

Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН

# УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

*Выпуск 113*  
*Январь 2025*

**СБОРНИК  
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2025

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
*Институт проблем управления*  
*им. В.А. Трапезникова*

**УПРАВЛЕНИЕ  
БОЛЬШИМИ  
СИСТЕМАМИ**

**СБОРНИК ТРУДОВ**

*Выпуск 113*

**Москва – 2025**

### КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галяев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Главный редактор:** академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. физ.-мат. наук Горбунова А.В. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

### РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

**Арзамас** – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фургат И.Б. (ИПМ РАН).

**Адрес редакции:** 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

**Адрес в интернете:** [ubs.mtas.ru](http://ubs.mtas.ru).

# СОДЕРЖАНИЕ

## Системный анализ

---

**Битгер И.И.**

*Локальная предельная теорема для возмущенных  
выборочных траекторий индуцированных  
порядковых статистик.....* 6

**Сысоев А.С., Погодаев А.К., Сараев П.В.**

*Редукция иерархических моделей: чувствительность  
по факторам на основе анализа конечных изменений* 21

**Щербов И.Л.**

*Алгоритм адаптивного нелинейного сглаживания  
данных многопараметрических измерений .....* 37

## *Математическая теория управления*

---

**Ромадов С.В., Козырь А.В., Ефромеев А.Г.**

*Исследование характеристик линейной системы  
управления гибким объектом.....* 58

## *Анализ и синтез систем управления*

---

**Антипов А.С., Грезнев П.П.**

*Два подхода к синтезу закона управления конечной  
точкой двухзвенного манипулятора .....* 73

**Глущенко А.И., Ласточкин К.А.**

*Расположение в заданных множествах управления  
и выхода одного класса систем.....* 95

## *Информационные технологии в управлении*

---

**Рубинович Е.Я., Юрченков И.А., Назаркин В.А.**

*Метод экстраполяции сигналов на двумерной  
антенной системе с применением алгоритмов  
глубоких нейронных сетей для решения задачи  
сверхразрешения.....* 120

**Фархадов М.П., Теплухин Р.Г., Абраменков А.Н.,  
Абдулов А.В., Лычков И.И.**

*Расчет оптического потока Лукаса – Канаде  
с применением конечномерных теорем отсчетов .....* 151

## **Сетевые модели в управлении**

---

**Широкий А.А.**

*Влияние внутренней структуры на интегральный риск сложной системы на примере задачи минимизации риска в случае звездообразной структуры*..... 180

### **Управление в социально-экономических системах**

---

**Булавчук А.М., Семенова Д.В.**

*О задаче календарного планирования с критерием оптимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы*..... 215

**Марьясин О.Ю., Тихомиров Л.И.**

*Выявление одиночных аномалий в данных об энергопотреблении с использованием методов машинного обучения без учителя*..... 232

**Маханькова И.В., Дружинин П.В.**

*Моделирование избыточной смертности в пандемийный период в разрезе федеральных округов Российской Федерации* ..... 273

### **Управление техническими системами и технологическими процессами**

---

**Грушевский А.А., Ильинская Е.С., Финогеев А.А.**

*Методика и инструментальные средства оптимизации длительности светофорного цикла*..... 291

### **Управление подвижными объектами и навигация**

---

**Коргин Н.А., Мещеряков Р.В.**

*Концепция распределенной сети полигонов для отработки сценариев применения гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях: примеры реализации и перспективы развития* ..... 315

**Подвесовский А.Г., Филонов А.А., Венец В.И.,  
Настас Г.Н., Захарова А.А.**

*Модель принятия решений для задачи реконфигурации гетерогенной группы взаимодействующих объектов киберфизической системы*..... 346

# ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННЫХ ВЫБОРОЧНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ИНДУЦИРОВАННЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК<sup>1</sup>

Биттер И. И.<sup>2</sup>

(Международная лаборатория стохастического анализа и его приложений, НИУ ВШЭ, Москва)

Выводится локальная предельная теорема для возмущенных выборочных траекторий нормализованных сумм индуцированных порядковых статистик, полученных из последовательности независимых одинаково распределенных случайных векторов при слабых условиях регулярности на коэффициенты. Рассматриваемая ситуация является типовым примером задачи оценки скорости сходимости дискретных по времени марковских процессов к диффузиям, когда соответствующие тренды и коэффициенты диффузии марковской цепи и диффузионного предела совпадают лишь асимптотически. При описываемых выше условиях оказывается неприменимым классический результат Конакова и Маммена (2000) о скорости слабой сходимости треугольных массивов дискретных марковских процессов к диффузионному процессу с коэффициентами, совпадающими с коэффициентами цепей. Наш подход основан на изучении равномерного расстояния между переходными плотностями заданной неоднородной цепи Маркова и предельного гауссовского диффузионного процесса. В частности, оценка скорости сходимости получена с использованием классической предельной теоремы и оценок устойчивости типа параметрикса.

Ключевые слова: диффузионный процесс, индуцированные порядковые статистики, переходная плотность, локальные предельные теоремы.

## 1. Введение

### 1.1. Постановка задачи

Данная статья посвящена оценке скорости сходимости выборочных траекторий для индуцированных порядковых статистик. Общая концепция индуцированных порядковых статистик была впервые независимо введена Дэвидом [7] и Бхатгачарьей [3].

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-11-00123)

Автор выражает благодарность Конакову В. Д. за ценное обсуждение содержания статьи.

<sup>2</sup> Илья Игоревич Биттер, стажер-исследователь (ilya.bitter@yandex.ru).

Асимптотическая теория индуцированных порядковых статистик обсуждается в [7, 8, 9, 16, 21].

Слабая сходимость распределений дискретных по времени марковских процессов к диффузиям широко изучена. Классическая литература в этой области включает результаты Скорохода [18], Струка и Варадхана [19]. Эти результаты получены вероятностными методами. Однако в последнее время был представлен ряд результатов, полученных с использованием аналитического подхода к рассмотрению сходимости переходных плотностей марковских цепей к диффузиям, см. [13, 14, 17]. А именно, применение метода параметрикса для параболических УРЧП и модификация этого метода для дискретных по времени марковских цепей позволили количественно оценить слабую сходимость, упомянутую выше. Этот подход также может быть использован для доказательства локальных предельных теорем для алгоритмов стохастической аппроксимации, известных как процедуры Роббинса – Монро [12]. Более подробную информацию о применении метода параметрикса можно найти в [1, 10, 15].

В [13] авторы рассматривали треугольные массивы дискретных марковских процессов, которые слабо сходятся к диффузионному процессу с коэффициентами, совпадающими с коэффициентами цепей. Целью данной статьи является распространение результата скорости сходимости [13] на случай марковской цепи, сгенерированной индуцированными порядковыми статистиками, когда соответствующие тренды и коэффициенты диффузии марковской цепи и диффузионного предела совпадают асимптотически.

Пусть  $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots$  — независимые одинаково распределенные случайные векторы с распределением  $(X, Y)$ , где  $X \in \mathbb{R}$  и  $Y \in \mathbb{R}^d$ . Мы предполагаем, что первые компоненты векторов имеют непрерывную функцию распределения  $F$  с функцией квантиля  $F^{-1}$ , поэтому с вероятностью 1 для  $k$ -й порядковой статистики  $X_{nk}$ , полученной из  $X_1, \dots, X_n$ , мы имеем  $X_{n1} < \dots < X_{nn}$ . Определим индуцированные порядковые статистики  $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$  как  $Y_{nk} = Y_j$ , если  $X_{nk} = X_j$ . Обозначим

через  $m(x)$  условное математическое ожидание, а через  $\sigma^2(x)$  — условную ковариационную матрицу  $Y$  при условии  $X = x$ , и пусть  $\psi(t) = \int_{\infty}^{F^{-1}(t)} \sigma^2(x) dF(x)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

Основной результат [3] касается предельного поведения в случае  $d = 1$  выборочных траекторий

$$\left\{ S_{n,k} = \sum_{j=1}^k (Y_{nj} - m(X_{nj})), k = 1, \dots, n \right\}.$$

В данной статье мы заинтересованы в количественной оценке сходимости цепи Маркова

$$(1) \quad Z_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \hat{S}_{n,k},$$

где  $\hat{S}_{n,k}$  — многомерный возмущенный аналог  $S_{n,k}$ :

$$\left\{ \hat{S}_{n,k} = \sum_{j=1}^k \left( Y_{nj} - m(X_{nj}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \phi(X_{nj}) \right), k = 1, \dots, n \right\}$$

к диффузии с ненулевым трендом

$$(2) \quad dX_t = \psi^{-1}(1) \phi(F^{-1}(t)) dt + \psi^{-1}(1) \sigma(F^{-1}(t)) dB_t.$$

Процесс (1) имеет следующую динамику с  $t_k = \frac{k}{n}$  для  $k = 1, \dots, n$ :

$$(3) \quad Z_{n,k+1} = Z_{n,k} + \frac{1}{n} \psi^{-1}(1) \phi(X_{n,k+1}) + \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \sigma(F^{-1}(t_{k+1})) \bar{\delta}_{k+1},$$

где инновации  $\bar{\delta}_{k+1}$  имеют вид

$$(4) \quad \bar{\delta}_{k+1} = \sigma^{-1}(F^{-1}(t_{k+1})) (Y_{n,k+1} - m(X_{n,k+1})).$$

Условное среднее и дисперсия инноваций (4) при  $X_1, \dots, X_n$  равны

$$E \bar{\delta}_{k+1} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Cov } \bar{\delta}_{k+1} &= \text{Cov}(\sigma^{-1}(F^{-1}(t_{k+1})) (Y_{n,k+1} - m(X_{n,k+1}))) = \\ &= \sigma^{-1}(F^{-1}(t_{k+1})) \sigma(F_n^{-1}(t_{k+1})) \times \\ &\times [\sigma^{-1}(F^{-1}(t_{k+1})) \sigma(F_n^{-1}(t_{k+1}))]^*, \end{aligned}$$

где  $F_n$  — условная эмпирическая функция распределения  $X_1, \dots, X_n$  с соответствующей функцией квантиля  $F_n^{-1}$ , а  $A^*$  — транспонированная матрица для матрицы  $A$ .

**Лемма 1.** Если компоненты однопараметрической условной ковариационной матрицы  $\sigma^2(x) = E[\{Y - m(x)\}\{Y - m(x)\}^* | X = x]$  имеют ограниченную вариацию на  $(-\infty, \infty)$ , то  $\text{Cov } \bar{\delta}_{k+1} \rightarrow I_d, n \rightarrow \infty$ .

**Доказательство.** Поскольку  $\sup \sigma^2(x) < \infty$  и  $\sigma^2(x)$  имеет ограниченную вариацию на  $(-\infty, \infty)$ , лемма доказывается интегрированием по частям и применением теоремы Гливленко – Кантелли.

**Замечание 1.** В случае, когда ковариационная матрица инноваций в точности является единичной (не асимптотически), можно применить оценку скорости сходимости из [13].

### 1.2. Список предположений и основной результат

В этом разделе мы приводим список предположений, которым удовлетворяют коэффициенты уравнений.

**(А) (Непрерывность маргинального распределения первой компоненты)** Функция распределения  $F$  случайных величин  $X_1, \dots, X_n, \dots$  непрерывна.

**(В) (Конечность некоторого момента инноваций.)** Для некоторого целого  $S > d + 1$  выполняется  $E|\bar{\delta}_1|^S < \infty$ .

**(С) (Непрерывность по Гёльдеру композиций с функцией квантиля)** Композиция обобщенной обратной функции  $F^{-1}$  для  $F$  с трендом  $\phi$  и коэффициентом диффузии  $\sigma^2$  являются  $\alpha$ - и  $\theta$ -непрерывными по Гёльдеру с  $\alpha, \theta \leq 1$  соответственно.

**(D) (Регулярность коэффициентов)** Коэффициент диффузии  $\sigma^2(x) = E[\{Y - m(x)\}\{Y - m(x)\}^* | X = x]$  равномерно эллиптический,  $\gamma$ -непрерывен по Гёльдеру с  $\gamma \leq 1$  и имеет ограниченную вариацию на  $(-\infty, \infty)$ . Коэффициент тренда  $\phi$  является  $\beta$ -непрерывным по Гёльдеру с  $\beta \leq 1$ .

**(Е) (Stability)** Разница между функцией квантиля  $F^{-1}$  и ее эмпирическим аналогом

$$(5) \quad \Delta_n = \sup_t |F^{-1}(t) - F_n^{-1}(t)| \xrightarrow{a.s.} 0$$

как  $n \rightarrow \infty$ .

**(F)** Условные характеристические функции инноваций  $\bar{\delta}_k$  принадлежат классу  $L_1(\mathbb{R}^d)$  для всех  $n$  и  $1 \leq k \leq n$ .

Следующая лемма из [3] подтверждает условную независимость  $Y_{nk}$ .

**Лемма 2.** Для каждого  $n$  и почти всех  $(X_1, \dots, X_n), Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$  условно независимы при заданных  $X_1, \dots, X_n$  с условными функциями распределения  $G_{X_{n1}}, \dots, G_{X_{n\pi}}$  соответственно.

**Доказательство.**

Для любого  $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ , любые две координаты которого не равны, пусть  $\lambda(k, \mathbf{x}_n) = j$ , если  $x_j$  является  $k$ -м наименьшим из  $x_1, \dots, x_n$ . По Предположению 1,  $\lambda(k, \mathbf{X}_n)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , определены п.в. и  $X_{nk} = X_{\lambda(k, \mathbf{x}_n)}$ ,  $Y_{nk} = Y_{\lambda(k, \mathbf{x}_n)}$ . Следовательно, условная совместная функция распределения  $Y_{n1}, \dots, Y_{nn}$  при условии  $X_1, \dots, X_n$  совпадает с условной совместной функцией распределения  $Y_{\lambda(k, \mathbf{x}_n)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , при условии  $X_{\lambda(k, \mathbf{x}_n)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , которая, как легко видеть, является произведением  $\prod_{k=1}^n G_{X_{\lambda(k, \mathbf{x}_n)}} = \prod_{k=1}^n G_{X_{nk}}$  из-за независимости  $Y_i$  и  $X_j$  для каждого  $i \neq j = 1, \dots, n$ .

Для неотрицательного параметра  $u$  и  $S$  из Предположения **(B)** определим полиномиальное ядро  $Q_u(x) = u^{-d/2} \frac{1}{1 + |x|^S}$ .

Теперь сформулируем основной результат данной работы.

**Теорема 1.** Пусть  $p(t, x, y)$  и  $p_n(t, x, y)$  — переходные плотности процессов (2) и (1) соответственно. Тогда существуют константы  $C > 0$  и  $0 < c \leq 1$ , зависящие только от параметров из предположений, такие, что для всех  $0 \leq t_k \leq 1$  и  $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} |p - p_n|(t_k, x, y) &\leq \\ &\leq \frac{C|\psi^{-1}(1)|}{\sqrt{t_k}} \left( \max(\Delta_n^\beta, \Delta_n^\gamma) + \frac{1}{n^{\min(\alpha, \theta, 1/2)}} \right) \cdot Q_{t_k} \left( \frac{y - x}{\sqrt{t_k}} \right). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем обозначать через  $|\cdot|$  евклидову норму на  $\mathbb{R}^d$ . Мы также сохраним обозначение  $D_x^\nu = \prod_{i=1}^d D_{x_i}^{\nu_i}$  для дифференцирования по мультииндексу  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \in \mathbb{N}^d$ , для которого  $|\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i$ . В дальнейшем буква  $C$  обозначает положительную константу, которая зависит только от параметров в предположениях; в контексте доказательств ее значение может меняться от строки к строке.

## 2. Локальная предельная теорема

### 2.1. Сходимость квантильных процессов

В этом подразделе мы представляем некоторые оценки сходимости квантильного процесса  $\Delta_n$ , следуя [5] и [6].

Следующее предложение показывает, что при условии непрерывности функции квантиля  $F^{-1}$  теорема Гливленко – Кантелли будет подразумевать сходимость п.н.  $F_n^{-1}$  к  $F^{-1}$  (см. [20]).

**Предложение 1.**  $F_n^{-1}(t) \xrightarrow{a.s.} F^{-1}(t)$  при каждом  $t$ , где  $F^{-1}$  непрерывна.

Когда кумулятивная функция распределения  $F$  имеет конечный носитель и является дважды дифференцируемой функцией, имеются следующие результаты [5].

**Предложение 2.** Пусть  $F$  будет дважды дифференцируемой функцией распределения с  $F' = f$ , имеющей конечный носитель на  $\mathbb{R}^1$ . Предположим, что  $\inf_{0 \leq y \leq 1} f(F^{-1}(y)) > 0$  и  $\sup_{0 \leq y \leq 1} |f'(F^{-1}(y))| < \infty$ . Тогда  $\sup_{0 \leq y \leq 1} |F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y)| \xrightarrow{a.s.} 0$ .

**Предложение 3.** При условиях предыдущего предложения относительно  $F$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq y \leq 1} n^{1/2} f(F^{-1}(y)) \frac{|F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y)|}{(\log \log n)^{1/2}} \stackrel{a.s.}{=} 2^{-1/2}.$$

Однако во многих ситуациях, таких как гауссовские случайные величины, функция распределения не имеет конечного носителя.

В этом случае поведение  $\Delta_n$  можно изучить с помощью слабого аналога теоремы Гливленко – Кантелли.

**Предложение 4.** Пусть  $X_1, X_2, \dots$  будут независимыми одинаково распределенными случайными величинами с непрерывной функцией распределения  $F$ , которая также дважды дифференцируема на  $(a, b)$ , где  $a = \sup\{x : F(x) = 0\}$ ,  $b = \inf\{x : F(x) = 1\}$  и  $F' = f \neq 0$  на  $(a, b)$ . Тогда можно определить броуновский мост  $\{B_n(y); 0 \leq y \leq 1\}$  для каждого  $n$ . Если  $\sup_{a < x < b} F(x)(1 - F(x)) \left| \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right| \leq r$  для некоторого  $r > 0$ , то

$$\sup_{1/n \leq y \leq 1-1/n} f(F^{-1}(y)) |F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y)| \xrightarrow{P} 0.$$

Теперь определим нормализованный квантильный процесс  $q_n(y) = n^{\frac{1}{2}} (F_n^{-1}(y) - F^{-1}(y))$ ,  $0 < y < 1$ . Напомним, что броуновский мост  $\{B(y); 0 \leq y \leq 1\}$  – это сепарабельный гауссовский процесс с  $EB(y) = 0$  и ковариационной функцией  $EB(y_1)B(y_2) = y_1 \wedge y_2 - y_1 \vee y_2$ . Одним из основных результатов работы [6] является то, что квантильный процесс с точностью до некоторой нормировки может быть аппроксимирован последовательностью броуновских мостов.

**Теорема 2.** Пусть  $X_1, X_2, \dots$  являются независимыми одинаково распределенными процессами с.в. с непрерывной функцией распределения  $F$ , которая также дважды дифференцируема на  $(a, b)$ , где  $a = \sup\{x : F(x) = 0\}$ ,  $b = \inf\{x : F(x) = 1\}$  и  $F' = f \neq 0$  на  $(a, b)$ . Тогда можно определить броуновский мост  $\{B_n(y); 0 \leq y \leq 1\}$  для каждого  $n$ . Если  $\sup_{a < x < b} F(x)(1 - F(x)) \left| \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right| \leq r$  для некоторого  $r > 0$ , тогда

$$\sup_{\delta_n \leq y \leq 1-\delta_n} |f(F^{-1}(y)) q_n(y) - B_n(y)| \stackrel{a.s.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log n\right)$$

где  $\delta_n = 25n^{-1} \log \log n$ . Если, кроме того, мы также предположим, что  $f$  является неубывающей (невозрастающей) на

интервале справа от  $a$  (слева от  $b$ ), то

$$\sup_{0 < y < 1} |f(F^{-1}(y))q_n(y) - B_n(y)|$$

$$\stackrel{a.s.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} \log n\right), \quad \text{если } r < 2$$

$$\stackrel{a.s.}{=} O\left(n^{-\frac{1}{2}} (\log \log n)^r (\log n)^{(1+\varepsilon)(r-1)}\right), \quad \text{если } r \geq 2,$$

где  $\varepsilon > 0$  произвольно.

## 2.2. Доказательство основного результата

Доказательство основной теоремы 1 состоит из двух частей. В первой части мы аппроксимируем условную переходную плотность  $p_n$  цепи Маркова (1) вспомогательной гауссовской плотностью  $q$ . Следующая лемма количественно определяет указанную выше разницу.

**Лемма 3.** Пусть  $q$  будет плотностью перехода вспомогательного гауссовского процесса со средним значением и дисперсией, совпадающими с параметрами цепи Маркова (1) при заданных  $X_1, \dots, X_n$ . Тогда существует константа  $C > 0$  такая, что для всех  $k = 1, \dots, n$  и  $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

$$(6) \quad |p_n - q|(t_k, x, y) \leq \frac{C|\psi^{-1}(1)|}{\sqrt{t_k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathcal{Q}_{t_k} \left( \frac{y - x}{\sqrt{t_k}} \right).$$

**Доказательство.** Напомним, что  $p_n(t_k, x, \cdot)$  — это плотность случайного вектора

$$x + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n} \psi^{-1}(1) \phi(X_{n,k+1}) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \sigma(F^{-1}(t_{i+1})) \bar{\delta}_{i+1}$$

при заданных  $X_1, \dots, X_n$ . Пусть  $f_{n,k}(x)$  будет плотностью нормализованной суммы

$$S_{n,k} = D_{n,k}^{-1/2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \sigma(F^{-1}(t_{i+1})) \bar{\delta}_{i+1},$$

где  $D_{n,k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n} \psi^{-\frac{1}{2}}(1) \sigma^2(F^{-1}(t_{i+1})) (\psi^{-\frac{1}{2}}(1))^*$ . Очевидно, что

$$p_n(t_k, x, y) = \det D_{n,k}^{-1/2} f_{n,k} \left( D_{n,k}^{-1/2} (y - x - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n} \psi^{-1}(1) \phi(X_{n,k+1})) \right).$$

Из **(D)** следует, что

$$(7) \quad \begin{aligned} C^{-1} t_k^{-1/2} &\leq w^* D_{n,k}^{-1/2} w \leq C t_k^{-1/2}, \\ C^{-1} t_k^{-d/2} &\leq \det D_{n,k}^{-1/2} \leq C t_k^{-d/2} \end{aligned}$$

с  $C \geq 1$  для всех  $w \in \mathbb{R}^d$ ,  $|w| = 1$ . Наша стратегия заключается в применении теоремы 19.3 из [2] для нормализованной суммы  $S_{n,k}$ . Для этого утверждения нам нужно проверить следующие условия. Прежде всего матрица  $B_n$  из [2] соответствует  $B_k = k^{1/2} \cdot D_{n,k}$ . Конечность в условии (19.27) теперь следует из **(B)**. Далее, условие **(F)** в сочетании с (7) гарантирует, что условия (19.27) и (19.30) также выполняются. Это означает, что для  $S_{n,k}$  локальное классическое предельное предложение применимо со следующей гауссовой плотностью в качестве ведущего члена

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det D_{n,k}}} \phi_{0,I} \left( D_{n,k}^{-1/2} (y - x - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{n} \psi^{-1}(1) \phi(X_{n,k+1})) \right).$$

Чтобы завершить доказательство этой леммы, отметим, что существует константа  $C > 0$  такая, что  $\exp(-x^2) \leq \frac{C}{1 + |x|^S}$ .

Вторая часть — вывод верхней оценки для разности между вспомогательной плотностью  $q$  и переходной плотностью предельного процесса (2). Эта оценка зависит от того, насколько близки параметры упомянутых процессов. В следующей лемме будет дана оценка для разности средних.

**Лемма 4.** При заданных  $X_1, \dots, X_n$  имеем

$$(8) \quad |E(Z_{n,k}) - E(X_{t_k})| \leq C t_k |\psi^{-1}(1)| \left( \Delta_n^\beta + \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

**Доказательство.** Используя тот факт, что  $\{t_k\}_{k=1}^n$  является разбиением интервала  $[0, 1]$ , имеем

$$|E_i(Z_{n,k}) - E_i(X_{t_k})| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1}{n} \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) - \psi_i^{-1}(1) \int_0^{t_k} \phi_i(F^{-1}(u)) du \right| = \\
 &= \left| \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) du - \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \phi_i(F^{-1}(u)) du \right| \leq \\
 &\leq \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) - \phi_i(F^{-1}(u))| du \leq \\
 &\leq \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\phi_i(F_n^{-1}(t_{j+1})) - \phi_i(F^{-1}(t_{j+1}))| du + \\
 &+ \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\phi_i(F^{-1}(t_{j+1})) - \phi_i(F^{-1}(u))| du := \\
 &:= I + II.
 \end{aligned}$$

Теперь, принимая во внимание предположения **D** и **E**, получаем

$$\begin{aligned}
 I &\leq C \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \Delta_n^\beta du = C t_k \psi_i^{-1}(1) \cdot \Delta_n^\beta, \\
 II &\leq C \psi_i^{-1}(1) \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |t_{j+1} - u|^\alpha du = C t_k \psi_i^{-1}(1) \cdot \frac{1}{n^\alpha}.
 \end{aligned}$$

Следующая лемма количественно определяет разницу ковариационных матриц.

**Лемма 5.** При заданных  $X_1, \dots, X_n$  имеем

$$(9) \quad |Cov(Z_{n,k}) - Cov(X_{t_k})| \leq C t_k |\psi^{-2}(1)| \left( \Delta_n^\gamma + \frac{1}{n^\theta} \right).$$

**Доказательство.** Еще раз действуя так же, как в доказательстве леммы (8), для  $1 \leq i, j \leq d$  получаем

$$|Cov_{ij}(Z_{n,k}) - Cov_{ij}(X_{t_k})| =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \psi_{ij}^{-2}(1) \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \sigma_{ij}^2(F_n^{-1}(t_{l+1})) du - \right. \\
 &\quad \left. - \psi_{ij}^{-2}(1) \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \sigma_{ij}^2(F^{-1}(u)) du \right| \leq \\
 &\leq \psi_{ij}^{-2}(1) \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} |\sigma_{ij}^2(F_n^{-1}(t_{l+1})) - \sigma_{ij}^2(F^{-1}(t_{l+1}))| du + \\
 &\quad + \psi_{ij}^{-2}(1) \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} |\sigma_{ij}^2(F^{-1}(t_{l+1})) - \sigma_{ij}^2(F^{-1}(u))| du := \\
 &:= I + II.
 \end{aligned}$$

Используя тот факт, что ограниченность и непрерывность по Гёльдеру  $\sigma$  влекут непрерывность по Гёльдеру и ограниченность  $\sigma^2$  с тем же параметром  $\gamma$ , мы легко получаем

$$\begin{aligned}
 I &\leq C \psi_{ij}^{-2}(1) \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} \Delta_n^\gamma du = C t_k \psi_{ij}^{-2}(1) \cdot \Delta_n^\gamma, \\
 II &\leq C \psi_{ij}^{-2}(1) \sum_{l=0}^{k-1} \int_{t_l}^{t_{l+1}} |t_{l+1} - u|^\theta du = C t_k \psi_{ij}^{-2}(1) \cdot \frac{1}{n^\theta}.
 \end{aligned}$$

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 1.

**Доказательство.** Давайте теперь определим переходные плотности для предельной диффузии (2) и вспомогательного процесса с  $(d+1) \times d$  матрицами  $\Omega_p$  и  $\Omega_q$ , состоящими из первых строк, которые являются компонентами соответствующих средних векторов, и  $d \times d$  ковариационных матриц.

Для  $(d+1) \times d$  матрицы  $A$  мы обозначим через  $A_1$  первую строку, а через  $A_{2:d+1}$  — квадратную матрицу, составленную из строк от 2 до  $d+1$ .

Мы можем переписать  $p(t_k, x, y)$  и  $q(t_k, x, y)$  в терминах  $\Omega_p$  и  $\Omega_q$ :

$$\begin{aligned} p(t_k, x, y) &= f(\Omega_p), \\ q(t_k, x, y) &= f(\Omega_q), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^{(d+1) \times d} \rightarrow \mathbb{R}, \\ A &\mapsto f(A) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \det(A_{2:d+1})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle (A_{2:d+1})^{-1}(y - A_1 - x), y - A_1 - x \rangle\right). \end{aligned}$$

Итак, применяя разложение Тейлора, имеем

$$\begin{aligned} |p - q|(t_k, x, y) &= |f(\Omega_p) - f(\Omega_q)| = \\ &= \left| \sum_{|\nu|=1} (\Omega_p - \Omega_q)^\nu \cdot \int_0^1 (1 - \lambda) \mathcal{D}^\nu f \{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\} d\lambda \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^d (E_i(Z_{n,k}) - E_i(X_{t_k})) \cdot \int_0^1 (1 - \lambda) \mathcal{D}^{\nu^i} f \{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\} d\lambda + \right. \\ &+ \sum_{i,j=1}^d (Cov_{ij}(Z_{n,k}) - Cov_{ij}(X_{t_k})) \times \\ &\times \left. \int_0^1 (1 - \lambda) \mathcal{D}^{\nu^{2:d+1}} f \{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\} d\lambda \right| \leq \\ &C \cdot |E(Z_{n,k}) - E(X_{t_k})| \cdot \sum_{i=1}^d \left| \int_0^1 (1 - \lambda) \mathcal{D}^{\nu^i} f \{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\} d\lambda \right| + \\ &+ C \cdot |Cov(Z_{n,k}) - Cov(X_{t_k})| \times \\ &\times \sum_{i,j=1}^d \left| \int_0^1 (1 - \lambda) \mathcal{D}^{\nu^{2:d+1}} f \{\Omega_p + \lambda(\Omega_q - \Omega_p)\} d\lambda \right|. \end{aligned}$$

Из прямых вычислений для любого мультииндекса  $\nu$

$$|D_x^\nu p(t_k, x, y)| + |D_x^\nu q(t_k, x, y)| \leq \frac{C}{t_k^{(|\nu|+d)/2}} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{\det \text{Cov}(X_{t_k})}} \phi_{0,I} \left[ (\text{Cov}(X_{t_k}))^{-1/2} (y - x - E(X_{t_k})) \right] + \frac{1}{\sqrt{\det \text{Cov}(Z_{n,k})}} \phi_{0,I} \left[ (\text{Cov}(Z_{n,k}))^{-1/2} (y - x - E(Z_{n,k})) \right] \right).$$

Теперь, вспоминая, что дифференцирование гауссовской переходной плотности по  $i$ -му ( $i, j$ -му) элементу вектора средних (ковариационной матрицы) совпадает с дифференцированием по  $i$ -й координате начальной точки (двойное дифференцирование по  $i$ -й и  $j$ -й координатам начальной точки, умноженным на  $\frac{1}{2}$ ) [см. [4]], и объединяя с оценками (8) и (9), завершаем доказательство теоремы 1.

### Литература

1. BITTER I., KONAKOV V. *L1 and L $\infty$  stability of transition densities of perturbed diffusions* // Random Oper. Stoch. Eq. – 2021. – Vol. 29(4). – P. 287–308.
2. BHATTACHARYA R., RAO R. *Normal approximations and asymptotic expansions*. – Wiley and sons, 1976.
3. BHATTACHARYA P.K. *Convergence of Sample Paths of Normalized Sums of Induced Order Statistics* // Ann. Statist. – September, 1974. – Vol. 2(5). – P. 1034–1039.
4. CRAMER H., LEADBETTER M.R. *Stationary and related stochastic processes*. – Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004.
5. CSÖRGÓ M., RÉVÉSZ P. *Strong Approximations of the quantile process* // The Annals of Statistics. – 1978. – Vol. 6, No. 4. – P. 882–894.
6. CSÖRGÓ M. *Quantile Processes with Statistical Applications* // Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1983.
7. DAVID H.A. *Concomitants of order statistics* // Bull. Internat. Statist. Inst. – 1973. – Vol. 45. – P. 295–300.

8. DAVID H.A., GALAMBOS J. *The asymptotic theory of concomitants of order statistics* // J. Appl. Probab. – 1974. – Vol. 11. – P. 762–770.
9. DAVYDOV YU., EGOROV V. *Functional limit theorems for induced order statistics* // Mathematical Methods of Statistics. – January, 2000. – Vol. 9(3). – P. 297–313.
10. DELARUE F., MENOZZI S. *Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations* // J. Funct. Anal. – 2010. – Vol. 259(6). – P. 1577–1630.
11. GALAMBOS J. *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*. – Krieger, Malabar, FL, 1987.
12. KONAKOV V., MAMMEN E. *Local Limit Theorems and Strong Approximations for Robbins-Monro Procedures* // arXiv:2304.10673. – 2023.
13. KONAKOV V., MAMMEN E. *Local limit theorems for transition densities of Markov chains converging to diffusions* // Probability Theory and Related Fields. – 2000. – Vol. 117. – P. 551–587.
14. KONAKOV V., KOZHINA A., MENOZZI S. *Stability of densities for perturbed diffusions and Markov chains* // ESAIM: Probability and Statistics. – 2017. – Vol. 21. – P. 88–112.
15. MENOZZI S., PESCE A., ZHANG X. *Density and gradient estimates for non-degenerate Brownian SDEs with unbounded measurable drift* // J. Diff. Eq. – 2021. – Vol. 272. – P. 330–369.
16. SEN P.K. *A note on invariance principles for induced order statistics* // The Annals of Probab. – 1976. – Vol. 4. – P. 474–479.
17. KOZHINA A. *Weak error for the Euler scheme approximation of degenerate diffusions with nonsmooth coefficients* // Fundam. Prikl. Mat. – 2018. – Vol. 22, Iss. 3. – P. 91–118.
18. SKOROHOD A.V. *Studies in the theory of random processes*. – Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965. [English translation of Skorohod A.V. Issledovaniya po teorii sluchaynykh protsessov. – Kiev University Press, 1961.]
19. STROOCK D.W., VARADHAN S.R. *Multidimensional*

- diffusion processes*. – Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.
20. VAN DER VAAR A.W. *Asymptotic Statistics*. – Cambridge University Press, 1998.
21. YANG S.S. *General distribution theory of the concomitants of order statistics* // *The Annals of Statist.* – 1977. – Vol. 5. – P. 996–1002.

