральных и маневровых тепловозов) в ГОСТ [4] также не предусмотрена. Поэтому для сопоставления и соизмерения правил EPA [19] с российскими требованиями [4] в таблице 2 указаны средние значения упомянутых выбросов для магистральных и маневровых тепловозов.

Далее, допустимые выбросы оксида углерода, соответствующие уровням Tier 0, Tier 1 и Tier 2, указаны в таблице 1–28 правил EPA отдельно для магистральных и маневровых тепловозов [27]. Как видно из таблицы 1, подобная детализация (для магистральных и маневровых тепловозов) в ГОСТ [4] также не предусмотрена. И в этом случае для сопоставления и соизмерения правил EPA [19,27] с российскими требованиями [4] в таблице 2 указаны средние значения выбросов оксида углерода для магистральных и маневровых тепловозов.

*Таблица 2. Допустимые удельные средневзвешенные выбросы ВВ в ОГ отремонтированных тепловозов по правилам EPA [19, 27]*

Стадия <i>c</i>	Уровень EPA	Допустимые средневзвешенные выбросы, г/кВт·ч			
		Оксидов азота <i>t<sub>1c</sub></i>	Оксида углерода <i>t<sub>2c</sub></i>	Углеводородов <i>t<sub>3c</sub></i>	Твердых частиц <i>t<sub>4c</sub></i>
0	Tier 0	13,1	8,7	1,93	0,32
1	Tier 1	12,3	3,2	1,17	0,32
2	Tier 2	9,1	2,6	0,6	0,15

В ЕС первые нормы регулирования выбросов дизельных двигателей транспортных средств вводились в два этапа: стандартами Stage I в 1999–2000 гг. для двигателей, поставленных на производство до 2000 г. (что соответствует, в терминах таблицы 1, начальной стадии постройки тепловозов *c* = 0), и стандартами Stage II в 2001-2004 гг. (что соответствует первой стадии: *c* = 1). Допустимые удельные средневзвешенные выбросы ВВ в ОГ дизельных двигателей транспортных средств, регла-

ментируемые стандартами EEA Stage I и II, определены в таблице 1 [15] и приведены в двух верхних строках таблицы 3.

На третьем этапе регулирования выбросов транспортных средств удельные средневзвешенные выбросы отремонтированных тепловозов регламентируются стандартом EEA Stage IIIA [15] (соответствующим второй стадии:  $c = 2$ ). При этом в таблице 8 документа [15] определены допустимые выбросы тепловозов с двигателями категории RL A мощностью 130–560 кВт (типа маневровых тепловозов), а также тепловозов с двигателями категории RH A мощностью 561–2000 кВт и более 2000 кВт (в основном магистральных тепловозов). Как видно из таблицы 1, подобная детализация выбросов в зависимости от мощности двигателей тепловозов в ГОСТ [4] также не предусмотрена. Поэтому для сопоставления и соизмерения стандарта Stage IIIA [15] с российскими требованиями, указанными в таблице 1 согласно ГОСТ [4], в нижней строке таблицы 3 указаны средние значения упомянутых выбросов для тепловозов с двигателями мощностью 130–560 кВт, 561–2000 кВт и более 2000 кВт.

*Таблица 3. Допустимые удельные средневзвешенные выбросы ВВ в ОГ тепловозов с дизельными двигателями согласно стандартам ЕЕА*

Стадия $c$	EEA Stage	Допустимые средневзвешенные выбросы, г/кВт·ч			
		Оксидов азота $s_{1c}$	Оксида углерода $s_{2c}$	Углеводородов $s_{3c}$	Твердых частиц $s_{4c}$
0	I	9,2	5,0	1,3	0,54
1	II	6,0	3,5	1,0	0,20
2	IIIА	5,7	3,5	0,38	0,20

## 5. Алгоритм нормирования и категорирования показателей выбросов

Обозначим фактическую величину показателя удельных средневзвешенных выбросов  $i$ -го ВВ тепловозом стадии  $c$  после капитального ремонта, выраженную в г/кВт·ч, через  $u_{ic}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $c = 0, 1, 2$ . Рассмотрим следующий алгоритм отнесения показателя  $u_{ic}$  к одной из четырех категорий  $k$ : неудовле-

творительная ( $k = 0$ ), удовлетворительная ( $k = 1$ ), хорошая ( $k = 2$ ) и отличная ( $k = 3$ ), исходя из национальных и региональных требований. Именно, нормативы  $r_{ic}^k$  отнесения  $i$ -го показателя  $u_{ic}$  выбросов отремонтированного тепловоза стадии  $c$  к категории  $k$  (где  $k = 0, 1, 2, 3$ ,  $c = 0, 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ) вычисляются на основе соответствующих национальных и региональных экологических стандартов:

- норматив  $r_{ic}^1$  отнесения показателя  $i$  к категории 1 равен норме ГОСТ по этому показателю  $a_{ic}$ , указанной в таблице 1:  $r_{ic}^1 = a_{ic}$ ,  $c = 0, 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ;
- норматив  $r_{ic}^2$  отнесения показателя  $i$  к категории 2 равен максимальной (менее обременительной) из норм соответствующих регионального и национального стандарта по этому показателю (соответственно,  $s_{ic}$  и  $t_{ic}$ ), указанных в таблицах 2 и 3:  $r_{ic}^2 = \max(s_{ic}, t_{ic})$ ,  $c = 0, 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ;
- норматив  $r_{ic}^3$  отнесения показателя  $i$  к категории 3 вычисляется как минимальная (более обременительная) из норм соответствующих регионального и национального стандартов по этому показателю (соответственно,  $s_{ic}$  и  $t_{ic}$ ), указанных в таблицах 2 и 3:  $r_{ic}^3 = \min(s_{ic}, t_{ic})$ ,  $c = 0, 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Содержательно, норматив  $r_{ic}^2$  соответствует локальному (национальному и/или региональному) уровню экологичности отремонтированного тепловоза стадии  $c$  по показателю  $i$ . Норматив  $r_{ic}^3$  соответствует мировому уровню экологичности отремонтированного тепловоза стадии  $c$  по показателю  $i$ .

Соответственно, нормативы в таблице 4 рассчитываются по формулам:

$$(11) \quad r_{ic}^1 = a_{ic}, \quad r_{ic}^2 = \max(s_{ic}, t_{ic}), \quad r_{ic}^3 = \min(s_{ic}, t_{ic}), \\ c = 0, 1, 2, i = 1, \dots, 4.$$

Полученные с помощью (11) столбцы выраженных в г/кВт·ч нормативов категоризации удельных средневзвешенных выбросов ВВ в ОГ отремонтированных тепловозов  $r_{ic} = (r_{ic}^1; r_{ic}^2; r_{ic}^3)^T$ ,  $c = 0, 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, 4$  указаны в таблице 4.

На основе нормативов  $r_{ic}^k$ , указанных в таблице 4,  $i$ -му показателю  $u_{ic}$  выбросов отремонтированного тепловоза стадии  $c$  присваивается категория

$$(12) k_{ic} = \begin{cases} 0, & \text{если } u_{ic} > r_{ic}^1; \\ 1, & \text{если } r_{ic}^2 < u_{ic} \leq r_{ic}^1; \\ 2, & \text{если } r_{ic}^3 < u_{ic} \leq r_{ic}^2; \\ 3, & \text{если } u_{ic} \leq r_{ic}^3. \end{cases}$$

*Таблица 4. Нормативы категоризации удельных средневзвешенных выбросов ВВ в ОГ отремонтированных тепловозов, г/кВт·ч*

Стадия <i>c</i>	Отремонтированные тепловозы	Нормативы удельных средневзвешенных выбросов			
		Оксидов азота <i>r<sub>1c</sub><sup>k</sup></i>	Оксида углерода <i>r<sub>2c</sub><sup>k</sup></i>	Углеводо- родов <i>r<sub>3c</sub><sup>k</sup></i>	Твердых частиц <i>r<sub>4c</sub><sup>k</sup></i>
0	С двигателями, поставленными на про- изводство до 2000 г.	(25; 13,1; 9,2)	(11; 8,7; 5)	(∞; 1,93; 1,3)	(∞; 0,54; 0,32)
1	Постройки до 2016 г. с двигателями, постав- ленными на производ- ство до 2000 г.	(18; 12,3; 6)	(6,6; 3,5; 3,2)	(2,52; 1,17; 1)	(∞; 0,32; 0,20)
2	С двигателями, поставленными на производство с 2000 г. до 2020 г.	(12; 9,1; 5,7)	(3,9; 3,5; 2,6)	(1,05; 0,6; 0,38)	(∞; 0,20; 0,15)

Категория 0 означает несоответствие ГОСТ. Например, согласно таблице 1, если  $u_1$  оксидов азота отремонтированного тепловоза стадии 0 больше 25 г/кВт·ч, т.е. не соответствует ГОСТ, то присваивается категория 0. Если выброс  $u_1$  больше 13,1 и не превышает 25, то присваивается категория 1. Если выброс  $u_1$  больше 9,2 и не превышает 13,1 г/кВт·ч, то присваивается категория 2. Если выброс  $u_1$  не превышает 9,2 г/кВт·ч, то присваивается категория 3.

## 6. Алгоритм свертки категорий показателей выбросов

Принципиальная схема алгоритма свертки категорий показателей выбросов отремонтированных тепловозов представлена на рис. 1.

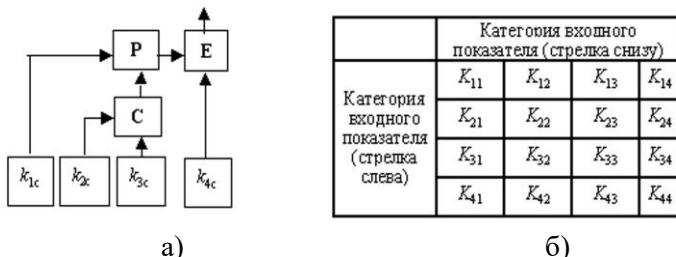


Рис. 1. Схема свертки категорий: а) последовательность свертки категорий показателей, б) общая структура таблицы свертки

На рис. 1а символы  $k_{1c}$ ,  $k_{2c}$ ,  $k_{3c}$ ,  $k_{4c}$ , обозначают категории входных показателей выбросов ВВ в ОГ. Символами **C**, **P**, **E** обозначены таблицы сверток категорий. Рисунок 1б показывает общую структуру таблицы сверток. Категория показателя  $i$  (обозначена на рис. 1а стрелкой, входящей в блок свертки слева) задает номер строки таблицы свертки, категория показателя  $j$  (на рис. 1а стрелка снизу) задает номер столбца таблицы свертки. Размерность шкалы категорий для показателей  $i$  и  $j$  определяют соответственно число строк и столбцов таблицы свертки. На рис. 1б эти размерности и количества строк и столбцов равны 4. В соответствии с (2), примем, что категории, равной 0, соответствует 1-я строка либо 1-й столбец таблицы свертки; категории, равной 1, соответствует 2-я строка (второй столбец) таблицы свертки и т.д. Например, если в таблице свертки, представленной на рис. 1б,  $K_{32} = 3$ , то категория свертки равна 3 для первого входного показателя (стрелка слева) со значением категории, равным 2 (третья строка таблицы свертки), и второго входного показателя (стрелка снизу) со значением категории, равным 1 (второй столбец таблицы свертки).

Согласно рис. 1а, выход таблицы **C** объединяет категории оксида углерода ( $k_{2c}$ ) и углеводородов ( $k_{3c}$ ). Выбросы этих двух ВВ определяют углеродный след тепловоза. Поэтому **C** называют таблицей углеродного следа. Соответственно, её выходом является категория углеродного следа тепловоза. Чем она выше, тем слабее углеродный след тепловоза.

Далее, выход таблицы **P** объединяет категорию оксида азота ( $k_{1c}$ ) и категорию углеродного следа как свертки категорий оксида углерода ( $k_{2c}$ ) и углеводородов ( $k_{3c}$ ). Эти три ВВ – основные парниковые газы в ОГ тепловозов. Поэтому **P** называют таблицей парниковых газов. Соответственно, её выходом является категория парниковых газов. Чем она выше, тем меньше парниковых газов в ОГ тепловоза.

Наконец, выход таблицы **E** объединяет категорию парниковых газов и категорию твердых частиц ( $k_{4c}$ ). В нем учтены категории выбросов всех четырех ВВ, комплексно характеризующих экологичность тепловоза. Поэтому **E** называют таблицей экологичности, а её выход ( $k_c$ ) – категорией экологичности тепловоза.

Настройка таблиц **C**, **P**, **E** основывается на требованиях к пропорциям степеней влияния ВВ на окружающую среду – человека, флору, фауну, климат. На рис. 2 приведены таблицы свертки категорий отремонтированных тепловозов, полученные при разработке концепции требований к локомотивам ОАО «РЖД» в области охраны окружающей среды.

Таблица С		Категория $k_{2c}$			
Категория $k_{2c}$	0	1	2	3	
0	0	0	1	1	
1	0	1	1	2	
2	1	1	2	3	
3	1	2	3	3	

а)

Таблица Р		Категория С			
Категория $k_{1c}$	0	1	2	3	
0	0	0	1	2	
1	0	0	1	3	
2	1	1	2	3	
3	1	2	3	3	

б)

Таблица Е		Категория $k_c$			
Категория Р	0	1	2	3	
0	0	0	0	0	
1	0	1	1	1	
2	0	1	1	2	
3	1	1	2	3	

в)

Рис. 2. а) С – таблица углеродного следа; б) Р – таблица парниковых газов; в) Е – таблица экологичности

## 7. Организационный механизм снижения выбросов отремонтированным тепловозом

Описанный метод классификации результатов снижения выбросов ВВ в ОГ после капитального ремонта тепловоза позволяет оценить и стимулировать результативность выполнен-

ных работ. Организационный механизм  $M = \{K, s^*\}$ , стимулирующий снижение выбросов ВВ отремонтированным тепловозом, включает алгоритм нормирования  $N$ , определяемой таблицей 4 и формулами (11), (12). Основываясь на общей теории построения организационных механизмов [7, 13], статьях [5, 17] и следствии теоремы, приведенной в разделе 2, предлагается использовать следующий организационный механизм.

Алгоритм  $K$  свертки показателей и определения категорий отремонтированного тепловоза представлен в разделе 6. В качестве комплексной оценки  $q$ , которая используется в процедуре стимулирования (9), примем  $k_c$ , т.е.  $q = k_c$ .