## LOCAL LIMIT THEOREM FOR A PERTURBED SAMPLE PATHS OF INDUCED ORDER STATISTICS

**Илья Bitter**, Research Intern of Laboratory of Stochastic Analysis and its Applications, HSE University, Moscow, (ilya.bitter@yandex.ru).

*Abstract: In this paper we derive a local limit theorem for a perturbed sample paths of normalized sums of induced order statistics obtained from a sequence of independent identically distributed random vectors under weak regularity conditions on the coefficients. The situation under consideration is a typical example of the problem of estimating the rate of convergence of discrete-time Markov processes to diffusions, when the corresponding trends and diffusion coefficients of the Markov chain and the diffusion limit coincide only asymptotically. Under the conditions described above, the classical result of Konakov and Mammen (2000) on the rate of weak convergence of triangular arrays of discrete Markov processes to a diffusion process with coefficients that coincide with the coefficients of the chains turns out to be inapplicable. Our approach is based on the study of the uniform distance between the transition densities of the underlying inhomogeneous Markov chain and the limiting gaussian diffusion process. In particular, the convergence rate estimate derived from the well-known classical limit theorem and the parametrix-type stability bounds.*

Keywords: diffusion process, induced order statistics, transition density, local limit theorems.

УДК 519.2

ББК 22.17

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.И. Орловым.*

*Поступила в редакцию 07.11.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*

# РЕДУКЦИЯ ИЕРАРХИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ: ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО ФАКТОРАМ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА КОНЕЧНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ<sup>1</sup>

Сысоев А. С.<sup>2</sup>, Погодаев А. К.<sup>3</sup>, Сараев П. В.<sup>4</sup>  
(ФГБОУ ВО «Липецкий государственный технический  
университет», Липецк)

*Выбранный класс математических моделей определяет методы, применяемые при исследовании системы или процесса, подходы к управлению ими. Одним из направлений управления структурой модели является ее редукция, понимаемая как сокращение числа факторов с целью построения менее ресурсоемкой с точки зрения использования вычислительных ресурсов модели. Данная задача может быть отнесена к понятию математического ремоделирования — построения новой модели на основе известной. Среди способов решения такой задачи стоит выделить анализ чувствительности модели по факторам, который можно провести различными способами. Один из таких способов основан на применении метода анализа конечных изменений для нахождения мер чувствительности. В основе этого метода — использование теоремы Лагранжа о промежуточной точке. Указанная теорема позволяет получить точное разложение конечного приращения отклика модели как взвешенной суммы конечных приращений ее факторов. В статье описывается подход, позволяющий произвести анализ чувствительности такого типа на каждом из уровней иерархической системы, а также сквозной анализ, предполагающий нахождение оценок мер влияния выходов моделей предшествующих уровней на выход модели верхнего уровня. Представлены численные примеры, демонстрирующие применимость метода. В качестве класса моделей, описывающих уровни иерархии системы, использованы классические полносвязные нейронные сети.*

Ключевые слова: математическое моделирование, редукция, ремоделирование, анализ чувствительности, анализ конечных изменений.

## 1. Введение

Выбранный класс математических моделей определяет методы, применяемые при исследовании системы или процесса, под-

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00474, <https://rscf.ru/project/24-21-00474/>.

<sup>2</sup> Антон Сергеевич Сысоев, к.т.н., доцент ([sysoev\\_as@stu.lipetsk.ru](mailto:sysoev_as@stu.lipetsk.ru)).

<sup>3</sup> Анатолий Кирьянович Погодаев, д.т.н., профессор ([pak@stu.lipetsk.ru](mailto:pak@stu.lipetsk.ru)).

<sup>4</sup> Павел Викторович Сараев, д.т.н., доцент ([psaraev@yandex.ru](mailto:psaraev@yandex.ru)).

ходы к управлению ими. Методы оценки построенной модели (квалиметрирования) могут быть разделены на две группы [4]: управление свойствами выборки и управление свойствами самой математической модели. Управление свойствами выборки позволяет решить задачу построения несмещенных выборок экспериментальных данных, нахождения несмещенных оценок дисперсий случайных величин, построения доверительных интервалов и проверки статистических гипотез. Решению таких задач посвящено большое количество классических работ, среди которых необходимо отметить работы Эфрона [7]. Управление свойствами модели может преследовать решение задач редуцирования, функционального, структурного и параметрического преобразования модели, агрегации, декомпозиции. Под редуцированием понимается процесс снижения размерности модели и трудоемкости вычислений по ней. Направлениями решения этой задачи являются методы планирования эксперимента, методы анализа чувствительности, а также достаточно большие классы статистических и аналитических подходов [13]. Многие реальные процессы могут быть представлены в виде заданной последовательности подпроцессов, находящихся в иерархическом подчинении [2]. Также редукция модели интерпретируется как один из подходов математического ремоделирования [11].

Анализ чувствительности — это исследование того, как неопределенность входных данных влияет на неопределенность выходов системы [3, 10]. Такое определение предполагает исследование связи поведения отклика системы с изменениями ее факторов с целью определить, какой вклад каждый из факторов вносит в изменение отклика. В зависимости от используемых инструментов предложены различные подходы к оценке чувствительности модели. Некоторые из них универсальны, другие могут быть применены только в том случае, если модель имеет заранее определенную структуру. Следует отметить, что в последнее десятилетие интерес к исследованию чувствительности в прикладных задачах возрос. Среди примеров таких задач можно привести применение анализа чувствительности в медицине. В работе

[9] параметрический метод локального анализа чувствительности применяется к модели кровеносной системы человека для выявления наиболее важных ее электрических и структурных факторов. В работе [15] используются индексы Соболя, примененные к модели коронавирусной инфекции для изучения индивидуальных эффектов ее факторов, а также их взаимного влияния параметров на выходные переменные модели. В работе [8] проведен глобальный анализ чувствительности на основе коэффициента корреляции частичных рангов для выявления ключевых параметров, вносящих наиболее существенный вклад в абсорбцию и распределение лекарств и наночастиц в различных органах человеческого тела. Еще одна область, где широко применяется анализ чувствительности, — экологические исследования. Например, исследование [12] направлено на решение проблемы выбора размера выборки и нахождения пороговых значений для выявления нечувствительных входных факторов для экологических моделей.

Пусть задана векторная переменная (факторы, входы)  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , влияющая на скалярную функцию (отклик, выход)  $y$ , которая описывается с помощью некоторого соотношения: (1)

$$y = f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}).$$

Глобальный анализ чувствительности предполагает получение результатов с учетом одновременных изменений всех факторов модели с целью учета возможных взаимодействий между ними. Наиболее известным примером глобальных мер чувствительности является индекс чувствительности первого порядка, предложенный Соболем (см. [13]):

$$(2) \quad S_i = \frac{V_{x_i}(E_{\mathbf{x} \sim i}(y|x_i))}{V(y)},$$

где  $V(y)$  — безусловная дисперсия  $y$ , получаемая при варьировании всех факторов  $x_i$ ;  $E_{\mathbf{x} \sim i}(y|x_i)$  — среднее значение  $y$  при фиксированном одном факторе. Глобальный подход применяется, когда модель (1) имеет нелинейный характер и ее факторы независимы друг от друга.

Иерархические системы в настоящее время широко используются для описания сложных (многоступенчатых) объек-

тов и систем [14]. Среди существующих стратегий проведения анализа чувствительности для таких систем можно выделить ряд подходов.

Первая группа предполагает, что сложная модель рассматривается как «черный ящик», существующие связи между ее компонентами игнорируются. Это очевидный сценарий, который может быть применен для относительно небольших и вычислительно «недорогих» моделей. В случае наличия связей между входами сложных систем такой подход может оказаться неэффективным. Когда модель требует больших вычислительных ресурсов, большое количество запусков может сделать анализ чувствительности невыполнимым. В таком случае для сокращения количества входов модели можно провести анализ чувствительности для подмоделей, а затем выбрать наиболее чувствительные входы из всего множества возможных.

Возможно также использование подхода, при котором каждая подмодель анализируется независимо, оцениваются коэффициенты чувствительности для каждого входа до того, как рассматривается иерархическая связь. Однако такой анализ не может полностью объяснить поведение факторов вне контекста. Чтобы устранить эту проблему, можно провести анализ чувствительности, изменяя только определенные входы выбранных подмоделей, но при этом оценивая связанные составные части иерархии или даже всю модель. Такой подход отличается от предыдущего тем, что модель не рассматривается как «черный ящик», ее составные части рассматриваются как отдельные, но взаимодействующие компоненты. Входы и выходы можно сравнивать для нескольких возможных комбинаций, что позволяет понять поведение всей системы.

Третья группа подходов может быть использована, когда система имеет четкую иерархическую структуру, каждый уровень получает входные данные только от связанных подмоделей нижнего уровня. Тогда применяется стратегия «сверху вниз». При таком подходе анализ чувствительности выполняется на каждом уровне иерархии для каждой подмодели независимо, при этом

следует отметить, что анализ на более высоком уровне может выполняться без анализа связанных подмоделей нижнего уровня, но с заменой их на входы, имитирующие их наличие. Результаты чувствительности каждого уровня иерархии могут быть объединены в глобальный индекс чувствительности.

В данной работе предлагается метод анализа чувствительности по факторам математической модели иерархической системы, соответствующий двум типам стратегий: рассмотрение всего множества входов всех подмоделей иерархической структуры и стратегии «сверху вниз». Такой подход может быть использован для редукции входов сложной иерархической модели. Использование информации о чувствительности моделей позволяет применить подход к построению множества данных для математического ремоделирования. Для факторов, по которым модель более чувствительна, целесообразно включить в обучающее множество большее количество уровней данных.

## **2. Метод анализа чувствительности, основанный на применении анализа конечных изменений**

Задача анализа конечных изменений заключается в построении для имеющейся математической модели новой модели зависимости конечного изменения отклика от конечных изменений оказывающих на него влияние факторов. Такую задачу можно рассматривать как процесс перехода от исходной формы модели к форме, описываемой в терминах приращений; в этом смысле процесс имеет аналогию с ремоделированием [11].

Обычно значение величины  $x$  измеримо, и его измерение  $\mu(x)$  может иметь различные формы. Наиболее часто используемые из них:

- абсолютное приращение  $\mu(x) = \Delta x = x^1 - x^0$ ;
- индекс  $\mu(x) = i(x) = \frac{x^1}{x^0}$ ;
- относительное приращение  $\mu(x) = \delta x = \frac{x^1 - x^0}{x^0} = \frac{\Delta x}{x^0} =$   
 $= i(x) - 1$ .

В этом исследовании представлены результаты применения абсолютного приращения в качестве основной формы конечного изменения величины.

Задача анализа конечных изменений в таком случае может быть сформулирована следующим образом: пусть имеется структурно и параметрически идентифицированная модель

$$(3) \quad y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

определяющая связь между откликом  $y$  и его аргументами  $x_i$ .

Необходимо привести модель (3) к виду

$$(4) \quad \mu(y) = \phi(\mathbf{x}) = \phi(\mu(x_1), \dots, \mu(x_n)),$$

описывающему связь между конечными изменениями отклика  $\mu(y)$  и конечными изменениями  $\mu(x_i)$  его аргументов  $x_i$ .

С одной стороны, во многих практических задачах конечные приращения можно считать малыми. В случае же бесконечно малых приращений, если функция  $y = f(\mathbf{x})$ , описывающая рассматриваемую модель, определена и непрерывна в замкнутой области и имеет непрерывные частные производные в этой области, приближенная связь между конечным приращением отклика и малыми приращениями его аргументов имеет вид

$$\Delta y = f(\mathbf{x}^0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i,$$

где  $x^0$  – начальное значение фактора;  $\Delta x$  – конечное приращение фактора.

Но с другой стороны, в некоторых прикладных задачах приращения не могут рассматриваться как малые величины, однако могут интерпретироваться как конечные. В такой ситуации возможно применить модель, которая позволяет привести (3) к виду (4), являясь при этом точной связью между конечными приращениями отклика и его аргументов. Эта модель определена теоремой Лагранжа о промежуточной точке для функций нескольких переменных и может быть представлена следующим образом:

$$(5) \quad \Delta y = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^{int})}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i,$$

$$x^{int} = (x_1^{int}, \dots, x_n^{int}), \quad x_i^{int} = x_i^0 + \alpha \cdot \Delta x_i, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Здесь средние (или промежуточные) значения аргументов  $x_i^{int}$  определяются значением параметра  $\alpha$ .

Пусть в текущий момент времени аргументы находятся в некотором начальном состоянии  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  и, соответственно, отклик имеет вид  $y^0 = f(\mathbf{x}^0)$ . В следующий момент фиксации аргументов претерпели изменения и представимы как  $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1)$ , соответственно отклик принимает вид  $y^1 = f(\mathbf{x}^1)$ .

Таким образом, абсолютное приращение отклика можно определить, с одной стороны, как разность нового и предыдущего значений, а с другой стороны, по теореме Лагранжа (5), т.е. составить и решить следующее уравнение относительно параметра  $\alpha$ :

$$(6) \quad y^1 - y^0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i}(\dots, x_i^0 + \alpha \cdot \Delta x_i, \dots) \cdot \Delta x_i,$$

что позволяет оценить влияние конечных изменений аргументов на конечное изменение отклика и получить модель вида

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta y &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial x_i}(\dots, x_i^{(0)} + \alpha \cdot \Delta x_i, \dots) \cdot \Delta x_i = \\ &= S_{x_1} \Delta x_1 + \dots + S_{x_n} \Delta x_n. \end{aligned}$$

Описанная выше процедура повторяется  $t$  раз (где  $t$  – количество доступных наблюдений); численные результаты анализа должны быть усреднены для построения меры чувствительности [6]. В частности, можно применить процедуру нахождения среднего взвешенного Тьюки для построения точечной и интервальной оценки множества найденных мер чувствительности.

### **3. Иерархический анализ чувствительности на основе анализа конечных изменений**

Для описания сложных многоуровневых систем и процессов могут быть использованы иерархические системы различной структуры. В зависимости от характера подсистем (подпроцессов), являющихся частями основной системы (процесса), для описания каждого компонента может быть использована модель

своей заданной структуры. Математически такая система может быть построена с помощью набора функций, каждая из которых зависит от определенного набора факторов.

Подход, основанный на применении анализа конечных изменений, учитывает, что каждый подпроцесс (функция, узел в графе системы) имеет свой индивидуальный набор входов.

Предположим, что существует  $m \times n$  факторов (входов), обозначим их через  $x_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Функции  $f_j$  зависят от этих факторов, т.е. определены вектор-функции, зависящие от вектор-аргументов, каждая функция имеет свой уникальный набор входов:  $f = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $f \in \mathbf{R}^n$ ;  $f_j$  – скалярная функция, зависящая от векторного аргумента.

Рассмотрим переход системы из состояния  $\mathbf{x}^0$  в состояние  $\mathbf{x}^1$ , т.е. входы испытывали конечные приращения  $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0 = \Delta x_{ij}$ . Соответственно, функции (выходы подпроцессов) также получили свои конечные приращения, определяемые как  $\Delta f_j = f_j(x_{ij} + \Delta x_{ij}) - f_j(x_{ij})$ .

Предположим, что функции  $f_j$  дифференцируемы и можно применить теорему Лагранжа о промежуточной точке в форме (5):

$$(8) \quad \Delta f_j = ((\Delta f_j)_L)_{\alpha_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \alpha_j \cdot \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji},$$

где  $\alpha_j \in (0, 1)$  в соответствии с условием теоремы Лагранжа. Здесь и далее  $L$  ассоциируется с *Lagrange*.

Пусть  $p$  – показатель, агрегирующий выходы подсистем  $f_j$  в виде скалярной функции, зависящей от векторного аргумента и представленной в виде  $p = p(f) = p(\dots, f_j, \dots)$ . Ее конечное приращение  $\Delta p = p(f + \Delta f) - p(f)$  может быть также представлено в соответствии с (5) следующим образом:

$$(9) \quad \Delta p = ((\Delta p)_L)_{\beta} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial f_j} (f + \beta \cdot \Delta f) \cdot \Delta f_j, \quad \beta \in (0, 1).$$

Напомним, что каждый выход  $f_j$  имеет свое конечное приращение и выражение (9) может быть представлено следующим

образом:

$$(10) \quad \Delta p = ((\Delta p)_L)_\beta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial f_j} (\dots, f_j + \beta \cdot \Delta f_j, \dots) \cdot \Delta f_j.$$

Подстановка выражения (8) в (10) дает:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left( \left( \left( (\Delta p)_L \right)_\beta \right)_L \right)_{(\dots, \alpha_j, \dots)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial p}{\partial f_j} \left( \dots, f_j + \beta \cdot ((\Delta f_j)_L)_{\alpha_j}, \dots \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \alpha_j \Delta \mathbf{x}) \right) \cdot \Delta x_{ji} \right], \end{aligned}$$

и после изменения порядка суммирования получаем следующее:

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta p &= \left( \left( \left( (\Delta p)_L \right)_\beta \right)_L \right)_{(\dots, \alpha_j, \dots)} = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial f_j} \left( \dots, f_j + \beta \cdot ((\Delta f_j)_L)_{\alpha_j}, \dots \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \alpha_j \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right]. \end{aligned}$$

Пусть  $\hat{p}(x) = p(f(x))$ , тогда

$$\Delta \hat{p} = \hat{p}(x + \Delta x) - \hat{p}(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_{ji}} (x + \gamma \Delta x) \cdot \Delta x_{ji} = ((\Delta \hat{p})_L)_\gamma,$$

где  $\gamma \in (0, 1)$  может быть вычислена для каждой функции.

Применяя свойство инвариантности формы дифференциала сложной функции к функции  $\hat{p}(x) = p(f(x))$ , получим следующее представление ее производных:

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x}) = \frac{\partial p}{\partial x_{ji}} (f(\mathbf{x})) = \frac{\partial p}{\partial f_j} (f(\mathbf{x})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x}).$$

Теперь конечное приращение отклика подсистемы верхнего уровня, представленное в виде теоремы Лагранжа (5), имеет вид

$$(12) \quad \begin{aligned} \Delta p &= \Delta \hat{p} = ((\Delta \hat{p})_L)_\gamma = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial f_j} (f(\mathbf{x}) + \gamma \Delta \mathbf{x}) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы найти параметры  $\alpha_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , нужно приравнять (11) и (12):

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial f_j} \left( \dots, f_j + \beta \cdot ((\Delta f_j)_L)_{\alpha_j}, \dots \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \alpha_j \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial p}{\partial f_j} (f(\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x})) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_{ji}} (\mathbf{x} + \gamma \Delta \mathbf{x}) \cdot \Delta x_{ji} \right]. \end{aligned}$$

Полученная модель связывает параметры  $\alpha_j$ ,  $\beta$ ,  $\gamma \in (0, 1)$ . Если предположить, что  $p(x)$  описывает всю сложную систему с ее входами  $x_{ij}$  и одновременно с ее узлами (подсистемами)  $f_j$ , а  $f_j$  описывает зависимость каждой подсистемы от ее входов, то полученное выражение может связать конечные приращения отклика подсистемы верхнего уровня с конечными приращениями подсистем на нижних уровнях.

## 4. Численный пример

### 4.1. Описание исходных данных и анализируемых моделей

Предположим, иерархическая система состоит из двух уровней. Ее структура представлена на рис. 1.

Как на верхнем, так и на нижнем уровне подсистемы моделируются нейросетевыми структурами. Все три модели (подмодели  $y_1$  и  $y_2$ , модель  $z$ ) представляют собой классические полносвязные нейронные сети структуры:

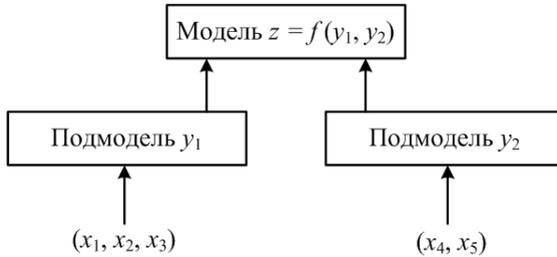


Рис. 1. Модельный пример иерархической системы

$$(13) \quad y = \phi_1 \left( b_0 + \sum_{i=1}^m w_i \phi_2 \left( b_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j \right) \right),$$

где  $y \in \mathbf{R}$  – значение выхода;  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  – вектор входов;  $w_i$  и  $w_{ij}$  – весовые коэффициенты выходного и скрытого слоев соответственно;  $b_0$  и  $b_i$  – свободные коэффициенты выходного и скрытого слоев соответственно;  $\phi_1(net) = \phi_2(net) = \frac{1}{(1 + \exp(-net))}$  – логистические функции активации.

Для моделей определены следующие метопараметры:

- подмодель  $y_1$ : 1 скрытый слой, состоящий из 2 нейронов;
- подмодель  $y_2$ : 1 скрытый слой, состоящий из 1 нейрона;
- модель  $z$ : 1 скрытый слой, состоящий из 2 нейронов;

для всех нейронов использованы логистические функции активации.

В качестве данных для параметрической идентификации использовался набор данных *neuraldat* из пакета *NeuralNetTools* среды обработки данных R [5]. Набор содержит 2000 реализаций, что позволяет получить 1999 конечных приращений отклика и соответствующие им аргументы. Описанный набор данных содержит три независимые и две зависимые переменные (для построения модели и исследования на данном этапе в качестве выходных данных использовалась только одна зависимая переменная). Количество входов было увеличено до 5, использовалась нелинейная связь между выходами для имитации структуры рассматриваемой системы (предполагалось, что модель  $z$  имеет

следующий вид:  $z = \exp(y_1) \cdot y_2$ ). Средняя абсолютная ошибка аппроксимации составила 3,78%.

Следуя описанной выше стратегии «сверху вниз», сначала были оценены меры чувствительности выходов подмоделей  $y_1$  и  $y_2$  в качестве входов модели  $z$ . Результаты представлены на рис. 2. Полученные оценки чувствительности усреднены и нормированы в соответствии с подходом, представленным в [6]. В данном случае можно говорить о большем вкладе изменения выходов подмодели  $y_2$  в изменение модели  $z$ .

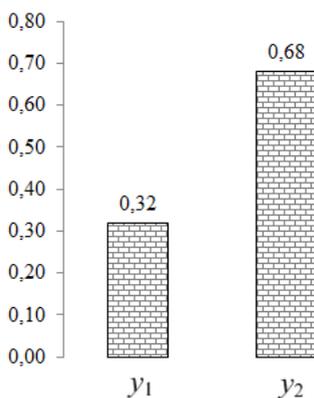


Рис. 2. Результат анализа чувствительности для модели верхнего уровня

Аналогичная ситуация наблюдается и при анализе чувствительности подмоделей  $y_1$  и  $y_2$  (см. рис. 3).

Предлагаемый подход к оценке мер чувствительности не использует аппроксимационную процедуру для моделирования статистических параметров исследуемой структуры и оперирует как с параметрами, так и с факторами модели. Таким образом, предлагаемый подход к оценке чувствительности не включает в себя источник неопределенности, что позволяет построить точные меры чувствительности выхода модели верхнего уровня (в представленном примере выход модели  $z$ ) в зависимости от входов моделей нижнего уровня (подмоделей  $y_1(x_1, x_2, x_3)$  и  $y_2(x_4, x_5)$ ).

Результаты сквозного анализа представлены на рис. 4.

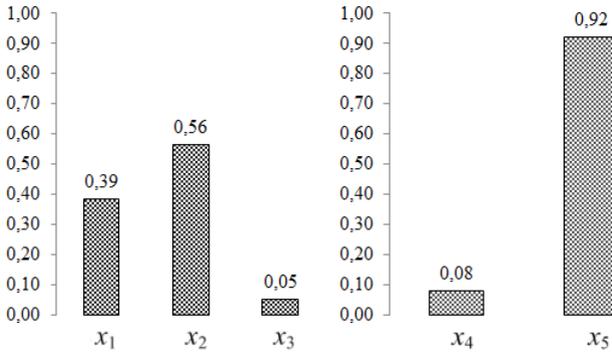


Рис. 3. Результат иерархического анализа чувствительности для подмоделей  $y_1$  и  $y_2$

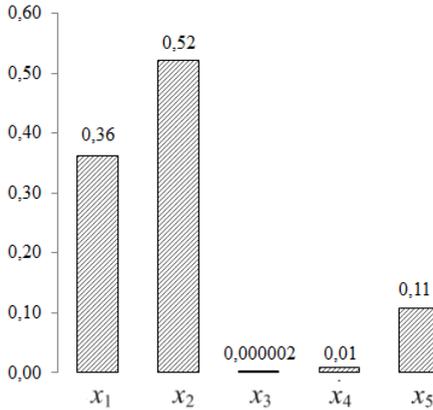


Рис. 4. Результаты сквозного иерархического анализа чувствительности для модели верхнего уровня по входам моделей нижнего уровня

Анализируя результаты исследования чувствительности модели верхнего уровня и подмоделей, можно сделать следующие выводы. Несмотря на то, что наиболее значимым является выход подмодели  $y_2$ , сквозной анализ показывает, что непосредственно

большее влияние на выход модели  $z$  оказывают входы подмодели  $y_1$ . При этом присутствуют два входа ( $x_3$  и  $x_4$ ), влияние которых минимально. Полученная информация быть использована в целях редукции модели.

## **5. Выводы и перспективы**

В данном исследовании представлен метод иерархического анализа чувствительности, основанный на использовании анализа конечных изменений в качестве инструмента для оценки значимости исследуемых переменных. В работе также синтезирован подход к измерению чувствительности иерархических моделей, когда в качестве факторов выступают структурные элементы системы. Проведенные численные эксперименты показывают возможность применения подхода в случаях, когда элементы рассматриваемой иерархической системы представлены нейронными сетями. Перспективным направлением исследований является применение различных классов моделей для описания структурных элементов иерархических систем, включая ситуации, когда некоторые подмодели заданы таблично. В таком случае потребуются аппроксимировать соответствующие производные для дальнейшей процедуры анализа чувствительности.

## **Литература**

1. НУРИСЛАМОВА Л.Ф., ГУБАЙДУЛЛИН И.М. *Исследование и редуцирование математической модели химической реакции методом Соболя* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2016. – №8(4). – С. 633–646.
2. ОЖЕРЕЛЬЕВА Т.А. *Структурный анализ систем управления* // Государственный советник. – 2015. – №1(9). – С. 40–44.
3. САЛЬТЕЛЛИ А., СОБОЛЬ И.М. *Анализ чувствительности нелинейных математических моделей: численные опыты* // Математическое моделирование. – 1995. – №7. – С. 16–28.
4. СУВОРОВ А.И. *Методы оценки свойств и управления математических моделей* // Программные продукты и системы. – 1997. – №2.

5. ШИПУНОВ А.Б., БАЛДИН Е.М., ВОЛКОВА П.А. и др. *Наглядная статистика. Используем R!* – М.: ДМК Пресс, 2017. – 298 с.
6. ЩЕГЛЕВАТЫХ Р.В., СЫСОЕВ А.С. *Исследование нейросетевой модели обнаружения аномальных наблюдений в массивах данных // Прикладная математика и вопросы управления.* – 2021. – №1. – С. 23–40.
7. ЭФРОН Б. *Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа: сб. статей: Пер. с англ.* – М.: Финансы и статистика, 1988. – 263 с.
8. AZIZI T., MUGABI R. *Global sensitivity analysis in physiological systems // Applied Mathematics.* – 2020. – Vol. 11, No. 3. – P. 119–136.
9. GUL R., SCHUTTE C., BERNHARD S. *Mathematical modeling and sensitivity analysis of arterial anastomosis in the arm // Applied Mathematical Modelling.* – 2016. – Vol. 40, No. 17–18. – P. 7724–7738.
10. SALTELLI A. *Global Sensitivity Analysis: the Primer.* – Chichester: John Wiley & Sons, 2008.
11. SARAIEV P., BLYUMIN S., GALKIN A. et al. *Mathematical remodeling concept in simulation of complicated variable structure transportation systems // Transportation Research Procedia.* – 2020. – No. 45. – P. 475–482.
12. SARRAZIN F., PIANOSI F., WAGENER T. *Global Sensitivity Analysis of environmental models: Convergence and validation // Environmental Modelling & Software.* – 2016. – Vol. 79. – P. 135–152.
13. SOBOL I.M. *Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates // Mathematics and computers in simulation.* – 2001. – No. 1–3. – P. 271–280.
14. RENARDY M., HULT C., EVANS S. et al. *Global sensitivity analysis of biological multiscale models // Current opinion in biomedical engineering.* – 2019. – No. 11. – P. 109–116.
15. ZHANG Z., GUL R., ZEB A. *Global sensitivity analysis of COVID-19 mathematical model // Alexandria Engineering Journal.* – 2021. – Vol. 60. – No. 1. – P. 565–572.

## **REDUCTION OF HIERARCHICAL MODELS: RESEARCHING SENSITIVITY BY FACTORS USING ANALYSIS OF FINITE FLUCTUATIONS**

**Anton Sysoev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,  
Cand.Sc., associate professor (sysoev\_as@stu.lipetsk.ru).

**Anatoly Pogodaev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,  
D.Sc., professor (pak@stu.lipetsk.ru),

**Pavel Saraev**, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, D.Sc.,  
associate professor (psaraev@yandex.ru).

*Abstract: The selected class of mathematical models determines the methods used in the study of a system or process and approaches to their control. One of the directions of model structure control is its reduction, understood as a reduction in the number of factors in order to build a less computationally expensive model. This problem can be referred to the concept of mathematical remodeling – building a new model on the basis of a known one. Among the ways of solving such a problem is the Sensitivity Analysis of the model by factors, which can be carried out in various ways. One of these ways is based on applying the method of Analysis of Finite Fluctuations to estimate sensitivity measures. This method is based on the use of Lagrange mean value theorem. The mentioned theorem delivers an exact decomposition of the finite increment of a model's response as a weighted sum of the finite increments of its factors. The paper describes an approach that allows performing Sensitivity Analysis of this type at each of the levels of a hierarchical system, as well as an end-to-end analysis that involves finding estimates of the influence measures of the model outputs of the preceding levels on the output of the model of the upper level. Numerical examples demonstrating the applicability of the method are presented. Classical full-connected neural networks are used as a class of models describing the hierarchical levels of the system.*

**Keywords:** mathematical modeling, reduction, remodeling, sensitivity analysis, analysis of finite fluctuations.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

*Поступила в редакцию 17.09.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*

# АЛГОРИТМ АДАПТИВНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СГЛАЖИВАНИЯ ДАННЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Щербов И. Л.<sup>1</sup>

(ФГБОУ ВО «Донецкий национальный технический  
университет», Донецк, ДНР)

*Рассмотрена работа алгоритма адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений. Разработанный алгоритм осуществляет совместную обработку данных измерений, обладающих пространственной и временной избыточностью. Для получения независимых оценок вектора коэффициентов сглаживающего полинома в работе алгоритма используются структуры линейно независимых и  $\Lambda$ -ортогональных базисных функций, осуществляющие совместную обработку различных типов измеряемых первичных координат местоположения испытываемых объектов, полученных от внешнетраекторных измерительных средств. Для начала итеративного процесса нахождения максимально достоверного значения вектора коэффициентов сглаживающего полинома на первом шаге сглаживания предложен способ выбора начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома, который для каждого последующего шага локально-скользящего сглаживания данных измерений позволяет использовать значение, которое было получено на предыдущем шаге сглаживания. Примененные в работе алгоритма методики проверки значимости коэффициентов сглаживающего полинома позволили оптимизировать процесс определения значимых коэффициентов сглаживающего полинома. Применение разработанного способа выбора начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома и предложенных методик позволило уменьшить время на обработку данных траекторных измерений. По результатам проведенного экспериментального исследования установлено, что разработанный алгоритм адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических траекторных измерений повышает точность и достоверность определения вторичных координат пространственного положения ЛА в траекторных измерительно-вычислительных комплексах и обеспечивает устойчивость в работе при обработке данных измерений со сбоями и грубыми ошибками измерений.*

**Ключевые слова:** алгоритм адаптивного нелинейного сглаживания, сглаживающий полином, вектор коэффициентов сглаживающего полинома, линейно независимые базисные функции,  $\Lambda$ -ортогональные базисные функции.

---

<sup>1</sup> Игорь Леонидович Щербов, к.т.н., проректор (scherbov@yandex.ru).

## 1. Введение

Испытания летательного аппарата (ЛА) представляет собой сложный и ответственный процесс научно-исследовательской деятельности, направленный на получение наиболее полного понимания свойств и поведения объекта испытаний и в конечной стадии – принятия решения о вводе его в эксплуатацию.

В случае отсутствия точной и достоверной информации о траектории движения ЛА возможно принятие неправильного решения о характеристиках испытуемого объекта или качестве работы его бортовых пилотажно-навигационных комплексов, что в дальнейшем может привести к негативным последствиям при его эксплуатации.

Лётные испытания проводятся на специализированных полигонах, оборудованных многофункциональными траекторными измерительно-вычислительными комплексами, в состав которых входят внешнетраекторные измерительные средства.

Благодаря совместным измерениям, проводимым внешнетраекторными измерительными средствами, создается временная и пространственная избыточность полученной первичной информации о местоположении объекта. Временная избыточность связана с высоким темпом съема информации, а пространственная избыточность является результатом многократного дублирования проводимых измерений различными средствами. Временная и пространственная избыточность первоначально создавалась с целью повышения точности и достоверности измерений

На начальном этапе при обработке данных внешнетраекторных измерений сглаживание осуществлялось графоаналитическим способом с применением простых алгоритмов, которые использовали минимальный необходимый набор первичных координат ( $m = 3$ ). Совершенствование алгоритмов сглаживания и использование пеленгационных методов оценки местоположения объекта по информации минимально-избыточного объема ( $m = 4$ ) позволило повысить точность и достоверность получаемых результатов, что в свою очередь определило их широкое применение.

На следующем этапе совершенствования алгоритмов обработки траекторной информации начал использоваться обобщенный (статистический) метод, который основывался на методе наименьших квадратов. Вычисление статистической оценки пространственного положения ЛА осуществлялось помощью рекуррентного соотношения через ряд последовательных приближений. Применение данного метода позволило при проведении обработки траекторной информации использовать алгоритмы, учитывающие пространственную избыточность данных измерений, а в дальнейшем и временную избыточность получаемых данных измерений [6, 13, 14, 17, 20, 22].

Однако в рассмотренных алгоритмах не вся получаемая от внешнетраекторных измерительных средств информация принимается в обработку, что обусловлено наличием зон низкой точности внешнетраекторных измерительных средств, сбоями в работе, отсутствием возможности проводить совместную обработку данных измерений, обладающих временной и пространственной избыточностью и т.д.

Возможности современной вычислительной техники создали предпосылки совершенствования применяемых алгоритмов, входящих в математическое и программное обеспечение траекторных измерительно-вычислительных комплексов, для определения параметров положения ЛА пространстве.

Таким образом, повышение точности и достоверности определения пространственного положения ЛА является актуальной научно-технической задачей и имеет практическое значение.

Для решения данной задачи необходимо по имеющимся первичным данным внешнетраекторных измерений (наклонная дальность, азимут и угол места) полученным в равноотстоящие моменты времени от радиолокационных и кинотеодолитных станций, установленных в определённых точках траекторного измерительно-вычислительного комплекса, получить максимально достоверные значения вторичных координатах ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ), определяющих местоположение летательного аппарата в пространстве.

Вариант решения поставленной задачи представлен в предлагаемом алгоритме адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений.

## **2. Алгоритм адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений**

При разработке алгоритма адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений учитывались следующие результаты проведенных исследований:

1. Анализ применяемых способов обработки данных внешнетраекторных измерений позволяет сделать вывод о целесообразности использования способа локально-скользящего сглаживания. Данный способ в сравнении с кусочно-локальным сглаживанием и сплайновой обработкой данных, благодаря применяемой последовательности обработки интервалов сглаживания траектории полета ЛА, позволяет получить наиболее точные результаты.

При этом необходимо учесть, что другие рассмотренные способы обработки данных внешнетраекторных измерений по своей сути представляют собой частные случаи локально-скользящего сглаживания [22, 28, 29].

2. Из разработанных и исследованных структур линейно независимых базисных функций (ЛНБФ), позволяющих осуществлять совместное описание избыточных (временных и пространственных) данных траекторных измерений, для разработки алгоритмов адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений было принято решение использовать структуру ЛНБФ двух переменных. Данное решение основано на том, что для структуры ЛНБФ с одной переменной существует необходимость нахождения трех составляющих вектора коэффициентов сглаживающего полинома (для каждой вторичной координаты положения ЛА отдельно).

Структура ЛНБФ, содержащая в своем составе две переменные, имеет преимущество, так как в состав вектора коэффициентов сглаживающего полинома одновременно включены

тройки элементов вторичных координат ЛА [7, 8, 15, 22, 25, 27, 30–35].

3. При определении максимально достоверной оценки значения вектора коэффициентов сглаживающего полинома был применён разработанный итеративный алгоритм и предложенный способ выбора начального приближения вектора коэффициентов сглаживающего полинома на первом шаге локально-скользящего сглаживания [22–24].

4. Были использованы разработанные методики проверки значимости коэффициентов сглаживающего полинома:

- с оптимизацией степени сглаживавшего полинома;
- с оптимизацией структуры сглаживающего полинома

Структура 1;

- с оптимизацией структуры сглаживающего Структура 2 [2, 3, 11, 12, 22, 26, 36].

Работа алгоритма адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений представлена на рис. 1.

Рассмотрим более детально работу алгоритма адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений для первого шага локально-скользящего сглаживания.

1. Начало работы алгоритма.
2. Ввод исходных данных.

При формировании массива исходных данных необходимо учитывать состав внешнетраекторных измерительных систем, входящих в состав траекторного измерительно-вычислительного комплекса и физические процессы, используемые для получения результатов измерений. В представленном алгоритме принимались в обработку полученные значения измеренных первичных координат ЛА с применением радиолокационных и кинотеодолитных станций. Кроме этого, в состав исходных данных входят данные, необходимые для проведения вычислений примененного способа ЛСС и другие параметры.

3. Формируется система линейно независимых базисных функций (ЛНБФ), имеющая структуру:

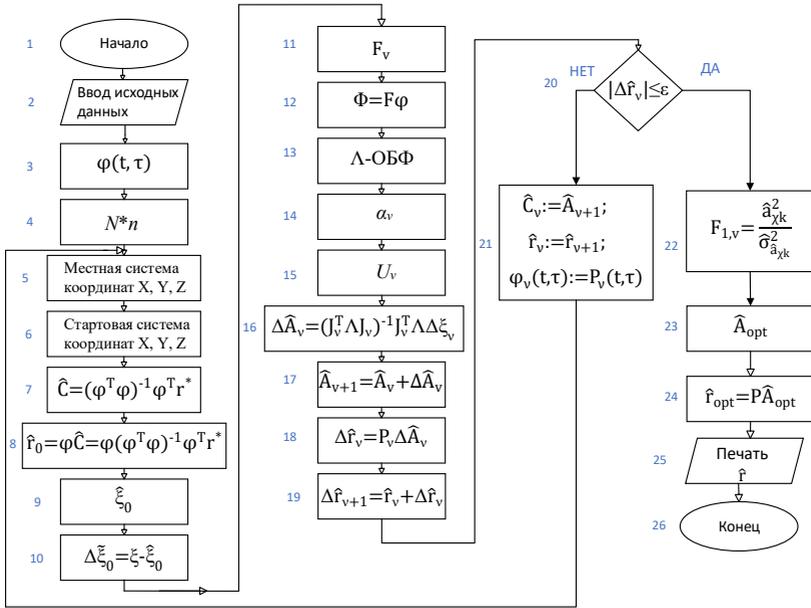


Рис. 1. Алгоритм адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений

$$(1) \varphi(t, \tau) = \begin{vmatrix} \varphi_{00}(t, \tau_x) \varphi_{01}(t, \tau_x) \varphi_{02}(t, \tau_x) \dots \varphi_{m0}(t, \tau_x) \varphi_{m1}(t, \tau_x) \varphi_{m2}(t, \tau_x) \\ \varphi_{00}(t, \tau_y) \varphi_{01}(t, \tau_y) \varphi_{02}(t, \tau_y) \dots \varphi_{m0}(t, \tau_y) \varphi_{m1}(t, \tau_y) \varphi_{m2}(t, \tau_y) \\ \varphi_{00}(t, \tau_z) \varphi_{01}(t, \tau_z) \varphi_{02}(t, \tau_z) \dots \varphi_{m0}(t, \tau_z) \varphi_{m1}(t, \tau_z) \varphi_{m2}(t, \tau_z) \end{vmatrix},$$

где  $\varphi(t, \tau) = (t - t_0)^0 \tau^0 (t - t_0)^0 \tau^1 (t - t_0)^0 \tau^2 \dots (t - t_0)^m \tau^0 (t - t_0)^m \tau^1 (t - t_0)^m \tau^2$ ;  $t$  – текущий момент времени;  $t_0$  – момент времени, соответствующий середине интервала сглаживания;  $\tau$  – вторая независимая переменная базисной функции;  $l = x, y, z$ ;  $m$  – степень сглаживающего полинома.

С учетом максимально возможной степени сглаживающего полинома сформированная система ЛНБФ имеет следующий вид:

$$(2) \quad \phi(t, \tau) = \begin{pmatrix} \tau_x^0 t_1^0 & \tau_x^1 t_1^0 & \tau_x^2 t_1^0 & \dots & \tau_x^0 t_1^k & \tau_x^1 t_1^k & \tau_x^2 t_1^k & \dots & \tau_x^0 t_1^m & \tau_x^1 t_1^m & \tau_x^2 t_1^m \\ \dots & \dots \\ \tau_x^0 t_i^0 & \tau_x^1 t_i^0 & \tau_x^2 t_i^0 & \dots & \tau_x^0 t_i^k & \tau_x^1 t_i^k & \tau_x^2 t_i^k & \dots & \tau_x^0 t_i^m & \tau_x^1 t_i^m & \tau_x^2 t_i^m \\ \dots & \dots \\ \tau_x^0 t_n^0 & \tau_x^1 t_n^0 & \tau_x^2 t_n^0 & \dots & \tau_x^0 t_n^k & \tau_x^1 t_n^k & \tau_x^2 t_n^k & \dots & \tau_x^0 t_n^m & \tau_x^1 t_n^m & \tau_x^2 t_n^m \\ \tau_y^0 t_1^0 & \tau_y^1 t_1^0 & \tau_y^2 t_1^0 & \dots & \tau_y^0 t_1^k & \tau_y^1 t_1^k & \tau_y^2 t_1^k & \dots & \tau_y^0 t_1^m & \tau_y^1 t_1^m & \tau_y^2 t_1^m \\ \dots & \dots \\ \tau_y^0 t_i^0 & \tau_y^1 t_i^0 & \tau_y^2 t_i^0 & \dots & \tau_y^0 t_i^k & \tau_y^1 t_i^k & \tau_y^2 t_i^k & \dots & \tau_y^0 t_i^m & \tau_y^1 t_i^m & \tau_y^2 t_i^m \\ \dots & \dots \\ \tau_y^0 t_n^0 & \tau_y^1 t_n^0 & \tau_y^2 t_n^0 & \dots & \tau_y^0 t_n^k & \tau_y^1 t_n^k & \tau_y^2 t_n^k & \dots & \tau_y^0 t_n^m & \tau_y^1 t_n^m & \tau_y^2 t_n^m \\ \tau_z^0 t_1^0 & \tau_z^1 t_1^0 & \tau_z^2 t_1^0 & \dots & \tau_z^0 t_1^k & \tau_z^1 t_1^k & \tau_z^2 t_1^k & \dots & \tau_z^0 t_1^m & \tau_z^1 t_1^m & \tau_z^2 t_1^m \\ \dots & \dots \\ \tau_z^0 t_i^0 & \tau_z^1 t_i^0 & \tau_z^2 t_i^0 & \dots & \tau_z^0 t_i^k & \tau_z^1 t_i^k & \tau_z^2 t_i^k & \dots & \tau_z^0 t_i^m & \tau_z^1 t_i^m & \tau_z^2 t_i^m \\ \dots & \dots \\ \tau_z^0 t_n^0 & \tau_z^1 t_n^0 & \tau_z^2 t_n^0 & \dots & \tau_z^0 t_n^k & \tau_z^1 t_n^k & \tau_z^2 t_n^k & \dots & \tau_z^0 t_n^m & \tau_z^1 t_n^m & \tau_z^2 t_n^m \end{pmatrix}.$$

4. Вектор измерений определяется на основе полученных данных измеренных координат ( $N$ ) и количества точек в интервале сглаживания ( $n$ ).

5. Вычисляются значения вторичных координат пространственного положения ЛА в декартовой системе координат ( $X, Y, Z$ ), на основе полученных от внешнетраекторных измерительных систем первичных координат [13, 18,19, 21, 22].

Формулы пересчета первичных координат во вторичные для радиолокационных станций имеют вид

$$\begin{aligned} X &= R \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha; \\ (3) \quad Y &= R \cdot \sin \beta; \\ Z &= R \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha, \end{aligned}$$

где  $R$  – дальность,  $\alpha$  – азимут,  $\beta$  – угол места.

Формулы пересчета первичных координат во вторичные для кинотеодолитных станций имеют вид

$$\begin{aligned}
 X &= -R_{\sigma} \cdot \sin \alpha_1; \\
 Y &= R_{\sigma} \cdot \operatorname{tg} \beta_1; \\
 (4) \quad Z &= R_{\sigma} \cdot \cos \alpha_1; \\
 R_{\sigma} &= \frac{-d \cdot \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)},
 \end{aligned}$$

где  $\alpha_1, \beta_1$  – азимут и угол места первой кинотеодолитной станции;  $\alpha_2$  – азимут второй кинотеодолитной станции;  $d$  – длина базы угломерной системы.

6. Формируется база значений вторичных координат в стартовой системе координат.

С этой целью проводится пересчет полученных значений вторичных координат местной системы координат, вычисленных на предыдущем этапе работы алгоритма [1].

7. Определяется значение вектора оценок коэффициентов сглаживающего полинома  $\hat{C}$ .

С этой целью на основе матрицы, составленной из базисных функций ( $\phi$ ) и основной матрицы системы уравнений ( $\phi^T \phi$ ), имеющей вид

$$(5) \quad \phi^T \phi \cdot C = \phi^T r^*,$$

определяем значение вектора оценок коэффициентов сглаживающего полинома:

$$(6) \quad \hat{C} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T r^*,$$

где  $r^*$  – вектор-столбец вторичных координат.

8. Проводится расчет начального приближения вектора сглаженных значений вторичных координат:

$$(7) \quad \hat{r}_0 = \phi \cdot \hat{C} = \phi (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T r^*.$$

9. Определение сглаженных значений начального приближения первичных координат ( $\xi_0$ ) осуществляется на основе значений, полученных на предыдущем шаге работы алгоритма.

Формируется вектор сглаженных значений начального приближения первичных координат (состоящий из  $N \cdot n$  точек) [13, 18, 19, 21, 22].

10. По результатам сравнения имеющихся данных измерений положения ЛА в пространстве и имеющихся сглаженных

значений первичных параметров ЛА строится вектор отклонений:

$$(8) \quad \Delta \hat{\xi}_0 = \xi - \hat{\xi}_0,$$

11. Формируется матрица проекций градиентов  $F_v$ . [11–14, 16].

12. По вычисленным значениям проекций градиентов, соответствующих первичным данным измерений и структуре ЛНБФ, формируется матрица Якоби  $\Phi$  [13, 14, 18, 19, 21, 22]:

$$(9) \quad \Phi_{i,kl}^j = \sum_{u=x}^{y,z} \left[ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial r_i^j} \phi_{kl}(t_i, \tau_u) \right],$$

где  $u = X, Y, Z$ ;  $l = 0, 1, 2$ ;  $k = 0, 1, 2$ ;  $j = 1, \dots, N$  – тип первичной координаты;  $i = 1, \dots, n$  – число точек на интервале сглаживания.

Или в матричной форме:

$$(10) \quad \Phi = F\phi,$$

где  $F$  – матрица проекций градиентов.

Положение элементов в полученной матрице определяется исходя из следующих условий:

- номер строки соответствует типу измеряемого параметра и номеру точки измерений (индексы  $j$  и  $i$ );
- номер столбца соответствует степени по аргументу  $\tau$  и степени по аргументу  $t$  (индексы  $l$  и  $k$ ).

13. На базе системы ЛНБФ, полученной на третьем шаге работы алгоритма, строится система  $\Lambda$ -ортогональных базисных функций ( $\Lambda$ -ОБФ) из условия равенства нулю недиагональных элементов основной матрицы:

$$(11) \quad J_{vkl}^T \Lambda J_{vkl} = 0.$$

Построение  $\Lambda$ -ОБФ осуществляется по формуле

$$(12) \quad P_{kl}(t, \tau) = \sum_{\chi=0}^{k-1} \sum_{\lambda=0}^2 \alpha_{\chi\lambda,kl} P_{\chi\lambda}(t, \tau) + \sum_{\chi=0}^k \sum_{\lambda=0}^{l-1} \alpha_{\chi\lambda,kl} P_{\chi\lambda}(t, \tau) + \phi_{kl}(t, \tau),$$

$$\text{где } \alpha_{\chi\lambda,kl} = - \frac{\Phi_{kl}^T \Lambda J_{\chi\lambda}}{J_{\chi\lambda}^T \Lambda J_{00\chi\lambda}}.$$

14. Верхняя треугольная матрица  $\alpha_v$  формируется в результате построения  $\Lambda$ -ОБФ из значений коэффициентов  $\alpha_{\chi\lambda,kl}$ . Диагональные элементы сформированной матрицы равны единице.

15. Из значений вспомогательных коэффициентов  $\alpha_{\chi\lambda,kl}$  формируется верхняя треугольная матрица  $U_v$ , диагональные элементы которой равны единице, а элементы, расположенные выше главной диагонали, вычисляются следующим выражением:

$$(13) \quad U_{\chi\lambda,kl} = \sum_{p=0}^k \sum_{q=0}^{l-1} U_{\chi\lambda,pq} \alpha_{pq,kl} + \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{q=0}^2 U_{\chi\lambda,pq} \alpha_{pq,kl}.$$

При этом матрица  $U$  накапливается от одной итерации к другой и после завершения итеративного процесса имеет следующий вид:

$$(14) \quad U = \begin{pmatrix} 1 & U_{00,01} & U_{00,02} & \dots & U_{00,kl} & \dots & U_{00,m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & U_{\chi\lambda,kl} & \dots & U_{\chi\lambda,m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha_{00,01} & -\alpha_{00,02} & \dots & -\alpha_{00,kl} & \dots & -\alpha_{00,m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & -\alpha_{\chi\lambda,kl} & \dots & -\alpha_{\chi\lambda,m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

16. Вектор приращений последовательных приближений оценок коэффициентов сглаживающего полинома определяется по формуле

$$(15) \quad \Delta \hat{A}_v = (J_v^T \Lambda J_v)^{-1} J_v^T \Lambda \Delta \xi_v.$$

17. Проводится вычисление очередного приближения вектора оценок сглаживающего полинома с использованием итеративного алгоритма:

$$(16) \quad \hat{A}_{v+1} = \hat{A}_v + \Delta \hat{A}_v = \hat{A}_v + (J_v^T \Lambda J_v)^{-1} J_v^T \Lambda \{ \xi - \xi[r(t, A_v)] \}.$$

18. Определяется вектор приращений вторичных координат:

$$(17) \Delta \hat{r} = P_v \Delta \hat{A}_v.$$

19. Вычисляется  $v + 1$  приближение вторичных координат:

$$(18) \Delta \hat{r}_{v+1} = \hat{r}_v + \Delta \hat{r}_v.$$

20. Проверяется условие

$$(19) |\Delta \hat{r}_v| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  – константа, введенная для завершения итеративного процесса (исходя из практики обработки данных внешнетраекторных измерений, устанавливается в пределе от 0,1 м до 0,5 м).

21. Если составляющие вектора  $\Delta \hat{r}$  не удовлетворяют заданному условию, то происходит операция переприсваивания:

$$(20) \hat{C}_v := \hat{A}_{v+1}; \quad \hat{C}_v := \hat{A}_{v+1}; \quad \hat{r}_v := \hat{r}_{v+1}.$$

После проведения данной операции, процесс повторяется до выполнения условия, начиная с пункта 5.

22. Если составляющие вектора  $\Delta \hat{r}_v$  удовлетворяют заданному условию, то последнее приближение вектора оценок коэффициентов сглаживающего полинома принимается как максимально достоверное значение и алгоритм переходит к следующему этапу вычислений.

Для получения необходимых значений статистик применяется критерий Фишера:

$$(21) F_{1,v} = \frac{\hat{\alpha}_{\chi^k}^2}{\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_{\chi^k}}^2},$$

где  $\hat{\alpha}_{\chi^k}^2$  – квадрат оценки коэффициента полинома;  $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_{\chi^k}}^2$  – оценка дисперсии оценки коэффициента полинома;  $\chi = 0, 1, 2$ ;  $k = 0, \dots, m_{max}$  и представляют собой независимые случайные величины, распределенные по законам  $\chi^2$  с одной и  $V$  степенями свободы [10, 22, 25].

Значение оценки дисперсии оценки коэффициента полинома, используемое для определения в вычислении статистики, находится по следующему выражению [7, 22, 25]:

$$(22) \hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_{\chi^k}}^2 = \frac{(J_{\chi^k}^T \Lambda J_{\chi^k})^{-1} \Delta \xi^T \Lambda \Delta \xi}{V},$$

где  $V$  – степень свободы;  $\Delta\xi$  – вектор отклонений первичных координат от их расчетных значений при разных степенях сглаживаемого полинома;  $J_{\chi k}^T \Lambda J_{\chi k}$  –  $\chi k$ -й элемент диагонали основной матрицы ( $\chi = k$ );  $\Lambda$  – весовая матрица с диагональными элементами, обратными дисперсиям ошибок измерений.

Учитывая (21) и (22), степень свободы каждого коэффициента сглаживающего полинома будет определяться выражением (23)  $V = N \cdot n - 3(m_{max} + 1)$ ,

где  $N$  – количество обрабатываемых первичных координат;  $n$  – количество точек на интервале сглаживания;  $m_{max}$  – максимально возможная степень сглаживающего полинома [9, 10, 22, 24].

Распределение получаемых статистик, распределённых по закону Фишера, представлено на рис. 2.

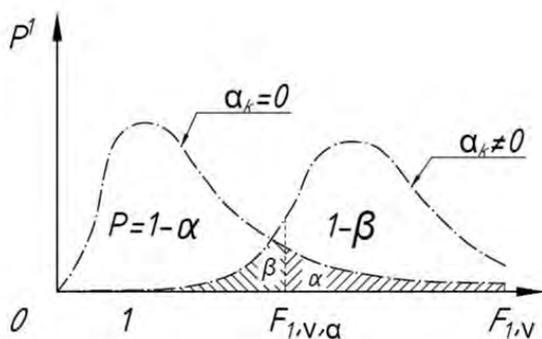


Рис. 2. Множество распределения Фишера

Если  $\alpha_{\chi k} = 0$ , то статистика с заданной доверительной вероятностью не превзойдет порогового уровня  $F_{1,v,\alpha}$ , определяемого с учетом заданного уровня  $\alpha$  значимости (вероятности ложного обнаружения  $\alpha = 1 - P$ ). Сравнивая статистику  $F_{1,v}$  с пороговым уровнем  $F_{1,v,\alpha}$ , можно осуществить проверку гипотезы о равенстве нулю коэффициента  $\alpha_{\chi k}$ . При этом если действительно  $\alpha_{\chi k} = 0$ , то с доверительной вероятностью  $P = 1 - \alpha$  будет осуществлено правильное не обнаружение коэффициента или с вероятностью  $\alpha$  – ложное его обнаружение.

Если  $\alpha_{jk} \neq 0$ , то получим множество распределений Фишера с параметрами нецентральности, не равным нулю. В этом случае сравнение статистики  $F_{1,v}$  с тем же пороговым уровнем  $F_{1,v,\alpha}$  с вероятностью  $\beta$  приводит к ложному необнаружению коэффициента и с вероятностью  $(1 - \beta)$  – к правильному его обнаружению. Вероятность  $(1 - \beta)$  называют мощностью критерия [5, 14, 22].

23. Каждый коэффициент вектора коэффициентов сглаживающего полинома проверяется на значимость методом сравнения полученной статистики с установленным пороговым значением.

Если значение проверяемого коэффициента больше или равно установленному пороговому значению, то коэффициент входит в состав коэффициентов сглаживающего полинома. Если значение проверяемого коэффициента меньше установленного порогового значения, значение коэффициента приравнивается к нулю.

Результатом проведенной проверки является вектор оценок коэффициентов сглаживающего полинома  $\hat{A}_{opt}$ , который будем считать оптимальным.

24. Вычисляются значения вторичных координат положения ЛА:

$$(24) \hat{r}_{opt} = P \hat{A}_{opt},$$

где  $\hat{A}_{opt}$  – оптимальный вектор оценок сглаживающего полинома,  $P$  – система Л-ОБФ.

25. Вывод полученных результатов на печать.

26. Конец работы алгоритма.

С целью разработки рекомендаций по внедрению разработанного алгоритма было проведено экспериментальное исследование его функционирования в нормальных условиях работы и работоспособность при воздействии аномальных ошибок измерений [14, 22, 23, 26, 28].

Экспериментальное исследование осуществлялось путём имитационного моделирования.

Методика эксперимента. Моделировались значения вторичных координат, которые по формулам простых методов пе-

решивались в первичные координаты. Затем к полученным значениям первичных координат прибавлялись значения ошибок измерений, распределённых по нормальному закону. Полученные первичные данные измерений подвергались идеальному сглаживанию и нелинейному адаптивному сглаживанию (под идеальным сглаживанием принимались результаты сглаживания при точно известной степени (структуре) сглаживающего полинома, осуществляемое методом наименьших квадратов). По результатам обработки определялись значения вторичных координат положения ЛА в пространстве. [4, 16, 22, 23, 25, 28].

На рис. 3–5 представлены временные графики разности между сглаженными значениями вторичных координат вдоль оси  $Z(t)$  и соответствующими истинными значениями вторичных координат без воздействия аномальных ошибок измерений и с при воздействии аномальных ошибок измерений (одиночный сбой + 400 м).

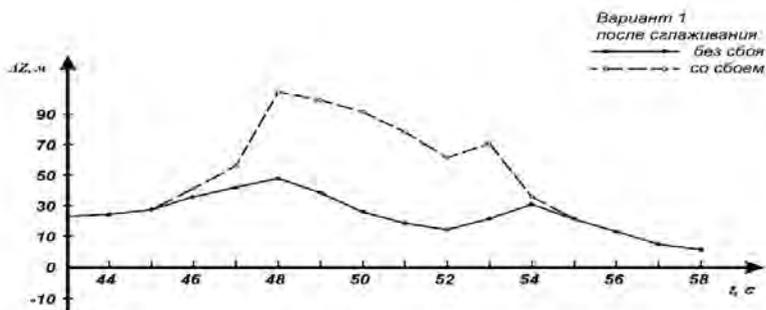


Рис. 3. График зависимости разности между сглаженными значениями вторичных координат вдоль оси  $Z(t)$  для РЛС 1

Одиночный сбой + 400 м в данные измерений вводился для РЛС 1.

Из приведенных графиков видно, что разность между полученными сглаженными значениями вторичных координат вдоль оси  $Z(t)$  и соответствующими истинными значениями вторичных координат при одиночном сбое + 400 м уменьшается с уве-

личением количества РЛС, участвующих в обработке данных траекторных измерений.

Можно сделать вывод, что при обработке данных внешнетраекторных измерений разработанным алгоритмом точность и достоверность определения вторичных координат пространственного положения ЛА возрастает с увеличением избыточности обрабатываемой информации [4, 16, 22, 23, 25, 28].

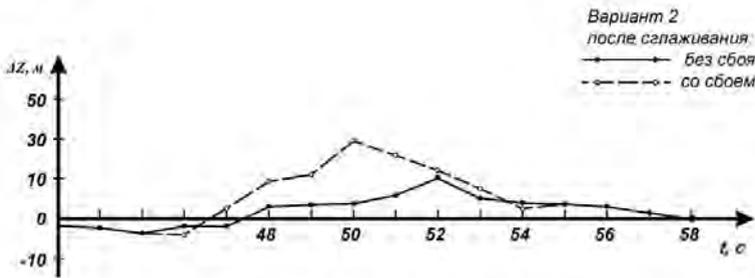


Рис. 4. График зависимости разности между сглаженными значениями вторичных координат вдоль оси  $Z(t)$  для РЛС 1 и РЛС 2

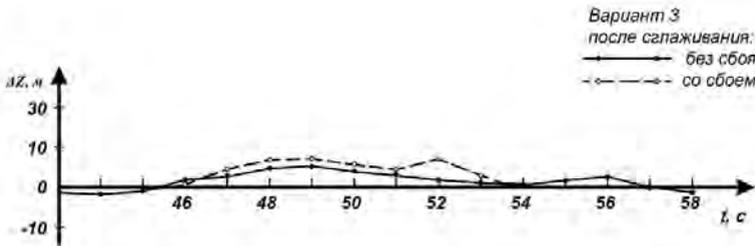


Рис. 5. График зависимости разности между сглаженными значениями вторичных координат вдоль оси  $Z(t)$  для РЛС 1, РЛС 2 и РЛС 3

### 3. Заключение

В результате проведенных исследований разработан алгоритм адаптивного нелинейного сглаживания данных многопа-

раметрических измерений, который позволяет по имеющейся первичной информации, обладающей пространственной и временной избыточностью для любого заданного момента времени, с высокой степенью точности и достоверности определить в декартовой системе координат вторичные параметры пространственного положения ЛА. Разработанный алгоритм осуществляет совместную обработку данных измерений, обладающих пространственной и временной избыточностью, что отличает его от ранее разработанных алгоритмов.

По результатам экспериментального исследования, проведенного методом математического моделирования, установлено, что разработанный алгоритм повышает точность и достоверность определения вторичных координат пространственного положения ЛА в траекторных измерительно-вычислительных комплексах. Кроме того, доказано, что алгоритм устойчив в работе при обработке данных измерений со сбоями и грубыми ошибками измерений, а также сохраняет работоспособность при воздействии аномальных ошибок измерений.

В ходе проводимых исследований установлено, что алгоритм адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений, может быть применён для оценки производных (скоростей и ускорений) сглаженных значений вторичных координат положений летательного аппарата.

### **Литература**

1. БУРМИСТРОВ С.К. *Справочник офицера Воздушно-космической обороны*. – Тверь: ВА ВКО, 2006. – 564 с.
2. ГОЛУБКОВ А.В., СТОЛЯРОВА И.В. *Анализ гибридной стохастической модели движения объекта по сложной траектории* // Ученые записки УлГУ. Серия: Математика и информационные технологии. – 2019. – №2. – С. 24–29.
3. ГОЛУБКОВ А.В. *Обнаружение и идентификация режима движения объекта по сложной траектории* // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы: Сборник материалов международной конференции, Белгород, 25–29 октября 2021 года. –

- Белгород: Белгородский государственный национальный исследовательский университет, 2021. – С. 87–89.
4. ГОРБУНОВ А.А., ПРИПАДЧЕВ А.Д. *Автоматизированные методы обработки результатов эксперимента.* – Оренбург: Оренбургский государственный университет, ЭБС АСВ, 2016. – 99 с.
  5. КАЗАКОВ В.Г., ГРОМОВА Е.Н. *Планирование экспериментальных исследований и статистическая обработка данных // Основы научных исследований в промышленной теплоэнергетике.* – С.-Пб.: Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, 2020. – 85 с.
  6. КИСИН Ю.К. *О применении алгоритмов на основе метода наименьших квадратов и конечных формул в задачах обработки траекторных измерений // Вестник концерна ВКО «Алмаз-Антей».* – №3(18). – 2016. – С. 59–65е.
  7. КУЗНЕЦОВ А.А., ЖУКОВ Ю.О. КУЗНЕЦОВА О.Н. *Методика повышения точности траекторных измерений с использованием алгоритмов оперативной оценки координат маневрирующих летательных аппаратов // Вестник метролога.* – 2023. – №3. – С. 31–34.
  8. КУЗНЕЦОВ А.А., ЖУКОВ Ю.О. *Снижение динамических ошибок траекторных измерительных комплексов с использованием алгоритмов обработки измерительной информации, полученных на базе динамических моделей движения // Вестник метролога.* – 2020. – №3. – С. 31–36.
  9. КУШНАРЕВ П.И., ОГОДНИЙЧУК Н.Д., ЛАКЕЕВ А.М. *Статистические методы контроля точности траекторных измерительных средств // Эффективность обработки информации в системах траекторных измерений.* – М.: Министерство обороны СССР, 1968. – С. 109–112.
  10. МЕДВЕДЕВ Д.М. *Структуры и алгоритмы обработки данных в системах автоматизации и управления.* – Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 100 с.
  11. НИКИТИНА-КОШКИНА К.Э., НИКИТИН-КОШКИН С.А., КОШКИНА Г. В. и др. *Методика обнаружения траектории летательного // Моделирование нелинейных процессов*

- и систем: Материалы седьмой международной конференции, Москва, 20–23 декабря 2023 года. – Москва: Янус-К, 2024. – С. 158–159.
12. НИКИТИН-КОШКИН С.А., КОШКИНА Г.В., СТУКАЛОВА Н.А. *Моделирование нелинейных процессов и систем* // Материалы седьмой международной конференции, Москва, 20–23 декабря 2023 года. – Москва: Янус-К, 2024. – С. 158–159.
  13. ОГОДНИЙЧУК Н.Д. *Обработка траекторной информации. Ч. I.* – Киев: КВВАИУ, 1981. – 141 с.
  14. ОГОДНИЙЧУК Н.Д. *Обработка траекторной информации. Ч. II.* – Киев: КВВАИУ, 1986. – 224 с.
  15. ПАСЛЁН В.В., МИЛЬШТЕЙН А.В., МОТЫЛЕВ К.И. *Исследование структур базисных функций* // Сборник научных трудов. – Вып. 29. – Донецк: Донецкий институт железнодорожного транспорта, 2012. – С. 23–30.
  16. ПОНОМАРЕВ В.Б., ЛОШКАРЕВ А.Б. *Математическая обработка результатов инженерного эксперимента* // Мин-во науки и высшего образования РФ. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2019. – 104 с.
  17. СОЛДАТОВ А. С. *Концепция создания перспективной информационно-измерительной системы для летных испытаний авиационной техники с применением технологий индустрии 4.0* // Воздушно-космические силы. Теория и практика. – 2021. – №20. – С. 167–177.
  18. СТЕПАНОВА Е.А., СКУЛКИНА Н.А., ВОЛЕГОВ А.С. *Основы обработки результатов измерений* – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. – 96 с.
  19. ЦЕЛЫХ А.Н., ЦЕЛЫХ А.А., КОТОВ Э.М. *Современные методы прикладной информатики в задачах анализа данных.* – Ростов-на-Дону, Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, 2021. – 130 с.
  20. ШАРОВ С.Н., ТОЛМАЧЕВ С.Г., СОЛОВЬЕВА В.В. *Синтез генератора динамического шума сигналов управления БПЛА в режиме сопровождения заданного объекта* // Сб. научных работ X Всероссийская научная конференция «Системный синтез и прикладная синергетика»: (п. Нижний Архыз, КЧР Россия 28.09-02.10.2021 г.); Южный федераль-

- ный университет. – Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во Южного федерального университета, – С. 92-98.
21. ШПАКОВ П.С., ЮНАКОВ Ю.Л. *Математическая обработка результатов измерений*. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2014. – 410 с.
  22. ЩЕРБОВ И.Л. *Алгоритмы адаптивного нелинейного сглаживания данных многопараметрических измерений*: дис. канд. техн. наук. – Таганрог, 2023. – 145 с.
  23. ЩЕРБОВ И.Л. *Апробация работы алгоритма адаптивного нелинейного оптимального сглаживания многопараметрических данных траекторных измерений* // Известия высших учебных заведений. Электроника. – Т. 28, вып. 3. – М., Зеленоград: НИУ «МИЭТ», 2023. – С. 378–384.
  24. ЩЕРБОВ И.Л. *Информационная технология обработки данных траекторного контроля* // Вестник Донецкого национального университета. Серия Г: Технические науки. – 2021. – №1. – С. 71–77.
  25. ЩЕРБОВ И.Л. *Исследование алгоритма адаптивного нелинейного оптимального сглаживания многопараметрических данных измерений* // Информатика и кибернетика. – 2020. – №4(22). – С. 5–12.
  26. ЩЕРБОВ И.Л. *Исследование методов проверки значимости коэффициентов сглаживающего полинома* // Известия ЮФУ. Технические науки. – Вып. 3 (230). – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2023. – С. 134–143.
  27. ЩЕРБОВ И.Л. *Исследование области определения параметров базисной функции двух аргументов при построении  $\lambda$ -ортогональной базисной функции* // Известия ЮФУ. Технические науки. – Вып. 6 (230). – Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2022. – С. 106–116.
  28. ЩЕРБОВ И.Л. *Математическое моделирование обработки данных траекторного контроля* // Материалы международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы обеспечения национальной безопасности в условиях современности» (17 декабря 2020 г.). – Донецк, 2020. – С. 25–32.