Процедура стимулирования  $s^*$  на основе использования категории  $k_c$  выбросов ВВ в ОГ отремонтированного тепловоза стадии  $c$  описывается формулой

$$(13) \quad s^* = s(k_c), \quad k_c \in \{0, 1, 2, 3\},$$

где  $s(0)$  – величина поощрения при 0-й категории,  $s(1)$  – величина поощрения при 1-й категории,  $s(2)$  – при 2-й категории,  $s(3)$  – при 3-й категории вычисляются на основе процедуры стимулирования (9) с учетом следствия теоремы и замечания 2 к ней. Размеры поощрений зависят от параметров функций затрат, которые на реальных объектах определяются опытным путем либо на основании экспертизы мнений. В случае справедливости условий примера из раздела 2 размеры поощрений  $s(1)$ ,  $s(2)$ ,  $s(3)$  линейно возрастают. Они зависят от фонда поощрения, выделенного на стимулирование снижения ВВ в ОГ и функции затрат, понесенных ремонтной организацией на выполнение работ по капитальному ремонту тепловозов.

## 8. Примеры оценки категорий экологичности отремонтированных тепловозов

При капитальном ремонте тепловоза появляются новые возможности использования достижений научно-технического прогресса. Рассмотрим некоторые примеры такого рода.

### 8.1. ЗАМЕНА ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЙ ТРАНСМИССИИ ТЕПЛОВОЗА НА ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКУЮ

С.Н. Флоренцев с соавторами [20, 29, 30] разработал подход к усовершенствованию маневровых тепловозов с гидромеханической трансмиссией. Этот подход заключается в замене последней на электромеханическую трансмиссию переменного тока. Результаты разработки и внедрения комплектов тягового электрооборудования на базе асинхронных мотор-генераторов и тяговых электродвигателей для электромеханических трансмиссий маневровых тепловозов в процессе капитального ремонта тепловоза ТГМ-6А с гидропередачей рассмотрены в [20, 29, 30]. Улучшены тягово-динамические характеристики и энергоэффективность отремонтированного тепловоза, названного ТЭМП1тт.

Удельные средневзвешенные выбросы оксидов азота тепловозом ТГМ-6А равны  $u_1 = 25 \text{ г/кВт}\cdot\text{ч}$ , а оксида углерода –  $u_2 = 010 \text{ г/кВт}\cdot\text{ч}$  [8]. Поскольку ТГМ-6А снабжен двигателем, поставленным на производство до 2000 г., то он относится к стадии 0 (т.е.  $c = 0$ ). В соответствии с алгоритмом категорирования (1) и нормативами таблицы 4 для стадии  $c = 0$ , выбросы этих ВВ соответствуют категории 1:  $k_{10} = 1$ ,  $k_{20} = 1$ . Кроме того, поскольку выбросы углеводородов и твердых частиц для тепловозов стадии 0 не нормируются, выбросы этих ВВ заведомо соответствуют категории 1:  $k_{30} = 1$ ,  $k_{40} = 1$ . Сворачивая категории  $k_{20}$  и  $k_{30}$  по схеме, показанной на рис. 1, на выходе таблицы С (рис. 2а) получаем категорию 1. Далее, сворачивая ее с категорией  $k_{10}$ , на выходе таблицы Р (рис. 2б) получаем категорию 0. Наконец, сворачивая ее с категорией  $k_{40}$ , на выходе таблицы Е (рис. 2в) получаем категорию  $k_0 = 0$ . Таким образом, тепловоз ТГМ-6А имеет низшую категорию экологичности  $k_0$ , равную 0.

По результатам эксплуатации модернизированного тепловоза ТЭМП1тт в АО ЕВРАЗ достигнуты следующие значения показателей экологичности: оксидов азота –  $u_1 = 6,0 \text{ г/кВт}\cdot\text{ч}$ ; оксида углерода  $u_2 = 3,5$ ; углеводородов  $u_3 = 1,0$ ; твердых частиц  $u_4 = 0,2 \text{ г/кВт}\cdot\text{ч}$  [8]. ТЭМП1тт снабжен двумя дизельными двигателями Volvo Penta TAD1641 VE-B, поставленными на производство после 2000-го года. Поэтому, согласно таблице 1,

ТЭМП1тт относится к стадии 2, так что для оценки экологичности используются нормативы таблицы 4 при  $c = 2$ . Категории этих показателей определяются согласно (1) и таблице 4, равны  $k_{12} = 2$ ,  $k_{22} = 2$ ,  $k_{32} = 1$ ,  $k_{42} = 2$ . Сворачивая категории  $k_{22}$  и  $k_{32}$  по схеме, показанной на рис. 1, на выходе таблицы **C** (рис. 2а) получаем категорию 1. Далее, сворачивая ее с категорией  $k_{12}$ , на выходе таблицы **P** (рис. 2б) получаем категорию 1. Наконец, сворачивая ее с категорией  $k_{42}$ , на выходе таблицы **E** (рис. 2в) получаем категорию  $k_2 = 1$ . Таким образом, тепловоз ТЭМП1тт имеет категорию экологичности  $k_2$ , равную 1. В соответствии с алгоритмом стимулирования (3) разработчики и исполнители данного проекта капитального ремонта заслужили поощрение  $s(1)$ . В результате экологичность маневрового тепловоза повысилась. Улучшились и другие показатели его экологичности [8]:

- вес потенциальных жидких загрязнителей окружающей среды – горюче-смазочных материалов (ГСМ) и охлаждающей жидкости;
- расход дизельного топлива на холостом ходу и ГСМ (см. таблицу 5).

*Таблица 5. Сравнение прочих экологических показателей ТГМ 6А и ТЭМП1тт [8].*

Вес жидких загрязнителей	Тепловозы	
	ТГМ 6А /	ТЭМП1тт /
моторного масла, кг	480	82
масла в передаче, кг	280	0
прочих ГСМ, кг	42,7	40.4
охлаждающей жидкости, кг	550	122
Расход ГСМ		
топлива на холостом ходу, кг/час	5,7	3.4
моторного масла (в т.ч. на угар), г/кВт·ч	2.11 (1.58)	0.19 (0)
масла передачей, г/кВт·ч	290	0
масла компрессором/ воздушной системой, г/кВт·ч	5.67	6

## 8.2. УВЕЛИЧЕНИЕ ЧИСЛА ДВИГАТЕЛЕЙ

Компания Union Pacific проводит капитальный ремонт магистральных тепловозов, оснащая их тремя 667-сильными ди-

зельными двигателями. При низких потребных мощностях работает только один из двигателей, а два других отключаются. Когда требуется дополнительная мощность, второй и третий дизельные двигатели автоматически запускаются и подключаются. Обновленные тепловозы получили товарный знак Genset [21]. По сравнению с прототипом – магистральным тепловозом с одним двигателем, тепловоз Genset требует меньше топлива, что приводит к сокращению выбросов оксида углерода и углеводородов до 37%. Кроме того, на 80% снижаются выбросы оксидов азота и на 90% – твердых частиц. В результате 172 тепловоза серии Genset были сертифицированы EPA по стандартам Tier 3 [21].

Поскольку прототип тепловоза Genset был создан в 2002–2005 годах [22], то он относится к стадии 1 (т.е.  $c = 1$ ). Далее определяем категорию экологичности прототипа. Для этого из требований Tier 3, а также того факта, что Genset снижает выбросы оксидов азота на 80%, твердых частиц – на 90%, оксида углерода и углеводородов – до 37 % в сравнении с прототипом, вычисляем фактические показатели выбросов последнего. Затем, основываясь на этих показателях и нормативах таблицы 4 при  $c = 1$ , определяем категорию прототипа, а затем категорию Genset.

Таким образом, выбросы ВВ прототипа составляли: оксидов азота –  $u_1 = 35,2 \text{ г/кВт}\cdot\text{ч}$ , оксида углерода –  $u_2 = 3,32$ , углеводородов –  $u_3 = 0,95$ ; твердых частиц –  $u_4 = 1,30 \text{ г/кВт}\cdot\text{ч}$ . В соответствии с алгоритмом категорирования (4) и нормативами таблицы 4 для стадии  $c = 1$  выбросы заменяемого тепловоза соответствуют категориям  $k_{11} = 0$ ,  $k_{21} = 2$ ,  $k_{31} = 3$ ,  $k_{41} = 1$ . Сворачивая категории  $k_{21}$  и  $k_{31}$  по схеме, показанной на рис. 1, на выходе таблицы **C** (рис. 2а) получаем категорию 3. Далее, сворачивая ее с категорией  $k_{11}$ , на выходе таблицы **P** (рис. 2б) получаем категорию 2. Наконец, сворачивая ее с категорией  $k_{41}$ , на выходе таблицы **E** (рис. 2в) получаем категорию  $k_1 = 1$ . Таким образом, заменяемый тепловоз относится к первой категории экологичности.

Определим теперь категорию экологичности тепловоза Genset. Поскольку он оснащен новыми двигателями, то он отно-

сится к стадии 2 (т.е.  $c = 2$ ). Далее, допустимые удельные средневзвешенные выбросы ВВ в ОГ тепловозов по правилам EPA Tier 3:  $t_1 = 7,04$  г/кВт·ч,  $t_2 = 2,09$ ,  $t_3 = 0,60$ ,  $t_4 = 0,13$  г/кВт·ч. Поскольку тепловоз Genset удовлетворяет стандарту EPA Tier 3, то его удельные средневзвешенные выбросы ВВ в ОГ ( $u_i$ ) не выше допустимых:  $u_i \leq t_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . В соответствии с формулой (2) и таблицей 4, при  $c = 2$  имеем  $t_1 = 7,04 < 12,34$ ,  $t_2 = 2,09 < 3,15$ ,  $t_3 = 0,60 < 1$ ,  $t_4 = 0,13 < 0,20$ ; следовательно, категории этих показателей равны  $k_{10} = 2$ ,  $k_{20} = 3$ ,  $k_{30} = 3$ ,  $k_{40} = 3$ .

В результате свертки, в соответствии со схемой, показанной на рис. 1, на выходе таблицы **C** (рис. 2а) получаем категорию 3. Далее, сворачивая ее с категорией 2, на выходе таблицы **P** (рис. 2б) получаем категорию 3. Наконец, сворачивая ее с категорией 3, на выходе таблицы **E** (рис. 2в) получаем категорию  $k_0 = 3$ . Учитывая, что старый магистральный тепловоз компании Union Pacific относился к первой категории экологичности, получаем, что новый магистральный тепловоз Genset этой компании после переоборудования переместился из первой в высшую категорию экологичности. В соответствии с алгоритмом стимулирования (13) разработчики и исполнители данного проекта заслужили поощрение  $s(3)$ .

## 9. Заключение

Обеспечение условий для устойчивого развития больших систем является важной задачей, требующей комплексного подхода, учитывающего экономические и экологические аспекты. Для её решения предложен механизм устойчивого развития двухуровневой организационной системы. Опираясь на результаты синтеза оптимальных согласованных механизмов [5, 17], разработаны процедуры планирования и стимулирования, применимые при комплексном оценивании функционирования объектов, описываемых набором исходных показателей. На основе этих разработок сформирован организационный механизм, включающий процедуры:

- нормирования результатов деятельности объекта управления;

- перехода к порядковым шкалам на основе этих нормативов,
- комплексной свертки порядковых шкал (категорий);
- планирования и стимулирования результатов деятельности объекта управления, измеряемых комплексной оценкой.

Полученный результат проиллюстрирован на примере разработки механизма УР тепловоза путем капитального ремонта, играющего ключевую роль в УР ЖДТ. Сформирована система категорий показателей выбросов основных вредных веществ в воздух отремонтированными тепловозами. Разработаны нормативы отнесения этих показателей к разным категориям с учетом как отечественных, так и лучших зарубежных стандартов. Эти нормативы могут использоваться в качестве ориентиров экологизации при капитальном ремонте тепловозов. Разработана комплексная оценка экологичности тепловозов на основе этих категорий. Построена система поощрения лиц, проводящих капитальный ремонт, на базе этой оценки.

В целом, по сути, предложен инструмент УР тепловозов, призванный стимулировать внедрение экологических инноваций в процессе капитального ремонта тепловозов. Определение категории экологичности тепловоза облегчает сравнение проектов его капитального ремонта. Развитый подход является адаптивным, поскольку он позволяет подстраиваться к изменениям национальных и регионального стандартов путем настройки нормативов ранжирования выбросов основных вредных веществ.

Полученные результаты были использованы при разработке концепции системы требований в области охраны окружающей среды на локомотивы ОАО «РЖД». Они могут также быть использованы для снижения выбросов:

- основных вредных веществ в воздух на разных стадиях жизненного цикла тепловозов;
- других вредных веществ в воздух, воду и почву.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на обобщение полученных результатов для обеспечения УР:

- железнодорожной инфраструктуры ЖДТ;
- водного, автомобильного и других видов транспорта.

### ***Литература***

1. АЛЕКСЕЕВ А.О., КАТАЕВА Т.А. *Применение механизмов комплексного оценивания и матричных неанонимных обобщенных медианных механизмов для согласования интересов агентов* // Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника». – 2021. – Т. 21, №3. – С. 75–89.
2. БУРКОВ В.Н., БУРКОВА И.В., ЩЕПКИН А.В. *Метод синтеза системы комплексного оценивания* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2020. – Т. 20, №4. – С. 63–73.
3. БУРКОВ В.Н., КОРГИН Н.А., СЕРГЕЕВ В.А. *Идентификация механизмов комплексного оценивания на основе умартного кода* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2020. – Вып. 87. – С. 67–85.
4. ГОСТ 33754–2016. *Выбросы вредных веществ и дымность отработавших газов автономного тягового и моторвагонного подвижного состава. Нормы и методы определения*. – М.: Стандартинформ, 2017. – 68 с.
5. ЕНАЛЕЕВ А.К. *Оптимальность согласованных механизмов функционирования в активных системах* // Управление большими системами. – 2011. – Вып. 33.– С. 143–166.
6. КАКАДЖАНОВ В. *Теоретические аспекты эволюции понятия «Устойчивое развитие промышленных систем»* // Управление устойчивым развитием. –2024. – №2(51). – С. 31–36.
7. НОВИКОВ Д.А. *Теория управления организационными системами*. – М.: ЛЕНАНД, 2022. – 500 с.
8. *Перспективные маневровые тепловозы для промышленных предприятий*. – Нижний Тагил: Объединение производителей железнодорожный техники, АО ЕВРАЗ, 16.10.2023. – 24 с. – URL: <https://opzt.ru/news/sostojalos-zasedanie>