29. ЩЕРБОВ И.Л., ПАСЛЁН В.В. *Обработка данных траекторного контроля с использованием ортогональных базисных функции* // Вестник Академии гражданской защиты. Вып. 1 (25). – Донецк: АГЗ, 2021. – С. 48–53.
30. AMELINA N., EROFEEVA V., GRANICHIN O. *Consensus-based distributed algorithm for multisensor-multitarget tracking under unknown-but-bounded disturbances* // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, Iss. 2. – P. 3589–3595. – DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1756.
31. BAR-SHALOM Y., LI X.R., KIRUBARAJAN T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation* // Theory, Algorithms, and Software. – New York: Wiley, 2001. – 558 p.
32. BLOM H.A.P., BAR-SHALOM Y. *The Interacting Multiple Model Algorithm for Systems with Markovian Switching Coefficients* // IEEE Trans. Automatic Control. – 1989. – Vol. 33, No. 8. – P. 780–783.
33. GRIFFITHS H.D. *From a Different Perspective: Principles, Practice and Potential of Bistatic Radar* // IEEE Int. RADAR2003. – Australia. – 3–5 September, 2003. – P. Ra031000.pdf.
34. MICHAEL C. *Radar the Next Generation – Sensors as Robots* // IEEE Int. RADAR2003. – Australia. – 3–5 September, 2003 – P. Ra031002.pdf.
35. PASLYON V.V. SHCHERBOV I.L., MIKHAILOV M.V. et al. *Joint processing of ground and air information* // Materials of Final Int. Scientifically-Practical Conf. “The Science: theory and practice.” – Vol. 27. Engineering science. – Praha: Publishing House “Education and Science”, s.r.o.; Prague, Czechia – Dnepropetrovsk, Ukraine – Belgorod, Russian, 2005. – P. 6–9.
36. TSYGANOV A.V., TSYGANOVA YU.V., GOLUBKOV A.V. et al. *Adaptive estimation of a moving object trajectory using sequential hypothesis testing* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2019. – Т. 12, №1. – С. 156–162. – DOI: 10.14529/mmp190115.

## ALGORITHM OPERATION FOR ADAPTIVE NONLINEAR SMOOTHING OF MULTIPARAMETER MEASURING DATA

**Igor Scherbov**, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Donetsk National Technical University", Donetsk, DPR, Vice Rector (scherbov@yandex.ru).

*Abstract. The paper considers the operation of an adaptive nonlinear smoothing algorithm for multiparameter measurement data. This algorithm allows for the joint processing of measurement data with spatial and temporal redundancy, which improves the accuracy and reliability of determining the secondary parameters of the test objects' positions. The algorithm uses structures of linearly independent and  $\Lambda$ -orthogonal basis functions, which allow for the joint processing of various types of measured primary coordinates of the test objects' positions obtained from external trajectory measuring instruments, to obtain independent estimates of the smoothing polynomial coefficient vector. The proposed method for selecting the initial approximation of the smoothing polynomial coefficient vector to begin the iterative process of finding the most reliable value of the smoothing polynomial coefficient vector at the first smoothing step allows for each subsequent step of locally moving smoothing of the measurement data to use the value obtained at the previous step of locally moving smoothing. The applied in the work algorithm methods of checking the significance of the coefficients of the smoothing polynomial, allowed to optimize the process of determining the significant coefficients of the smoothing polynomial. The application of the developed method of selecting the initial approximation of the vector of coefficients of the smoothing polynomial and the proposed methods allowed to reduce the time for processing the data of trajectory measurements. According to the results of the conducted experimental study it was established that the developed algorithm of adaptive nonlinear smoothing of data of multiparameter trajectory measurements increases the accuracy and reliability of determining the secondary coordinates of the spatial position of the aircraft in trajectory measuring and computing complexes and ensures stability in operation when processing measurement data with failures and gross measurement errors.*

**Keywords:** adaptive nonlinear smoothing algorithm, smoothing polynomial, vector of coefficients of the smoothing polynomial, linearly independent basis functions,  $\Lambda$ -orthogonal basis functions.

УДК: 004.942+519.254+519.876.5+621.396.96

ББК: 32.81+22.143+22.171

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.А. Ворониным.*

*Поступила в редакцию 03.09.2024.*

*Опубликована 31.01.2025.*

## ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ГИБКИМ ОБЪЕКТОМ<sup>1</sup>

Ромадов С. В.<sup>2</sup>, Козырь А. В.<sup>3</sup>, Ефромеев А. Г.<sup>4</sup>  
(ФГБОУ ВО Тульский государственный университет,  
Тула)

*Решается задача управления гибким объектом. Рассмотрены вопросы построения математической модели неоднородного гибкого звена на основе уравнения Эйлера – Бернулли. В качестве расчётной схемы была выбрана простейшая модель, которая может описывать колебания однозвенного манипулятора, транспортировки закреплённого в некоторой точке груза, лопасти вертолёт. Представлен универсальный алгоритм определения параметров упругой системы и составления ее математической модели. Предложен метод аналитического определения собственных форм колебаний неоднородной конструкции. Модель колебаний строится методом начальных параметров с дискретизацией распределения масс и изгибной жесткости. Уравнения динамики системы получаются с помощью интегрирования уравнения Эйлера – Бернулли. Полученная математическая модель с достаточно высокой точностью описывает динамику объектов, для которых характерно постоянное или ступенчатое распределение массы и жёсткости по длине. Система управления, обеспечивающая высокое быстродействие при минимальных колебаниях, разработана с использованием методов аналитического конструирования оптимальных регуляторов и модального управления на основе решения системы линейных матричных неравенств (LMI). Показано, что формулирование задачи управления в виде LMI позволяет учитывать ограничение управляющего воздействия. Результаты подтверждены компьютерным моделированием.*

Ключевые слова: упругое звено, модель Эйлера – Бернулли, АКОР, LMI, вибрации, модальное управление.

### 1. Введение

Задача управления движением гибкой конструкцией возникает в различных приложениях робототехники и мехатроники. Манипуляторы, построенные из тонкого профиля,

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках государственного задания по теме FEWG-2022-0003.

<sup>2</sup> Сергей Владимирович Ромадов, студент (romadovsergey5@gmail.com).

<sup>3</sup> Андрей Владимирович Козырь, к.т.н., доцент (Kozyr\_A\_V@mail.ru).

<sup>4</sup> Андрей Геннадьевич Ефромеев, к.т.н., доцент (age.sau@mail.ru).

могут обеспечить высокую грузоподъемность и энергоэффективность по сравнению с традиционными конструкциями [8, 18]. Такие системы используются в космосе, медицине, под водой и при проведении быстрых операций [19]. Однако упругое поведение гибких звеньев приводит к нежелательным вибрациям [17], что затрудняет разработку системы управления такими системами. Те же проблемы актуальны для крыльев самолетов, кранов, лопастей вертолетов, фюзеляжей летательных аппаратов [13]. Притом наибольшую сложность и актуальность задача обретает именно в управлении летательными аппаратами [6, 10, 14, 16].

Методы анализа колебаний малой амплитуды особенно широко освещены в учебной и теоретической литературе [15, 20]. В работе [7] проведён сравнительный анализ таких методов на основе уравнения Эйлера – Бернулли с различными допущениями, среднеквадратичных отклонений и метода конечных элементов для однородной балки. Динамика объектов, описываемых простейшими расчётными схемами, описана в [1]. В [3] та же модель применялась для качественного анализа флаттера крыла. В то же время существуют и методы нелинейного описания изгибных колебаний, позволяющие работать с колебаниями большой амплитуды [11]. При этом в некоторых работах [7, 13, 20], результаты которых сопровождаются экспериментом, отмечается, что точность линейных моделей является достаточной для синтеза.

Для управления гибкими динамическими системами уже были предложены методы аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР, LQR) и построения ПИД-регуляторов [7, 11], модального [5] и нечеткого логического управления [18]. Естественным решением видится и подход к решению задачи модального управления на основе решения системы линейных матричных неравенств (LMI) [9, 12].

В данной работе рассмотрим простейшую расчётную схему (рис. 1) в виде упругого тела (балки), вращающегося относительно крайней точки, соответствующей неподвижному соединению (жёсткой заделке). Ей может соответствовать

динамика, например, однозвенного манипулятора или свободного участка перевозимого по воздуху груза или испытательного стенда, исследованного в работах по соответствующей тематике [8, 18]. Математическое описание будет построено в линейной форме, удобной для синтеза алгоритмов управления. Будут исследованы возможности моделей с прогнозированием и их преимущества перед классическим модальным управлением.

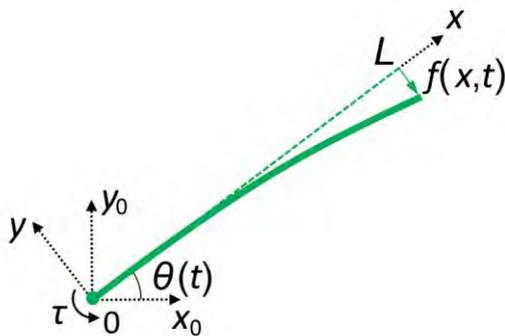


Рис. 1. Расчётная схема упругой системы

## 2. Математическая модель

### 2.1. МОДЕЛЬ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Уравнение Эйлера-Бернулли для неоднородной балки:

$$(1) \quad \left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) + m_0(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t),$$

где  $h$  – коэффициент внутреннего трения [3, 11], с;  $x$  – координата точки продольной оси, м;  $EJ_z(x)$  – изгибная жесткость, Н·м<sup>2</sup>;  $y(x, t)$  – прогиб, м;  $m_0(x)$  – распределённая по длине масса, кг/м;  $q(x, t)$  – распределённая нагрузка, Н/м. Чтобы найти решение, используют разделение переменных в форме

$$(2) \quad f(x, t) = \varphi(x)\eta(t).$$

После подстановки соотношения (2) в уравнение (1) при отсутствии нагрузки можно получить:

$$(3) \quad \frac{1}{m_0(x)\varphi} \frac{d^2}{dx^2} \left( EJ_z(x) \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right) = - \frac{\frac{d^2}{dt^2}\eta}{\eta + h \frac{d}{dt}\eta}.$$

Помимо констант в правую часть выражения (3) входят функции, зависящие только от времени  $t$ , а в левую часть – только от координаты  $x$ . Это возможно только тогда, когда правая и левая части – константы. Обозначим эту константу как  $\omega^2$ . Тогда из уравнения (3) можно получить

$$(4) \quad \frac{d^2}{dt^2}\eta(t) + h\omega^2 \frac{d}{dt}\eta(t) + \omega^2\eta(t) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{1}{m_0(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z(x) \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^2} \right) + \omega^2\varphi(x) = 0.$$

Уравнение (4) представляет собой уравнение свободных колебаний. Уравнение (5) будет использовано для аналитического вычисления форм колебаний, однако распределённый характер параметров балки предварительно сменим ступенчатым, что соответствует характеристикам рассматриваемых в данной теории объектов. Разобьём балку на  $k$  участков длиной  $l_i$  с постоянными параметрами  $EJ_{zi}$  и  $m_{0i}$  в их пределах [15]. Теперь рассмотрим уравнение (5) для  $i$ -того участка:

$$(6) \quad \frac{d^4}{dx^4}\varphi_i(x) + \beta_{i,n}^4\varphi_i(x) = 0,$$

где  $\beta_{i,n}$  – постоянный коэффициент,  $m^{-1}$ :

$$(7) \quad \beta_{i,n} = \sqrt{\omega_n} \sqrt[4]{\frac{m_{0i}}{EJ_{zi}}}.$$

Уравнение (6) имеет бесконечное количество решений, каждое из которых соответствует собственному значению собственной частоты колебаний  $\omega_n$ , рад/с. Тогда отклонения  $i$ -го участка будут равны

$$(8) \quad f_{i,n}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{i,n}(x) q_n(t),$$

где  $\varphi_{i,n}(x)$  –  $n$ -я форма колебаний  $i$ -го участка, м;  $q_n(t)$  – обобщённая координата деформации по  $n$ -й форме колебаний. Каждая главная форма колебаний  $\varphi_{i,n}(x)$  характеризуется собственной частотой колебаний  $\omega_n$ .

## 2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ФОРМЫ КОЛЕБАНИЙ

Рассматривая какую-либо форму колебаний, определим вектор формы  $u_n$  из значений прогиба, угла поворота, изгибающего момента и перерезывающей силы для  $i$ -го участка:

$$(9) \quad u_n(x) = \left( \varphi_n \quad \frac{d}{dx} \varphi_n \quad EJ_z \frac{d^2}{dx^2} \varphi_n \quad EJ_z \frac{d^3}{dx^3} \varphi_n \right)^T.$$

Далее составляют матрицу перехода через  $i$ -й участок  $\Phi_{n,i}(x)$  [15]. Её коэффициенты для краткости не приводим. Матрица должна быть составлена таким образом, чтобы вектор формы в любой точке некоторого участка мог быть связан с вектором формы в его начале выражением:

$$(10) \quad u_n(x) = \Phi_{n,i} \left( x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \right) \left[ \prod_{j=1}^{i-1} \Phi_{n,j}(l_j) \right] u_n(0) = \Gamma_n(x) u_n(0),$$

где  $i$  – номер участка, которому принадлежит рассматриваемая координата  $x$ ;  $l_j$  – длина  $j$ -го участка;  $\Gamma_n(x)$  – матрица, связывающая значения вектора формы в начале и на координате  $x$  произвольного участка.

Граничные условия для закреплённой с одного конца балки:

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad u_3(l) = 0, \quad u_4(l) = 0$$

означают, что изгибающий момент и перерезывающая сила на левом (свободном) конце балки и прогиб и угол поворота на правом конце равны 0. Используя граничные условия и уравнение (10), можно записать систему уравнений, нетривиальному решению которой соответствует равенство нулю определителя:

$$(11) D_n = \begin{vmatrix} \Gamma_n(l)^{3,3} & \Gamma_n(l)^{3,4} \\ \Gamma_n(l)^{4,3} & \Gamma_n(l)^{4,4} \end{vmatrix} = 0.$$

Выражение для этого определителя включает коэффициенты  $\beta_{i,n}$ , которые в соответствии с выражением (7) зависят от параметров  $m_{0i}$  и  $EJ_{zi}$  для  $i$ -го участка и собственной частоты для формы колебаний  $\varphi_n$ . Таким образом, уравнение (11) позволяет определить собственные частоты после подстановки выражения (7).

Из той же системы можно определить выражение для  $n$ -й формы колебаний:

$$(12) \varphi_n(x) = u_n^3(0) \left( \Gamma_n^{1,3}(x) - \frac{\Gamma_n^{3,3}(l)}{\Gamma_n^{3,4}(l)} \Gamma_n^{1,4}(x) \right),$$

где коэффициенты матрицы  $\Gamma_n$  вычисляются в соответствии с (14);  $u_n^3(0)$  – начальное значение эпюры изгибающего момента.

### 2.3. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ

В соответствии с расчётной схемой, показанной на рис. 1, у рассматриваемого упругого тела помимо главных форм колебаний с соответствующими резонансными частотами есть ещё одна, характеризующая нулевой частотой. Она отвечает за поворот тела:

$$(13) y(x,t) = \varphi_0(x)\eta_0(t) + \sum_{n=1}^N \varphi_n(x)\eta_n(t) = x\theta(t) + \sum_{n=1}^N \varphi_n(x)\eta_n(t).$$

где  $\theta(t)$  – угол поворота балки как жёсткого тела, рад;  $N$  – число учтённых форм колебаний.

Распределённую нагрузку в уравнении (1) перепишем в виде

$$(14) q(x,t) = R(x)Q(t).$$

Обобщённой силой в данном случае является момент  $\tau(t)$ . В соответствии с соотношением (14)

$$Q(t) = \tau(t), \quad R(x) = \frac{d}{dx} \delta(x),$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака.

Перепишем уравнение (1) с учётом соотношений (2) и (14):

$$(15) \quad \sum_{n=1}^N \left( \eta + h \frac{d}{dt} \eta \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \\ + \sum_{n=1}^N m_0 \varphi \frac{d^2 \eta}{dt^2} + x m_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = R(x) Q(t).$$

Для получения уравнений динамики системы следует умножить (15) на  $\varphi_n(x)$  и проинтегрировать по  $x$  для каждого  $n$ , в том числе и для  $n=0$ . Общий вид уравнений динамики системы:

$$(16) \quad M \frac{d^2}{dt^2} r(t) + D \frac{d}{dt} r(t) + S r(t) = H \tau(t),$$

причём вектор обобщённых координат представляется в виде

$$r = (\theta \quad \eta_1 \quad \cdots \quad \eta_n \quad \cdots \quad \eta_N)^T.$$

Элементы матриц системы:

$$M_{i,j} = \int_0^l m_0(x) \varphi_{i-1}(x) \varphi_{j-1}(x) dx, \quad S_{i,j} = \omega_{i-1}^2 M_{i,j}, \quad D = hS, \\ H_j = \int_0^l R(x) \varphi_{j-1}(x) dx.$$

Представим систему (16) в пространстве состояний:

$$(17) \quad \frac{d}{dt} \chi = A \chi + B u,$$

где  $\chi$  – вектор состояния,  $A$  – матрица системы;  $B$  – матрица входных воздействий;  $u$  – вектор входных воздействий:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}S & -M^{-1}D \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}H \end{pmatrix}, \\ \chi = \left( \theta \quad q_1 \quad \cdots \quad q_n \quad \frac{d}{dt} \theta \quad \frac{d}{dt} \eta_n \quad \cdots \quad \frac{d}{dt} \eta_N \right)^T,$$

$$Q(t) = \tau(t),$$

где  $I$  – единичная матрица размерности  $((4+2N) \times (4+2N))$ .

Вид функции  $R(x)$  зависит от типа приложенного воздействия. Коэффициент внутреннего трения  $h$  должен быть определён из эксперимента.

### 3. Система управления

Синтез регулятора будет осуществляться методами аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) и решением линейных матричных неравенств (LMI). Синтез регулятора осуществляется в форме обратной связи по переменным состояния:

$$u = -Kx,$$

где  $K$  – вектор коэффициентов обратной связи.

Собственные значения матрицы  $A$  будем задавать с помощью LMI-областей, определяемых симметричными матрицами  $W$  и  $E$  [9, 12]:

$$W \otimes X + E \otimes (AX + BY) + E^T \otimes (XA^T + Y^T B^T) < 0,$$

где « $\otimes$ » обозначает произведение Кронекера;  $X$ ,  $Y$  – положительно определенные матрицы, определяющие коэффициенты

$$K = YX^{-1}.$$

Желаемое расположение корней системы, выбранное в соответствии с корневыми критериями качества, может быть задано комбинацией вертикальной полосы от  $h_2$  до  $h_1$  и конического сектора с углом  $\pi/2 - \alpha$ .

Пересечение двух областей:

$$W = \begin{pmatrix} 2h_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Имеются также два неравенства для ограничения управления, гарантирующие выполнение  $\|u(t)\| \leq \mu$  при  $x(0) \leq x_0$ .

$$\begin{pmatrix} W & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \begin{pmatrix} W & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} > 0.$$

Таким образом,  $h_1$  определяет быстродействие;  $h_2$  определяет ограничение быстрой составляющей переходных процессов;  $\alpha$  определяет коэффициент демпфирования;  $\mu$  устанавливает ограничение управления.

Синтез методом АКОР основан на выборе значений весовых матриц  $Q$  и  $R$  критерия оптимальности

$$(18) \quad J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt.$$

Для удобства  $Q$  задаётся как диагональная матрица:

$$Q = \text{diag}(Q_1 \quad Q_2 \quad \dots \quad Q_M),$$

где  $M$  – размерность матрицы  $A$ .

Вектор коэффициентов обратной связи:

$$(19) \quad K = R^{-1} B^T P,$$

где  $P$  – матрица, определяемая уравнением Риккати:

$$(20) \quad A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0.$$

Чем больше  $i$ -й коэффициент матрицы  $Q$ , тем выше оказывается коэффициент передачи по  $i$ -й переменной. Аналогично: чем выше  $R$ , тем меньше по амплитуде управление.

#### 4. Математическое моделирование

Результаты сравнения экспериментальных данных и данных компьютерного моделирования для свободных колебаний консольно закреплённой балки представлены на рис. 2.

Далее будем варьировать параметры объекта управления, т.е. менять коэффициенты матриц  $A$  и  $B$  в системе (17) с отклонением в пределах 5%. Полученные переходные процессы, соответствующие решению задачи поворота упругого тела на угол  $90^\circ$ , показаны на рис. 3 и 4. Дополнительно покажем также график расположения полюсов и нулей системы (рис. 5).

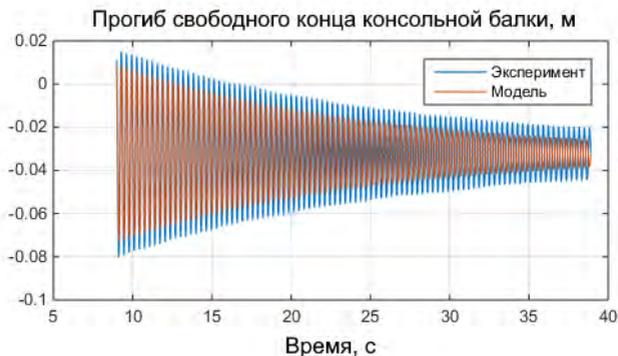


Рис. 2. Сравнение данных эксперимента и модели

Как случайное отклонение на рис. 3–5 обозначен случай, когда отклонение разных коэффициентов системы неодинаково. Переходные процессы показаны на рис. 6.

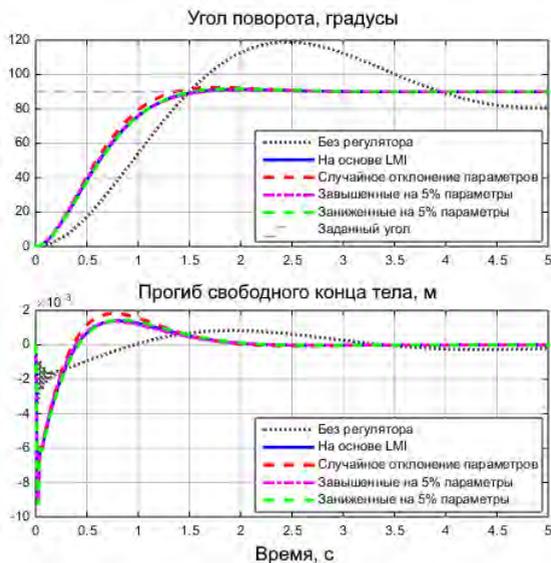


Рис. 3. Переходные процессы в системе с построенным с помощью LMI регулятором

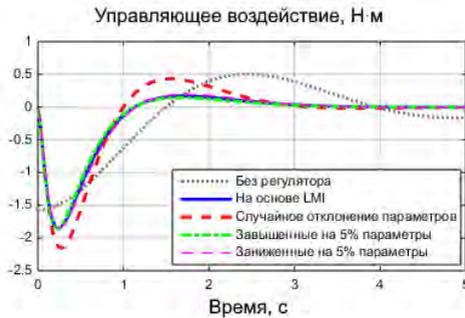


Рис. 4. Управляющее воздействие в системе с построенным с помощью LMI регулятором

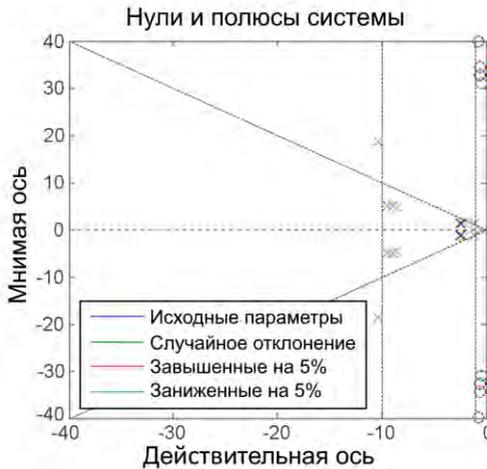


Рис. 5. Полюсы (крестики) и нули (кружки) системы с построенным с помощью LMI регулятором

При использовании LQR и LMI были получены эквивалентные результаты: время регулирования составило около 1,5 с, а перерегулирование не превысило 2,5%. Прогиб в случае LMI оказался меньше. Однако очевидно, что система с коэффициентами обратной связи, рассчитанными методом АКОР, является более чувствительной к изменению параметров объекта.

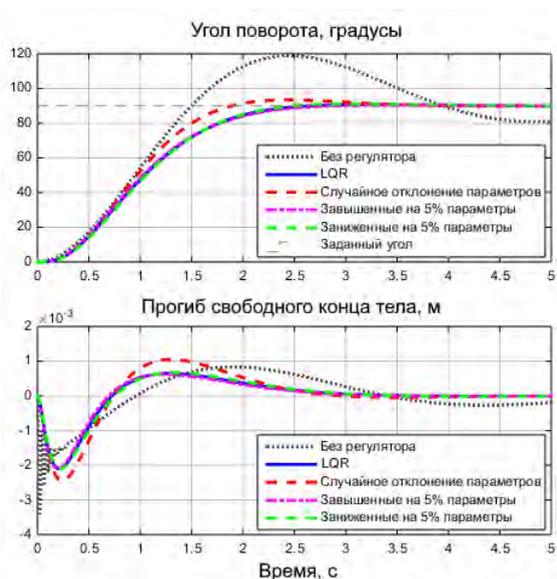


Рис. 6. Переходные процессы в системе с регулятором, построенным методом АКОР

## 5. Выводы

В статье рассматривается вывод системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику воздушной транспортировки гибкого груза. Модель получена на основе уравнений теорий балок Эйлера – Бернулли и Тимошенко. Показано, что для данной системы с высокой эффективностью может быть использован метод LMI. Дальнейшая работа предполагает исследование возможностей уточнения математической модели с помощью экспериментальных данных.

## Литература

1. АВРАМЕНКО А.А. *Метод Рэлея – Ритца и метод начальных параметров в задаче расчета динамических характеристик составных упругих конструкций балочного типа* //

- Вестник Самарского университета. Серия естествознания. – 2019. – №1. – С. 44–56.
2. ОГОРОДНИКОВ Ю.И. *Синтез наблюдателей состояния для линейных моделей упругих конструкций // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование.* – 2016. – №4. – С. 25–36.
  3. ХАЗАНОВ Х.С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами: учеб. Пособие.* – Самара, Изд-во СГАУ, 2002. – 80 с.
  4. ABDULLAHI M.A., ZAHARUDDIN M., MUSTAPHA M. *Vibration control comparison of a single link flexible manipulator between fuzzy logic control and pole placement control // Int. Journal of Scientific & Technology Research.* – 2013. – No. 2. – P. 236–241.
  5. EL-ZOBAIDI H., CHAUDHURI B., PAL B.C. et al. *LMI approach to normalised  $H_\infty$  loop-shaping design of power system damping controllers // IET Proc. on Generation Transmission and Distribution.* – 2005. – No. 6(152). – P. 952–960.
  6. HICKNER M., FASEL U., NAIR A.G. et al. *Data-driven unsteady aeroelastic modeling for control // ARC.* – 2022. – Vol. 61, No. 2. – P. 123–146.
  7. MARTINS R.J., ZAHARUDDIN M., OSMAN TOKHI M. *Approaches for dynamic modelling of flexible manipulator systems // IEE Proc. Control Theory and Applications.* – 2003. – No. 4(150). – P. 401–411.
  8. RAHIMI H.N., NAZEMIZADEH M. *Dynamic analysis and intelligent control techniques for flexible manipulators: A review // Advanced Robotics.* – 2014. – No. 28(2). – P. 63–76.
  9. SCHERER C., WEILAND S. *Linear Matrix Inequalities in Control.* – Germany, University of Stuttgart, 2015. – 293 p.
  10. SHI P., LIU F., GU Y. et al. *The Development of a Flight Test Platform to Study the Body Freedom Flutter of BWB Flying Wings // Aerospace.* – 2021. – No. 8. – P. 390–408.
  11. WARMINSKI J., KLODA L., LATALSKI J. et al. *Nonlinear vibrations and time delay control of an extensible slowly ro-*

- tating beam* // Nonlinear dynamics. – 2021. – No. 103(8). – P. 3255–3281.
12. WERNER H. *Controller design using linear matrix inequalities* // Control systems, robotics, and automation. – 2009. – Vol. IX. – P. 168–201.
  13. YINAN W., XIAOWEI ZH., RAFAEL P. et al. *Aeroelastic Simulation of High Aspect Ratio Wings with Intermittent Leading-Edge Separation* // AIAA JOURNAL. – 2021. – 32 p.
  14. ZHANG C., ZHOU Z., ZHU X. et al. *A Comprehensive Framework for Coupled Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of Highly Flexible Aircrafts* // Applied Sciences. – 2020. – Vol. 10, No. 3. – P. 949–966.
  15. ZHANG Y., LI B., CUI P. et al. *Numerical simulation of support interference characteristics on a low-aspect ratio flying-wing model* // J. Phys. Conf. Ser. – 2020. – 8 p.
  16. ZHAO W., GUPTA A., MIGLANI J. et al. *Finite Element Model Updating of Composite Flying-wing Aircraft using Global/Local Optimization* // Proc. of the AIAA Scitech-2019 Forum, 2019.
  17. ZHAO X., ZHANG S., LIU Z. et al. *Vibration control for flexible manipulators with event triggering mechanism and actuator failures* // IEEE Trans. on Cybernetics. – 2021. – P. 7591–7601.
  18. ZHAO Z., HE X., AHN C.K. *Boundary disturbance observer-based control of a vibrating single-link flexible manipulator* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2021. – No. 51(4). – P. 2382–2390.
  19. ZHAO Z., LIU Z. *Finite-time convergence disturbance rejection control for a flexible Timoshenko manipulator* // IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica. – 2021. – No. 8(1). – P. 157–168.
  20. ZHILING T. *Modeling and control of flexible link robots.* – Singapore, National University of Singapore, 2004. – 153 p.

## STUDY OF THE CHARACTERISTICS OF LINEAR FLEXIBLE OBJECT CONTROL SYSTEM

**Sergey Romadov**, Tula State University, Tula, student (romadovsergey5@gmail.com).

**Andrey Kozyr**, Tula State University, Tula, Cand.Sc., docent (Kozyr\_A\_V@mail.ru).

**Andrey Efromeev**, Tula State University, Tula, Cand.Sc., docent (age.sau@mail.ru).

*Abstract: The paper solves a flexible object control problem. The issues of constructing a mathematical model of an inhomogeneous flexible link based on the Euler-Bernoulli equation are considered. The simple design model was chosen, which, for example, can describe the vibrations of a single-link manipulator, load bending during aerial transportation, or a helicopter blade. A universal algorithm for determining the parameters of an elastic system is presented. A convenient method is used to analytically determine mode shapes of an inhomogeneous structure. Vibrations model was built by the method of initial parameters with discretization of distributions of mass and bending rigidity. The system dynamics equations are obtained by integrating the Euler-Bernoulli equation, which makes mathematical formulation universal. The resulting mathematical model describes with sufficiently high accuracy the dynamics of objects, which are characterized by a constant or stepwise distribution of mass and stiffness along their length. The control system, providing high speed with minimal fluctuations, is developed using LQR and LMI methods. It is shown that the LMI method allows one to directly limit the control action and more intuitively set the required characteristics of the system, however, it is less resistant to changes in the parameters of the control object. Control system needs to be done more robust, and thus further research is necessary.*

Keywords: flexible link, Euler – Bernoulli model, LQR, LMI, vibrations, modal control.

УДК 681.5

ББК 30.2

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

*Поступила в редакцию 16.09.2024.*

*Опубликована 31.01.2025.*

## ДВА ПОДХОДА К СИНТЕЗУ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОЙ ТОЧКОЙ ДВУХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА<sup>1</sup>

Антипов А. С.<sup>2</sup>, Грезнев П. П.<sup>3</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Рассматривается задача отслеживания конечной точкой двухзвеного манипулятора желаемой траектории, заданной на плоскости в рабочем пространстве конечной точки, в условиях действия внешних возмущений. Эти возмущения полагаются согласованными (действуют по одним каналам с управлениями, в качестве которых рассматриваются обобщенные моменты). Стандартные подходы к управлению опираются на решение обратной задачи кинематики, которое может быть неоднозначным и, как правило, требует использования численных методов. Из-за данных недостатков актуальной является проблема разработки законов управления без решения обратной задачи кинематики. Для создания такого подхода к управлению предлагается рассмотреть в качестве выходных переменных координаты конечной точки в декартовой системе. Тогда на основе однозначной зависимости выхода от обобщенных координат можно перейти от исходного описания системы в терминах обобщенных координат к описанию в терминах положений конечной точки и решать задачу синтеза управления на основе преобразованной системы. Построение управления осуществляется с помощью блочного подхода, который позволяет разбить задачу на две элементарные подзадачи синтеза фиктивного и истинного управлений. Для проведения сравнительного анализа также разработан метод синтеза управляющих моментов, предполагающий решение обратной задачи кинематики. В обоих методах используются гладкие и ограниченные S-образные обратные связи, обеспечивающие подавление возмущений с заданной точностью и монотонность переходных процессов. Представлены результаты численного моделирования, подтверждающие эффективность подхода без решения обратной задачи кинематики.*

Ключевые слова: двухзвенный манипулятор, управление положением конечной точки, слежение, обратная задача кинематики, внешние возмущения, блочный подход.

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 24-21-20009).

<sup>2</sup> Алексей Семенович Антипов, к.т.н., с.н.с. (scholess18@mail.ru).

<sup>3</sup> Павел Павлович Грезнев, техник (greznev@gmail.com).

## 1. Введение

Роботы-манипуляторы широко применяются для автоматизации промышленных процессов. Их математическая модель отличается нелинейностью, многосвязностью, наличием параметрических неопределенностей, внешних возмущений и неполнотой измерений. Из задач управления манипулятором наиболее общей и распространенной является задача слежения, которая заключается в построении управления, обеспечивающего движение конечной точки с закрепленным рабочим органом по желаемой траектории. При этом данную траекторию удобно задавать в декартовой системе координат, начало которой находится в основании манипулятора. Однако в качестве выхода (регулируемых переменных), как правило, исследователи рассматривают вектор обобщенных координат манипулятора. В этом случае для построения управления требуется преобразовать желаемую траекторию конечной точки, заданную в декартовой системе координат, в задающие воздействия для обобщенных координат, т.е. решить обратную задачу кинематики. После этого появляется возможность применить стандартные подходы к управлению: ПД- и ПИД-регулирование [8, 19, 22], методы оптимального управления [6, 11, 16], робастного [17, 18, 20] и адаптивного [21] управления.

Решение обратной задачи кинематики сопряжено с рядом сложностей. Аналитическое решение имеется лишь для узкого класса роботов-манипуляторов, поэтому обычно приходится использовать численные методы [2, 3, 5, 13]. Это увеличивает количество вычислений в реальном времени, при этом решение обратной задачи кинематики не всегда однозначно. Его качество существенно зависит от выбора подходящего начального приближения для запуска итерационных процессов. В настоящее время идет активное развитие методов с использованием машинного обучения, в том числе применение нейронных сетей для решения обратной задачи кинематики [7, 14, 15, 23]. Однако точность решения зависит от качества обучающей выборки. В силу данных трудностей актуальной представляется разработ-

ка законов управления, не требующих решения обратной задачи кинематики [4, 9].

В данной работе рассматривается проблема синтеза статической обратной связи для двухзвенного плоскостного робота-манипулятора при действии на объект внешних согласованных возмущений. Ставится задача отслеживания конечной точкой манипулятора желаемой траектории. Цель состоит в разработке двух методов управления и проведении их сравнительного анализа: с решением обратной задачи кинематики и без нее. В этих методах для синтеза управления используется блочный подход [1, 12]. В первом методе исходная система приводится к блочной форме относительно ошибки слежения обобщенными координатами за заданной траекторией, полученной в результате решения обратной задачи кинематики. Во втором – к блочной форме относительно ошибки слежения положениями конечной точки объекта за желаемой траекторией, заданной в декартовой системе координат. Научная новизна связана с разработкой второго метода без решения обратной задачи кинематики. Для подавления возмущений в обоих методах применяются гладкие и ограниченные S-образные обратные связи [1, 12].

Из прошлых работ авторов [9] и [12] близки к тематике данной. В [12] на примере трехзвенного манипулятора было продемонстрировано преимущество использования сигмовидных обратных связей вместо стандартных линейных в рамках блочного подхода. В [9] был предложен подход без решения обратной задачи кинематики с указанием его потенциальных плюсов в плане уменьшения вычислительных затрат по сравнению с применением подходов с решением обратной задачи кинематики. Однако не проводился строгий сравнительный анализ: в качестве приложения был выбран трехзвенный манипулятор, для которого существовало однозначное аналитическое решение обратной задачи кинематики, что позволяло управлять исходной системой в терминах обобщенных координат с помощью стандартных подходов. В отличие от работ [9, 12], в данном исследовании объектом управления является двухзвенный манипулятор, для которого в общем случае нет однозначного аналитического решения обратной задачи кинематики. Таким

образом, в данной работе восполняется пробел [12]: проводится сравнительный анализ подходов с решением обратной задачи кинематики и без него на основе количественных показателей.

## 2. Математическая модель объекта управления и постановка задачи

Математическая модель объекта управления без учета динамики исполнительных устройств (механическая система) описывается уравнениями Эйлера – Лагранжа [10]:

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)), \end{aligned}$$

где  $q_1 = (q_{11}, q_{12})^T$  – вектор положений звеньев манипулятора;  $q_2 = (q_{21}, q_{22})^T$  – вектор скоростей;  $H(q_1) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  – положительно-определенная нелинейная симметрическая матрица инерции;  $C(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  – матрица центробежных и кориолисовых сил, зависящих от вектора обобщенных координат и скоростей;  $G(q_1) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  – вектор гравитационных сил;  $\eta(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  – неизвестные моменты сил, действующие на систему, которые будем рассматривать как внешние возмущения;  $u \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  – вектор обобщенных моментов, который полагается управлением. Для двухзвенного манипулятора элементы матриц системы (1) имеют следующий аналитический вид [10]:

$$(2) \quad \begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)l_1^2 & m_2l_1l_2 \cos(q_{11} - q_{12}) \\ m_2l_1l_2 \cos(q_{11} - q_{12}) & m_2l_2^2 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & m_2l_1l_2 \sin(q_{11} - q_{12}) \\ -m_2l_1l_2 \sin(q_{11} - q_{12}) & 0 \end{pmatrix}, \\ G &= \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)\bar{g}l_1 \cos q_{11} \\ m_2\bar{g}l_2 \cos q_{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $m_i$  и  $l_i$  – массы и длины звеньев соответственно,  $i = 1, 2$ ;  $\bar{g} = 9,81$  – ускорение свободного падения.

Вектор  $y_1 = (y_{11}, y_{12})^T$  определяет положения конечной точки манипулятора в ее рабочей области. Элементы этого вектора однозначно выражаются через обобщенные координаты [10]:

$$(3) \quad \begin{aligned} y_{11} &= h_1(q_1) = l_1 \cos q_{11} + l_2 \cos q_{12}, \\ y_{12} &= h_2(q_1) = l_1 \sin q_{11} + l_2 \sin q_{12}. \end{aligned}$$

Решение обратной кинематической задачи в явном аналитическом виде можно получить только для манипулятора со звеньями одинаковой длины, но оно не является однозначным.

Относительно модели (1)–(2) выдвигаются следующие предположения.

1. Массы  $m_i$  и длины звеньев  $l_i$  точно известны.
2. Обобщенные скорости ограничены по модулю:

$$(4) \quad |q_{2i}(t)| \leq Q_{2i}, \quad t \geq 0.$$

3. Внешние возмущения  $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t))^T$  принадлежат классу кусочно-гладких ограниченных функций:

$$(5) \quad |\eta_i(t)| \leq H_{ii}, \quad t \geq 0.$$

4. Помимо положений конечной точки  $y_1(t)$  и их эталонных траекторий  $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T$ , заданных в системе координат конечной точки, измеряются обобщенные координаты  $q_1(t)$ , скорости  $q_2(t)$  и производные задающих воздействий  $\dot{g}_i(t)$ ,  $\ddot{g}_i(t)$ , которые являются гладкими и ограниченными функциями времени:

$$|g_i^{(j)}(t)| \leq G_{ji}, \quad t \geq 0, \quad j = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2.$$

При этом шумы измерений отсутствуют.

В данных предположениях ставится задача синтеза управления  $u$  в форме статической обратной связи, обеспечивающей отслеживание конечной точкой манипулятора эталонной траектории с заданной точностью:

$$(6) \quad |y_{1i}(t) - g_i(t)| \leq \Delta_{1i}, \quad t \geq t_{1i},$$

где  $\Delta_{1i}$  – желаемая величина ошибки в установившемся режиме;  $t_{1i} > 0$  – время регулирования,  $i = 1, 2$ . При этом в данной работе не ставится цель обеспечить желаемое время регулирования.

### 3. Синтез управления с решением обратной задачи кинематики

Стандартные подходы к построению управления требуют решения обратной задачи кинематики. Оно заключается в том, чтобы пересчитать желаемые траектории  $g_1(t)$ ,  $g_2(t)$ , определенные в рабочей области конечной точки, в задающие воздействия для обобщенных координат  $q_{11}(t)$ ,  $q_{12}(t)$ . Как правило, для этого используют численные методы решения системы нелинейных уравнений (3) относительно  $q_{11}$ ,  $q_{12}$  [2, 3, 5, 13]. Предположим, что получено решение этой задачи  $q_{1d} = (q_{11d}, q_{12d})^T$ . Тогда сформируем ошибку слежения  $e_1 = q_1 - q_{1d}$  вектора обобщенных координат  $q_1$  за задающим воздействием  $q_{1d}$  и найдем ее производную:  $\dot{e}_1 = \dot{q}_1 - \dot{q}_{1d}$ , где  $\dot{q}_{1d} = (\dot{q}_{11d}, \dot{q}_{12d})^T$ . Для удобства дальнейшего синтеза управления переменную  $q_2$  в этом уравнении можно трактовать как фиктивное управление и воспользоваться блочным подходом. Чтобы избежать перерегулирования, характерного для стандартных линейных обратных связей [12], примем стабилизирующую часть желаемого фиктивного управления в виде гладкого и ограниченного гиперболического тангенса [1]:

$$(7) \quad q_2^* = \dot{q}_{1d} - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

где  $M_1 \tanh(K_1 e_1) = (m_{11} \tanh(k_{11} e_{11}), m_{12} \tanh(k_{12} e_{12}))^T$ ,  $m_{1i} > 0$  – амплитуды управления;  $k_{1i} > 0$  – большие коэффициенты в аргументе гиперболического тангенса  $\tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ ,  $i = 1, 2$ .

Введем ошибку слежения  $e_2 = q_2 - q_2^*$  переменной  $q_2$  за желаемой функцией (7). Следовательно, замена переменных

$$(8) \quad \begin{aligned} e_1 &= q_1 - q_{1d}, \\ e_2 &= q_2 - q_2^* = q_2 - \dot{q}_{1d} + M_1 \tanh(K_1 e_1), \end{aligned}$$

преобразует систему (1) к виду

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1), \\ \dot{e}_2 &= H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)) - \ddot{q}_{1d} + \Lambda_1, \end{aligned}$$

где  $\Lambda_1 = (m_{11}k_{11}(1 - \tanh^2(k_{11}e_{11}))\dot{e}_{11}, m_{12}k_{12}(1 - \tanh^2(k_{12}e_{12}))\dot{e}_{12})^T$  – вектор полных производных гиперболического тангенса,  $\ddot{q}_{1d} = (\ddot{q}_{11d}, \ddot{q}_{12d})^T$ .

Истинное управление  $u$  также выберем в виде гиперболического тангенса, который, как гладкий аналог разрывного управления, позволит подавить возмущения во втором уравнении системы (9) [1]:

$$(10) \quad u = -H(q_1)M_2 \tanh(K_2 e_2),$$

где  $M_2 \tanh(K_2 e_2) = (m_{21} \tanh(k_{21}e_{21}), m_{22} \tanh(k_{22}e_{22}))^T$ ,  $m_{2i} > 0$ ,  $k_{2i} > 0$ ,  $i = 1, 2$ . Тогда приходим к следующей замкнутой системе:

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1), \\ \dot{e}_2 &= f - M_2 \tanh(K_2 e_2), \end{aligned}$$

где вектор-функцию

$$f = (f_1, f_2)^T = -H^{-1}(q_1)(C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1) + \eta(t)) - \ddot{q}_{1d} + \Lambda_1$$

рассмотрим как новое возмущение,  $|f_i(t)| \leq F_i$ ,  $t \geq 0$ , при этом константы  $F_i$  известны из допустимых областей изменения переменных (4) системы (1)–(2) и внешних возмущений (5).

**Замечание.** Поскольку в силу постановки задачи все параметры объекта считаются известными, вместо управления (10) можно применить комбинированное управление с частью, компенсирующей вектор-функцию:

$$f_0 = -H^{-1}(q_1)(C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1)) + \Lambda_1.$$

Однако управление (10), имеющее силовой характер, было выбрано специально так, чтобы не вычислять составляющие  $f_0$  на каждом шаге дискретизации и таким образом сократить количество вычислений в реальном времени.

**Лемма 1** [1]. Если в системе (11) вектор-функция  $f$  ограничена  $|f_i(t)| \leq F_i$ ,  $t \geq 0$ , то тогда для сколь угодно малого  $\tilde{\Delta}_{1i} > 0$  и любого начального условия  $e_{1i}(0)$  найдутся такие  $\bar{k}_{ij} > 0$ ,  $\bar{m}_{ij} > 0$ , что при любых  $k_{ij} > \bar{k}_{ij}$ ,  $m_{ij} > \bar{m}_{ij}$  будет обеспечена стабилизация ошибки слежения с заданной точностью  $|e_{1i}(t)| \leq \tilde{\Delta}_{1i}$ ,  $t \geq \tilde{t}_{1i}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2$ .

В конструктивном доказательстве Леммы 1, которое здесь не приводится, получены нижние оценки для выбора коэффициентов нелинейного регулятора, зависящие от заданных  $\tilde{\Delta}_{li}$ . При этом в системе (1), (10) цель управления (6) достигается, если назначить  $\tilde{\Delta}_{li}$  с учетом заданной ошибки слежения для конечной точки в силу (3).

#### 4. Синтез управления без решения обратной задачи кинематики

Чтобы не решать обратную задачи кинематики предлагается продифференцировать  $y_1$  (3) и от уравнений (1)–(2) перейти к следующей системе:

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= R(q_1)q_2, \\ \dot{q}_2 &= H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)), \end{aligned}$$

где

$$R(q_1) = \begin{pmatrix} -l_1 \sin q_{11} & -l_2 \sin q_{12} \\ l_1 \cos q_{11} & l_2 \cos q_{12} \end{pmatrix}.$$

Выходом этой системы является вектор положений конечной точки  $y_1(t)$ . Введем ошибку  $e_1 = y_1 - g$  его отслеживания эталонной траектории  $g(t)$ , заданной в системе координат конечной точки. Ее производная имеет вид  $\dot{e}_1 = R(q_1)q_2 - \dot{g}$ , где  $\dot{g} = (\dot{g}_1, \dot{g}_2)^T$ . В этом уравнении переменную  $y_2 = R(q_1)q_2$  будем трактовать как фиктивное управление и, как и для предыдущего метода управления, применим блочный подход. Замена переменных

$$e_1 = y_1 - g,$$

$$e_2 = y_2 - y_2^* = R(q_1)q_2 - \dot{g} + M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

$$y_2^* = \dot{g} - M_1 \tanh(K_1 e_1)$$

приводит систему (12) к виду

$$\dot{e}_1 = e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1),$$

$$\dot{e}_2 = \dot{R}q_2 - \dot{\dot{g}} + \Lambda_1 + R(q_1)H^{-1}(q_1)(u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) - \eta(t)),$$

где

$$M_1 \tanh(K_1 e_1) = (m_{11} \tanh(k_{11} e_{11}), m_{12} \tanh(k_{12} e_{12}))^T,$$

$$\dot{R}(q_1, q_2) = \begin{pmatrix} -l_1 \cos(q_{11}) q_{21} & -l_2 \cos(q_{12}) q_{22} \\ -l_1 \sin(q_{11}) q_{21} & -l_2 \sin(q_{12}) q_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = (m_{11} k_{11} (1 - \tanh^2(k_{11} e_{11})) \dot{e}_{11}, m_{12} k_{12} (1 - \tanh^2(k_{12} e_{12})) \dot{e}_{12})^T,$$

$$\ddot{g} = (\ddot{g}_1, \ddot{g}_2)^T.$$

Невырожденность матрицы  $R(q_1)H^{-1}(q_1)$  при истинном управлении  $u$  в замкнутой локальными связями системы определяется условием  $\det R(q_1) = -l_1 l_2 \sin(q_{11} - q_{12}) \neq 0$ , которое выполняется при  $q_{11}(t), q_{12}(t): \sin(q_{11}(t) - q_{12}(t)) \neq 0 \Rightarrow q_{12}(t) \neq q_{11}(t) - \pi n, n \in Z, t \geq 0$ . Таким образом, использование подхода без решения обратной задачи кинематики ограничивает область допустимых обобщенных координат, при которых преобразование системы в термины координат конечной точки не нарушает свойство управляемости.

В предположении  $\det R(q_1) \neq 0$  сформируем закон истинного управления:

$$(13) \quad u = -(R(q_1)H^{-1}(q_1))^{-1} M_2 \tanh(K_2 e_2),$$

где  $M_2 \tanh(K_2 e_2) = (m_{21} \tanh(k_{21} e_{21}), m_{22} \tanh(k_{22} e_{22}))^T, m_{2i} > 0, k_{2i} > 0, i = 1, 2$ .

В результате приходим к замкнутой системе, внешний вид которой совпадает с системой (11):

$$(14) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - M_1 \tanh(K_1 e_1), \\ \dot{e}_2 &= f - M_2 \tanh(K_2 e_2), \end{aligned}$$

но здесь

$$f = \dot{R}(q_1, q_2) q_2 - \ddot{g} + \Lambda_1 - R(q_1)H^{-1}(q_1)(C(q_1, q_2) q_2 + G(q_1) + \eta(t)),$$

$$|f_i(t)| \leq F_i, t \geq 0.$$

Согласно Лемме 1 найдутся такие числа  $\bar{k}_{ij} > 0, \bar{m}_{ij} > 0$ , которые обеспечат подавление возмущений и стабилизацию ошибки слежения  $e_1 = y_1 - g$  с заданной точностью (6).

## 5. Результаты численного моделирования

Для проверки работоспособности разработанных алгоритмов управления и сравнительного анализа результатов их работы было проведено численное моделирование в MATLAB/Simulink. Были приняты следующие значения параметров объекта [10]:

$$m_1 = 1 \text{ [кг]}, m_2 = 1 \text{ [кг]}, l_1 = 2 \text{ [м]}, l_2 = 1 \text{ [м]}.$$

Ставилась задача отслеживания положениями конечной точки  $y_1$  эталонной траектории  $g(t) = (g_1(t), g_2(t))^T$ , заданной в декартовой системе координат, из начальных условий:

$$q_{11}(0) = 0,1 \text{ [рад]}, q_{12}(0) = 0,5 \text{ [рад]},$$

$$q_{21}(0) = 0 \text{ [рад/с]}, q_{22}(0) = 0 \text{ [рад/с]}.$$

Требовалось, чтобы значение ошибки слежения по модулю в установившемся режиме составляло не более чем 0,01 м.

При этом полагалось, что обобщенные скорости изменяются в следующих допустимых областях:

$$|q_{2i}(t)| \leq 1,5 \text{ [рад/с]}, t \geq 0, i = 1, 2.$$

Внешние возмущения описывались функциями

$$\eta_1 = 0,2 \sin t, \eta_2 = 0,2 \cos t,$$

для синтеза системы управления были известны только их допустимые границы изменения  $|\eta_i| \leq 0,2, t \geq 0, i = 1, 2$ .

Моделировались замкнутые системы (1), (10) с решением обратной задачи кинематики и последующим управлением системой в терминах обобщенных координат, а также (1), (13) без решения обратной задачи кинематики и управлением системой в терминах положений конечной точки. Для первой системы на каждом шаге дискретизации обратная задача кинематики (3) решалась с помощью встроенной в MATLAB функции «fsolve» с параметрами по умолчанию, предназначенной для численного решения систем нелинейных уравнений. В этом случае для поиска решения используется метод сопряженных направлений Пауэлла. Для запуска итерационного процесса на каждом шаге дискретизации эмпирически было принято одинаковое начальное приближение  $(-0,5; 0,6)$ . Для объективности сравнения ре-

зультатов коэффициенты регуляторов (10) и (13) выбирались так, чтобы обеспечить примерно одинаковую точность. Исходя из данного условия для закона управления (10) с решением обратной задачи кинематики были приняты значения коэффициентов

$$(15) \quad \begin{aligned} m_{11} &= 0,23, \quad m_{12} = 0,30, \quad k_{11} = 35, \quad k_{12} = 35, \\ m_{21} &= 200, \quad m_{22} = 200, \quad k_{21} = 1, \quad k_{22} = 1. \end{aligned}$$

Для закона управления (13) без решения обратной задачи кинематики были выбраны следующие значения:

$$(16) \quad \begin{aligned} m_{11} &= 0,53, \quad m_{12} = 0,50, \quad k_{11} = 33, \quad k_{12} = 35, \\ m_{21} &= 200, \quad m_{22} = 200, \quad k_{21} = 1, \quad k_{22} = 1. \end{aligned}$$

Численное интегрирование замкнутых систем выполнялось с помощью неявного метода Эйлера с постоянным шагом дискретизации  $10^{-3}$  [с].

Было проведено два эксперимента с разными эталонными траекториями. В первом из них эталонная траектория была выбрана специально в виде (3):

$$\begin{aligned} g_1 &= l_1 \cos q_{11d} + l_2 \cos(q_{12d}), \\ g_2 &= l_1 \sin q_{11d} + l_2 \sin(q_{12d}), \end{aligned}$$

где  $q_{11d} = 0,1 \sin t + 0,15$ ,  $q_{12d} = 0,1 \cos t + 0,45$  для существования аналитического решения обратной задачи кинематики. Это было сделано для проверки корректности работы метода сопряженных направлений Пауэлла и последующего сравнения численного решения с аналитическим. На рис. 1 приведены графики полученного численного решения обратной задачи кинематики  $q_{1id,num}(t)$ , на рис. 2 – графики ошибок  $q_{1id}(t) - q_{1id,num}(t)$ ,  $i = 1, 2$ .

Евклидова норма вектора ошибок численного решения  $(\max|q_{11d}(t) - q_{11d,num}(t)|, \max|q_{12d}(t) - q_{12d,num}(t)|)^T$  составила  $1,36 \cdot 10^{-5}$  [рад]. Таким образом, была проведена верификация численного метода решения обратной задачи кинематики.

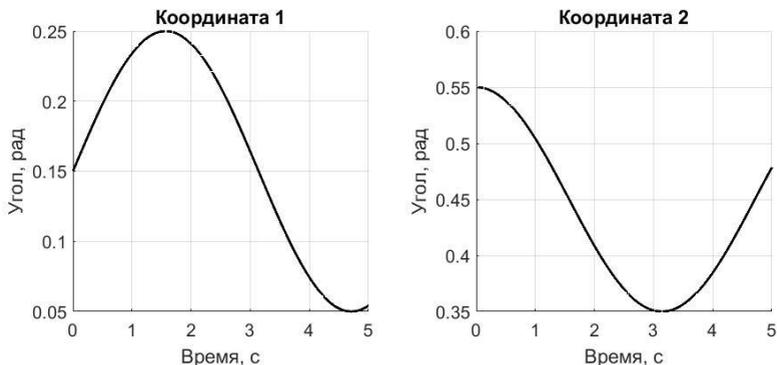


Рис. 1. Графики численного решения обратной задачи кинематики  $q_{1id,num}(t)$ ,  $i = 1, 2$

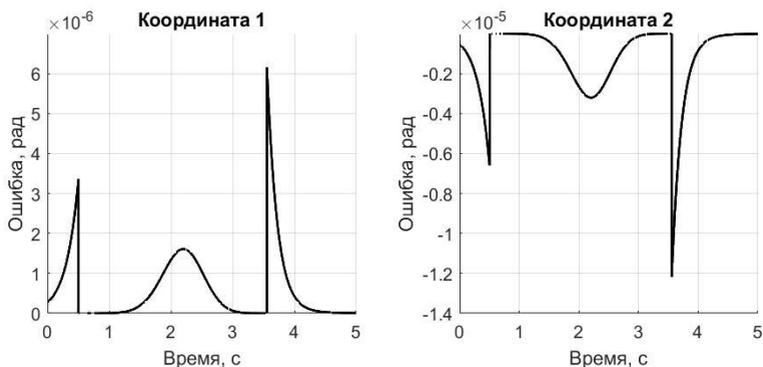


Рис. 2. Графики ошибок  $q_{1id}(t) - q_{1id,num}(t)$ ,  $i = 1, 2$

Для двух замкнутых систем (1), (10) и (1), (13) на рис. 3 представлены графики координат конечной точки  $y_{1i}(t)$  и их задающих воздействий  $g_i(t)$ , на рис. 4 – графики ошибок слежения  $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$ . На рис. 5 представлены графики желаемой траектории и фактических траекторий конечной точки на плоскости. На рис. 6 приведены графики управлений  $u_i$ ,  $i = 1, 2$ .

На основе результатов моделирования были рассчитаны следующие показатели качества регулирования: времена регулирования  $t_{1i}$  [с]:  $|e_{1i}(t)| \leq 0,01$  [м],  $t \geq t_{1i}$ , ошибок в установив-

шемся режиме  $\Delta_{1i} = \max |e_{1i}(t)|$  [м],  $t \geq 2$  [с], максимальных по модулю управлений в переходном  $u_{max,t,i} = \max |u_i(t)|$  [Н·м],  $0 \leq t < 2$  [с] и в установившемся  $u_{max,s,i} = \max |u_i(t)|$  [Н·м],  $t \geq 2$  [с] режимах. В таблице 1 представлены значения евклидовых норм соответствующих векторов  $t_1 = (t_{11}, t_{12})^T$ ,  $\Delta_1 = (\Delta_{11}, \Delta_{12})^T$ ,  $u_{max,t} = (u_{max,t,1}, u_{max,t,2})^T$ ,  $u_{max,s} = (u_{max,s,1}, u_{max,s,2})^T$ .

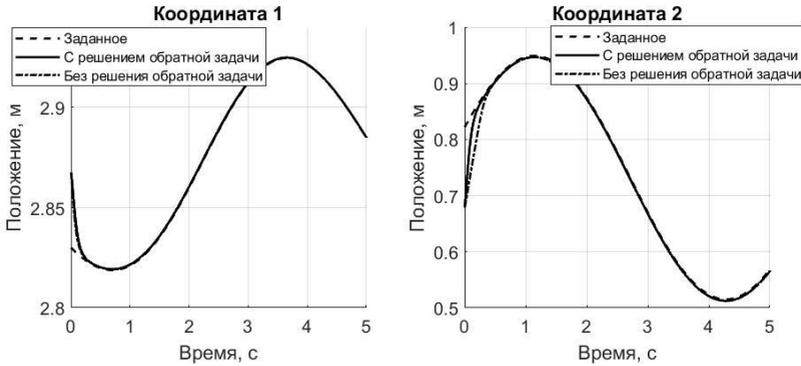


Рис. 3. Графики положений конечной точки  $y_{1i}(t)$  и эталонной траектории  $g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$

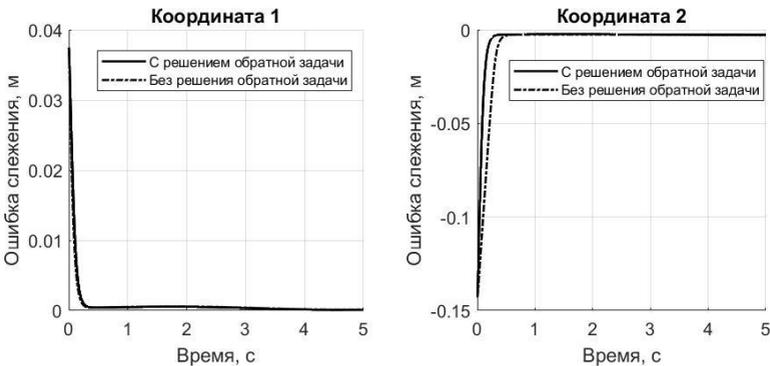


Рис. 4. Графики ошибок слежения  $e_{1i} = y_{1i}(t) - g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$

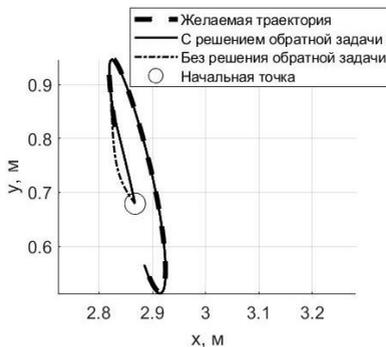


Рис. 5. Графики траекторий конечной точки на плоскости

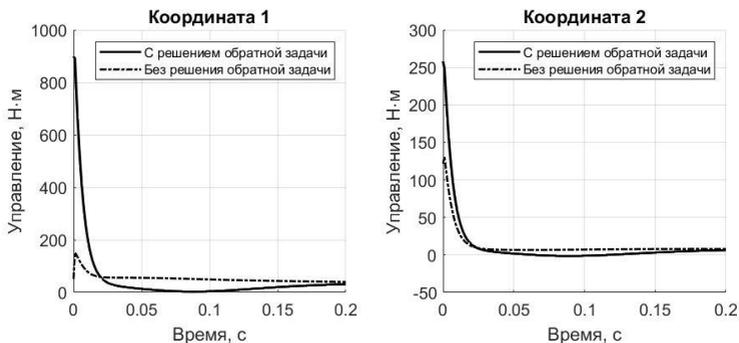


Рис. 6. Графики управлений  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2$

Таблица 1. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Закон управления	
	С решением обратной задачи кинематики	Без решения обратной задачи кинематики
$\ t_1\ $ , с	0,2125	0,3585
$\ \Delta_1\ $ , мм	2,7005	2,8758
$\ u_{max,t}\ $ , Н·м	935,8650	199,9219
$\ u_{max,s}\ $ , Н·м	41,1334	40,7822

Для проверки робастности разработанных подходов к допустимым изменениям задающих воздействий и внешних возмущений был проведен второй эксперимент. По сравнению с экспериментом 1 были выбраны другие функции, описывающие внешние воздействия:

$$(17) \quad g_1 = 0,1 \sin(\cos(0,8t)) + 2,77, \quad g_2 = -0,2 \sin(0,8t) + 0,62, \\ \eta_1 = 0,2 \cos 2t, \quad \eta_2 = 0,2 \sin 2t.$$

Для траектории (17) не существовало аналитического решения обратной задачи кинематики. Численное решение находилось с помощью метода сопряженных направлений Пауэлла с начальным приближением  $(-0,5; 0,6)$ . Остальные условия эксперимента были такими же, как и в эксперименте 1, в том числе использовались те же коэффициенты регуляторов (15), (16).

Для двух замкнутых систем (1), (10) с решением обратной задачи кинематики и (1), (13) без решения на рис. 7 представлены графики координат конечной точки  $y_{1i}(t)$  и их задающих воздействий  $g_i(t)$ , на рис. 8 – графики ошибок слежения  $e_{1i}(t) = y_{1i}(t) - g_i(t)$ . На рис. 9 приведены графики эталонной траектории и фактических траекторий конечной точки на плоскости. На рис. 10 – графики управлений  $u_i, i = 1, 2$ .