- komiteta-opzhtpo-koordinacii-lokomotivostroenija-i-ih-komponentov-3/ (дата обращения: 12.02.2025).
- 9. САВОСИНА М.И. *Оценка эффективности устойчивого развития транспорта* // Мир транспорта. – 2020. – Т. 18, №2. – С. 50–66. – DOI:10.30932/1992-3252-2020-18-50-66.
  - 10. УСОВ П. Локомотив потребления // РЖД – Партнер. – 2024. – №15–16. – С. 20–21.
  - 11. ЦЫГАНОВ В.В. *Комплекс моделей стратегического управления крупномасштабной транспортной инфраструктурой* // Труды 14-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем». – М., ИПУ РАН, 2021. – С. 49–59. – DOI: 10.25728/7158.2021.28.16.001.
  - 12. ЦЫГАНОВ В.В. *Стратегическое адаптивное управление транспортом* // Труды 17-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем». – Москва, 2024. – С. 52–62.
  - 13. BURKOV V., KONDRATIEV V., KORGIN N. et al. *Mechanism Design and Management. Mathematical Methods for Smart Organizations* // Business Issues. Competition and Entrepreneurship. – New York: NOVA Publishers, 2013. – 187 p.
  - 14. BURKOV V.N., KORGIN N.A., SERGEEV V.A. *Identification of Integrated Rating Mechanisms as Optimization Problem* // Proc. of the 13th Int. Conf. "Management of Large-Scale System Development" (MLSD-2020). – М.: IEEE, 2020. – P. 1–5. – URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/9247638>.
  - 15. *Emission Standards. EU: Nonroad Engines.* – URL: <https://dieselnet.com/standards/eu/nonroad.php> (дата обращения: 10.05.2025).
  - 16. ENALEEV A. *Comprehensive Assessment and Incentive Mechanism to Implement Environmental Requirements for Locomotives* // 6th Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency. – Lipetsk: IEEE, 2024. – P. 804–809. – DOI: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803722.
  - 17. ENALEEV A., NOVIKOV D. *Sustainable Control of Active Systems: Decentralization and Incentive Compatibility* // IFAC-

- PapersOnLine. – 2021. – Vol. 54, Iss. 13. – P. 13–18. – DOI: 10.1016/j.ifacol.2021.10.410.
- 18. ENALEEV A., TSYGANOV V. *Proactive Adaptation of Rail Infrastructure to Accelerated Climate Change* // 6th Int. Conf. on Control Systems Mathematical Modeling. Automation and Energy Efficiency. – Lipetsk: IEEE, 2024. – P. 1–5. – DOI: 10.1109/SUMMA64428.2024.10803738.
  - 19. *Final Rule for Control of Emissions of Air Pollution From Locomotive Engines and Marine Compression-Ignition Engines Less Than 30 Liters per Cylinder. Emission Factors for Locomotives*. – April 2009. – URL: <https://www.epa.gov/regulations-emissions-vehicles-and-engines/final-rule-control-emissions-air-pollution-locomotive> (дата обращения 10.05.2025).
  - 20. FLORENTSEV S., POLYUKHOVICH V., EVPAKOV V. *Modernization of Industrial Shunting Diesel Locomotives for Technological Railway Transport* // Int. Ural Conf. on Electrical Power Engineering. – Magnitogorsk: IEEE, 2022. – P. 64–68. – DOI: 10.1109/UralCon54942.2022.9906764.
  - 21. *Genset switcher*. – URL: [https://www.up.com/cs/groups/public/@uprr/@environment/documents/up\\_pdf\\_nativedocs/pdf\\_up\\_emg\\_genset.pdf](https://www.up.com/cs/groups/public/@uprr/@environment/documents/up_pdf_nativedocs/pdf_up_emg_genset.pdf) (дата обращения: 10.02.2025).
  - 22. *GE Transportation. Early Locomotive Models*. – URL: <http://www.getransportation.com/rail/rail-products/locomotives/earlier-locomotive-models.html> (дата обращения: 10.02.2025).
  - 23. ILIEV S., STANCHEV H., MITEV E. *An Experimental Comparison of Emissions of a Common-rail Diesel Engine Fueled with Ethanol and Butanol Additives* // AIP Conf. Proc. – 2023. – Vol. 2868.020018.
  - 24. KIM M.-K., PARK D., KIM D.Y. *Quantification of the Ecological Value of Railroad Development Areas Using Logistic Regression Analysis* // Int. Journal of Environmental Research and Public Health. – 2021. – Vol. 18, No. 22. – 11764. – DOI: 10.3390/ijerph182211764.
  - 25. KORGIN N.A., SERGEEV B.A. *Identification of Integrated Rating Mechanisms on Complete Data Sets* // Proc. of IFIP WG 5.7 Int. Conf. "Advances in Production Management Systems" (APMS 2021) (Artificial Intelligence for Sustainable and Resili-

- ent Production Systems). – Berlin: Springer, 2021. – Vol. 630. – P. 610–616.
26. POLLMAN E. *The Making and Meaning of ESG* // Harvard Bus. L. Review. – 2024. – Vol. 14. – P. 403.
27. *Regulatory Impact Analysis: Control of Emissions of Air Pollution from Locomotive Engines and Marine Compression Ignition Engines Less than 30 Liters Per Cylinder. CHAPTER 1: Industry Characterization. 1.2 Locomotive. 1.2.2 Current U.S. Emission Regulations.* – URL: [https://nepis.epa.gov/Exe/ZyPDF.cgi/P10023S4.PDF](https://nepis.epa.gov/Exe/ZyPDF.cgi/P10023S4.PDF?Dockey=P10023S4.PDF) (дата обращения: 10.05.2025).
28. SERGEEV V.A., KORGIN N.A. *Identification of Integrated Rating Mechanisms As An Approach To Discrete Data Analysis* // IFAC-PapersOnLine. – Moscow: Elsevier Ltd, 2021. – Vol. 54, Iss. 13. – P. 134–139.
29. ZHUROV I., BAYDA S., FLORENTSEV S. *Field-Oriented Control of the Cargo Locomotive Induction Motor Electric Drive When Using Single Power Converter Feeding Two Traction Motors* // Int. Conf. on Electrotechnical Complexes and Systems. – Ufa: IEEE, 2021. – P. 37–42. – DOI: 10.1109/ICOECS52783.2021.9657434.
30. ZHUROV I., BAYDA S., FLORENTSEV S. *Parameters Estimation Technique of the Induction Motor Electric Drive With the Field-Oriented Control Taking Into Account Core Losses* // Int. Ural Conf. on Electrical Power Engineering. – Magnitogorsk: IEEE, 2022. – P. 164–169. – DOI: 10.1109/UralCon54942.2022.9906667.

## MECHANISMS OF SUSTAINABLE DEVELOPMENT OF RAILWAY TRANSPORT BY MEANS OF CAPITAL REPAIRS OF DIESEL LOCOMOTIVES

**Vladimir Tsyganov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science (Tech.), professor (bbc@ipu.ru).

**Anver Enaleev**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD (Tech.), Senior Scientist (anverena@mail.ru).

**Sergey Savushkin**, N.S. Solomenko Institute of Transport Problems of RAS, Moscow, PhD (Math), Senior Scientist (ssavushkin@mail.ru).

*Abstract: An organizational mechanism for planning and stimulating sustainable development of the organizational system has been developed. Sufficient conditions for the optimality of this mechanism have been found. Based on the obtained results, the problem of sustainable development of rail transport through major repairs of diesel locomotives has been considered. An organizational mechanism has been developed to reduce emissions of harmful substances by a diesel locomotive as a result of major repairs. This mechanism includes an algorithm for standardizing and categorizing the indicators of emissions of the main harmful substances, an algorithm for collapsing the categories of emission indicators and forming a category of environmental friendliness of a diesel locomotive, as well as a procedure for stimulating for major repairs of a diesel locomotive. Emission standards for harmful substances are formed on the basis of domestic standards, as well as national and regional requirements abroad. In this case, the category of emissions of harmful substances of a certain type is recognized as satisfactory if the indicator of these emissions does not exceed the norm specified in the corresponding domestic environmental standard, good - if this indicator also meets the requirements of national or regional environmental standards of the countries of advanced diesel locomotive building, and excellent - if this indicator meets the best world standards. The algorithm of these categories' convolution defines a comprehensive assessment of the environmental friendliness of a diesel locomotive after a major overhaul. Depending on this assessment, incentives are provided for interested parties. Examples of calculations of environmental friendliness categories for domestic and foreign diesel locomotives are given. The developed standards for emission indicators of the main harmful substances can be used as guidelines for major overhauls of diesel locomotives. The results obtained were used in developing a concept of requirements for diesel locomotives of JSC Russian Railways in the field of environmental protection.*

Keywords: organization, sustainable development, planning, stimulation, diesel locomotive, pollutant emissions.

УДК 303.732.4+504.06+629.4.01

ББК 65+20.18+39.235

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.В. Клочковым.*

*Поступила в редакцию 04.07.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*

## ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПАТЕНТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Ашмарин В. В.<sup>1</sup>

(АО «Государственный научно-исследовательский  
институт приборостроения», Москва)

Борзунов А. В.<sup>2</sup>

(Московский авиационный институт (Национальный  
исследовательский университет), Москва)

Проведен комплексный анализ современных тенденций развития инерциальных навигационных систем для беспилотных летательных аппаратов, выполненный на основе обширного патентного исследования, базирующегося на анализе большого количества патентов, охватывающих период с 2003 по 2024 год, что позволяет получить достоверную картину технического прогресса в данной области. Основное внимание в работе уделяется четырём ключевым направлениям совершенствования инерциальных навигационных систем: повышению точности определения координат, увеличению надёжности и стойкости к внешним воздействиям, уменьшению массогабаритных характеристик и снижению стоимости, а также расширению функциональных возможностей систем. Особое место в исследовании занимает анализ развития автономности и помехозащищённости как приоритетных направлений модернизации. В ходе проведения исследования проведён детальный анализ элементной базы зарубежных инерциальных навигационных систем тактического класса, выявлены основные технические характеристики современных систем. На основе патентного анализа определены ведущие разработчики в данной сфере и составлена картина географического распределения инновационных разработок. Методологической основой исследования послужил комплексный подход, включающий патентный анализ, сравнительную оценку технических характеристик и выявление тенденций развития инерциальных навигационных систем. Результаты проведённого исследования позволяют не только оценить текущее состояние технологий, но и сформировать прогнозы дальнейшего развития автономных навигационных систем для беспилотной авиации.

Ключевые слова: инерциальная навигационная система, беспилотный летательный аппарат, патентные исследования.

---

<sup>1</sup> Владимир Валерьевич Ашмарин, к.т.н., начальник бюро (v.v.ashmarin@mail.ru).

<sup>2</sup> Аркадий Васильевич Борзунов, к.т.н., доцент (arcbor@mail.ru).

## **1. Введение**

Тенденции развития бортовых комплексов управления беспилотных летательных аппаратов (БЛА) продолжают складываться в ответ на растущие требования к точности, надежности и адаптивности систем. Важную роль в анализе современного состояния и будущего развития бортовых комплексов управления БЛА играют патентные исследования, так как они позволяют получить ценную информацию о текущих технологиях, достижениях и направлениях развития. В условиях быстро меняющегося мира, где инновации в области авиационной промышленности становятся все более критически важными, патентные исследования предоставляют ряд преимуществ, которые могут оказать значительное влияние на стратегическое развитие и конкурентоспособность [6].

Патентная информация, занимая особое место в ряду различных видов научно-технической информации, обладает рядом существенных преимуществ по сравнению с остальными видами научно-технической информации. Среди таких преимуществ можно выделить максимальную достоверность и полноту, оперативность, позволяющую предвидеть товары и услуги за несколько лет до их фактического появления на рынке.

Патентная информация – это совокупность сведений о результатах научно-технической деятельности, содержащихся в описаниях патентных документов, публикуемых патентными ведомствами всех стран мира [7].

Существующие информационно-поисковые программы позволяют выполнять поиск по индексам международной патентной классификации, по ключевым словам, по именам авторов и заявителей, по номерам, дате публикаций и дате заявки. Международная патентная классификация представляет собой иерархическую систему для тематической классификации и поиска патентных материалов в конкретных областях.

Анализ патентной документации в интересующей области техники позволяет получить представление об уровне техники и сложившихся тенденциях, выявить наиболее перспективные направления развития, конкретные технические решения, ис-

пользуемые для целей научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ.

Отбор патентной документации осуществляется по результатам проведения патентного поиска, в ходе которого формируется массив релевантных документов, в отношении которых осуществляется дальнейший анализ.

Целью работы является определение технического уровня и выявление тенденций развития инерциальных навигационных систем беспилотных летательных аппаратов.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Проведение патентного поиска по электронным базам данных и информационного поиска по любым общедоступным электронным ресурсам и сведениям в мире.
2. Анализ уровня техники в ведущих областях по техническому решению и главной функции объекта исследований и выявление тенденций его развития [2, 15, 16].

## ***2. Уровень техники объекта исследования***

Базовым направлением развития инерциальных систем летательных аппаратов является технология бесплатформенных систем, которая характеризуется целым рядом известных преимуществ, но в первую очередь – надежностью и резким повышением технического ресурса. По своему назначению рассматриваемые системы можно подразделить на:

- бесплатформенные инерциальные навигационные системы (БИНС);
- гиро- и курсовертикали;
- информационные системы (приборы) каналов управления и стабилизации движения летательного аппарата (как правило, это резервные системы).

Интенсификация работ в области БИНС и их составных блоков связана с развитием главным образом ракетно-космических технологий. Ученым и специалистам, работающим в этой отрасли, принадлежат основные публикации в области теории и проектирования БИНС, например, монография В.Н. Бранца и И.П. Шмыглевского [3], а также труд

В.В. Матвеева и В.Я. Распопова [8]. Вопросы построения БИНС и бесплatformенных систем ориентации с малыми массой, габаритами и энергопотреблением, которые являются одними из самых востребованных систем ориентации и управления в различных областях техники, также рассматриваются в диссертации В.А. Орлова [10].

Ключевыми характеристиками бортового комплекса управления БЛА являются точность и надежность, которые обеспечиваются за счет применения различных методов коррекции данных и использования передовых технологий их создания. Точных характеристики, обеспечиваемые БИНС, пред назначенной для выполнения задач инерциальной навигации при управлении БЛА и стабилизации в пространстве, в первую очередь определяются погрешностями датчиков первичной информации. Так как при увеличении времени работы БИНС погрешности нарастают, даже наиболее точные из существующих на сегодняшний день датчиков не обеспечивают в автономном режиме работы БИНС вывод БЛА в требуемую область с требуемой точностью [1, 4, 14].

Современное развитие микросистемной техники, в частности, появление микромеханических инерциальных чувствительных элементов (акселерометров и гироскопов) позволяет создавать миниатюрные БИНС, обладающие малыми массой и габаритами, и использовать их в новых областях техники [10, 22, 25].

Объем и точность формирования выходной информации определяется типом БИНС, что находит свое прямое отражение на требованиях к точности используемых в системе гироскопов и акселерометров [5, 12].

Современное состояние и перспективы развития комплексов бортового радиоэлектронного оборудования освещены и составлены Н.В. Павловым [11] на основании материалов, опубликованных в средствах массовой информации РФ, а также аналитических обзоров по материалам зарубежной информации и технических переводов зарубежных статей, осуществленных в 2010–2013 гг. во ФГУП «ГосНИИАС». Обзор также охватывает вопросы развития интегрированных инерциальных навигационных систем, систем технического зрения, систем предупре-

ждения опасного сближения с землей и систем организаций воздушного движения – программы NextGen и SESAR [11].