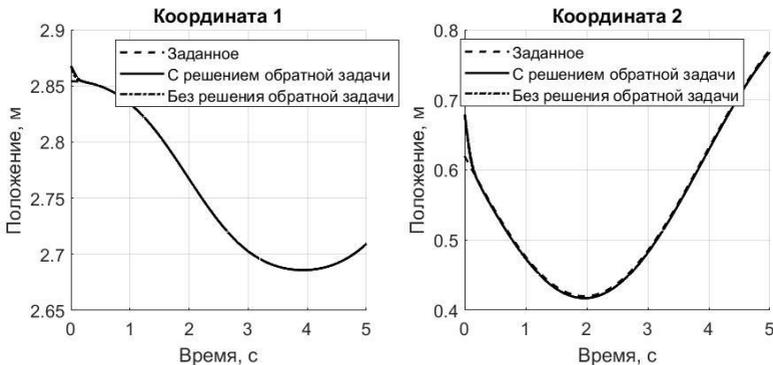


Рис. 7. Графики положений конечной точки  $y_{1i}(t)$  и эталонной траектории  $g_i(t), i = 1, 2$

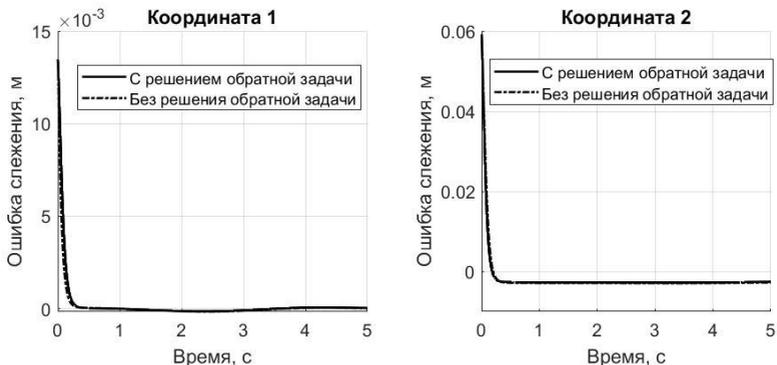


Рис. 8. Графики ошибок слежения  $e_{1i} = y_{1i}(t) - g_i(t)$ ,  $i = 1, 2$

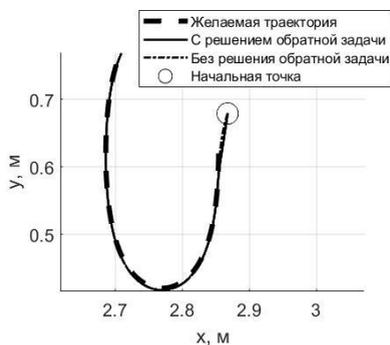


Рис. 9. Графики траекторий конечной точки на плоскости

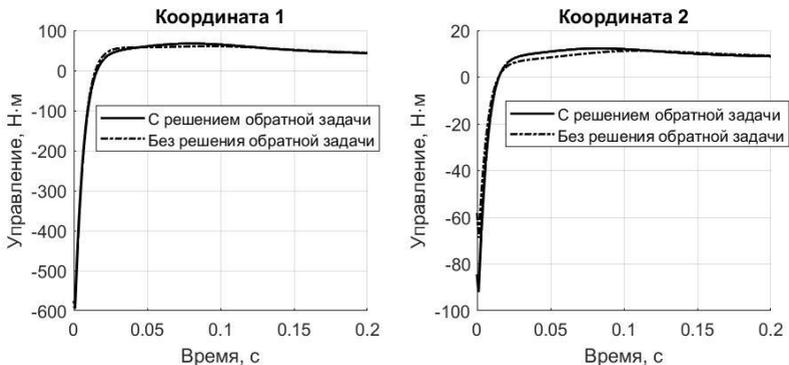


Рис. 10. Графики управлений  $u_i(t)$ ,  $i = 1, 2$

Таблица 2. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Закон управления	
	С решением обратной задачи кинематики	Без решения обратной задачи кинематики
$\ t_1\ $ , с	0,1119	0,1238
$\ \Delta_i\ $ , мм	2,7740	2,9391
$\ u_{max,t}\ $ , Н·м	592,5884	598,4613
$\ u_{max,s}\ $ , Н·м	40,2688	40,2680

## 6. Обсуждение результатов

Из рис. 1, 2 и таблицы 1 следует, что в эксперименте 1 цель управления была достигнута для обоих законов управления: значения ошибок слежения в установившемся режиме по модулю не превысили заданную величину 10 [мм]. При этом законы управления обеспечили сопоставимую точность. Для первой координаты величина ошибки составила примерно 0,6 [мм], для второй – примерно 3 [мм].

Для сравнительного анализа также было проведено пять моделирований двух замкнутых систем с решением обратной задачи кинематики и без него на отрезке времени от 0 до 5 [с] с последующим вычислением длительности моделирования (длительность может незначительно меняться от запуска к запуску из-за текущей загруженности процессора и возможностей вычислительной среды). Для закона управления с решением обратной задачи кинематики получились следующие значения длительности: 118,5020, 125,4926, 121,2107, 118,9608, 111,6349 [с], а для закона без решения обратной задачи кинематики – 0,7431, 0,7455, 0,7357, 0,7336, 0,6844 [с]. Таким образом, средняя длительность моделирования составила 119,1602 [с] и 0,7285 [с] соответственно. Следовательно, для закона с решением обратной задачи кинематики вычисления происходили примерно в 163 раза дольше по сравнению с законом без решения обратной задачи кинематики, что может быть недопусти-

мым для производственных задач, где особенно важно быстродействие. В таком случае предпочтительнее использовать закон управления без решения обратной задачи кинематики, либо, если это возможно, решить обратную задачу кинематики и рассчитать траекторию до применения системы управления, а в режиме реального времени использовать аппроксимацию этого решения, например, с помощью нейросетевого подхода [23].

Проблемным моментом подхода без решения обратной задачи кинематики является потеря управляемости при переходе в термини координат конечной точки при определенных значениях обобщенных координат. Эта проблема связана с преобразованием (3). В дальнейшем планируется исследовать такие случаи.

Подчеркнем еще раз, что для уменьшения количества вычислений в данной работе были выбраны управления (10) и (13) без компенсации всех известных составляющих модели, имеющие силовой характер. Реализация комбинированного управления потребовала бы расчета матриц механической системы и привела бы к большим вычислительным затратам.

Из рис. 7–10 и таблицы 2 следует, что при допустимом изменении задающего воздействия и внешних возмущений в эксперименте 2 цель управления также была достигнута, как и в эксперименте 1. Таким образом, эти результаты продемонстрировали робастность предложенных подходов к допустимым изменениям внешних воздействий.

В будущем планируется распространить предложенный подход для более адекватной модели объекта с учетом динамики исполнительных устройств, параметрических неопределенностей, а также разработать наблюдатель возмущений для повышения качества регулирования.

### ***Литература***

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением*

- заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №1. – С. 40–66.
2. КОЛТЫГИН Д.С., СЕДЕЛЬНИКОВ И.А., ПЕТУХОВ Н.В. Аналитический и численный методы решения обратной задачи кинематики для робота Delta // Вестник ИрГТУ. – 2017. – №5. – С. 87–96.
  3. КОРОВИН О.С. Обзор методов решения обратной задачи кинематики для манипулятора с избыточностью // «Поли-технический молодежный журнал» МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2022. – № 2. – С. 1–8.
  4. КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А., УТКИН А.В. и др. Прямой метод синтеза системы управления рабочим органом манипулятора при неполных измерениях // Проблемы управления. – 2008. – №1. – С. 10–18.
  5. НЕЛАЕВА Е.И., ЧЕЛНОКОВ Ю.Н. Решение прямых и обратных задач кинематики роботов-манипуляторов с использованием дуальных матриц и бикватернионов на примере стэнфордского манипулятора. Часть 2 // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – №16. – С. 456–463.
  6. ОВЦОВ С.А., САРОКА В.В. Разработка оптимальной системы управления роботом-манипулятором гальванической линии для погашения колебаний подвески в переходных режимах // Труды БГТУ. Серия 3: физико-математические науки и информатика. – 2017. – №3. – С. 63–68.
  7. ОСЬКИН Д.А., ДЫДА А.А., КОНСТАНТИНОВА Е.А. Нейросетевое моделирование задачи обратной кинематики для манипуляционного робота // Современные наукоемкие технологии. – 2015. – №12. – С. 254–257.
  8. ПАРАЕВ Ю.И., КОЛЕСНИКОВА С.И., ЦВЕТНИЦКАЯ С.А. Управление роботом-манипулятором в условиях неопределенности // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2021. – №57. – С. 4–12.
  9. ANTIPOV A.S., KOKUNKO J.G., KRASNOVA S.A. et al. Direct control of the endpoint of the manipulator under non-smooth uncertainty and reference trajectories // Journal of The Franklin Institute. – 2023. – Vol. 360, Iss. 17. – P. 13430–13458.

10. BACCOUCH M., DODDS S. *A Two-Link Robot Manipulator: Simulation and Control Design* // Int. Journal of Robotic Engineering. – 2020. – Vol. 5, No. 2. – P. 1–17.
11. FEHR J., SCHMID P., SCHNEIDER G. et al. *Modeling, Simulation, and Vision-/MPC-Based Control of a PowerCube Serial Robot* // Appl. Sci. – 2020. – Vol. 10, No. 20. – P. 1–26.
12. KOCHETKOV S.A., KRASNOVA S.A., ANTIPOV A.S. *Cascade Synthesis of Electromechanical Tracking Systems with Respect to Restrictions on State Variables* // IFAC-PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50, No 1. – P. 10142–10147.
13. LI J., YU H., SHEN N. et al. *A novel inverse kinematics method for 6-DOF robots with non-spherical wrist* // Mech. Mach. Theory. – 2020. – Vol. 67, No. 157. – P. 104–189.
14. LU J., ZOU T., JIANG X. *A Neural Network Based Approach to Inverse Kinematics Problem for General Six-Axis Robots* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 22. – P. 1–19.
15. MALIK A., LISCHUK Y., HENDERSON T. et al. *A Deep Reinforcement-Learning Approach for Inverse Kinematics Solution of a High Degree of Freedom Robotic Manipulator* // Robotics. – 2022. – Vol. 11, No. 2. – P. 1–17.
16. MASSARO M., LOVATO S., BOTTIN M. et al. *An Optimal Control Approach to the Minimum-Time Trajectory Planning of Robotic Manipulators* // Robotics. – 2023. – Vol. 12, No. 3. – P. 1–24.
17. MAZHAR A., TANVEER A., IZHAN M. et al. *Robust Control Approaches and Trajectory Planning Strategies for Industrial Robotic Manipulators in the Era of Industry 4.0: A Comprehensive Review* // Eng. Proc. – 2023. – Vol. 56, No. 1. – P. 1–6.
18. RAHMANI M., REDKAR S. *Robot Manipulator Control Using a Robust Data-Driven Method* // Fractal Fract. – 2023. – Vol. 7, No. 9. – P. 1–14.
19. TRAN D.T., NGUYEN T.N., NGUYEN X.T. et al. *Synchronous PD Control Using a Time Delay Estimator for a Four-Degree-of-Freedom Parallel Robot in Practice* // Machines. – 2023. – Vol. 11, No. 8. – P. 1–21.

20. WANG F., LIU P., JING F. et al. *Sliding Mode Robust Active Disturbance Rejection Control for Single-Link Flexible Arm with Large Payload Variations* // Electronics. – 2021. – Vol. 10, No. 23. – P. 1–15.
21. WEI B. *A Tutorial on Robust Control, Adaptive Control and Robust Adaptive Control—Application to Robotic Manipulators* // Inventions. – 2019. – Vol. 4, No. 3. – P. 1–13.
22. ZHANG C. *PD Plus Dynamic Pressure Feedback Control for a Direct Drive Stewart Manipulator* // Energies. – 2020. – Vol. 13, No. 5. – P. 1–13.
23. ZHAO A., TOUDESCHI A., EHSANI R. et al. *Data-Driven Inverse Kinematics Approximation of a Delta Robot with Stepper Motors*. Robotics. – 2023. – Vol. 12, No. 5. – P. 1–12.

## TWO APPROACHES TO SYNTHESIZING THE END-POINT CONTROL LAW OF A TWO-LINK MANIPULATOR

**Aleksey Antipov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., senior researcher (scholess@mail.ru).

**Pavel Greznev**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, technician (greznevp@gmail.com).

*Abstract: For a two-link manipulator endpoint, we consider the problem of tracking the desired trajectory defined on a plane in the endpoint workspace under the action of external disturbances. These perturbations are assumed to be matched (acting along the same channels with the controls, which are considered to be generalized torques). Standard approaches to control rely on the solution of the inverse problem of kinematics, which can be ambiguous and, as a rule, requires the use of numerical methods. Given these drawbacks, the problem of developing control laws without solving the inverse kinematics problem is relevant. To create such an approach to control, we consider the coordinates of the endpoint in the Cartesian system as output variables. Then, on the basis of the unambiguous dependence of the output on the generalized coordinates, we can transform the initial description of the system in terms of generalized coordinates to a description in terms of the endpoint positions and solve the problem of control synthesis on the basis of the transformed system. The control is constructed using the block approach, which allows us to divide the problem into two subproblems of synthesizing virtual and true controls in fully actuated subsystems. For comparative analysis, we also developed a method for synthesizing control torques, which involves solving the inverse problem of kinematics. In both methods, smooth and bounded S-shaped feedback is used, which suppresses disturbance with a given accuracy and monotonicity of*

*transients. Numerical simulation results are presented to confirm the effectiveness of the proposed approach without solving the inverse kinematics problem.*

Keywords: two-link manipulator, endpoint position control, tracking, inverse kinematics problem, external disturbances, block approach.

УДК 62.50  
ББК 32.817

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

*Поступила в редакцию 30.10.2024.  
Опубликована 31.01.2025.*

## РАСПОЛОЖЕНИЕ В ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВАХ УПРАВЛЕНИЯ И ВЫХОДА ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ

Глуценко А. И.<sup>1</sup>, Ласточкин К. А.<sup>2</sup>  
(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*В публикациях [3, 15] предложен метод управления нелинейными системами с гарантией нахождения регулируемой переменной и управления в заданных множествах. Основные теоремы этих работ справедливы для одномерных и многомерных систем с произвольной относительной степенью. Однако конструктивные алгоритмы синтеза управления предложены для систем с единичной относительной степенью. В этой работе упомянутые результаты расширяются на класс одномерных систем, имеющих произвольную относительную степень и устойчивую внутреннюю динамику. Для такого класса систем предложен новый закон управления, позволяющий обеспечить компенсацию параметрической неопределенности и сигнальных возмущений совместно с нахождением регулируемой переменной и управления в заданных множествах. При этом ограничение на сигнал управления доставляется явно путем использования в законе управления гладкой нелинейности, которая допредельно аппроксимирует функцию насыщения, а при недостатке ресурса управления полученное решение позволяет динамически изменять множество ограничений на регулируемый выход, устраняя таким образом разрывы в обратной связи. Теоретические результаты иллюстрируются с помощью математического моделирования на примере системы второго порядка и могут применены, например, в задачах управления пространственными и угловыми координатами твердых тел.*

Ключевые слова: заданное качество управления, заданные множества управления и выхода, ограниченное управление, компенсация возмущений, устойчивость.

### 1. Введение

Технические задания на разработку систем автоматического управления обычно формулируются в терминах инженерных показателей качества – перерегулирования, времени нарастания и длительности переходного процесса по регулируемой вели-

<sup>1</sup> Антон Игоревич Глуценко, д.т.н., доцент, в.н.с. (aighlush@ipu.ru).

<sup>2</sup> Константин Андреевич Ласточкин, м.н.с., аспирант (lastconst@ipu.ru).

чине. В классической теории автоматического управления хорошо известны методы ЛАЧХ, эталонной передаточной функции, модального синтеза по полиномам Ньютона и Баттерворта, позволяющие при известной модели системы обеспечить выполнение этих показателей. Однако эти решения работоспособны и эффективны только при незначительных вариациях параметров системы и действии квазипостоянных возмущений. С другой стороны, методы адаптивного и робастного управления с компенсацией параметрических и сигнальных возмущений гарантируют только асимптотические свойства регулируемого выхода и не позволяют на стадии синтеза заложить гарантий выполнения инженерных показателей качества.

Для преодоления этого противоречия между потребностями практики и имеющейся теории на западе широкое распространение получил метод управления с гарантированными инженерными показателями качества [9, 10]. В общих чертах его суть заключается в а) формализации инженерных показателей качества в виде множества, задающего ограничение на выход, и б) преобразовании задачи управления с ограничениями на выход к задаче стабилизации некоторой системы без ограничений. С помощью такого подхода решены задачи управления нелинейными системами, представленными в блочных (strict/pure feedback form) [7, 8, 11] и нормальных (normal form, feedback linearizable systems) [6, 9, 10] формах, а также получено множество других обобщений и улучшений базовых результатов, например, см. обзоры [13, 26]. В этом же направлении в отечественной литературе [1] предложен новый метод управления системами с гарантированным качеством управления, который, в отличие от [6–11], не требует асимптотической сходимости функций, задающих множество ограничений, и благодаря этому расширяет класс решаемых задач.

Многие из упомянутых решений позволяют обеспечить заданное качество управления системами с неизвестными параметрами и произвольными ограниченными сигнальными возмущениями, но не учитывают наличие в системе ограничений на

сигнал управления. Следовательно, актуальной задачей является построение системы управления, обеспечивающей заданное качество при ограниченном ресурсе управления. Эта задача может быть рассмотрена в двух различных постановках. В первой постановке [21, 29, 32] считается, что имеющегося ресурса управления достаточно, чтобы при допустимых возмущениях обеспечить заданные показатели качества (то есть ограничения на выход и управление непротиворечивы). Во второй постановке [12, 14, 20, 23, 24, 28, 30, 31] считается, что управление может оказываться недостаточным для ограничения выхода в заданном множестве на некоторых интервалах времени и при некоторых значениях сигнальных и параметрических возмущений (конфликт между ограничениями на выход и управление). Первая постановка задачи сегодня не представляет большого интереса и может быть решена на основании результатов [6–11] с помощью применения функции Нуссбаума [27] или  $\lambda$ -фильтров [33]. Актуальность второй постановки задачи связана с тем, что стандартные схемы управления с заданным качеством [13, 26] устроены так, что могут содержать разрывы в обратной связи при пересечении выходной переменной границы области ограничений. Однако такое пересечение неизбежно при наличии несогласованных ограничений на управление и выход. Для решения этой проблемы к сегодняшнему дню предложены различные подходы [12, 14, 20, 23, 24, 28, 30, 31], концептуально связанные идеей ослабления/изменения ограничений на регулируемую переменную в режиме насыщения управления.

В отечественной работе [3] выполнено расширение результата [1] на случай ограниченного управления. Однако, во-первых, предполагается, что ограничения на управление и выход не являются противоречивыми и могут быть выполнены одновременно (т.е. результат относится к первой постановке задачи в принятой классификации), во-вторых, рассмотрен класс систем с единичной относительной степенью, а в-третьих, разработанный закон управления не использует в явном виде функцию насыщения или ее аппроксимацию, является сложным (многокомпонентным) и

для параметрической настройки требует решения линейных матричных неравенств. В данной работе предлагается получить более простой вид закона управления, при этом явно учитывающий наличие ограничения на управление, а также выполнить расширение результатов [3] на а) класс одномерных линеаризуемых обратной связью систем, т.е. имеющих произвольную относительную степень и устойчивую внутреннюю динамику и б) случай, когда ограничения на управление и выход могут быть противоречивы.

В целом отличительными особенностями этой работы по сравнению с результатами [3] можно считать следующее:

- рассмотрен класс одномерных систем с произвольной относительной степенью и устойчивой внутренней динамикой;

- ограничение на сигнал управления доставляется явно путем использования в законе управления гладкой нелинейности, которая допредельно аппроксимирует функцию насыщения;

- полученное решение позволяет динамически изменять множество ограничений на регулируемый выход при недостатке ресурса управления, устраняя таким образом разрывы в обратной связи;

- предлагаемый закон управления является простым и интуитивно понятным.

Дальнейшая работа устроена следующим образом. В разделе 2 приводится строгая постановка задачи и дается описание рассматриваемого класса систем. В разделе 3 кратко обобщаются результаты [1]. В разделе 4 формулируется основной результат этой работы, выстраивается закон управления, располагающий в заданных множествах управление и выход рассматриваемого класса систем. В разделе 5 приводятся результаты математического моделирования. Статья завершается заключением, в котором обозначены достоинства и недостатки предлагаемого решения, а также выделены области возможного практического использования результатов.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$(1) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) &= bu(t) + d(x, u, t), \\ y(t) &= x_1(t), \end{aligned}$$

где  $x_i(t) \in \mathbb{R}$  – измеряемые состояния;  $u(t) \in \mathbb{R}$  – формируемое управление;  $d(x, u, t)$  – неизвестное возмущение (далее  $d(t) := d(x, u, t)$  для краткости);  $y(t)$  – регулируемый выход.

Требуется сформировать управление  $u(t)$  так, чтобы для всех  $t \geq t_0$  одновременно выполнялись условия

$$(2) \quad y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R},$$

где  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{U}$  – заранее заданные множества:

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathcal{Y} &:= \left\{ y \in \mathbb{R}: \underline{g}_y(t) < y(t) < \bar{g}_y(t) \right\}, \\ \mathcal{U} &:= \left\{ u \in \mathbb{R}: |u(t)| \leq u_{UB} \right\}, \end{aligned}$$

а  $\underline{g}_y(t)$ ,  $\bar{g}_y(t)$  – ограниченные вместе со своими производными функции времени.

Для существования решений поставленной задачи принимаются выполненными следующие допущения.

**Допущение 1.** Множества (3) заданы так, что  $y(t_0) \in \mathcal{Y}$ ,  $u(t_0) \in \mathcal{U}$ .

**Допущение 2.** Существует сигнал  $u^* \in \mathcal{U}$  такой, что  $y \in \mathcal{Y}$  при ограничении (3).

Допущение 1 необходимо принять, поскольку требуется обеспечить (3) в начальный момент времени  $t \geq t_0$ . Допущение 2 хотя и является неконструктивным, но означает формальную достижимость поставленной цели (3). Отметим, что допущение 2 далее будет ослаблено, но оба введенных допущения не ограничительны и могут быть выполнены путем соответствующего выбора целевых множеств (3).

**Замечание 1.** Модель (1) является естественной во многих прикладных задачах управления. Например, пространственные

и угловые координаты твердого тела (квадрокоптера, подводного аппарата и т.д.) после ряда координатных преобразований [16–18] описываются моделью вида (1) при  $n = 2$ . Кроме того, к модели (1) при определенных требованиях к правой части приводятся нелинейные системы с устойчивой внутренней динамикой и произвольной относительной степенью [19] (в этом случае возмущение  $d(t)$  содержит также вклад внутренней динамики, который может быть интерпретирован в виде некоторой функции от состояний  $x(t)$ ). Наконец, моделью (1) может быть описан выход минимально-фазовой линейной системы с произвольной относительной степенью. В [3, 15] рассматривались системы с единичной относительной степенью от управления к выходу, поэтому в рамках подхода [3, 15] цель  $y \in \mathcal{Y}$ ,  $u \in \mathcal{U}$  для (1) еще не была достигнута.

**Замечание 2.** Измерение полного вектора состояний не является ограничительным условием для системы вида (1), поскольку на основании измеряемого выхода  $y(t)$  вектор состояний  $x(t)$  всегда может быть восстановлен с помощью различных дифференциаторов [25, с. 68], [5, с. 46]. Например, с помощью линейного алгоритма:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_0 \hat{x}(t) + B_0 u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)), \\ \hat{y}(t) &= C_0^T \hat{x}(t), \end{aligned}$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ 0_{1 \times n} & \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ b \end{bmatrix},$$

$$C_0^T = [1 \quad 0_{1 \times (n-1)}], L = \begin{bmatrix} -\mu a_0 \\ -\mu^2 a_1 \\ \vdots \\ -\mu^n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

и  $a_i > 0$  – коэффициенты многочлена  $(s + l)^n$ ,  $l > 0$ ,  $\mu > 0$  – достаточно большое число.

Анализ устойчивости схем управления с подобными дифференциаторами, как правило, сводится к тому, что коэффициент  $\mu > 0$  должен иметь достаточно большое значение [22]:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \left( sI - A_0 - LC_0^\top \right)^{-1} B \mathcal{L}(d(t)) = 0,$$

где  $\mathcal{L}(\cdot)$  – преобразование Лапласа.

Поэтому для ясности и простоты изложения далее в работе, в полном соответствии с поставленной задачей, шаг получения оценок  $\hat{x}(t)$  опускается и априорно считается, что координаты состояния измеряемы (оценки  $\hat{x}(t)$  отождествляются с состояниями  $x(t)$ ).

### 3. Предварительные сведения

Решение поставленной задачи базируется на методе управления с гарантией нахождения выхода в заданном множестве, развитым в работах И.Б. Фуртатга с соавторами [1, 3, 15]. В этом разделе кратко приведем основные положения этого подхода.

Рассматривается система общего вида:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x, u, t), \\ y(t) &= h(x), \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ .

Требуется обеспечить  $y \in \mathcal{Y}$ , где

$$\mathcal{Y} = \left\{ y \in \mathbb{R}^p: \underline{g}_i(t) < y_i(t) < \bar{g}_i(t), i = 1, \dots, p \right\}.$$

Для выхода системы (4) вводится замена переменных

$$(5) \quad y(t) = \Phi(\varepsilon, t),$$

где  $\Phi: \mathbb{R}^p \times [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^p$  и  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^p$  – непрерывно дифференцируемая по  $t$  вектор-функция.

Тогда условия достижения цели  $y \in \mathcal{Y}$  в терминах требований к замене (5) и производной  $\dot{y}(t)$  могут быть сформулированы следующим образом.

**Теорема 1.** Пусть  $\Phi: \mathbb{R}^p \times [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^p$  удовлетворяет следующим условиям:

**У1.**  $\underline{g}_i(t) < \Phi_i(\varepsilon, t) < \bar{g}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , для любых  $t \geq t_0$  и  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^p$ .

**У2.**  $\Phi(\varepsilon, t)$  непрерывно-дифференцируема по  $\varepsilon(t)$  и  $t$ , а также  $\det \left\{ \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right\} \neq 0$  для всех  $y \in \mathcal{Y}$  и  $t \geq t_0$ .

**УЗ.**  $\frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t}$  ограничена по  $t \geq t_0$  для любых  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^p$ .

Тогда:

а) если производная  $\dot{y}(t) := \frac{\partial h(x)}{\partial x} F(x, u, t)$  такая, что решения уравнения

$$(6) \quad \dot{\varepsilon}(t) = \left( \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial \varepsilon} \right)^{-1} \left( \dot{y}(t) - \frac{\partial \Phi(\varepsilon, t)}{\partial t} \right)$$

ограничены, то  $y \in \mathcal{Y}_\alpha \subset \mathcal{Y}$ .

б) если  $\dot{y}(t)$  такая, что решения (6) неограничены, то  $y \in \mathcal{Y}$ .

**Доказательство.** Доказательство приведено в [1].

По теореме 1 задача обеспечения  $y \in \mathcal{Y}$  сводится к обеспечению ограниченности переменной  $\varepsilon(t)$ . Типовые примеры замен переменных (5) приведены в [3].

#### 4. Основной результат

В рамках рассмотренного в третьем разделе подхода предлагается каскадная процедура решения поставленной задачи. На первом этапе процедуры истинное управление предлагается формировать на основании гладкой нелинейной функции, допредельно аппроксимирующей функцию насыщения. Аргументом такой функции является новое, фиктивное управление. Далее с помощью рассмотренного в разделе 3 подхода выполняется переход от задачи управления с ограничением на выход к задаче без ограничений. После этого задача управления системой  $n$ -го порядка приводится к задаче управления системой первого порядка. Исходная система содержит неопределенность, параметризованную в виде возмущения  $d(t)$ . Поэтому полученная после всех преобразований система первого порядка также будут содержать такое же возмущение. Для его компенсации предлагается с помощью реализуемого дифференциатора получить оценку возмущения и использовать ее с обратным знаком в управлении.

В разделе 4.1 рассматривается алгоритм вычисления оценки возмущения. В разделах 4.2 и 4.3 решается поставленная задача (3) при выполнении и нарушении допущения 2 соответственно.

#### 4.1. ОЦЕНКА ВОЗМУЩЕНИЯ

Введем в рассмотрение динамические фильтры ( $k > 0$  – параметр):

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= k(x_n(t) - x_f(t)), \quad x_f(t_0) = x_n(t_0), \\ \dot{u}_f(t) &= k(bu(t) - u_f(t)), \quad u_f(t_0) = u(t_0) \end{aligned}$$

и на основании их состояний зададим оценку возмущения:

$$(8) \quad \hat{d}(t) = k(x_n(t) - x_f(t)) - u_f(t).$$

Тогда, дифференцируя  $\hat{d}(t)$ , в силу (7) и  $n$ -го уравнения системы, получаем:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{\hat{d}}(t) &= k(bu(t) + d(t) - k(x_n(t) - x_f(t))) - \\ &- k(bu(t) - u_f(t)) = k(-k(x_n(t) - x_f(t)) + u_f(t)) + \\ &+ kd(t) = -k\hat{d}(t) + kd(t) = -k(\hat{d}(t) - d(t)), \\ \hat{d}(t_0) &= -u(t_0), \end{aligned}$$

а значит, сигнал  $\hat{d}(t)$  является фильтрованным возмущением, доступным для вычисления/измерения.

#### 4.2. ОГРАНИЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ И ВЫХОДА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ДОПУЩЕНИЯ 2

Введем замены

$$(10a) \quad u(t) = \Phi_u(v),$$

$$(10b) \quad y(t) = \Phi_y(\varepsilon_y, t),$$

где  $v(t) \in \mathbb{R}$  – это фиктивное управление;  $\Phi_u: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  – гладкая аппроксимация функции насыщения на уровне  $\pm u_{UB}$ ;  $\Phi_y: \mathbb{R} \times [t_0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  удовлетворяет требованиям теоремы 1.

С учетом (10a) и (10b) система (1) принимает вид

$$(11) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_y(t) &= \left( \frac{\partial \Phi_y(\varepsilon_y, t)}{\partial \varepsilon_y} \right)^{-1} \left( x_2(t) - \frac{\partial \Phi_y(\varepsilon_y, t)}{\partial t} \right), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), \\ \dot{x}_n(t) &= b\Phi_u(v) + d(t). \end{aligned}$$

Теперь наша цель состоит в том, чтобы получить уравнение, более явно связывающее управление и переменную  $\varepsilon_y(t)$ . С этой

целью и мотивируясь [9] применим к  $\varepsilon_y(t)$  дифференциальный оператор  $(s + \lambda)^{n-1} [\cdot]$ ,  $s := \frac{d}{dt}$ ,  $\lambda > 0$ :

$$\sigma(t) = (s + \lambda)^{n-1} [\varepsilon_y(t)] = (s + \lambda)^{n-1} [\Phi_y^{-1}(y, t)],$$

где величина  $\sigma(t)$  измеряема, поскольку может быть рассчитана по состояниям системы.

Дифференцируя переменную  $\sigma(t)$  по времени, можем получить

$$(12) \quad \begin{aligned} \dot{\sigma}(t) &= \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} [\dot{x}_n(t) + \epsilon(x_1, \dots, x_n, t)] = \\ &= \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} [b\Phi_u(v) + d(t) + \epsilon(x_1, \dots, x_n, t)], \end{aligned}$$

где в слагаемом  $\epsilon(x_1, \dots, x_n, t) := \epsilon(t)$  сосредоточены все остальные частные производные функции  $\Phi_y^{-1}(y, t)$ .

Поскольку  $\varepsilon_y(t) = \frac{1}{(s+\lambda)^{n-1}} [\sigma(t)]$ ,  $\lambda > 0$ , то из ограниченности  $\sigma(t)$  следует ограниченность  $\varepsilon_y(t)$ , а задача управления системой  $n$ -го порядка сведена к задаче управления системой первого порядка.

Стабилизацию переменной  $\sigma(t)$  осуществим с помощью следующего сигнала:

$$(13) \quad v(t) = K\sigma(t) - b^{-1}\hat{d}(t),$$

в котором  $K < 0$  и с обратным знаком используется вычисляемая на основании (7) оценка возмущения.

Для исследования закона управления (10а)+(13) рассмотрим представление нелинейной функции  $\Phi_u(v)$  в виде линейной  $\Phi_u(v) = \rho(v)v$  с нелинейным угловым коэффициентом  $\rho(v)$  [2].

Тогда, с учетом равенства

$$\begin{aligned} \Phi_u(v) &= \Phi_u(v) \pm \rho(K\sigma)K\sigma(t) = \\ &= \rho(K\sigma)K\sigma(t) + \Phi_u(v) - \Phi_u(K\sigma), \end{aligned}$$

система (12) может быть представлена в следующем виде:

$$(14) \quad \dot{\sigma}(t) = \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} [b\rho(K\sigma)K\sigma(t) + \psi(t)],$$

где  $\psi(t) := b[\Phi_u(v) - \Phi_u(K\sigma)] + d(t) + \epsilon(x_1, \dots, x_n, t)$ .

Достаточные условия устойчивости системы (14) и достижения цели (3) сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 2.** Пусть выполнены допущения 1–2 и:

**УТ2.1** для  $\Phi_y(\varepsilon_y, t)$  выполнены **У1–У3** и  $\frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} > 0$  для всех  $t \geq t_0$ ;

**УТ2.2** выполнены секторные условия:

а) для всех  $\sigma(t) \in \mathcal{S}$  верно

$$0 > \sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) \geq \rho(K\sigma) bK,$$

где  $\mathcal{S} = \{\sigma(t) \in \mathbb{R}: |\sigma(t)| \leq \sigma_{max}\}$ ;

б) при  $\sigma(t) = 0$  верно  $\rho(K\sigma) bK\sigma(t) = b\Phi_u(K\sigma) = 0$ ;

**УТ2.3** для всех  $\sigma(t) \in \mathcal{S}$  верно

$$\psi(t) \in \Psi = \{\psi(t) \in \mathbb{R}: |\psi(t)| \leq \bar{\psi}\}.$$

Тогда если для некоторого  $\delta \in \left(0, \left| \sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) \right| \right)$  верно

$$\frac{-\bar{\psi}}{\sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) + \delta} \leq \sigma_{max},$$

то закон (10а)+(13) для всех  $\sigma(t_0) \in \mathcal{S}$  обеспечивает  $u \in \mathcal{U}$ ,  $y \in \mathcal{Y}$  и  $\sigma(t) \in \mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$  при  $t \rightarrow \infty$ , где

$$\mathcal{S}_\infty = \left\{ \sigma(t) \in \mathbb{R}: |\sigma(t)| \leq \sigma_{ssb} = \frac{-\bar{\psi}}{\sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) + \delta} \right\}.$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы приведено в приложении.

Теорема 2 позволяет построить алгоритм проверки выполнения цели (3) с помощью заданного закона управления:

**Шаг 1.** Выбрать коэффициент  $K < 0$ .

**Шаг 2.** Выбрать число  $\sigma_{max} > 0$ .

**Шаг 3.** По  $\Phi_y(\varepsilon_y, t)$ ,  $\Phi_u(v)$ ,  $d(x, u, t)$  рассчитать

а)  $\sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK)$  и б)  $\bar{\psi} > 0$ .

**Шаг 4.** Выбрать  $\delta_1 \in \left(0, \left| \sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) \right| \right)$  и рассчитать параметр  $\sigma_{1,ssb}$ , задающий ограничение сверху на асимптотическое значение  $\sigma(t)$ . Если  $\sigma_{1,ssb} \geq \sigma_{max}$ , то выбрать  $\delta_2 > 0$  так, что  $\delta_1 > \delta_2 > 0$ . Если  $\sigma_{i,ssb} \geq \sigma_{max}$  при  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N \rightarrow \infty$ , то при заданных  $\Phi_y(\varepsilon_y, t)$ ,  $\Phi_u(v)$ ,  $d(x, u, t)$  в области  $\mathcal{S}$  достаточные условия устойчивости нарушены и следует вернуться на шаг 1 и перевыбрать параметр  $K \in \mathbb{R}$  (увеличить по модулю) или вернуться на шаг 2 и перевыбрать параметр  $\sigma_{max}$  (уменьшить). Если  $\sigma_{N,ssb} \leq \sigma_{max}$  для некоторого  $N < \infty$ , то закон управления (10a)+(13) обеспечивает достижение поставленной цели (3).

Проиллюстрируем функционирование предложенного алгоритма на примере.

**Пример 1.** Рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= bu(t) + d(x, u, t), \\ d(x, u, t) &= d_1x(t) + d_0(t), \quad b = 1, \end{aligned}$$

для которой заданы следующие целевые множества:

$$\mathcal{Y} = \{y \in \mathbb{R}: -1 < y(t) < 1\}, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}: |u(t)| \leq 1\}.$$

Для обеспечения  $u \in \mathcal{U}$  и  $y \in \mathcal{Y}$  зададим отображения

$$\Phi_y(\varepsilon_y, t) = \frac{e^{\varepsilon_y} - 1}{e^{\varepsilon_y} + 1}, \quad \Phi_y^{-1}(y, t) = \ln\left(\frac{-1-y}{y-1}\right), \quad \Phi_u(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}.$$

Для рассматриваемой системы верно  $\sigma(t) = \varepsilon_y(t)$ , а поэтому имеем:

$$\psi(t) = d_1x(t) + d_0(t).$$

**Шаг 1.** Выберем  $K = -1$ .

**Шаг 2.** Поскольку  $\sigma(t) = \varepsilon_y(t)$ , то число  $\sigma_{max}$  примем равным максимальному значению функции  $\varepsilon_y(t)$  на некотором подмножестве  $\bar{\mathcal{Y}}$  множества  $\mathcal{Y}$ , т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \sup_{y \in \bar{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}} \Phi_y^{-1}(y, t) = \\ &= \sup_{y \in \bar{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}} \ln\left(\frac{-1-y}{y-1}\right) \leq \ln\left(\frac{-1-0,9}{0,9-1}\right) \simeq 2,944. \end{aligned}$$

**Шаг 3.** По имеющимся данным рассчитываем

$$\begin{aligned} \sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) &= bK \inf_{\sigma \in \mathcal{S}/0} \left( \rho \left( K^\top \xi \right) \right) = \\ &= bK \frac{\tanh(K\sigma_{max})}{K\sigma_{max}} = -0,3377. \end{aligned}$$

Для возмущения по теореме о среднем значении справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &= |d(t) + b(\Phi_u(v) - \Phi_u(K\sigma))| = \left| d(t) - \underbrace{\frac{\partial \Phi_u(c)}{\partial c}}_{\leq L=0,5} \hat{d}(t) \right| = \\ &= \left| \left( 1 - \frac{\partial \Phi_u(c)}{\partial c} \right) d(t) - \frac{\partial \Phi_u(c)}{\partial c} (\hat{d}(t) - d(t)) \right| = \\ &= \left| \left( 1 - \frac{\partial \Phi_u(c)}{\partial c} \right) d(t) - \frac{\partial \Phi_u(c)}{\partial c} \tilde{d}(t) \right| \leq |d(t) - 0,5\tilde{d}(t)|, \end{aligned}$$

где точка  $c$  располагается на отрезке, соединяющем точки  $v(t)$  и  $K\sigma(t)$ , а ошибка  $\tilde{d}(t)$ , на основании (9), удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{d}}(t) = -k\tilde{d}(t) - \dot{d}(t),$$

а значит, и неравенству

$$|\tilde{d}(t)| \leq e^{-k(t-t_0)} |\tilde{d}(t_0)| + k^{-1} \sup_t \sup_{y \in \overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}} \dot{d}(t).$$

Предположим, что  $k > 0$  выбрана так, что  $d(t) \gg 0,5\tilde{d}(t)$  в  $\overline{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{Y}$ , а тогда для  $|\psi(t)|$  на множестве  $\mathcal{S}$  (эквивалентно на  $\overline{\mathcal{Y}}$ ) имеем:

$$|\psi(t)| \leq |d(t)| = |d_1 x(t) + d_0(t)|.$$

Положим

а)  $d_1 = 0$ ,  $d_0(t) = 1,2$ ,

б)  $d_1 = 0$ ,  $d_0(t) = 0,95$ .

**Шаг 4.** Выберем  $\delta = 10^{-3}$ , а тогда имеем:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } & \frac{-\bar{\psi}}{\sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma)bk) + \delta} = \frac{-1,2}{-0,3377+10^{-3}} = 3,5635 \geq \sigma_{max}, \\
 \text{б) } & \frac{-\bar{\psi}}{\sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma)bk) + \delta} = \frac{-0,95}{-0,3377+10^{-3}} = 2,8211 \leq \sigma_{max}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, согласно теореме 2, для а) достаточные условия устойчивости нарушены и закон управления (10а)+(13) может не обеспечивать достижение цели (3). С другой стороны, для б) достаточные условия выполнены и закон (10а)+(13) гарантирует (3).

На рис. 1 приведены результаты моделирования системы управления (10а)+(13) для ситуаций а) и б) при  $k = 10$ .

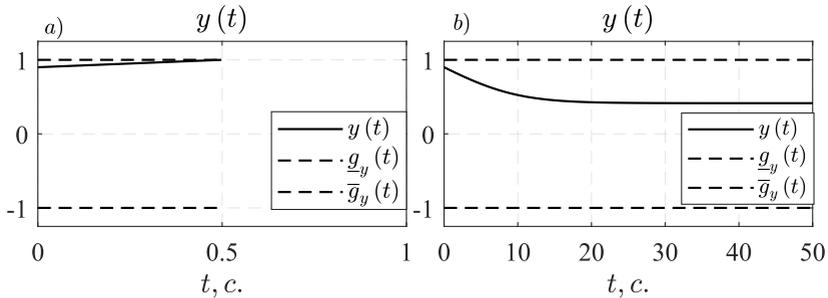


Рис. 1. Результаты моделирования системы управления (10а) + (13) для ситуаций а) и б)

Результаты моделирования иллюстрируют полученные теоретические выводы и демонстрируют, что для б) цель выполнена, а для а) условие (3) нарушается, выход  $y(t)$  покидает целевое множество  $\mathcal{Y}$ , из-за чего происходит разрыв в сигнале  $\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$ , а моделирование не может быть продолжено для  $t > 0,5$  с.

Таким образом, при выполнении всех предпосылок теоремы 2 предлагаемый закон управления (10а)+(13) с заданными параметрами гарантирует нахождение управления и выхода в заданных множествах при всех начальных условиях из допустимой области  $\mathcal{S}$ . Одним из основных ограничений подхода является необходимость формирования такого множества  $\mathcal{Y}$ , чтобы суще-

ствовало управление из множества  $\mathcal{U}$ , позволяющее обеспечить  $y \in \mathcal{Y}$ . Вторым ограничением подхода, по мнению авторов, является вычислительная трудоемкость проверки условий теоремы 2 при  $n \geq 2$ . Однако из результатов теоремы 2 нетрудно получить следующее следствие.

**Следствие 1.** Для любого  $K < 0$  существует допустимая область  $\mathcal{S}$  и класс допустимых возмущений  $\Psi$ , таких, что  $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$  и поставленная цель (3) выполнена.

Это следствие несколько ослабляет второе ограничение подхода и позволяет использовать предлагаемый закон управления в практических задачах, грубо говоря, в предположении о том, что реализующееся возмущение в области  $\mathcal{S}$  не нарушает условия устойчивости из теоремы 2.

**Замечание 3.** Теорема 2 содержит лишь только достаточные условия устойчивости системы (14), поэтому их нарушение еще не означает нарушение условий (3).

**Замечание 4.** Из доказательства теоремы 2 и вида правой части системы (14) может сложиться впечатление, что роль компенсационной компоненты закона управления (13) незначительна. Однако в действительности, как видно из примера 1, компенсационная компонента позволяет уменьшить  $\bar{\psi}$ , а следовательно условия теоремы могут оказаться выполнены в более широком множестве  $\mathcal{S}$ .

**Замечание 5.** Как следует из определения углового коэффициента  $\rho(v)$ , для любого  $\bar{\psi} < \infty$  обеспечить выполнение условия  $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$  возможно путем совместного увеличения  $K$  и  $u_{UB}$ . В частности, при  $u_{UB} \rightarrow \infty$  (т.е. в отсутствие ограничений на управление) для любого  $\bar{\psi} < \infty$  найдется  $K$  такое, что  $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$  и поставленная цель выполнена.

#### 4.3. ОГРАНИЧЕНИЕ УПРАВЛЕНИЯ И ВЫХОДА ПРИ НАРУШЕНИИ ДОПУЩЕНИЯ 2

Согласно результатам теоремы 2, поставленная цель (3) достижима при  $\frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} > 0$  для всех  $t \geq t_0$ . Выполнение этого неравенства зависит от удовлетворения допущения 2, выбранных

параметров  $K < 0$ ,  $k > 0$  и начальных условий. Если допущение 2 не выполняется, то это неравенство не может быть выполнено для всех  $t \geq t_0$  независимо от параметров управления и начальных условий, а поставленная цель недостижима: для  $y \in \mathcal{Y}$  необходим больший ресурс управления  $u_{UB}$ . Более того, при  $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Y}$  в сигнале управления возможны сингулярности, вызванные разрывами в сигнале  $\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$ , используемом в управлении.

Очевидное решение этих проблем – это перевыбор  $\underline{g}_y(t)$ ,  $\bar{g}_y(t)$  в определении множества  $\mathcal{Y}$ , т.е. изменение цели управления на достижимую с учетом имеющегося ресурса управления. Однако удержать регулируемый выход в множестве  $\mathcal{Y}$  может быть невозможно только на коротких интервалах времени, соответствующих интервалам насыщения управления. Поэтому рационально вместо глобального изменения целевого множества выполнять его расширение на этих интервалах.

Для реализации этой идеи введем в рассмотрение расширенное множество:

$$(15) \quad \mathcal{Y}_e := \left\{ y \in \mathbb{R}: \underline{g}_y(t) - \eta_e(t) < y(t) < \bar{g}_y(t) + \eta_e(t) \right\},$$

где  $\eta_e(t)$  – сигнал расширения.

Мотивируясь результатами работ [12, 14, 20, 23, 24, 28, 30, 31], сигнал расширения зададим следующим образом:

$$(16) \quad \dot{\eta}_e(t) = \frac{1}{\tau} (\mu s(t) - \eta_e(t)), \quad \eta_e(t_0) = 0,$$

где

$$s(t) = \left| \text{sat}_{-u_{UB}+\Delta}^{u_{UB}-\Delta} \{u(t)\} - \text{sat}_{-u_{UB}+2\Delta}^{u_{UB}-2\Delta} \{u(t)\} \right|,$$

и  $\tau > 0$  – постоянная времени фильтра;  $\text{sat}_{-u_{UB}+\Delta}^{u_{UB}-\Delta} \{u(t)\}$ ,  $\text{sat}_{-u_{UB}+2\Delta}^{u_{UB}-2\Delta} \{u(t)\}$  – функции насыщения на уровнях  $\pm(u_{UB} - \Delta)$  и  $\pm(u_{UB} - 2\Delta)$  соответственно;  $\mu > 0$  – эмпирический коэффициент пропорциональности между  $\Delta > 0$  и необходимой величиной расширения множества  $\mathcal{Y}$  (чем больше  $\mu > 0$ , тем сильнее  $\mathcal{Y}_e$  отличается от  $\mathcal{Y}$  на интервалах насыщения управления).

Для пояснения механизма расширения введем множества  $\mathcal{U}_{2\Delta} \subset \mathcal{U}_\Delta \subset \mathcal{U}$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_{2\Delta} &:= \{u \in \mathbb{R}: |u(t)| \leq u_{UB} - 2\Delta\}, \\ \mathcal{U}_\Delta &:= \{u \in \mathbb{R}: |u(t)| \leq u_{UB} - \Delta\}.\end{aligned}$$

Если  $u \in \mathcal{U}_{2\Delta}$ , то  $s(t) = 0$ ,  $\eta_e(t) = 0$  и множество  $\mathcal{Y}$  не подвергается расширению. Если  $u \in \mathcal{U}_\Delta$  или  $u \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_\Delta$ , то  $0 < s(t) \leq \Delta$  и имеем  $0 < \eta_e(t) \leq \mu\Delta$ . Таким образом, в целом получаем, что  $\mathcal{Y}_e$  совпадает (асимптотически) с  $\mathcal{Y}$  на интервалах, когда  $|u(t)| < (u_{UB} - 2\Delta)$ , и отличается (асимптотически), когда ресурса управления оказывается недостаточно. Поскольку  $y(t_0) \in \mathcal{Y}$  и  $u(t_0) \in \mathcal{U}$  (допущение 1), то по определению  $s(t)$  и при достаточно малом  $\tau > 0$  расширение целевого множества происходит раньше, чем выполнение условий  $y \in \partial\mathcal{Y}$  или  $u \in \partial\mathcal{U}$  (при  $\tau \rightarrow 0$  имеем  $\eta_e(t) = 0$ , если  $u \in \mathcal{U}_{2\Delta}$ , и  $\eta_e(t) = \mu\Delta$ , если  $u \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_{2\Delta}$ ). На основании результатов теоремы 2 цель  $y \in \mathcal{Y}_e$  и  $u \in \mathcal{U}$  обеспечивает закон управления (10а)+(13) с той лишь только разницей, что в **У1** преобразование  $\Phi_y(\varepsilon_y, t)$  должно удовлетворять условию

$$\underline{g}_y(t) - \eta_y(t) < \Phi(\varepsilon_y, t) < \bar{g}_y(t) + \eta_y(t),$$

а не  $\underline{g}_y(t) < \Phi(\varepsilon_y, t) < \bar{g}_y(t)$ .

Недостатком предложенного алгоритма расширения является консерватизм, связанный с возможностью настройки только на два режима ( $\eta_e(t) = 0$  и  $\eta_e(t) \rightarrow \mu\Delta$ ).

**Замечание 6.** Вообще говоря, коэффициент  $\tau$  в (16) не может бы произвольным. Его значение должно быть меньше числа  $\kappa^{-1} > 0$ , где  $\kappa$  – это максимальная скорость расхождения выхода:  $\|y(t)\| \leq Me^{\kappa(t-t_0)}$ . Выполнение такого условия гарантирует расширение целевого множества раньше, чем выход системы попадет на границу целевого множества.

**Замечание 7.** Сигнал  $\epsilon(t)$  в (12) зависит от производных сигнала расширения  $\eta_e(t)$ . Начиная со второй, такие производные могут быть неограничены из-за негладкости величины  $s(t)$ .

С практической точки зрения это не является проблемой, поскольку точки разрыва (почти всегда) составляют множество меры нуль. Однако для формальной корректности результатов теоремы 2 необходимо в (16) вместо sat-функции использовать ее допредельные гладкие аппроксимации.

## 5. Численные эксперименты

Рассмотрим систему второго порядка:

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= bu + d, \\ y &= x_1. \end{aligned}$$

Придадим состояниям в (17) следующий смысл. Будем считать, что  $x_1(t) := \xi_1(t) - r(t)$  – это ошибка слежения некоторой физической величиной  $\xi_1(t)$  за дифференцируемым задающим воздействием  $r(t)$ . Именно в такой постановке может быть решено большое число задач управления на практике. В этом случае возмущение  $d(t)$  обязательно содержит слагаемое  $\ddot{r}(t)$ .

Множества  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{Y}$  зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u \in \mathbb{R}: |u(t)| \leq 1\}, \\ \mathcal{Y} &= \{y \in \mathbb{R}: -0,25 - \eta_y(t) < y(t) < 0,25 + \eta_y(t)\}. \end{aligned}$$

Таким образом, множества  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{Y}$  формализуют следующее инженерное *техническое задание*: при выполнении допущения 2 с помощью управления  $u(t)$ , не превосходящего по модулю единицу, обеспечить слежение переменной  $\xi_1(t)$  за дифференцируемым заданием  $r(t)$  с динамической ошибкой  $x_1(t)$ , по модулю не превосходящей 0,25.

Для обеспечения  $y \in \mathcal{Y}$  и  $u \in \mathcal{U}$  зададим отображения

$$\begin{aligned} \Phi_y(\varepsilon_y, t) &= \frac{(0,25 + \eta_y)e^{\varepsilon_y} - 0,25 - \eta_y}{e^{\varepsilon_y} + 1}, \quad \Phi_u(v) = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}, \\ \Phi_y^{-1}(y, t) &= \ln\left(\frac{-1 - 4\eta_y - 4y}{4y - 4\eta_y - 1}\right), \quad \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} = \frac{32\eta_y + 8}{(4\eta_y + 1)^2 - 16y^2}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y \partial y} &= \frac{256y(4\eta_y + 1)}{((4\eta_y + 1)^2 - 16y^2)^2}. \end{aligned}$$

Скалярная переменная  $\sigma(t)$  в рассматриваемом случае может быть вычислена по следующей формуле:

$$\sigma(t) = (s + \lambda) [\Phi_y^{-1}(y, t)] = \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} x_2 + \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial t} + \lambda \Phi_y^{-1}(y, t) = \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} x_2 + \lambda \varepsilon_y(t)$$

и описывается дифференциальным уравнением (14), в котором

$$\epsilon(x_1, x_2, t) = \left( \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y \partial y} x_2 + \lambda x_2.$$

Параметры системы и закона управления выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} b &= 1, \lambda = 1, K = -1, k = 10, \\ r(t) &= 0, x_1(t_0) = -0,2, x_2(t_0) = 0, \\ d(t) &= \begin{cases} -0,1u - 0,5x_1 + 0,4\sin(0,5\pi t) + 0,8, & \forall t \leq 15, \\ 0,8(-0,1u - 0,5x_1 + 0,4\sin(0,5\pi t) + 0,8), & \forall t \geq 15. \end{cases} \end{aligned}$$

На рис. 2 приведены переходные процессы по  $u(t)$ ,  $y(t)$  при  $\eta_y(t) = 0$  и  $\eta_y(t) := (16)$ , где  $\mu = 300$ ,  $\tau = 2$ ,  $\Delta = 0,005$ .

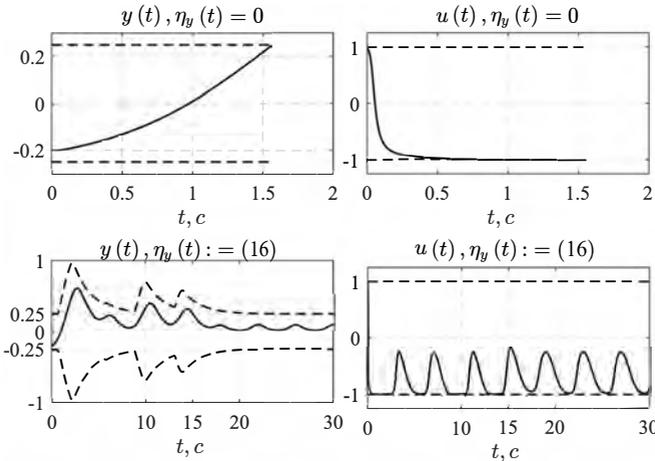


Рис. 2. Переходные процессы по  $u(t)$ ,  $y(t)$  при  $\eta_y(t) = 0$  и  $\eta_y(t)$ , формируемом согласно (16)

При использовании  $\eta_y(t) = 0$  из-за дефицита ресурса управления в момент времени  $t = 1,6$  выход  $y(t)$  покидает целевое множество  $\mathcal{Y}$ , из-за чего происходит разрыв в сигнале

$\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$ , а моделирование не может быть продолжено для  $t > 1,6$  с. С другой стороны, при использовании  $\eta_y(t) := (16)$  за счет расширения целевого множества удалось обеспечить  $y \in \mathcal{Y}$  для всех  $t \geq 0$  и тем самым устранить разрыв в сигнале  $\varepsilon_y(t) = \Phi_y^{-1}(y, t)$ . Заметим, что после уменьшения амплитуды возмущения в момент времени  $t = 15$  ресурса управления становится достаточно и расширенное множество совпадает с исходным.

## 6. Заключение

На основе результатов [1, 3, 15] для класса одномерных систем, имеющих произвольную относительную степень и устойчивую внутреннюю динамику, предложен простой закон управления, позволяющий обеспечить компенсацию параметрической неопределенности и сигнальных возмущений совместно с нахождением регулируемой переменной и управления в заданных множествах. Достоинством подхода является сохранение устойчивости системы при дефиците ресурса управления и нарушении допущения 2. Недостатком подхода является трудоемкость априорной проверки условий устойчивости из теоремы 2 при  $n \geq 2$ . Однако значимость этого недостатка несколько снижается благодаря следствию из теоремы 2. Теоретические результаты работы могут быть рекомендованы к практическому использованию, например, в задачах управления пространственными и угловыми координатами твердых тел (см. замечание 1).

## Приложение

*Доказательство теоремы 2.* Рассмотрим квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Производная  $V$  в силу УТ2.1-УТ2.3 удовлетворяет неравенству

$$\dot{V} \leq \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} \left[ \sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK) \sigma^2 + |\sigma| \bar{\psi} \right],$$

где при любом  $0 > \sup_{\sigma \in \mathcal{S}/0} (\rho(K\sigma) bK)$  и всех  $\sigma(t) \in \mathcal{S}/\mathcal{S}_\infty$  верно

$$\dot{V} \leq -\delta \frac{\partial \Phi_y^{-1}(y, t)}{\partial y} \sigma^2 < 0,$$

и при  $\sigma(t) \in \mathcal{S}_\infty$  верно

$$\dot{V} \geq 0,$$

а тогда, если справедливо включение  $\mathcal{S}_\infty \subset \mathcal{S}$ , то имеем  $\sigma(t) \in \mathcal{S}$  для всех  $t \geq t_0$  и  $\sigma(t) \in \mathcal{S}_\infty$  при  $t \rightarrow \infty$  [4]. Поскольку  $\varepsilon_y(t) = \frac{1}{(s+\lambda)^{n-1}} [\sigma(t)]$ ,  $\lambda > 0$ , то в этом случае переменная  $\varepsilon_y(t)$  ограничена. Из ограниченности  $\varepsilon_y(t)$  по теореме 1 следует выполнение условия  $y \in \mathcal{Y}$ . С другой стороны, по определению (10а) имеем  $u \in \mathcal{U}$ . Следовательно, поставленная цель (3) выполнена.

### Литература

1. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А. *Управление динамическими объектами с гарантией нахождения регулируемого сигнала в заданном множестве* // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №4. – С. 121–139.
2. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А., КОПЫСОВА Е.А. *Нелинейные законы управления, построенные на базе линейных с использованием нечетных функций* // Управление большими системами. – 2023. – Вып. 102. – С. 58–75.
3. ФУРТАТ И.Б., ГУЩИН П.А., НГУЕН Б.Х. *Управление динамическими системами при ограничениях на входные и выходные сигналы* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №4. – С. 45–63.
4. ХАЛИЛ Х.К. *Нелинейные системы*. – М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009. – 830 с.
5. ЦЫКУНОВ А.М. *Робастное управление с компенсацией возмущений*. – М.: Физматлит, 2012. – 300 с.
6. VECCHIOULIS C.P., THEODORAKOPOULOS A., ROVITHAKIS G.A. *Output feedback stabilization with prescribed performance for uncertain nonlinear systems*

- in canonical form* // Proc. of the 52nd IEEE Conf. on Decision and Control. – Florence: IEEE, 2013. – P. 5084–5089.
7. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Adaptive control with guaranteed transient and steady state tracking error bounds for strict feedback systems* // Automatica. – 2009. – Vol. 45, No. 2. – P. 532–538.
  8. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *A low-complexity global approximation-free control scheme with prescribed performance for unknown pure feedback systems* // Automatica. – 2014. – Vol. 50, No. 4. – P. 1217–1226.
  9. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Prescribed performance adaptive control of SISO feedback linearizable systems with disturbances* // Proc. of 16th Mediterranean Conf. on Control and Automation. – Corsica: IEEE, 2008. – P. 1035–1040.
  10. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Robust adaptive control of feedback linearizable MIMO nonlinear systems with prescribed performance* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2008. – Vol. 53, No. 9. – P. 2090–2099.
  11. BECHLIOULIS C.P., ROVITHAKIS G.A. *Robust partial-state feedback prescribed performance control of cascade systems with unknown nonlinearities* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 9. – P. 2224–2230.
  12. BIKAS L.N., ROVITHAKIS G.A. *Prescribed performance under input saturation for uncertain strict-feedback systems: A switching control approach* // Automatica. – 2024. – Vol. 165. – P. 111663.
  13. BU X. *Prescribed performance control approaches, applications and challenges: A comprehensive survey* // Asian Journal of Control. – 2023. – Vol. 25, No. 1. – P. 241–261.
  14. FOTIADIS F., ROVITHAKIS G.A. *Input-constrained prescribed performance control for high-order mimo uncertain nonlinear systems via reference modification* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2024. – Vol. 69, No. 5. – P. 3301–3308.
  15. FURTAT I.B., GUSHCHIN P.A., NGUYEN B.H. *Nonlinear*

- control providing the plant inputs and outputs in given sets // European Journal of Control. – 2024. – Vol. 76. – P. 100944.*
16. GLUSHCHENKO A., LASTOCHKIN K., ABRAMENKOV A. et al. *Robust Attitude Control of Underwater Unmanned Vehicle with Estimation and Compensation of Matched Uncertainty // Proc. of the 5th Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk: IEEE, 2023. – P. 58–63.*
  17. GLUSHCHENKO A., LASTOCHKIN K. *Neural network-based direct model reference adaptive control of quadrotor attitude // Proc. of the 16th Int. Conf. on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference). – Moscow: IEEE, 2022. – P. 1–4.*
  18. GLUSHCHENKO A., LASTOCHKIN K. *Neural Network Based Parameter Uncertainty Compensation to Solve Quadrotor Trajectory Tracking Problem // Proc. of the 4th Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – Lipetsk: IEEE, 2022. – P. 443–448.*
  19. ISIDORI A. *Nonlinear control systems: an introduction. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1985. – 312 p.*
  20. JI R., LI D., MA J. et al. *Saturation-tolerant prescribed control of MIMO systems with unknown control directions // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. – 2022. – Vol. 30, No. 12. – P. 5116–5127.*
  21. SUN K., QIU J., KARIMI H.R. et al. *A novel finite-time control for nonstrict feedback saturated nonlinear systems with tracking error constraint // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2019. – Vol. 51, No. 6. – P. 3968–3979.*
  22. TORNAMBE A. *High-gain observers for non-linear systems // Int. Journal of Systems Science. – 1992. – Vol. 23, No. 9. – P. 1475–1489.*
  23. TRAKAS P.S., BECHLIOULIS C.P. *Adaptive Performance Control for Input Constrained MIMO Nonlinear Systems // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. –*

2024. – P. 1–8. Early Access.
24. TRAKAS P.S., BECHLIOULIS C.P. *Approximation-free adaptive prescribed performance control for unknown SISO nonlinear systems with input saturation* // Proc. of the 61st Conf. on Decision and Control (CDC). – Cancun: IEEE, 2022. – P. 4351–4356.
  25. UTKIN V., POZNYAK A., ORLOV Y.V. et al. *Road map for sliding mode control design*. – Berlin/Heidelberg, Germany: Springer International Publishing, 2020. – 127 p.
  26. WEI C., CHEN Q., LIU J. et al. *An overview of prescribed performance control and its application to spacecraft attitude system* // Proc. of Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering. – 2021. – Vol. 235, No. 4. – P. 435–447.
  27. WEN C., ZHOU J., LIU Z. et al. *Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation and external disturbance* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2011. – Vol. 56, No. 7. – P. 1672–1678.
  28. XIE H., JING Y., DIMIROVSKI G.M. et al. *Adaptive fuzzy prescribed time tracking control for nonlinear systems with input saturation* // ISA Trans. – 2023. – Vol.143. – P. 370–384.
  29. YANG Y., TAN J., YUE D. *Prescribed performance tracking control of a class of uncertain pure-feedback nonlinear systems with input saturation* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2018. – Vol. 50, No. 5. – P. 1733–1745.
  30. YAO Y. ET AL. *Flexible prescribed performance output feedback control for nonlinear systems with input saturation* // IEEE Trans. on Fuzzy Systems. – 2024. – P. 1-10. Early Access.
  31. YONG K., CHEN M., SHI Y. et al. *Flexible performance-based robust control for a class of nonlinear systems with input saturation* // Automatica. – 2020. – Vol. 122. – P. 109268.
  32. ZHENG Z., FEROSKHAN M. *Path following of a surface vessel with prescribed performance in the presence of input saturation and external disturbances* // IEEE/asmE Trans. on Mechatronics. – 2017. – Vol. 22, No. 6. – P. 2564–2575.

33. ZHOU J., WEN C. *Robust adaptive control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation* // IFAC Proc. Volumes. – 2006. – Vol. 39, No. 1. – P. 149–154.

## PLACEMENT OF INPUT AND OUTPUT IN GIVEN SETS FOR ONE CLASS OF SYSTEMS

**Anton Glushchenko**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Dr.Sc., Docent, Leading Researcher (aiglush@ipu.ru).

**Konstantin Lastochkin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher, postgraduate student (lastconst@ipu.ru).

*Abstract: In [3, 15], a control method providing the nonlinear plant inputs and outputs in given sets is proposed. The main theorems of these studies are valid for SISO and MIMO systems with arbitrary relative degree. However, constructive algorithms for control law design are proposed for systems with unit relative degree only. In this study, the above-mentioned results are extended to a class of SISO systems with arbitrary relative degree and stable internal dynamics. For such a class of systems, a new control law providing the plant inputs and outputs in given sets is proposed that ensures compensation of both parametric uncertainty and exogeneous perturbation. In such a solution, the control signal boundedness is guaranteed explicitly by using a smooth nonlinearity in the control law, which preliminarily approximates the saturation function, and when the control signal amplitude is not enough to keep the system output in a given set, the proposed solution dynamically changes the given set for the system output, which allows one to avoid the feedback signal discontinuities. The theoretical results are validated via numerical experiments and can be applied, for example, to control position and Euler angles of solid bodies.*

Keywords: predefined performance, given input and output sets, control saturation, disturbance rejection, stability.

УДК 519.7

ББК 15.21

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии И.Б. Фуртатом.*

*Поступила в редакцию 21.11.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*

# МЕТОД ЭКСТРАПОЛЯЦИИ СИГНАЛОВ НА ДВУМЕРНОЙ АНТЕННОЙ СИСТЕМЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛГОРИТМОВ ГЛУБОКИХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ<sup>1</sup>

Рубинович Е. Я.<sup>2</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Юрченков И. А.,<sup>3</sup> Назаркин В. А.<sup>4</sup>

(Российский технологический университет МИРЭА, Москва)

Рассматриваются методы дистанционного зондирования объектов с использованием цифровых антенных решеток (ЦАР). Такой подход позволяет получать информацию об объектах без прямого физического контакта, анализируя излучение, отраженное или испущенное ими. Описаны особенности формирования диаграммы приема (ДП) ЦАР, состоящей из двумерной плоской прямоугольной решетки излучающих элементов. Математическая модель ДН отдельного излучателя и системы в целом представлена с учетом волнового числа, расстояния между элементами и углов сканирования. Особое внимание уделено ограничениям разрешающей способности системы, обусловленным критерием Рэлея и связанным с линейными размерами антенны. В области малых угловых отклонений проводится аппроксимация компонент модели, что упрощает расчет, но ограничивает возможность различения близко взаимно расположенных источников в двумерном пространстве. Возникает задача цифровой обработки полученных сигналов для повышения углового разрешения системы. В статье обсуждаются методы и алгоритмы на базе глубоких нейронных сетей, направленные на преодоление этих ограничений и улучшение качества получаемых изображений при дистанционном зондировании с использованием ЦАР. В статье продемонстрированы качественные результаты работы предлагаемого решения на ЦАР с фиксированными параметрами. Визуально показаны примеры работы рассматриваемого алгоритма.

Ключевые слова: угловое сверхразрешение, сверточные нейронные сети, цифровая антенная решетка, критерий Рэлея, экстраполяция.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант №23-29-00448.

<sup>2</sup> Евгений Яковлевич Рубинович, д.т.н., профессор (rubinvch@gmail.com).

<sup>3</sup> Иван Александрович Юрченков, аспирант (yurchenkov@mirea.ru).

<sup>4</sup> Владимир Андреевич Назаркин, аспирант (vovannazark89@mail.ru).

## **1. Введение**

**Дистанционное зондирование** — это метод получения информации об объектах или явлениях без прямого физического контакта с ними. Это достигается путем измерения и анализа излучения, отраженного или испущенного объектами, с помощью специализированных датчиков на борту спутников, самолетов, беспилотных летательных аппаратов и других платформ.

Измерение излучения может производиться в активном или пассивном режимах. При пассивном зондировании используются естественные источники излучения, такие как солнечный свет или тепло, излучаемое исследуемым объектом. Датчики регистрируют отраженное или испущенное излучение от поверхности объекта. При активном зондировании используются искусственные источники излучения, генерируемые самим датчиком (например, радаром или лидаром). Датчик излучает сигнал и измеряет время и интенсивность его отражения от поверхности.