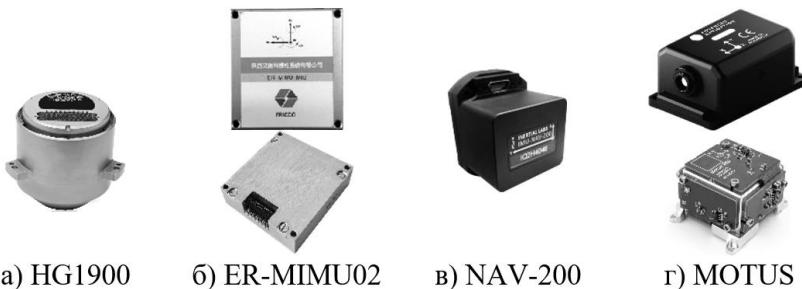
В последние годы стали доступны инерциальные устройства нового типа с компактными гироскопами и акселерометрами на основе микроэлектромеханической технологии (MEMS) с низкой стоимостью и малыми габаритами [12, 19, 24, 26]. Их применение в составе инерциальных систем с коррекцией описано в труде [9].

Провести оценку текущего состояния уровня технического развития БИНС позволяют патентные исследования. Анализ общедоступных научно-технических и информационных источников дает возможность выявить основные технические характеристики современных зарубежных БИНС (см. таблицу 1) [13, 17, 18, 20, 21, 23].

*Таблица 1. Основные технические характеристики современных зарубежных БИНС*

Наименование характеристики	HG1900 (Honeywell (US)) [20]	ER-MIMU02 (Ericco (CN)) [18]	NAV-200 (Inertial Labs (US)) [21]	MOTUS (Advanced Navigation (AU)) [23]
<b>Гироскоп</b>				
Диапазон измерений, град/с	±1000	±450	±450	±475
Дрейф нуля (при экспл.), град/ч ( $1\sigma$ )	1,0	2,0	0,3	<3
<b>Акселерометр</b>				
Диапазон измерений, g	±30	±16	±40	±10
Дрейф нуля (при экспл.), mg ( $1\sigma$ )	0,3	0,024	0,007	<0,45
<b>Общие</b>				
Масса, г	500	50	155	98
Объем, см <sup>3</sup>	285	30	128	85
Ударное воздействие, g	25	30	40	150
Рабочие температуры, °C	-40 ... +75	-40 ... +80	-40 ... +85	-40 ... +85

Рассмотренные БИНС на сегодняшний день являются наиболее точными системами тактического класса для БЛА малой дальности и обеспечивают определение кинематических параметров движения, стабилизацию и управление по заданной траектории в режимах инерциальной навигации и самонаведения. Внешний вид БИНС приведен на рис. 1 [18, 20, 21, 23].



а) HG1900      б) ER-MIMU02      в) NAV-200      г) MOTUS

Рис. 1. Внешний вид зарубежных БИНС

Помимо оценки технического уровня современных БИНС важно прогнозировать будущее технического прогресса исследуемой области. Патентные исследования с целью определения тенденций развития позволяют выявлять направления, где существует потенциал для инноваций, определять пробелы в существующих технологиях и обнаруживать организационно-конкуренты. Помимо этого анализ патентной информации позволяет не только формировать перечень требований потребителя к продукции, но и определить степень их значимости.

Для определения тенденций развития БИНС БЛА была сформирована выборка патентов (63 патента в диапазоне 2003–2024 гг.) с распределением их по географической принадлежности в процентном соотношении (см. рис. 2).

В дополнение к рис. 2 на рис. 3 представлено распределение выборки патентов по географической принадлежности и количеству публикаций в год на указанном диапазоне.

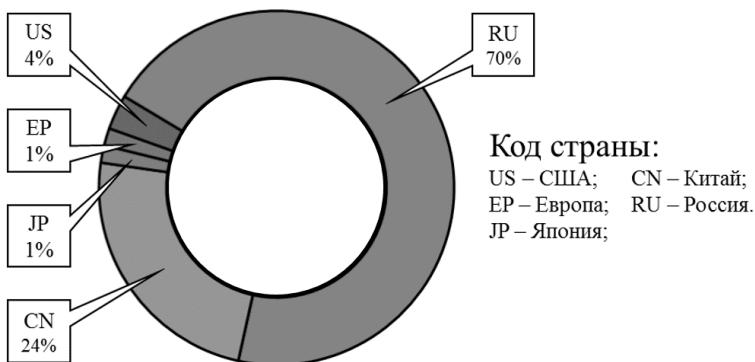


Рис. 2. Распределение отобранных патентов по географической принадлежности и статусам

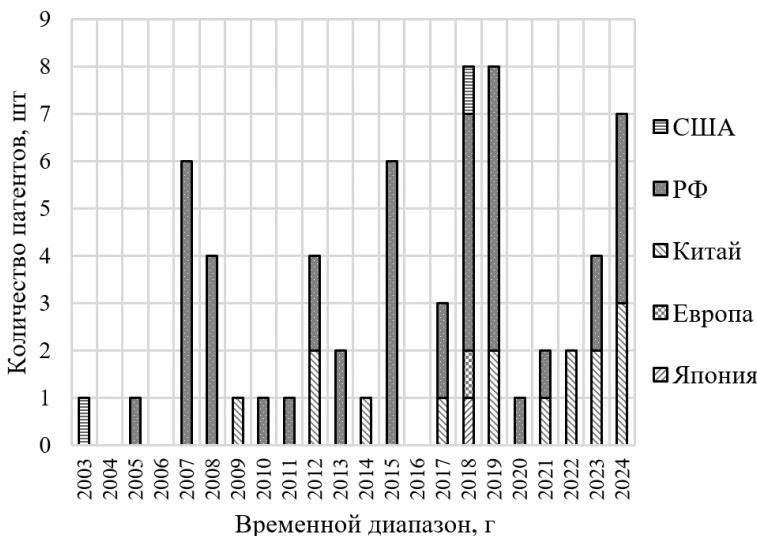


Рис. 3. Распределение отобранных патентов по географической принадлежности и количеству публикаций в год

Анализ выборки патентов позволил выявить достигаемые в них технические результаты и установить следующие основные направления патентования исследуемой области:

- Р1 – Повышение точности определения координат местоположения;
- Р2 – Повышение надежности и стойкости к внешним воздействиям;
- Р3 – Уменьшение массогабаритных характеристик и снижение стоимости;
- Р4 – Расширение функциональных возможностей.

На основе выявленных направлений исследований были сформированы динамические ряды патентования и построено семейство кривых, отображающих динамику изобретательской активности (см. рис. 4) – графическое представление патентной активности (числа зарегистрированных патентов) в определённой области или по определённой теме за определённый период времени.

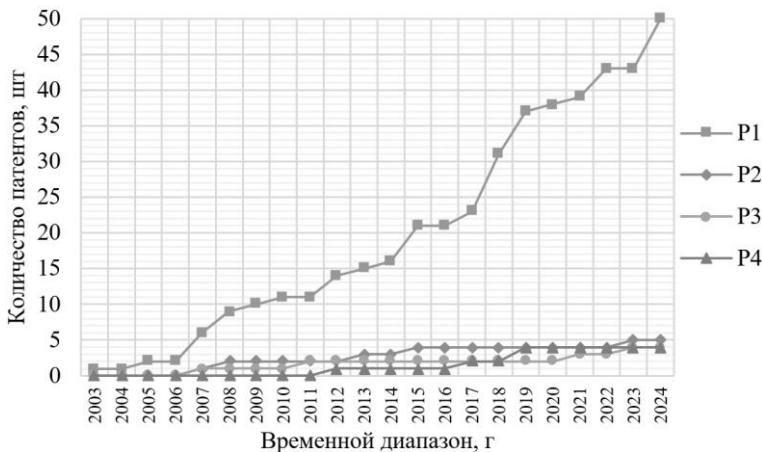


Рис. 4. Семейство кривых, отображающих динамику изобретательской активности

При проведении анализа выборки патентов одновременно с выявлением направлений патентования удалось сформулировать основные направления разработок в отобранных патентах, которые приведены в таблице 2.

Для прогнозирования дальнейших изменений в исследуемой области был применен регрессионный анализ, позволяю-

щий вычислить некоторые значения переменной по известным значениям. Одним из инструментов регрессионного анализа является линия тренда, позволяющая графически отобразить тенденции развития патентования и предсказать будущие значения за пределами реальных данных (см. рис. 5).

Таблица 2. Направления разработок в отобранных патентах

Направление патентования	Направления разработок в патентах
Повышение точности определения координат местоположения	<ul style="list-style-type: none"> <li>Методы улучшения точности и надежности ИНС;</li> <li>Использование алгоритмов фильтрации Калмана и других методов обработки данных;</li> <li>Компенсация систематических погрешностей и дрейфа датчиков;</li> <li>Разработка интеллектуальных алгоритмов обработки данных с использованием машинного обучения</li> </ul>
Повышение надежности и стойкости к внешним воздействиям	<ul style="list-style-type: none"> <li>Разработка отказоустойчивых ИНС с резервированием датчиков;</li> <li>Методы защиты от радиоэлектронных помех и GPS-спуфинга;</li> <li>Использование инерциальной навигации для работы в сложных условиях</li> </ul>
Уменьшение массогабаритных характеристик и снижение стоимости	<ul style="list-style-type: none"> <li>Интеграция ИНС с другими бортовыми системами;</li> <li>Возложение на ИНС вспомогательных функций;</li> <li>Разработка и применение новых перспективных датчиков первичной информации</li> </ul>
Расширение функциональных возможностей	<ul style="list-style-type: none"> <li>Интеграция ИНС с другими датчиками для повышения точности и надежности навигации</li> <li>Использование данных GPS, барометров, магнитометров, видеокамер и других источников</li> <li>Разработка алгоритмов сенсорного синтеза для оптимальной обработки данных</li> </ul>

График дополнен уравнением линии тренда и значением квадрата смешанной корреляции  $R^2$  (достоверность аппроксимации), отражающее близость значений линии тренда к фактическим данным и принимающее значение в пределах  $0 \leq R^2 \leq 1$ . Линия тренда в наибольшей степени приближается к значениям точек кривой изобретательской активности, если значение равно или близко к единице [2, 15, 16].

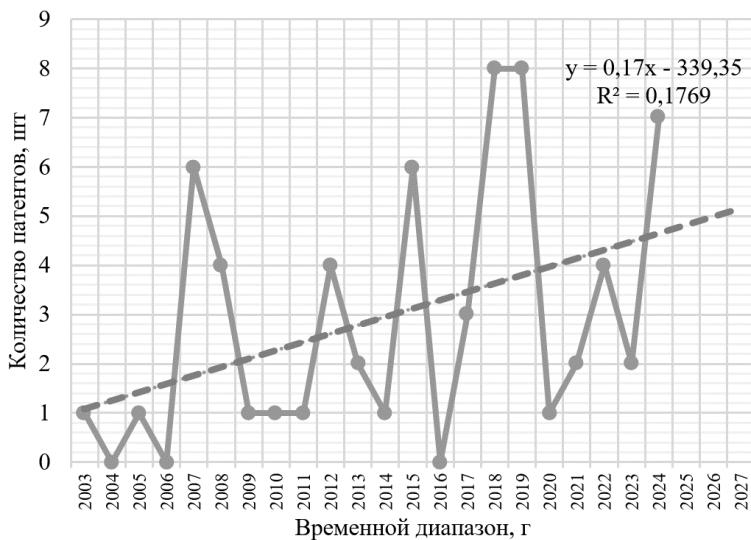


Рис. 5. Кривая изобретательской активности и линия тренда

Анализ отобранных патентов позволил выявить основные предприятия и организации, а также физических лиц, которые являются правообладателями патентов.

Лидерами по количеству патентов Российской Федерации являются Хмелевский Анатолий Сергеевич (RU) и Щипицын Анатолий Георгиевич (RU), каждый из которых имеет по 4 патента на изобретение в соавторстве.

Акционерное общество «Конструкторское бюро приборостроения им. Академика А.Г. Шипунова» (RU), Публичное акционерное общество «Московский институт электромеханики и автоматики» (ПАО «МИЭА») (RU) и Российская Федерация, от

имени которой выступает государственный заказчик – Министерство обороны Российской Федерации (RU) – имеют каждый по 3 патента на изобретение, в том числе в соавторстве.

Открытое акционерное общество «Пермская научно-производственная приборостроительная компания» (RU), Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования Тульский государственный университет (ТулГУ) (RU), Открытое акционерное общество Московский научно-производственный комплекс «Авионика» имени О.В. Успенского (ОАО МНПК «Авионика») (RU) имеют по 2 патента на изобретение.

Лидером по количеству патентов зарубежных стран является UNIV NORTHWESTERN POLYTECHNIC (CN) (Северо-западный политехнический университет): государственный научный и инженерный университет в Сиане проводит исследования в области аэронавтики, космонавтики и морской техники, связан с Министерством промышленности и информационных технологий. Является правообладателем 3 патентов на изобретение.

Остальные отечественные и зарубежные организации имеют в правообладании по одному патенту.

### **3. Заключение**

В результате проведенного поиска по патентным базам и научно-техническим источникам информации были обнаружены охранные документы, имеющие отношение к беспилотным инерциальным навигационным системам.

Анализ отобранной патентной и научно-технической информации позволил установить основные направления патентования исследуемой области. Исходя из полученного семейства кривых, отображающих динамику изобретательской активности, видно, что количество патентов по направлению патентования «Повышение точности определения координат местоположения беспилотного летательного аппарата» на порядок превосходит количество патентов по любому другому направлению.

Результат построения линии тренда показывает, что тенденция патентования изобретений и полезных моделей

в направлении совершенствования беспилотформенных инерциальных навигационных систем имеет характер увеличения в ближайшие годы. Наибольшая активность авторов будет направлена в первую очередь на развитие технологий, необходимых для повышения точностных характеристик системы в автономном режиме работы.

### ***Литература***

1. АГЕЕВ А.М., ПОПОВ А.С., ВОЛОБУЕВ М.Ф. *Принципы построения бортовых комплексов управления беспилотных летательных аппаратов различного класса надежности* // Военная мысль. – 2018. – №11. – С. 61–69.
2. БОЛЬШЕДВОРСКАЯ Л.Г. *Патентоведение: учебное пособие*. – М.: ИД Акад. Жуковского, 2024. – 64 с.
3. БРАНЕЦ В.Н., ШМЫГЛЕВСКИЙ И.П. *Введение в теорию беспилотформенных инерциальных навигационных систем*. – М.: Наука, 1992. – 281 с.
4. ВАЛОВ Г.Е. *Анализ технических характеристик совмещенных инерциальных и спутниковых навигационных систем* // Пространственные данные: наука и технологии: Сборник статей по итогам научных конференций. – 2021. – №12. – С. 152–161. – DOI: 10.30533/scidata-2021-12-152-161
5. ИЗМАЙЛОВ Е.А. *Современные тенденции развития технологий инерциальных чувствительных элементов и систем летательных аппаратов* // Труды МИЭА. – 2010. – №1. – С. 30–43.
6. ИЛЮХИН С.Н., ТОПОРКОВ А.Г., КОРЯНОВ В.В. и др. *Актуальные аспекты разработки системы управления перспективными беспилотными летательными аппаратами* // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2015. – №9(45). – С. 1–16.
7. ЛЫЧАГИНА А.Г. *Основы патентоведения: практикум*. – Липецк: ЛГПУ имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, 2024. – 51 с.
8. МАТВЕЕВ В.В., РАСПОПОВ В.Я. *Основы построения беспилотформенных инерциальных навигационных систем* /

- Под общ. ред. д.т.н. В.Я. Распопова. – Спб.: ГНЦ РФ ОАО «Концерн «ЦНИИ Электроприбор», 2009. – 280 с.
9. МИШИН А.Ю., КИРЮШИН Е.Ю., ОБУХОВ А.И. и др. *Малогабаритная комплексная навигационная система на микромеханических датчиках* // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2013. – №70. – С. 1–21.
10. ОРЛОВ В.А. *Инерциальные измерительные системы параметров движения объектов на микромеханических датчиках*: автореферат дисс. канд. техн. наук: 05.11.16. – Тула: ГУО ВПО «Тульский государственный университет», 2007. – 19 с.
11. ПАВЛОВ Н.В. *Бортовое радиоэлектронное оборудование: навигационные системы и комплексы (Аналитический обзор по материалам зарубежных информационных источников)* / Сост. Н.В. Павлов / Под общ. ред. академика РАН Е.А. Федосова. – М.: Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, 2014. – 140 с.
12. ПЕШЕХОНОВ В.Г. *Перспективы развития гироскопии* // Гироскопия и навигация. – 2020. – Т. 28, №2(109). – С. 3–10. – DOI: 10.17285/0869-7035.0028.
13. ПРОХОРЦОВ А.В., БАЛАБАЕВ О.С. *Обзор бесплатформенных инерциальных навигационных систем отечественного и импортного производства* // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2024. – №7. – С. 350–355.
14. СИНЕЛЬНИКОВ А.О., ТИХМЕНЕВ Н.В., УШАНОВ А.А. и др. *Современное состояние и тенденции развития инерциальных навигационных систем на кольцевых лазерных гироскопах* // Фотоника. – 2024. – Т. 18, №6. – С. 450–466. – DOI: 10.22184/1993-7296.FRos.2024.18.6.450.466.
15. СОКОЛОВА Д.О. *Патентоведение и патентные исследования: учебное пособие*. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2024. – 110 с.
16. СОКОЛОВА Д.О. *Патентоведение и патентные исследования: учебное пособие*. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2024. – 112 с.

17. DAMIANOS D., GIRARDIN G. *High-End Inertial Sensors for Defense, Aerospace & Industrial Applications* // Market and Technology Report by Yole Development, 2020.
18. ER-MIMU-M02 | High Performance MEMS IMU Supplier - ERICCO China [Электронный ресурс]. – URL: <https://www.ericcointernational.com/inertial-measurement-units/mems-inertial-measurement-unit/er-imu-m02-inertial-measurement-unit> (дата обращения: 19.05.2025).
19. HEGARTY C., O'KEEFE S., O'CONNOR M. *Micro-Electro-Mechanical Systems (MEMS) for Navigation and Positioning* // IEEE Sensors Journal. – 2023. – Vol. 23, No. 12. – P. 12345–12356.
20. HG1900 Inertial Measurement Unit | N61-1468-001-002 | 12/18 © 2018 Honeywell International Inc.
21. Inertial Labs IMU-NAV-200 |Datasheet Revision 1.1.
22. LI X., GAO Y., HU X. *Advanced Inertial Navigation Systems: Technologies and Applications*. – Springer. – 2022. – 350 p.
23. MOTUS MEMS IMU © Advanced Navigation – v2.2. – November 2024.
24. PASSARO V.M.N., CUCCOVILLO A., VAIAM L. et al. *Gyroscope Technology and Applications: A Review in the Industrial Perspective* // Sensors. – 2017. – Vol. 17, 2284. – P. 1–22.
25. ROBIN L., PERLMUTTER M. *Gyroscopes and IMUs for Defence Aerospace and Industrial* // Report by Yole Development, 2012.
26. SALYCHEV O.S., SAZONOV A.A., SAZONOV A.A. *Development of Micro-Electro-Mechanical Applications* // Gyroscopy and Navigation. – 2020. – Vol. 11, No. 3. – P. 215–224.

## **DEVELOPMENT TRENDS OF INERTIAL NAVIGATION SYSTEMS OF UNMANNED AERIAL VEHICLES BASED ON THE RESULTS OF PATENT RESEARCH**

**Vladimir Ashmarin**, JSC «State Research Institute of Instrument Engineering», Moscow, Ph.D. of Engineering Sciences, Head of the Bureau (v.v.ashmarin@mail.ru).

**Arkady Borzunov**, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Ph.D. of Engineering Sciences, Associate Professor (arcbor@mail.ru).

*Abstract: A comprehensive analysis of current trends in the development of inertial navigation systems for unmanned aerial vehicles has been carried out, based on an extensive patent study based on the analysis of a large number of patents covering the period from 2003 to 2024, which allows us to obtain a reliable picture of technological progress in this area. The main focus of the work is on four key areas of improvement of inertial navigation systems: improving the accuracy of determining coordinates, increasing reliability and resistance to external influences, reducing weight and cost, as well as expanding the functionality of the systems. A special place in the study is occupied by the analysis of the development of autonomy and noise immunity as priority areas of modernization. In the course of the study, a detailed analysis of the element base of foreign inertial navigation systems of tactical class was carried out, and the main technical characteristics of modern systems were identified. Based on the patent analysis, the leading developers in this field have been identified and a picture of the geographical distribution of innovative developments has been compiled. The methodological basis of the research was an integrated approach, including patent analysis, comparative evaluation of technical characteristics and identification of trends in the development of inertial navigation systems. The results of the study make it possible not only to assess the current state of technology, but also to form forecasts for the further development of autonomous navigation systems for unmanned aircraft.*

Keywords: inertial navigation system, unmanned aerial vehicle, patent research.

УДК 629.7.05

ББК 39.671.6

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Л.Б. Рапопортом.*

*Поступила в редакцию 04.07.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*

# ПРОВЕРКА ХАРАКТЕРИСТИК АСТРОИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА МОРСКОМ ОБЪЕКТЕ В РЕЖИМЕ НЕПРЕРЫВНОГО АСТРОИНЕРЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

**Болотнов А. С.<sup>1</sup>, Кондрашкин Г. В.<sup>2</sup>, Шкатов М. Ю.<sup>3</sup>**  
*(ФГАОУВО «Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана (НИУ)», Москва)*

Работа посвящена исследованию функционирования астроинерциальной навигационной системы проекционного типа в режиме определения местоположения морского объекта по наблюдению небесных светил. Показаны преимущества астрономических систем инерциальной навигации для морских и авиационных объектов. Рассмотрены этапы развития астрономических средств навигации. Описаны принципы построения астронавигационных систем проекционного типа, рассмотрены конструктивные особенности системы. Построена математическая модель ошибок астроинерциальной системы проекционного типа. По результатам рассмотрения построенной математической модели проведено ранжирование ошибок астросистемы по степени влияния на ее выходные параметры. Рассмотрена методика алгоритмического сопряжения базисов звездного датчика и инерциального блока на основе использования метода градиентного спуска с постоянным шагом. Указаны условия проведения эксперимента. Приведена схема геодезической привязки астросистемы относительно корабельной системы координат. Выполнена качественная экспериментальная оценка погрешности определения местоположения судна экспериментальным образцом астроинерциальной системы проекционного типа. Сделан вывод о возможности применения АИНС для решения задач морской навигации. Сделан вывод о необходимости применения методики алгоритмического сопряжения базисов звездного датчика и инерциального блока как составной части технологии разработки и производства астроинерциальных систем.

Ключевые слова: астроинерциальная навигационная система, географические координаты, астродатчик, инерциальный блок, испытания.

---

<sup>1</sup> Альберт Сергеевич Болотнов, аспирант ([albertbolotnov@mail.ru](mailto:albertbolotnov@mail.ru)).

<sup>2</sup> Георгий Викторович Кондрашкин, аспирант ([yaegor93@mail.ru](mailto:yaegor93@mail.ru)).

<sup>3</sup> Михаил Юрьевич Шкатов, н.с., к.т.н, доцент ([shkatovmikhail@gmail.com](mailto:shkatovmikhail@gmail.com)).

## **1. Введение**

В судовождении и авиации методы астронавигации получили широкое распространение вплоть до начала XXI века [10]. Однако достижения в области инерциальных навигационных систем, комплексированных с глобальными спутниковыми системами GPS и ГЛОНАСС, свели роль астронавигации к минимуму, к роли вторичных навигационных систем.

Вместе с тем ряд факторов вновь вызвал интерес к астрономическим средствам и методам. Этому способствуют следующие преимущества астрономических систем [6].

Во-первых, астрономические системы автономны и помехоустойчивы.

Во-вторых, точность решения навигационных задач с применением астрономических средств не зависит от местоположения объекта; задача может быть решена в любой точке земного шара.

Во-третьих, точность решения навигационных задач с применением астрономических средств не зависит ни от времени измерения, ни от дальности пути следования объекта.

Прослеживая эволюцию развития астрономических средств навигации, можно выделить три этапа становления астронавигационных средств, характеризующихся различными методами. Исторически задача астронавигации решалась путем измерения углового положения светила относительно плоскости искусственного горизонта. В этих целях применялся навигационный секстант, морской хронометр и соответствующие таблицы. При этом географические широта и долгота определялись различными методами.

Повышение требований к точности и автономности астронавигации привело к созданию следующего поколения астронавигационных систем на основе оптических приборов. В качестве построителя астрономической вертикали использовались инерциальные датчики и системы различной конструкции. Такие системы получили название «астроинерциальные» (АИНС) [12]. Принцип работы таких систем заключался в наведении оси оптического прибора на отдельные светила и последующем из-

мерении их угловых положений в системе координат, связанной с наблюдателем, в плоскости астрономической вертикали. В основе метода астронавигации систем с наведением лежали измерения таких параметров, как высоты и азимуты светил в горизонтальной системе координат.

С появлением цифровых оптических астродатчиков, включающих в себя широкопольный объектив и приемную матрицу [13–15, 21], появилась возможность использования астрономо-геодезического принципа определения координат наблюдателя и истинного направления. В отличие от традиционных измеряемых параметров единичных светил (высота и азимут конкретных светил) в данном случае измеряется проекция углового положения оптической оси астродатчика относительно наблюдаемой группы светил. При этом определяются координаты оптической оси в инерциальной системе координат. Положение оптической оси в местной системе координат измерялось с применением прецизионных инерциальных измерительных блоков (ИИБ) [9, 16, 18], моделируя тем самым астрономическую вертикаль. Измеряемыми астронавигационными параметрами выступают проекции угловых положений светил относительно центра оптической оси приемной матрицы в инерциальной системе координат. Астроинерциальные системы нового поколения, построенные на описанном принципе, были названы системами проекционного типа.

В Инновационном технологическом центре МГТУ имени Н.Э. Баумана был построен образец астронавигационной системы. Конструктивно система представляет собой соединенные между собой оптический звездный датчик (ЗД) и ИИБ, базисы которых жестко связаны друг с другом [7]. Звездный датчик задает углы ориентации оптической оси в астрономической инерциальной системе, инерциальный блок – углы ориентации в горизонтальной топоцентрической системе координат (астрономическую приборную вертикаль).

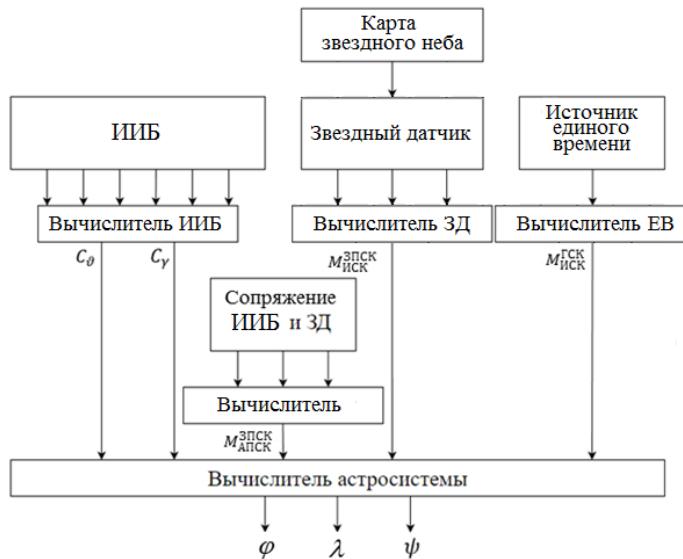
Такая компоновка, включающая в себя ЗД и ИИБ, позволила создать режим непрерывного астроинерциального счисления. Для морского исполнения была разработана система стабилизации и наведения [4, 8].

Для проверки работоспособности и подтверждения точностных характеристик были организованы испытания экспериментального образца навигационной системы на гидрографическом судне в акватории Черного моря.

Целью настоящей работы является экспериментальная оценка погрешности экспериментального образца АИНС морского применения в определении местоположения объекта по наблюдению за небесными светилами в условиях испытаний на гидрографическом судне.

## **2. Принципы построения АИНС проекционного типа и модель ее ошибок**

Общая блок-схема построения астронавигационной системы проекционного типа представлена на рис. 1.



*Рис. 1. Блок-схема построения АИНС проекционного типа*

Решение основной задачи астронавигации сводится к решению матричного уравнения, связывающего взаимное положение наблюдателя и астронавигационных ориентиров.

$$(1) \quad (C_\psi \cdot M_1) = (C_\vartheta)^{-1} \cdot (C_\gamma)^{-1} \cdot (M_2)^{-1} - M_3 \cdot (M_4)^{-1}.$$

В приведенном выражении:

$M_1$  – матрица направляющих косинусов (МНК) угловой ориентации местной географической системы координат (СК) относительно геоцентрической системы координат;

$M_2$  – МНК угловой ориентации звездного датчика (ЗПСК) относительно приборной системы координат инерциального блока (АПСК);

$M_3$  – МНК угловой ориентации приборной системы координат звездного датчика относительно инерциальной (второй экваториальной) системы координат;

$M_4$  – МНК угловой ориентации геоцентрической системы координат относительно инерциальной системы координат;

$C_\psi$  – МНК азимутальной угловой ориентации приборной системы координат, связанной с инерциальным блоком, относительно местной системы координат;

$C_\vartheta$  – МНК угловой ориентации по тангенажу приборной системы координат, связанной с инерциальным блоком, относительно местной системы координат;

$C_\gamma$  – МНК угловой ориентации по крену приборной системы координат, связанной с инерциальным блоком, относительно местной системы координат.

При этом:

$$(2) \quad \varphi = \arcsin (C_\psi \cdot M_1)_{33},$$

$$(3) \quad \lambda = \operatorname{arctg} \left\{ (C_\psi \cdot M_1)_{32} / (C_\psi \cdot M_1)_{31} \right\},$$

$$(4) \quad \psi = \operatorname{arctg} \left\{ (C_\psi \cdot M_1)_{32} / (C_\psi \cdot M_1)_{31} \right\},$$

где  $\varphi, \lambda$  и  $\psi$  – широта, долгота и курс соответственно.

На основе рассмотренной блок-схемы была построена математическая модель ошибок астроинерциальной системы проекционного типа [2, 11], включающая в себя 5 блоков:

- блок модели ошибок звездного датчика [5, 20];
- блок модели ошибок инерциального измерительного блока [17, 19];

- блок модели ошибок единого времени;
- блок моделирования сопряжения базисов звездного датчика и инерциального измерительного блока;
- блок модели ошибок выходных навигационных параметров астросистемы.

Результатом построения и анализа модели ошибок явились выводы о факторах ошибок, оказывающих воздействие на работу АИНС проекционного типа. Было разработано программное обеспечение, благодаря которому проанализировано влияние отдельных ошибок на выходные параметры системы. Результаты проведенного анализа обобщены в таблице 1. Моделирование проводилось для рабочего околозенитного пространства небесной сферы ( $\vartheta, \gamma \leq 10^\circ$ ). Ошибки ранжированы по степени влияния на выходные параметры астросистемы.

*Таблица 1. Оценка погрешностей определения навигационных параметров в зависимости от отдельных ошибок астросистемы*

Ошибки	Пределы изменения, угл. мин.	Ошибки географических координат, км	Ошибки курсового угла, угл. мин.
Рассогласование СК ЗД и ИИБ	от 0 до 10	от 0 до 30	от 0 до 20
Ошибки определения углов инерциальной вертикали	от 0 до 1	от 0 до 6	от 0 до 3
Ошибки определения звездного азимута	от 0 до 0,5	от 0 до 1,5	от 0 до 1
Ошибка за счет явления астрономической рефракции	от 0 до 0,2	от 0 до 0,6	от 0 до 0,3
Ошибки определения астрономических координат	от 0 до 0,1	от 0 до 0,3	от 0 до 0,1

В результате проведенных исследований было выявлено, что основным фактором, влияющим на работу астронавигационной системы проекционного типа, является рассогласование систем координат звездного датчика и инерциального измерительного блока. Для минимизации указанного фактора была разработана специальная методика алгоритмического сопряжения базисов звездного датчика и инерциального блока [3].

### 3. Методика сопряжения базисов ЗД и ИИБ

В идеальном случае приборные базисы инерциального блока и звездного датчика совпадают и матрица  $M_2$  будет единичной. В большинстве случаев приборные базисы ИИБ и звездного датчика различаются. Оценить величины рассогласований можно осуществить методом Эйлера, осуществляя три последовательных поворота вокруг трех осей, проходящих через неподвижную точку. Обозначив углы поворотов:  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ , можно назвать их углами коррекции. Полученную таким образом матрицу перехода от АПСК к ЗПСК можно назвать матрицей сопряжения приборных базисов ИИБ и ЗД, а метод определения величин углов поворота – методом алгоритмической коррекции. При этом

$$(5) \quad M_2 = R_{\alpha 1} \cdot R_{\alpha 2} \cdot R_{\alpha 3},$$

где  $R_{\alpha i}$  – МНК поворотов относительно углов коррекции  $\alpha_i$ .

Суть методики алгоритмического сопряжения заключалась в минимизации функционала  $\Delta x_n$ , представляющего функцию ошибок, которые определяются разностью найденных согласно выражениям (2)–(4) навигационных параметров и их эталонных значений. Этalonные значения географических координат и заданного направления определялись геодезическими методами с точностью до 10 м и 10 угловых секунд соответственно.

Полученные ошибки оценок навигационных параметров сравнивались с пороговыми значениями. В случае, если ошибки их оценок превышают заданные пороговые значения, выполняется подстройка величин начальных углов коррекции  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ . Искомая функция  $\Delta x_n$  неизвестна, она непрерывна и имеет лишь один локальный минимум. В этой связи задачу минимизации решается с применением алгоритма направленного поиска – например, градиентного спуска с постоянным шагом [1]. Для определения положения точки минимума можно искать ее относительно начальных значений ошибок  $\Delta x_0$ . Чтобы двигаться из точки  $\Delta x_0$  в сторону конечного искомого значения  $\Delta x_n$ , направление поиска определяется по знаку градиента:

$$(6) \quad \Delta x_1 = \Delta x_0 - \text{grad}(\Delta x_n)n.$$

Если градиент отрицателен, то функция  $\Delta x_n$  будет изменяться в сторону увеличения и направление минимизации следует изменить. Напротив, при положительном градиенте значение функции  $\Delta x_n$  уменьшится. Дальнейшие вычисления проводятся в найденном направлении с заданным шагом до тех пор, пока величина ошибки не сравняется с пороговым значением  $\Delta x_k \leq \Delta x_n$ , где  $k$  – количество итераций вычислений.

В работе [3] приводится описание эксперимента, в котором сравниваются результаты полученных геодезических координат с учетом проведенного сопряжения базисов ЗД и ИИБ и без него. Результатом проведения процедуры алгоритмического сопряжения явилось снижение ошибки определения широты с  $0,57^\circ$  до  $0,02^\circ$ , а долготы – с  $0,59^\circ$  до  $0,03^\circ$ . Полученные в результате проведенного сопряжения базисов значения погрешностей определения координат приблизительно соответствуют погрешностям определения инерциальной вертикали инерциального блока.

#### **4. Проведение корабельных испытаний АНС по проверке ее точностных характеристик в режиме непрерывного астроинерциального исчисления**

Объектовые (корабельные) испытания описанной системы для подтверждения ее точностных характеристик были проведены на базе гидографического судна, оснащенного навигационными приборами и системами, позволяющими вести выработку широты, долготы и курса в непрерывном режиме с предельными погрешностями по координатам  $\pm 10$  м, по курсу –  $\pm 30$  угл.сек. Корабельные испытания состояли из двух этапов: швартовых (береговых) и морских (ходовых) испытаний. Швартовые испытания носят подготовительный характер и направлены на проверку готовности АНС для проведения ходовых испытаний. Они проходят у причала, оборудованного береговыми ориентирами.

В процессе швартовых испытаний происходит проверка точности определения выходных навигационных параметров, вырабатываемых астросистемой. Географические координаты –

широта и долгота – сравниваются с эталонными показаниями, за которые принимаются показания спутникового приемника. При швартовых испытаниях проверяется точность определения курсового угла АИНС относительно диаметральной плоскости корабля. Курсовой угол астросистемы можно замерить только в неподвижном состоянии.

Для проведения корабельных испытаний осуществляется геодезическая привязка стендового оборудования, размещаемого на судне. Схема размещения элементов геодезической привязки относительно корабельной системы координат приведена на рис. 2.

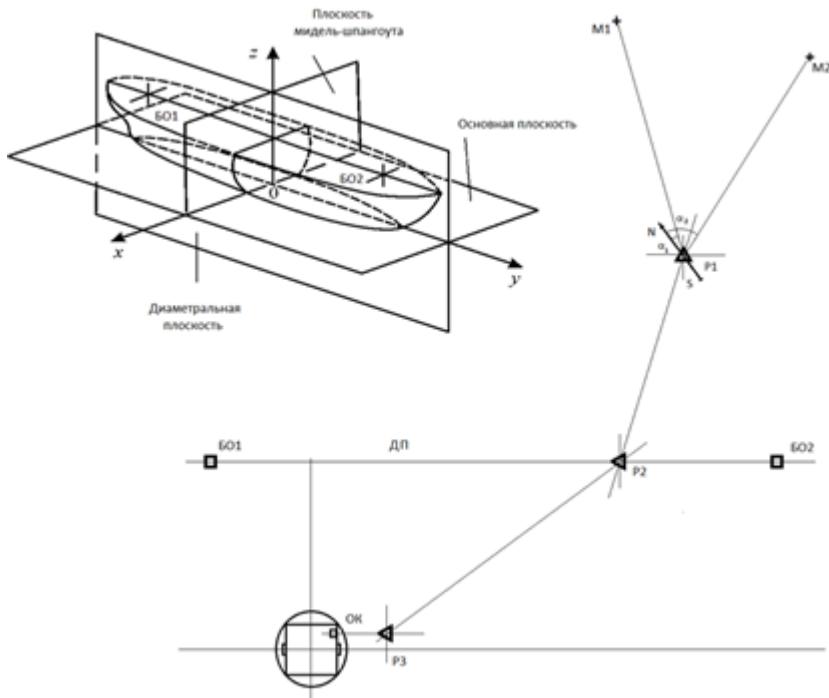


Рис. 2. Схема геодезической привязки АИНС относительно корабельной системы координат

На рис. 2 приведены следующие обозначения.

Р1 – реперная точка положения базового теодолита с погрешностью измерения угловых параметров не более 5 угл. сек. Положение базового теодолита остается неизменным в течение всего хода испытаний.

М1 и М2 – геодезические метки. Аналогично случаю натурных испытаний каждая метка выполнена в виде вертикальной риски на металлической пластине, закрепленной на стене удаленного сооружения. Обе метки через базовый теодолит ориентированы относительно Северного направления с точностью 5 угл. сек. Здесь  $\alpha_1$  – азимут направления на метку М1,  $\alpha_2$  – азимут направления на метку М2. Обе метки образуют базовое направление геодезической привязки.

Стрелка «S-N» обозначает направление на Север.

ДП – диаметральная плоскость корабля.

БО1, БО2 – базовые ориентиры диаметральной плоскости корабля. Линию БО1 – БО2 считается нулевым положением угловых отсчетов астронавигационной системы.

Р2 – реперная точка привязки базового корабельного теодолита. Через связку «базовый теодолит – корабельный базовый теодолит» осуществляется привязка диаметральной плоскости корабля к направлению на Север.

Р3 – реперная точка размещения измерительного теодолита.

ОК – оптический кубик – реперный отражатель АИНС.

Основным результатом проведения швартовых испытаний была проверка значений курсового угла относительно диаметральной плоскости корабля в режиме непрерывного астроинерциального исчисления. Погрешность измерения курса составила 1,9 угл. мин., что не превысило заданных требований.

В процессе ходовых испытаний подтверждаются точностные характеристики определения географических координат – широты и долготы – путем сравнения с координатами, вырабатываемыми бортовым спутниковым приемником. Географические координаты определяются работой АИНС в астроинерциальном режиме согласно выражению (1) по формулам выражений (2) и (3).

На рис. 3 и 4 показаны результаты ходовых испытаний. На рис. 3 приведена оценка погрешности широты по сравнению эталонным значением, вырабатываемым спутниковым приемником. На рис. 4 приведена оценка погрешности долготы, сравниваемая с долготой от указанного спутникового приемника.

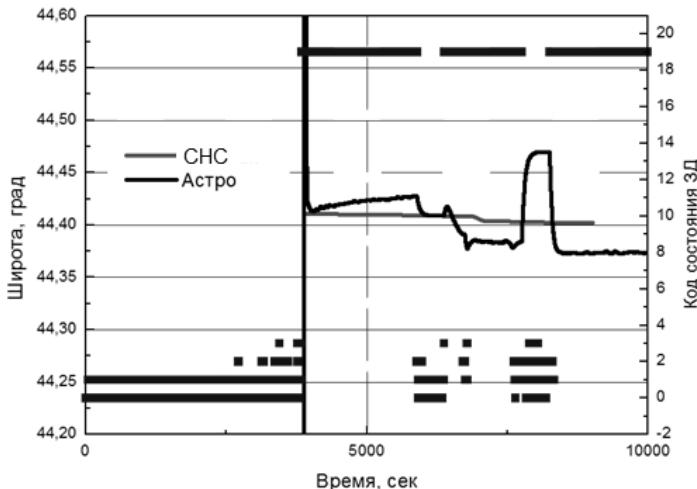


Рис. 3. Оценка погрешности определения широты

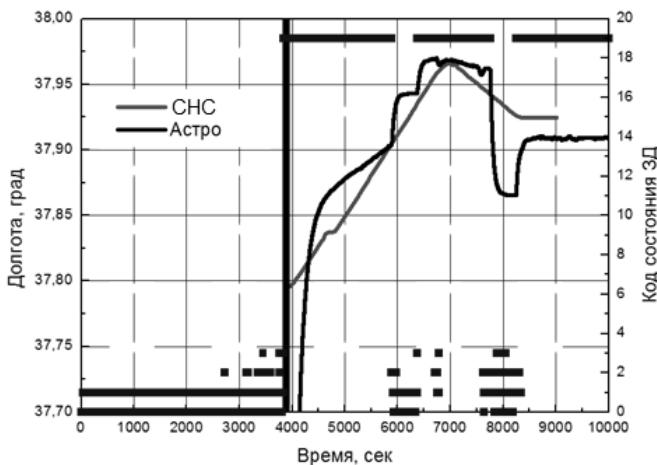


Рис. 4 Оценка погрешности определения долготы

Ходовые испытания проводились при средней скорости судна 6,2 м/сек (12 узлов) и волнении на море 2–3 балла.

На правой шкале графика показаны коды состояния звездного датчика. Код 19 означает видимость неба со стороны ЗД. На временах в области 6000 с и 8000 с видимость неба пропадает, вследствие чего система переходит в инерциальный режим и происходит нарастание погрешности определения как широты, так и долготы.

Основным результатом проведения ходовых испытаний была проверка значений географических координат относительно показаний бортового спутникового приемника в режиме непрерывного астроинерциального исчисления. Максимальное отклонение по широте составило величину не более 1,8 км, по долготе – не более 1,4 км.

## **5. Выводы**

Итогом проведенной проверки навигационных параметров астроинерциальной навигационной системы на морском объекте в режиме непрерывного астроинерциального исчисления можно считать следующее.

1. Впервые проверена работоспособность астронавигационной системы в реальных морских условиях в режиме астроинерциального исчисления. В ночное время всегда наблюдалось 5–6 светил, необходимых для решения астронавигационной задачи.

2. Выходные навигационные параметры не превышали пороговых значений, что свидетельствует о корректном применении методики алгоритмического сопряжения базисов ЗД и ИИБ.

3. Методика алгоритмического сопряжения базисов ЗД и ИИБ является важной составляющей технологий разработки и производства астронавигационных систем, совершенствование которых определяет дальнейшее повышение эксплуатационных характеристик изделия.

## ***Литература***

1. БАРВИНСКИЙ Д.А., МИНЕЕВА Т.А. *Применение метода градиентного спуска в решении задач оптимизации* // Тенденции развития науки и образования. – 2021. – №74-2. – С. 61–66.
2. БОЛОТНОВ А.С., КОНДРАШКИН Г.В. *Моделирование работы астроинерциальной навигационной системы на авиационном объекте* // Моделирование авиационных систем: Сборник тезисов докладов V Всероссийской научно-технической конференции, Москва, 29–30 ноября 2023 года. – Москва: Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, 2023. – С. 138–140.
3. БОЛОТНОВ А.С., БУРЫЙ Е.В., КОНДРАШКИН Г.В. *Достижимые погрешности определения навигационных параметров, формируемых астроинерциальной навигационной системой* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. – 2025. – №2(151). – С. 4–18.
4. БОЛОТНОВ С.А., ГЕРАСИМЧУК Ю.Н., ШКАТОВ М.Ю. и др. *Астрономические инерциальные системы для применения в морских навигационных комплексах* // Прикладная фотоника. – 2023. – Т.10, №4. – С. 89–101.
5. ВАСИЛЮК Н.Н. *Модель погрешностей звёздного датчика ориентации, учитывающая погрешности калибровки элементов внутреннего ориентирования цифровой камеры* // Гирроскопия и навигация. – 2024. – Т. 32, №1(124). – С. 53–71.
6. ВОРОБЬЕВ Л.М. *Астрономическая навигация летательных аппаратов*. – М.: Машиностроение, 1968. – 280 с.
7. ГЕРАСИМЧУК Ю.Н., БРАЙТКРАЙЦ С.Г., БОЛОТНОВ С.А. и др. *Основы определения корректирующих поправок в бесплатформенной астроинерциальной навигационной системе* // Новости навигации. – 2011. – №4. – С. 33–39.
8. МИЛЕРИС Л.Л., МУЛИНА Е.В., СИДОРЕНКО В.С. и др. *Обоснование необходимости использования на морских судах астронавигационных систем* // Вестник молодежной науки. – 2020. – С. 30–42.

9. СИНЕЛЬНИКОВ А.О., ТИХМЕНЕВ Н.В., УШАНОВ А.А. и др. *Современное состояние и тенденции развития инерциальных навигационных систем на кольцевых лазерных гироскопах* // Фотоника. – 2024. – Т. 18, №6. – С. 450–466.
10. СКУБКО Р.А., ШКАТОВ М.Ю. *Мореходная*. – СПб.: ВМИ, 2002. 652 с.
11. ЧЕПУРНОВ И.А., БОЛОТНОВ А.С., ПОГОРЕЛОВ М.П. и др. *Моделирование алгоритма ориентации беспилотной инерциальной навигационной системы беспилотного летательного аппарата в среде MATLAB Simulink* // Приоритетные направления инновационной деятельности в промышленности: Сборник научных статей VI международной научной конференции, Казань, 29–30 июня 2021 года. – Казань: Общество с ограниченной ответственностью "КОНВЕРТ", 2021. – С. 30–33.
12. ЧЕРЕНКОВ С.Г., ЧЕСНОКОВ Г.И. *Астроинерциальные навигационные системы, прошлое, настоящее, будущее* // Труды МИЭА. – 2016. – №12. – С. 34–35.
13. ALIPBAYEV K., SAUROVA K., DEMESINOVA S. et al. *Mathematical Modeling of a Star Sensor* // Int. Journal of Emerging Trends in Engineering Research. – 2020 – Vol. 8, No. 10. – P. 7442–7449.
14. ASADNEZHAD M., ESLAMIMAJD A., HAJGHASSEM H. *Optical system design of star sensor and stray light analysis* // Journal of the European Optical Society-Rapid Publications. – 2018. – No. 14(2). – P. 2–11.
15. DU W., WANG Y., WU Y. et al. *Optical system design and verification of star sensor applying to satellite internet platform* // Journal of Applied Optics. – 2024. – No. 45(1). – P. 8–16.
16. *Miniature Inertial Measurement Unit. Proven performer for satellite and deep-space-probe applications*. – Honeywell Aerospace, 2021. – URL: <http://www.aerospace.honeywell.com>.
17. SALYCHEV O.S. *Verified approaches to inertial navigation*. – Moscow: BMSTU press, 2017. – 368 p.
18. TAZARTES D. *An historical perspective on inertial navigation systems* // Int. Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). – Laguna Beach, CA, USA, 2014. – P. 1–5.

19. TITTRTON D.H., WESTON J.L., *Strapdown Inertial Navigation Technology*. – American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004. – P. 558.
20. VASILYUK N.N. *Star Tracker Error Model Taking into Account the Calibration Errors of Intrinsic Parameters of the Digital Camera // Gyroscopy and Navigation*. – 2024. – Vol. 15, No. 1. – P. 37–49.
21. WANG Q., DIAO M., GAO W. et al. *Integrated navigation method of a marine strapdown inertial navigation system using a star sensor // Measurement Science and Technology*. – 2015. – Art. 115101.

## TESTING OF THE CHARACTERISTICS OF AN STELLAR INERTIAL NAVIGATION SYSTEM ON A SHIP IN CONTINUOUS STELLAR CALCULATION MODE

**Albert Bolotnov**, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Postgraduate (albertbolotnov@mail.ru).

**Georgy Kondrashkin**, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Postgraduate (yaegor93@mail.ru).

**Mikhail Shkatov**, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Scientist, Cand.Sc., Assistant Professor (shkatovmikhail@gmail.com).

*Abstract: This work is devoted to the study of the functioning of an stellar inertial navigation system of the projection type in the mode of determining the location of a marine object by observing celestial bodies. The advantages of astronomical inertial navigation systems for marine and aviation objects are shown. The stages of development of astronomical navigation tools are considered. The principles of building stellar navigation systems of the projection type are described, and the design features of the system are considered. A mathematical model of the errors of a stellar inertial system of the projection type is constructed. Based on the results of the mathematical model, the errors of the stellar system are ranked according to their impact on its output parameters. The article considers the method of algorithmic conjugation of the star sensor and inertial unit bases based on the use of the gradient descent method with a constant step. The conditions for conducting the experiment are specified. The article also provides a diagram of the geodetic reference of the stellar system relative to the ship's coordinate system. A qualitative experimental assessment of the error in determining the vessel's location using an experimental model of a projection-type SINS has been performed. It has been con-*

*cluded that SINS can be used to solve maritime navigation tasks. It has been concluded that the methodology of algorithmic coupling of the star sensor and inertial unit bases should be used as an integral part of the technology for the development and production of stellar inertial systems.*

**Keywords:** stellar inertial navigation system, geographical coordinates, star sensor, inertial unit, tests

УДК 520.68

ББК 22.61

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.И. Алчиновым.*

*Поступила в редакцию 27.06.2025.*

*Опубликована 30.09.2025.*

**ПРОГРАММА ДЛЯ ПРОВЕРКИ СООТВЕТСТВИЯ  
ПРОТИВОПОЖАРНЫХ РАЗРЫВОВ  
НОРМАТИВНО-ТЕХНИЧЕСКИМ ТРЕБОВАНИЯМ  
НА ГЕНЕРАЛЬНОМ ПЛАНЕ  
НЕФТЕГАЗОХИМИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСОВ**

**Воронцов Г. О.<sup>1</sup>, Коваленко А. В.<sup>2</sup>**  
*(ФГБОУ ВО Кубанский государственный  
университет, Краснодар)*

*Генеральный план предприятия является инструментом эффективного использования территории, который обеспечивает размещение объектов с учетом технологических связей и функционального зонирования, что позволяет повысить производительность завода и снизить логистические расходы. Автоматизация генерального плана может способствовать улучшению качества проектирования, как за счет исключения ошибок, связанных с человеческим фактором, так и за счет перебора большего количества вариантов для нахождения оптимального решения. Программный комплекс позволит мгновенно генерировать новые схемы расположения объектов в зависимости от изменения текущих условий, предлагая несколько вариантов для выбора. Для автоматизированного размещения объектов на генеральном плане необходимо учитывать множество факторов. Программа, среди прочего, должна выполнять следующие функции: определять фактические минимальные расстояния между объектами, содержать данные о нормативных противопожарных расстояниях, сравнивать фактические минимальные расстояния с нормативными, выявлять случаи несоблюдения требований нормативно-технической документации и формировать отчет о фактических и нормативных расстояниях. Для реализации этих задач была разработана специализированная программа для проверки соответствия противопожарных расстояний нормативно-техническим требованиям на генеральном плане. Модуль является первым этапом для автоматизации проектирования генплана.*

**Ключевые слова:** генеральный план, математические модели, алгоритмы, оптимизация, автоматизированное проектирование, промышленное предприятие.

---

<sup>1</sup> Глеб Олегович Воронцов, аспирант ([vorontsovgo95@gmail.com](mailto:vorontsovgo95@gmail.com)).

<sup>2</sup> Анна Владимировна Коваленко, д.т.н., доцент ([savanna-05@mail.ru](mailto:savanna-05@mail.ru)).

## 1. Исходные данные

Для работы с программой пользователю необходимо предварительно подготовить файл формата DWG с расположением зданий и сооружений на плане, представленных полилиниями и кругами. В процессе работы программы необходимо будет соотнести объекты на плане с их характеристиками. Для этого каждому объекту требуется присвоить титульный номер путем создания блока и задания атрибута «НОМЕР». Данное действие выполняется с помощью команды, предусмотренной программой. После этого геометрические параметры объектов необходимо экспорттировать в таблицу и базу данных «parameters» (рис. 1). У прямоугольника извлекаются координаты X, Y левых нижних углов, длина и ширина. У круга извлекаются координаты центра и радиус.

Номер	X	Y	Длина	Ширина	Радиус
1	17	20	20	10	-
2	63	10	10	20	-
2	73	22	20	8	-
2	83	30	5	5	-
3	37	60	-	-	5
3	37	75	-	-	5
3	52	75	-	-	5
3	67	75	-	-	5
3	67	60	-	-	5
3	52	60	-	-	5

Рис. 1. Геометрические параметры объектов

Объект может являться многоугольником (такие многоугольники обычно встречаются в виде букв «Г», «П» и «Н»). Пользователь самостоятельно разделяет многоугольник на прямоугольники, присваивая прямоугольникам одинаковый титульный номер (рис. 2). Таким же образом необходимо поступить в ситуации, когда резервуары объединены в группу, входящую в резервуарный парк (каждому кругу присваивается одинаковый титульный номер).

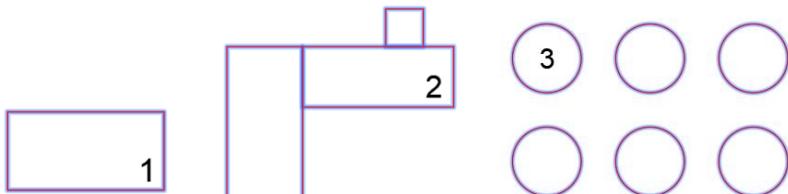


Рис. 2. Объекты на генеральном плане (1 – прямоугольник,  
2 – многоугольник, 3 – круги, объединенные в группу)

## 2. Определение фактических минимальных расстояний

Для определения фактических минимальных расстояний между объектами, имеющими форму прямоугольников, используются формулы, представленные в статьях [1, 2].

На практике сооружения также могут иметь форму круга, например резервуары, и форму простого многоугольника.

Для определения расстояний между прямоугольником и кругом формулы будут иметь вид:

$$(1) \quad S_{ci} = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} - R_c, \quad S_{ci} \geq D_{ci}, \quad \forall c, i \in \{1, \dots, n\}, c \neq i,$$

$$(2) \quad d_x = \max(x_c - (x_i + l_i), 0, x_i - x_c),$$

$$(3) \quad d_y = \max(y_c - (y_i + w_i), 0, y_i - y_c),$$

где  $S_{ci}$  – фактическое минимальное расстояние между объектами  $c$  и  $i$ ;  $D_{ci}$  – нормативное противопожарное расстояние между объектами  $c$  и  $i$ ;  $(x_i, y_i)$  – координаты левого нижнего угла объекта  $i$ ;  $l_i$  и  $w_i$  – длина и ширина объекта  $i$ ;  $(x_c, y_c)$  – координаты центра круга  $c$ ;  $R_c$  – радиус круга  $c$ .

Расстояние между двумя кругами  $Ci$  и  $Cj$  будет определено по формулам:

$$(4) \quad S_{CiCj} = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} - R_{Ci} - R_{Cj}, \quad S_{CiCj} \geq D_{CiCj},$$

$$\forall Ci, Cj \in \{1, \dots, n\}, Ci \neq Cj,$$

$$(5) \quad d_x = \max(x_{Ci} - x_{Cj}, x_{Cj} - x_{Ci}),$$

$$(6) \quad d_y = \max(y_{Ci} - y_{Cj}, y_{Cj} - y_{Ci}).$$

Многоугольные объекты  $M$  представляются прямоугольниками:

$$(7) \quad M = \bigcup_{j=1}^n P_j,$$

где  $M$  – многоугольник;  $P_j$  –  $j$ -й прямоугольник.

Определяется расстояние до каждого прямоугольника и принимается наименьшее:

$$(8) \quad S_{ij} = \min(S_{ij1}, S_{ij2}, S_{ij3}, \dots, S_{ijn}),$$

где  $S_{ij}$  – фактическое минимальное расстояние между объектами  $i$  и  $j$ ;  $S_{ij1}, S_{ij2}, S_{ij3}, \dots, S_{ijn}$  – фактическое минимальное расстояние между объектами  $i$  и  $j1$ ,  $i$  и  $j2$ ,  $i$  и  $j3$ ,  $i$  и  $jn$  соответственно (расстояние между объектами определяется с помощью формул, представленных в статьях [1, 2]).

### 3. Характеристики объектов

Пользователь заполняет характеристики объектов в таблицах программы с помощью выпадающего списка. Объекты распределены по группам, которые размещены в соответствующих вкладках:

1. Здания (рис. 3).

Тип здания: жилые и общественные, производственные и складские, здания производственной зоны.

Параметры: Степень огнестойкости, Класс опасности.

Номер объекта	Тип здания	Степень огнестойкости	Класс опасности
1	Жилые и общественные	▽   I	▽ C0 ▽
2	Производственные и складские	▽ III	▽ C1 ▽
3	Производственной зоны	▽ III	▽ C2 ▽

Рис. 3. Характеристики зданий

2. Промежуточные склады ЛВЖ и ГЖ (легковоспламеняющиеся и горючие жидкости) (рис. 4).

*Программы и системы моделирования объектов, средств  
и систем управления*

Параметры: Тип продукта, Емкость склада.

Номер объекта	Тип продукта	Емкость склада	
4	ЛВЖ	ЛВЖ(от 1000 до 2000)	
5	ГЖ	ГЖ(от 1500 до 3000)	

*Рис. 4. Характеристики промежуточных складов ЛВЖ и ГЖ*

3. Резервуары СУГ (сжиженные углеводородные газы) (рис. 5).

Параметры: Объем и способ хранения.

Номер объекта	Объем и способ хранения	Способ хранения		Объем
6	до 10000 м <sup>3</sup> под давлением	надземные под давлением	(2000-5000)	
7	до 40000 м <sup>3</sup> изотермически	подземные изотермические	(6000-10000)	
8	от 10000 м <sup>3</sup> под давлением	подземные под давлением	(более 10000)	

*Рис. 5. Характеристики резервуаров СУГ*

4. Установки и цеха (рис. 6).

Параметры: Категория.

Номер объекта	Объект	Категория	
9	Установка	Установка А	
10	Цех	Цех Б	

*Рис. 6. Характеристики установок и цехов*

5. Резервуарные парки ЛВЖ и ГЖ (рис. 7).

Параметры: Емкость склада.

Номер объекта	Тип продукта	Емкость склада	
11	ЛВЖ/ГЖ	ЛВЖ/ГЖ(от 20 000 до 100 000)	
12	ЛВЖ/ГЖ	ЛВЖ/ГЖ(от 100 000)	

*Рис. 7. Характеристики резервуарных парков ЛВЖ и ГЖ*

6. Сливо-наливные эстакады ЛВЖ и ГЖ (рис. 8).  
Параметры: Емкость склада.

Номер объекта	Тип продукта	Емкость склада	
13	СНЭ_ЛВЖ/СНЭ_ГЖ	▼	СНЭ_ЛВЖ(от 100 000) ▼
14	СНЭ_ЛВЖ/СНЭ_ГЖ	▼	СНЭ_ГЖ(от 20 000 до 100 000) ▼

Рис. 8. Характеристики сливо-наливных эстакад ЛВЖ и ГЖ

7. Другие объекты (рис. 9).  
Объекты: Печь для сжигания, Факельная установка, Продуктовая насосная, РУ ТП и ПП (распределительные устройства, трансформаторные подстанции, преобразовательные подстанции), Другой объект.

Номер объекта	Объект (таблица)	Объект	
15	Печь для сжигания	▼	Печь с ЛВЖ ▼
16	Факельная установка	▼	Факельная установка ▼
17	Продуктовая насосная	▼	Продуктовая насосная ▼
18	РУ, ТП и ПП	▼	РУ, ТП и ПП(закрытые) ▼
19	Другой объект	▼	Другой объект ▼

Рис. 9. Другие объекты

Заполненные характеристики автоматически консолидируются в общей таблице и хранятся в базе данных «characteristic» (рис. 10).

Программа поддерживает экспорт заполненных характеристик в XML-формате. Сохраненный XML-файл можно импортировать в программу. Это позволяет сохранять наборы характеристик объектов для отдельных проектов и повторно использовать их в будущем.

*Программы и системы моделирования объектов, средств  
и систем управления*

Объекты	Здания	Промежуточные ЛВЖ и ГЖ	Резервуары СУГ	Установки и цеха	Рез. парки ЛВЖ
1	2	3	4		
1	Жилые и общественные	I		C0	
2	Производственные и складские	III		C1	
3	Производственной зоны	III		C2	
4	ЛВЖ	ЛВЖ(от 1000 до 2000)			
5	ГЖ	ГЖ(от 1500 до 3000)			
6	до 10000 м <sup>3</sup> под давлением	надземные под давлением	(2000-5000)		
7	до 40000 м <sup>3</sup> изотермически	подземные изотермические	(6000-10000)		
8	от 10000 м <sup>3</sup> под давлением	подземные под давлением	(более 10000)		
9	Установка	Установка А			
10	Цех	Цех Б			
11	ЛВЖ/ГЖ	ЛВЖ/ГЖ(от 20 000 до 100 000)			
12	ЛВЖ/ГЖ	ЛВЖ/ГЖ(от 100 000)			
13	СНЭ_ЛВЖ/СНЭ_ГЖ	СНЭ_ЛВЖ(от 100 000)			
14	СНЭ_ЛВЖ/СНЭ_ГЖ	СНЭ_ГЖ(от 20 000 до 100 000)			
15	Печь для сжигания	Печь с ЛВЖ			
16	Факельная установка	Факельная установка			
17	Продуктовая насосная	Продуктовая насосная			
18	РУ, ТП и ПП	РУ, ТП и ПП(закрытые)			
19	Другой объект	Другой объект			

*Рис. 10. Характеристики объектов*

#### **4. Определение требуемых противопожарных расстояний**

Требуемые противопожарные расстояния определяются согласно таблицам нормативно-технической документации (НТД) (рис. 11) [5, 6, 7]. Для определения таблицы, по которой будет находиться расстояние, используется колонка 2 базы данных «characteristic» (рис. 10). В программе заданы правила определения таблиц в зависимости от типов объектов. Например, для определения расстояния между двумя установками используется таблица 40 [7], между резервуарным парком ЛВЖ и ГЖ и сливо-наливной эстакадой ЛВЖ и ГЖ используется таблица 3 [6]. Для поиска нормативного расстояния в таблице параметры колонок 3 и 4 базы данных «characteristic» (рис. 10) объединя-

ются. Алгоритм находит строку с характеристиками первого объекта, затем колонку с характеристиками второго объекта и возвращает значение на пересечении. Нормативные таблицы адаптированы к перечню характеристик, представленному в общей таблице (рис. 10). Стоит отметить, что в нормативной документации таблицы не симметричны. Например, в таблице 40 [7] заголовки столбцов содержат наименования «технологическая установка», «цех» и «факельная установка», тогда как заголовки строк, помимо вышеперечисленных, содержат и другие наименования. Для корректного поиска необходимо расширить таблицу, чтобы существовали все комбинации (дублировать данные), либо добавить проверку в обратном порядке для двунаправленного поиска.

Степень огнестойкости и Класс опасности	I C0 I C1 I C2 I C3 I I C0 I I C1 I I C2 I I C3 I I C0 I V C0	I I C1	I I I C2 I I I C3 I V C1 I V C2 I V C3 V C0 V C1 V C2 V C3
I C0 I C1 I C2 I C3 I I C0 I I C1 I I C2 I I C3 I I C0 I V C0	9	9	12
I I C1	9	12	15
I I I C2 I I I C3 I V C1 I V C2 I V C3 V C0 V C1 V C2 V C3	12	15	18

Рис. 11. Таблица для определения нормативного расстояния

## 5. Результат

Для корректного внесения результатов в таблицу необходимо синхронизировать между собой базы данных «parameters» и «characteristic». В каждой базе данных предусмотрено упорядочивание по возрастанию. Также при нажатии на кнопку «Рас считать расстояние» проводится проверка нумерации. Нумерация объектов одной базы данных должна полностью соответствовать другой. Если нумерация не совпадает, расчет не выполняется и программа выводит ошибку: «Не совпадает нумерация объектов». Таким образом, исключается возможность ошибки пользователя при назначении номеров объектов.

В результате выполнения расчетов программа отображает фактические минимальные расстояния и требуемые противопожарные расстояния между объектами (рис. 12). В колонке «Таблица» указывается таблица, на основании которой определяется

## *Программы и системы моделирования объектов, средств и систем управления*

нормативное расстояние. Фактическое минимальное расстояние должно быть больше требуемого НТД, в противном случае программа сообщит о несоблюдении нормативного требования.

Объекты	Расстояние	НТД	Выполнено	Таблица
7-29	62.008	30	+	СП155 таблица 3
7-30	36.125	40	Не выполнено	СП155 таблица 3
7-31	69.857	Не найдено	Не найдено	
7-32	41.037	Не найдено	Не найдено	
7-33	76.42	40	+	СП4 таблица 40
7-34	64.661	40	+	СП4 таблица 40
7-35	73.546	40	+	СП155 таблица 3
7-36	62.691	40	+	СП155 таблица 3
7-37	79	50	+	СП4 таблица 40

*Рис. 12. Результаты*

В перспективе, с учетом производственной необходимости, планируется дополнение перечня типов объектов и их характеристик, а также зависимостей (правил), на основе которых определяются нормативные таблицы и противопожарные расстояния.

## **6. Специальные технические условия**

Если требуется сократить нормативные расстояния или отсутствуют нормативные требования, допускается разработка специальных технических условий (СТУ), содержащих дополнительные требования в области безопасности.

Предположим, между объектами 1 и 2 не выполнено нормативное расстояние 25 м согласно таблице 40 [7]. Фактическое расстояние между объектами 16 м, что меньше нормативного значения (рис. 13).

Объекты	Расстояние	НТД	Выполнено	Таблица
1-2	16	25	Не выполнено	СП4 таблица 40

*Рис. 13. Нормативное расстояние не выполнено*

Если между объектами 1 и 2 разработано специальное техническое условие, то требуемое значение можно внести во вкладке СТУ (рис. 14).

Объект 1	Объект 2	Расстояние
1	2	15

Рис. 14. Заполнение значений во вкладке СТУ

После повторного нажатия на кнопку «Рассчитать расстояния» таблица обновится, укажет на наличие СТУ, а расстояние НТД примет значение, введенное пользователем (рис. 15). Если значение в колонке НТД станет меньше фактического расстояния, программа отобразит выполнение нормативного требования.

Объекты	Расстояние	НТД	Выполнено	Таблица
1-2	16	15	+	СТУ

Рис. 15. Обновление таблицы после заполнения вкладки СТУ

## 7. Заключение

Программа позволяет сравнивать фактические минимальные расстояния и требуемые противопожарные расстояния, выявляя несоответствие генерального плана нормативной документации.

Программный продукт является эффективным инструментом управления качеством проектирования. Программа работает по принципу цикла контроля и корректировки: измеряет фактические параметры, сравнивает их с нормативными значениями, идентифицирует отклонения и обеспечивает возможность оперативного внесения исправлений (вкладка СТУ). Также пользователь может вручную скорректировать исходные параметры, после чего программа выполнит повторную проверку. Модуль позволяет снижать вероятность ошибок на этапе проектирования, упрощает процесс проверки и сокращает временные затраты.

## *Программы и системы моделирования объектов, средств и систем управления*

Данный продукт станет частью программного комплекса, предназначенного для автоматизированной расстановки объектов на генплане. Размещение зданий и сооружений планируется осуществлять с помощью классических [3, 10] и современных методов [4, 8, 9].

### ***Литература***

1. ВОРОНЦОВ Г.О., КОВАЛЕНКО А.В. *Математические модели для автоматизации генерального плана промышленного предприятия // Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования: Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции, молодых ученых, Краснодар, 15–21 апреля 2024 года.* – Краснодар: Краснодарский ЦНТИ – филиал ФГБУ "РЭА" Минэнерго России, 2024. – С. 85–89.
2. ВОРОНЦОВ Г.О., КОВАЛЕНКО А.В. *Математические модели для автоматизированного размещения объектов на территории промышленного предприятия // Прикладная математика и вопросы управления.* – 2025. – №1. – С. 84–92. – DOI: 10.15593/2499-9873/2025.1.06.
3. ВОРОНЦОВ Г.О., КОВАЛЕНКО А.В., ОВСЯННИКОВА А.В. *Классические методы оптимизации для автоматизированного размещения объектов на территории промышленного предприятия // Нелинейный мир.* – 2024. – Т. 22, №4. – С. 20–27. – DOI: 10.18127/j20700970-202404-03.
4. КОВАЛЕНКО А.В., ВОРОНЦОВ Г.О. *Оптимизация компоновки завода с помощью алгоритма машинного обучения // Прикладная математика: современные проблемы математики, информатики и моделирования: Материалы V Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых.* – 2023. – С. 380–383.
5. *Правила устройства электроустановок (ПУЭ).* – 6-е изд.
6. *СП155.13130.2014 Склады нефти и нефтепродуктов. Требования пожарной безопасности.*
7. *СП4.13130.2013 Системы противопожарной защиты. Ограничение распространения пожара на объектах защи-*

- ты. Требования к объемно-планировочным и конструктивным решениям.
- 8. BÉNABÈS J., BENNIS F., POIRSON E. et al. *Interactive optimization strategies for layout problems* // Int. Journal on Interactive Design and Manufacturing (IJIDeM). – 2010. – Vol. 4(3). – P. 181–190. – DOI: 10.1007/s12008-010-0100-x.
  - 9. SCHOLZ D., JAEHN F., JUNKER A. *Extensions to STATS for practical applications of the facility layout problem* // European Journal of Operational Research. – 2010. – Vol. 204(3). – P. 463–472. – DOI: 10.1016/j.ejor.2009.11.012.
  - 10. XIE W., SAHINIDIS N.V. *A branch-and-bound algorithm for the continuous facility layout problem* // Computers and Chemical Engineering. – 2008. – Vol. 32. – P. 1016–1028. – DOI: 10.1016/j.compchemeng.2007.05.003.

## **A PROGRAM FOR CHECKING THE COMPLIANCE OF FIRE BREAKS REGULATORY AND TECHNICAL REQUIREMENTS ON THE MASTER PLAN OF PETROCHEMICAL COMPLEXES**

**Gleb Vorontsov**, Kuban State University, Krasnodar, Postgraduate Student (vorontsovgo95@gmail.com).

**Anna Kovalenko**, Kuban State University, Krasnodar, Doctor of Science, Associate Professor (savanna-05@mail.ru).

*Abstract: The general plan of the enterprise is a tool for the effective use of the territory, ensuring the placement of facilities, taking into account technological connections and functional zoning, which allows to increase the productivity of the plant and reduce logistical costs. Automatization of the master plan can help improve the quality of design, both by eliminating errors related to the human factor, and by sorting through more options to find the optimal solution. The software package will allow you to instantly generate new layouts of objects depending on changes in current conditions, offering several options to choose from. For automated placement of objects on the master plan, it is necessary to take into account many factors. The program, among other things, should perform the following functions: determine the actual minimum distances between objects, contain data on regulatory fire distances, compare actual minimum distances with regulatory ones, identify cases of non-compliance with the requirements of regulatory and technical documentation, and generate a report on actual and regulatory distances. To achieve these objectives, a specialized program has been*

*Программы и системы моделирования объектов, средств  
и систем управления*

*developed to verify the compliance of fire-fighting areas with the regulatory and technical requirements on the master plan. The module is the first stage for automating the design of the master plan.*

Keywords: master plan, mathematical models, algorithms, optimization, computer-aided design, industrial enterprise

УДК 004.42

ББК 30.2

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

*Поступила в редакцию 04.06.2025.  
Опубликована 30.09.2025.*