У любой конфигурации системы излучателей при активном зондировании есть ограничение по разрешению — это минимальный угол, под которым она может различить два отдельных объекта и возможно возникновение эффекта слияния принятого сигнала от нескольких источников.

Эффект слияния целей возникает, когда два или более объекта находятся очень близко друг к другу по углу зрения антенны. Если расстояние между этими объектами меньше, чем разрешающая способность антенны, она не может различить их как отдельные объекты. Вместо этого она воспринимает их как один объединенный сигнал или единый объект.

Чтобы решить эту проблему и разделить слившиеся цели, применяется задача сверхразрешения. Это означает использование специальных методов и алгоритмов обработки сигналов, которые позволяют обойти физические ограничения разрешения антенны. Они анализируют полученные данные и извлекают из них дополнительную информацию, позволяя различить объекты, которые находятся ближе друг к другу, чем это позволяет обыч-

ное разрешение системы.

В задачах дистанционного зондирования принято группировать систему излучающих устройств в единую систему, образующую антенную решетку. Цифровая антенная решетка (ЦАР) представляет собой объединение элементов, работающих в активном режиме и расположенных в двумерном пространстве от своего центрального элемента на некоторых расстояниях друг от друга. Направление излучения ЦАР и в целом его угловое распределение описываются диаграммой приема (ДП) системы и регулируются изменением амплитудно-фазового распределения токов на излучающих элементах. ЦАР также снабжается набором цифровых вычислительных блоков общего или специального назначения, которые позволяют производить обработку принятого сигнала в реальном времени.

Во многих странах проводятся работы по исследованию и практической реализации методов обработки сигналов, позволяющих превысить физическое угловое разрешение ЦАР, т.е. достигать сверхразрешения [1, 3, 5, 7, 13, 22, 23, 25, 26]. Известны десятки подобных методов и их разновидностей. Тем не менее не существует единого универсального метода решения задачи достижения сверхразрешения. Все методы и алгоритмы имеют различные ограничения. Однако наиболее популярные из них [7, 13, 22, 25] оказываются эффективными только при решении задач для построения системы излучателей вдоль одного измерения. В двумерных задачах соответствующие алгоритмы значительно усложняются, что приводит к существенному увеличению времени обработки сигналов и иногда к необходимости использования параллельных вычислений [20]. Это не позволяет использовать упомянутые методы в режиме реального времени на вычислительных устройствах общего назначения. С развитием цифровых антенных решеток (ЦАР) появились новые методы улучшения углового разрешения. В современных работах рассматриваются модификации как программных, так и аппаратных улучшений.

С точки зрения программных модификаций в современ-

ных работах рассматриваются варианты методов MUSIC [11] и ESPRIT [24] на базе малоранговых аппроксимаций, которые позволяют оценивать направления на источники сигналов с разрешением, превышающим разрешение антенны, путем анализа собственных векторов и собственных значений ковариационной матрицы полученных сигналов. С точки зрения качественных изменений в этом направлении рассматриваются классические ЦАР с виде антенных решеток с частотным разнесением [9], включающие возрастающий и убывающий варианты изменения частоты излучения по элементам для улучшения диаграммы приема сигнала.

С недавнего времени ведутся перспективные исследования использования моделей искусственных нейронных сетей в задачах сверхразрешения как для увеличения детализации диаграммы приема одномерных [16] и двумерных [15] систем излучателей, так и для более точной оценки спектра принятых сигналов [27].

Работа посвящена разработке дополнительного алгоритмического модуля на базе алгоритмов искусственного интеллекта, позволяющего решить задачу сверхразрешения объектов в угломерном пространстве на базе известной конфигурации системы искусственных излучателей.

## **2. Постановка задачи**

Двумерная плоская прямоугольная ЦАР выполняется в виде структуры из  $(2N + 1) \times (2M + 1)$  равноотстоящих друг от друга элементов, каждый из которых характеризуется своей ДН  $f_{n,m}(\alpha, \beta)$ .

Диаграмма приема  $f_{n,m}(\alpha, \beta)$  сигнала одного антенного устройства в рассматриваемой двумерной решетке моделируется в зависимости от значения волнового числа  $k = 2 \cdot \pi / \lambda$ , расстояния между устройствами по оси абсцисс  $d_\alpha$  и ординат  $d_\beta$ , номера излучателя  $n$  по горизонтали и  $m$  по вертикали при сканировании угломерной области  $\Omega \in \mathbb{R}[-1, 1] \times \mathbb{R}[-1, 1]$  следующим образом:

$$(1) \quad f_{n,m}(\alpha, \beta) = \exp(i \cdot k \cdot (d_\alpha \cdot n \cdot \alpha + d_\beta \cdot m \cdot \beta)),$$

где  $n \in [-N, N]$ ;  $m \in [-M, M]$ ;  $\lambda$  – используемая длина волны. Компоненты общей модели  $\sin(\alpha)$ ,  $\sin(\beta)$  приближаются своими значениями  $\alpha, \beta$  ввиду необходимости решения задачи в малой области  $\Omega(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha, \beta \ll 1$ , в которой невозможно разрешать несколько близких источников сигнала. Рассматривать данную постановку диаграммы приема элемента можно как описание чисто пространственной (геометрической) фазовой задержки волны на элементах антенной решётки. Мы работаем в комплексной потенциальной форме представления волны, где временная часть  $\exp(i\omega t)$  опущена для простоты и сфокусирован только пространственный множитель.

Тогда диаграмма приема системы  $F(\alpha, \beta)$  описывается в виде двумерной суммы

$$(2) \quad F_{N,M}(\alpha, \beta) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M f_{n,m}(\alpha, \beta).$$

Принятый сигнал на системе излучателей при известной модели диаграммы приема (2) естественным образом представляется в виде интегрального представления:

$$(3) \quad U(\alpha, \beta) = \iint_{\Omega(\alpha, \beta)} F(\varphi - \alpha, \psi - \beta) I(\varphi, \psi) d\varphi d\psi.$$

где  $I(\varphi, \psi)$  – неизвестное угловое распределение амплитуды источников излучения в области  $\Omega$ . Качество получаемого изображения на основе (3) определяется угловой разрешающей способностью, оцениваемой в соответствии с критерием Рэля углами  $\delta\alpha$  и  $\delta\beta$ :

$$(4) \quad \delta\alpha = \lambda/D_\alpha, \quad \delta\beta = \lambda/D_\beta,$$

где  $D_\alpha = (2N + 1)d_\alpha$ ,  $D_\beta = (2M + 1)d_\beta$  – линейные размеры антенны в соответствующих направлениях. Углы  $\delta\alpha$  и  $\delta\beta$  практически равны ширине диаграммы приема по половинной мощности  $\theta_{0,5}$ . Таким образом, описывающее объект распределение  $I(\alpha, \beta)$  при прямых измерениях находится с разрешением не лучше  $\delta\alpha$  и  $\delta\beta$ . Возникает задача цифровой обработки сигналов, которая позволила бы находить приближенные решения  $I(\alpha, \beta)$  ин-

тегрального уравнения (ИУ) (3) и повысить тем самым качество двумерного изображения за счёт превышения критерия Рэля (4).

Используя диаграмму приема элемента (1) и антенной системы (2), получим принимаемый сигнал в виде

$$(5) \quad U(\alpha, \beta) = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-M}^M C_{n,m} \exp(-ik(d_\alpha n\alpha + d_\beta m\beta)),$$

$$(6) \quad C_{n,m} = \iint_{\Omega(\alpha,\beta)} f_{n,m}(\varphi, \psi) I(\varphi, \psi) d\varphi d\psi, \\ n \in [-N, N], m \in [-M, M].$$

Ставится задача создания модели  $G$  с некоторыми внутренними параметрами  $\mathbf{P}$ , решающей задачу экстраполяции сигнала (7)

$$\hat{C}_{k,l} = G(C_{n,m} | \mathbf{P}),$$

и позволяющей получить с возможно большей точностью значения предсказываемого сигнала  $\hat{C}_{k,l}$ ,  $k \in [-K, K]$ ,  $N < K$ ,  $l \in [-L, L]$ ,  $M < L$ , который принимал бы элемент  $(k, l)$  за пределами физических размеров решетки  $(D_\alpha, D_\beta)$ . Другими словами, ставится задача двумерной экстраполяции сигнала на основе известных реальных значений принятого сигнала на излучателях двумерной ЦАР, представленного в виде набора коэффициентов  $C_{n,m}$ .

На сегодняшний день задача экстраполяции или прогнозирования повсеместно решается с применением все более сложных и мощных алгоритмов на базе искусственных нейронных сетей различных архитектур.

Успешное решение задачи двумерной экстраполяции позволит найти виртуальный сигнал  $\hat{U}(\alpha, \beta)$ , принимаемый виртуальной ЦАР из  $(2 \cdot K + 1) \times (2 \cdot L + 1)$  элементов вместо  $U(\alpha, \beta)$  ЦАР из  $(2 \cdot N + 1) \times (2 \cdot M + 1)$  элементов:

$$(8) \quad \hat{U}(\alpha, \beta) = \sum_{n=-K}^K \sum_{m=-L}^L \hat{C}_{n,m} \exp(-ik(d_\alpha n\alpha + d_\beta m\beta)).$$

Новое ядро ИУ (3) в виде диаграммы приема виртуальной ЦАР теперь представляет собой

$$(9) \quad \hat{F}_{K,L}(\alpha, \beta) = \sum_{n=-K}^K \sum_{m=-L}^L f_{n,m}(\alpha, \beta).$$

Возросшее число членов (6) позволит детализировать изображение источников излучения на получаемом двумерном сигнале  $\hat{U}(\alpha, \beta)$ . Угловая разрешающая способность системы, следуя критерию Рэля (4), увеличится до теоретических значений

$$\delta\alpha = \lambda / ((2 \cdot K + 1) \cdot d_\alpha), \quad \delta\beta = \lambda / ((2 \cdot L + 1) d_\beta),$$

т.е. возрастет соответственно в  $\sim K/N$  и  $\sim L/M$  раз.

### 3. Нейронные сети для обработки изображений

Обработка изображений с целью увеличения их разрешения или масштабирования занимает важное место в компьютерном зрении. Для этого используются различные архитектуры нейронных сетей, способные обучаться восстанавливать недостающую информацию и улучшать визуальные характеристики изображений. На сегодняшний день для задач обработки изображений чаще всего рассматривается возможность использования моделей машинного обучения, предобученных на домене данных реалистичных изображений в трехканальном формате.

**Super-Resolution Convolutional Neural Network (SRCNN)** – одна из первых архитектур, предложенных для задач увеличения разрешения изображений [6]. Она состоит из небольшого числа сверточных слоев [19] и обучается восстанавливать изображение с большим числом пикселей в ширину и высоту из его версии с низким разрешением путем интерполяции и улучшения деталей.

**Generative Adversarial Networks (GAN)** – архитектуры [10], решающие задачу генерации изображений из семантического запроса [8]. В контексте увеличения размерности GAN, такие как SRGAN [14], обучаются генерировать высокореалистичные изображения, которые сложно отличить от оригинальных.

**U-Net** – изначально разработанная для сегментации медицинских изображений, архитектура [21] хорошо подходит для задач, где требуется точное восстановление или увеличение изображений.

Задача пространственной экстраполяции отличается от интерполяции тем, что требуется предсказать значения за пределами известных данных. При обработке изображений это означает генерацию новых областей за границами исходного изображения, что приводит к задачам дорисовывания границ. Это сложная задача, так как модель должна не только сохранять согласованность с имеющимися данными, но и уметь обобщать и предлагать правдоподобные продолжения структуры и текстуры.

В работе [4] рассматривается модель экстраполяции высокореалистичных изображений пространственных карт, использующая метод *Semantic Uncrop*, направленный на генерацию изображений, заполняющих произвольные двумерные формы. Модель при обучении использует одностороннее вырезание изображения из обучающего множества с целью его восстановления, в результате чего модель учится *дорисовывать* двумерную карту, используя оставшуюся в изображении доступную модели информацию. Этот подход выходит за рамки традиционных методов восстановления (*inpainting*) и расширения (*outpainting*) изображений, предоставляя возможность создавать содержательное и семантически согласованное изображение для областей произвольной формы. Предлагаемый подход основан на большой с точки зрения числа стадий обработки и обучаемых параметров модели, это влияет на скорость обучения, применения и возможность модификации процесса обработки входных данных.

Ограничения существующих моделей не позволяют рассматривать возможность их применения в представленной задаче экстраполяции двумерных карт  $C_{n,m}$  входных данных. На это есть несколько объективных причин. Во первых, большинство доступных архитектур ориентированы на улучшение качества внутри границ изображения, т.е. на интерполяцию, а не на экстраполяцию. Во-вторых, универсальные модели не учитывают особенности конкретного типа сигнала или предметной области, поскольку учились на доменах изображений предметов реальных физических объектов при из достаточной разрешимости.

В данной работе рассматривается задача именно экстрапо-

ляции конкретных форм сигналов, что порождает необходимость создания собственной модели нейронной сети.

В основе представленных выше предобученных моделей нейронных сетей используются двумерные сверточные слои, основанные на применении операции дискретной свертки входных данных с ядром, параметры которых обучаются в процессе уменьшения функции потерь для решения задачи обучения с учителем.

Сверточные нейронные сети [19] являются основой для обработки изображений благодаря способности эффективно извлекать пространственные признаки. В задачах увеличения размерности сверточные слои обучаются моделировать связь между низкочастотными (общая структура) и высокочастотными (детали) компонентами изображения.

В стандартной двумерной сверточной операции мы применяем ядро (фильтр) к входной карте признаков для получения выходной карты признаков. Эта операция обычно уменьшает пространственные размеры, если шаг свертки больше единицы или если не предусмотрено заполнение изображения фиктивными пикселями.

Транспонированная свертка работает в обратном направлении, преобразовывая карту признаков низкого разрешения в карту более высокого разрешения (рис. 1), эффективно выполняя увеличение размерности, комбинированное с обучаемыми параметрами (весами сверточных ядер). Эту операцию можно рассматривать как расширение входной карты признаков по пространству на основе применения свертки к расширенной карте признаков.

Транспонированная свертка (*Transpose Convolution*) также часто называется деконволюцией (*deconvolution*) [28] (хотя технически это не истинная инверсия свертки) или сверткой с дробным шагом. Она особенно полезна в задачах, таких как генерация изображений и семантическая сегментация, где требуется преобразовать карты признаков низкого разрешения в изображения более высокого разрешения. Благодаря обучению весов сеть на ос-

нове транспонированной свертки может генерировать выходные данные высокого разрешения, которые более точны и согласованы с распределением обучающих данных.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline X_{1,1} & X_{1,2} & X_{1,3} \\ \hline X_{2,1} & X_{2,2} & X_{2,3} \\ \hline X_{3,1} & X_{3,2} & X_{3,3} \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|} \hline w_{1,1} & w_{1,2} \\ \hline w_{2,1} & w_{2,2} \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_{1,1} \cdot w_{1,1} & X_{1,1} \cdot w_{1,2} & 0 & 0 \\ \hline X_{1,1} \cdot w_{2,1} & X_{1,1} \cdot w_{2,2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & X_{1,2} \cdot w_{1,1} & X_{1,2} \cdot w_{1,2} & 0 \\ \hline 0 & X_{1,2} \cdot w_{2,1} & X_{1,2} \cdot w_{2,2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} + \dots + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & X_{1,3} \cdot w_{1,1} & X_{1,3} \cdot w_{1,2} \\ \hline 0 & 0 & X_{1,3} \cdot w_{2,1} & X_{1,3} \cdot w_{2,2} \\ \hline \end{array}$$

Рис. 1. Действие транспонированной свертки по увеличению пространственного изображения

Разработка собственной архитектуры сверточной нейронной сети для экстраполяции сигнала на базе известного изображения с низким разрешением оправдана специфическими требованиями задачи. Собственная модель позволяет учитывать особенности данных и предметной области, улучшать качество экстраполяции, особенно в краевых областях за счет собственных решений в архитектуре и подразумевает возможность адаптировать архитектуру под конкретные цели и ограничения.

Таким образом, создание собственной модели для задач экстраполяции способствует получению более точных и правдоподобных предсказаний, что имеет важное значение в различных прикладных областях, где требуется прогнозирование данных за пределами доступной информации.

#### 4. Решение задачи на основе сверточной модели нейронной сети

Для предложенной постановки задачи рассмотрим частный случай модели решётки с определёнными параметрами. При-

мом постоянными число излучателей существующей антенной решётки для  $N = M = 10$  в каждую сторону от центрального излучателя, таким образом, всего в квадратной решётке будет  $(2N + 1) \times (2M + 1)$  излучателей. Примем также расстояния между устройствами по горизонтали и вертикали в пространственной сетке постоянными и равными  $d_\alpha = 0,7$  и  $d_\beta = 0,7$  соответственно. Данные параметры напрямую влияют на пространственные размеры апертуры, равные также  $D_\alpha = (2N + 1)d_\alpha = 14,7$  и  $D_\beta = 14,7$ .

Положим, что все излучатели работают на длинах волн, характеризующихся волновым числом  $k = 2\pi$ . Таким образом, для итоговой рассмотренной ЦАР мы имеем равную ширину диаграммы приема (4) до половинной мощности, оцениваемую величиной  $\delta\alpha = \delta\beta = 2\pi/(kD_\alpha) \approx 0,068$  по каждому измерению. Данный параметр указывает на то, в пределах какого расстояния между объектами данные сигналы не могут быть разрешены по критерию Рэля [29].

Предложенная модель двумерной антенной решетки при сканировании двумерной угломерной области предполагает генерацию некоторых значений принятого сигнала  $C_{n,m}$  по соотношению (6) на каждом из устройств решетки, ввиду чего предполагается получение матрицы  $C \in \mathbb{C}^{21 \times 21}$ , в общем случае комплексных, значений  $C_{n,m} \in \mathbb{C}$ , каждое из которых участвует в расчете принятого сигнала (5). В итоге выходит, что имея фиксированную конфигурацию физических устройств ЦАР определяется только значениями матрицы  $C$  при определенной форме исходного истинного сигнала  $I(\alpha, \beta)$ . Будем решать задачу увеличения разрешающей способности ЦАР, т.е. уменьшению теоретических оценок значений  $(\delta\alpha, \delta\beta)$  за счет прогнозирования значений принятого сигнала  $\widehat{C}_{k,l}$  на виртуальных излучателях за пределами реальной апертуры на основе принятой информации в  $C_{n,m}$ .

Введем виртуальную ЦАР с пространственными размерами  $(2K + 1) \times (2L + 1)$  при  $K = L = 60$ , с теми же значениями расстояний между устройствами  $d_\alpha, d_\beta$ , и волновым числом  $k$ . Таким образом принятый сигнал на ЦАР будет также определяться зна-

чениями сигнала, принятыми на устройствах  $\hat{C}_{k,l}$ , определенную в матрице комплексных значений размера  $\hat{C} \in \mathbb{C}^{121 \times 121}$ . Ставится задача обучения параметров  $\mathbf{P}$  некоторой архитектуры нейронной сети  $G$  (7), увеличивающей пространственную размерность исходной матрицы  $C$  до матрицы  $\hat{C}$ , предсказывая принятые значения на виртуальных излучателях за пределами апертуры по модели (6).

Случайным образом будем генерировать наборы данных пространственных сигналов  $I_j(\alpha, \beta)$ , где  $j = 1, 2, \dots, J$  и  $J$  – размер набора сигналов, представляющих обучающие примеры для предсказательного алгоритма  $G$  на примере трех равноинтенсивных объектов в двумерном угловом пространстве расположенных в точках  $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , значения которых взяты из равномерного распределения симметрично относительно нуля в пределах ширины диаграммы приема до половинной мощности реальной апертуры. Значения амплитуды сигналов моделируются в виде дельта-функций  $\delta(\alpha - \alpha_{ij}, \beta - \beta_{ij})$ , представляющих максимальные мощности сигналов-источников, прошедших через амплитудный фильтр. Генерируемый сигнал  $I_j(\alpha, \beta)$  примет вид

$$(10) \quad I_j(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \delta(\alpha - \alpha_{ij}, \beta - \beta_{ij}).$$

Таким образом, двумерные карты как для реальных  $C_{n,m}^j$  принятых сигналов на устройствах и виртуальных  $\hat{C}_{k,l}^j$  будут сгенерированы для каждого варианта расположения объектов  $I_j(\alpha, \beta)$  по выражению (6). Для реального сигнала  $C_{n,m}^j$  будет также смоделирован случайный аддитивный шум, взятый из равномерного распределения, в диапазоне  $SNR$  от 20 (дБ) до 100 (дБ) (Signal-to-noise ratio) от  $C_{n,m}^j$ , и наложен на исходные реальные коэффициенты. Принимая данные условия получаем пары «вход – выход» для алгоритма  $G$  с обучаемыми параметрами  $\mathbf{P}$  для пространственной экстраполяции.

На рис. 2 представлена разработанная архитектура модели нейронной сети на базе сверточных и транспонированных сверточных слоев, предназначенных для решения задачи экстраполяции

ции двумерных карт  $C_{n,m}^j$  с увеличением размерности тензоров данных.

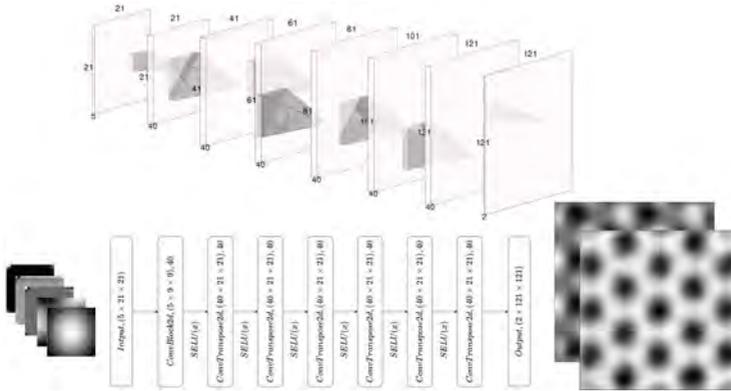


Рис. 2. Архитектура сверточной нейронной сети для увеличения размерности входного двумерного сигнала, сверху – визуализация промежуточной размерности двумерной карты при прохождении входного сигнала, внизу – архитектура сети на базе обычных и транспонированных сверточных блоков

На вход нейронной сети подаются двумерные сигналы  $C_{nm}^j$  в форме тензора размерами  $(2 \times 21 \times 21)$ , где каждый канал глубины тензора сигнала представляет действительную  $Re C_{nm}^j$  и мнимую  $Im C_{nm}^j$  части комплексного сигнала  $C_{nm}^j$ . Также модель первоначально рассчитывает дополнительные 3 канала такого же размера как действительную и мнимую составляющую результата двумерного быстрого дискретного Фурье-преобразования сигнала  $C_{nm}^j$  и модуль данного результата. Таким образом входные данные представляют собой тензор с размерами  $(5 \times 21 \times 21)$ , который также можно просто рассматривать как 5 независимых двумерных карт данных.

Поданный сигнал необходимо обработать таким образом, чтобы на выходе получить двумерные карты  $\hat{C}_{k,l}^j$  с размерами  $(2 \times 121 \times 121)$ , моделирующие действительную и мнимую части принятого сигнала  $\hat{C}_{k,l}^j$  на виртуальных устройствах. Централь-

ная часть двумерной карты результата размерами  $(21 \times 21)$  будет представлять незашумленный восстановленный сигнал на физически существующих устройствах исходной ЦАР, а остальные значения по краям будут целевыми предсказываемыми значениями.

Представленная архитектура (рис. 2) нейронной сети состоит из трёх последовательных функциональных блоков обработки получаемых пространственных данных.

Первый блок **ConvBlock2d** предназначен для извлечения первичных признаков и зависимостей входных двумерных карт. Он состоит из четырех последовательных сверточных слоев с размером ядра свертки  $(CH \times 3 \times 3)$  и последовательно увеличивающимся количеством каналов глубины  $\mathbf{CH} = (5, 10, 15, 20)$  и количеством таких ядер (фильтров)  $\mathbf{DH} = (10, 15, 20, 40)$  на каждом слое. Каждый сверточный слой в данном блоке оснащен заполнением краев входного тензора данных одним фиктивным элементом по каждому направлению для сохранения исходных пространственных размеров по ширине и высоте (*padding*). Последовательное выполнение операции свертки производится без нелинейного преобразования и уменьшения размерности в виде слоев агрегации (*pooling*) для максимального сохранения размеров малой пространственной карты на входе. Итоговое поле восприятия (*receptive field*) сверточного блока составляет  $(9 \times 9)$  значений по ширине и высоте. После данного блока выполняется нелинейное преобразование с помощью функции активации **SELU**( $x$ ) [29]:

$$(11) \quad SELU(x) = \zeta \cdot (\max(0, x) + \min(0, \gamma \cdot (\exp(x) - 1))),$$

где  $\zeta \approx 1,0507$ , а  $\gamma \approx 1,6733$ . Такая функция позволяет выделять пространственные коэффициенты результирующих карт свертки только с положительной корреляцией и пропускать далее полный не затухающий градиент для положительных входных значений. В качестве функции также может быть выбрана любая функция семейства **RELU**( $x$ ) [2].

Второй функциональный блок состоит из пяти последовательных транспонированных сверточных слоев увеличения раз-

мерности двумерной карты **ConvTranspose2d**. Данные сверточные слои в предлагаемой реализации снабжаются сверточными блоками в количестве равном  $\mathbf{DH} = 40$  и размерами  $(40 \times 21 \times 21)$ , где первая константа  $\mathbf{CH} = 40$  соответствует глубине двумерной карты, вторая  $H = 21$  и третья  $W = 21$  константы соответствуют размеру сверточных ядер по высоте и ширине соответственно. Данные блоки производят над входными тензорами размера  $(40 \times H_{in} \times W_{in})$  преобразование увеличения двумерной карты до размеров  $(40 \times H_{out} \times W_{out})$  посредством операции двумерной дискретной транспонированной свертки, где  $H_{out} = H_{in} + 20$  и  $W_{out} = W_{in} + 20$ , т.е. высота и ширина выходной карты увеличиваются соответственно на 10 значений симметрично в каждую сторону от центра. Данные блоки каждый последовательно выполняют нелинейное преобразование с помощью функции активации (11) для обучения нелинейным зависимостям в данных.

Третий функциональный блок **ConvBlock2d** агрегирует информацию с последнего слоя увеличения пространственной размерности по глубине двумерных карт. Промежуточный тензор с размерами  $(40 \times 121 \times 121)$ , подаваемый на вход данного блока, необходимо преобразовать до целевых размеров  $(2 \times 121 \times 121)$ , где каждый канал представляет собой матрицу вещественных коэффициентов  $(Re \hat{C}_{k,l}, Im \hat{C}_{k,l}) \in \mathbb{R}^{2 \times 121 \times 121}$  для действительной и мнимой составляющих комплексных (в общем случае) значений прогнозируемого принятого сигнала  $\hat{C}_{k,l} \in \mathbb{C}^{121 \times 121}$  на виртуальных устройствах ЦАР. Данный блок работает схожим образом, что и первый, за исключением того, что глубина входных данных последовательно уменьшается с 40 до 2. Данный блок призван решить проблему артефактов, возникающих на границе решения, получаемого в результате последовательной транспонированной свертки для увеличения размерности.

Подробная информация о промежуточных размерностях данных двумерных карт в процессе прохождения информации через сверточную модель представлена в таблице 1.

Параметры данной модели располагаются в матрицах ядер двумерных классических и транспонированных сверточных бло-

ков и обучаются посредством уменьшения ошибок модели по увеличению размерности входных карт. Данные для входов и выходов в общем случае известны для известной исходной и целевой пространственной конфигурации ЦАР при известном расположении моделируемых целей из распределения интенсивностей  $I(\alpha, \beta)$  и рассчитываются по формулам (1)–(6).

Таблица 1. Таблица размерностей данных и параметров сверточной нейронной сети

Слой	Кол-во ДН	Размерность слоя (СН,Н,W)	Данные (СН,Н,W)
Input	–	–	(5,21,21)
Conv2d	10	(5,3,3)	(10,21,21)
Conv2d	15	(10,3,3)	(15,21,21)
Conv2d	20	(15,3,3)	(20,21,21)
Conv2d	40	(20,3,3)	(40,21,21)
ConvT2d	40	(40,21,21)	(40, 41, 41)
ConvT2d	40	(40,21,21)	(40, 61, 61)
ConvT2d	40	(40,21,21)	(40, 81, 81)
ConvT2d	40	(40,21,21)	(40, 101, 101)
ConvT2d	40	(40,21,21)	(40, 121, 121)
Conv2d	20	(40,3,3)	(20, 121,121)
Conv2d	15	(20,3,3)	(15,121,121)
Conv2d	10	(15,3,3)	(10,121,121)
Conv2d	2	(10,3,3)	(2,121,121)
Output	–	–	(2,121,121)

Продемонстрированная модель призвана решать задачу обработки тензоров данных, состоящих из нескольких матриц фиксированного размера, увеличивая их пространственный размер в несколько раз, используя алгоритмы экстраполяции данных по высоте и ширине. В результате прохождения информации через предложенную модель будем получать тензоры более высокой размерности, значения которых будут представлять прогнозные значения коэффициентов на виртуальных излучателях, которые могли бы быть получены в процессе активного зондирования области ЦАР с апертурой большего размера.

Для обучения модели будем генерировать обучающую выборку зашумленных сигналов  $C$  на реальной апертуре и моделируемых сигналов  $\tilde{C}$  на большой апертуре, как множество пар входов-выходов для предложенной сверточной модели нейронной сети (рис. 2).

Для оценки ошибок экстраполяции двумерного сигнала будем использовать функцию потерь среднего квадрата ошибок  $MSE(x, y)$  (*mean squared error*), оцениваемую по формуле

$$(12) \quad MSE(\tilde{C}, \hat{C}) = \frac{1}{4KL + 2(K + L) + 1} \cdot \sum_{k=-K}^K \sum_{l=-L}^L (\tilde{C}_{k,l} - \hat{C}_{k,l})^2.$$

Дополнительно оценим метрику **SSIM** (*structure similarity*, или структурная схожесть) [18], оценивающую степень визуального и структурного сходства информации для генерируемого и реального двумерного изображения в некоторых малых окнах. Метрика SSIM сравнивает окна изображений по яркости  $l(x, y)$ , контрастности  $c(x, y)$  и структуре  $s(x, y)$  в виде суммы:

$$(13) \quad SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)},$$

где  $x, y$  – генерация и реальное двумерное изображение;  $\mu_x, \mu_y$  – средние значения амплитуды окон из изображений  $x$  и  $y$ ;  $\sigma_x, \sigma_y$  – стандартные отклонения амплитуд в окнах;  $\sigma_{xy}$  – ковариация между окнами  $x$  и  $y$ ;  $c_1 = 0,01 \cdot 255$ ,  $c_2 = 0,03 \cdot 255$  – константы.

Итоговое значение SSIM рассчитывается по принципу скользящего окна некоторого размера по двум изображениям с одинаковой глубиной, в результате чего полученные значения схожести усредняются. В нашей задаче данную метрику мы будем применять для оценки схожести амплитуд сигналов двумерного предсказания  $\hat{C}_{k,l}^j$  и моделируемого случая принятого сигнала на ЦАР с большим количеством устройств  $\tilde{C}_{k,l}^j$ .

Обучение параметров модели будем производить с помощью градиентного метода оптимизации *Adam* [12], минимизируя среднеквадратическую ошибку модели (12). Метод оптимизации *Adam* совершенствует классический метод стохастическо-

го градиентного спуска, вводя пересчет градиентов на основе экспоненциального скользящего среднего градиентов и квадратов градиентов, оценивая таким образом среднее значение импульса и вариабельности направления изменения параметров и находя локальный минимум за меньшее число шагов.

## 5. Результаты моделирования

Процесс обучения состоял в итеративной подаче на вход сверточной модели пакетов данных принятых сигналов  $C_{n,m}^j$ ,  $j = 1, \dots, b$ , где  $b = 50$  – количество данных в пакете, для различных случайных вариантов расположений объектов в малом угловом разрешении. Модели для решения задачи регрессии также предоставлялись смоделированные эталонные значения  $\tilde{C}_{k,l}^j$  принятых сигналов на ЦАР с большим размером апертуры, соответствующих тем же расположениям моделируемых объектов. Каждую эпоху модели предоставлялся список сгенерированных двумерных карт входов и выходов, рассчитанных по модели (6) для 100 различных пакетов вариантов взаимного расположения объектов по (10). На каждой эпохе модель также только оценивала промежуточное качество на проверочной выборке, состоящей из 1000 случайно сгенерированных и не обновляемых каждую эпоху вариантов пар двумерных карт входов и выходов, полученных по тому же правилу. Модель обучалась на протяжении 50 эпох, минимизируя функцию (12). Итого размер выборки для обучения составляет  $J = 50000$  различных уникальных вариантов взаимного расположения трех целей. Выбранная начальная скорость обучения модели –  $lr = 5 \times 10^{-4}$ . График динамики минимизируемой метрики качества в процессе обучения модели представлен на рис. 3.

На графике показаны итоговые графики динамики значений метрики (12) на обучающей  $MSE_{train}$  (штриховая линия) и проверочной выборке  $MSE_{val}$  (сплошная).

Финальные результаты по величинам метрик средней ошибки (12) составляют значения  $MSE_{train} \approx 0,076$  на обучающей

выборке, и  $MSE_{val} \approx 0,078$  на проверочной выборке. Ввиду полученных результатов можно судить о стабильном обучении модели и отсутствии переобучения, поскольку в динамике средних метрик по эпохам отсутствует визуально значимый рост значений  $MSE_{val}$  по сравнению с  $MSE_{train}$ . Также отметим достаточно большую разницу между значением метрики на первой и последней эпохе.

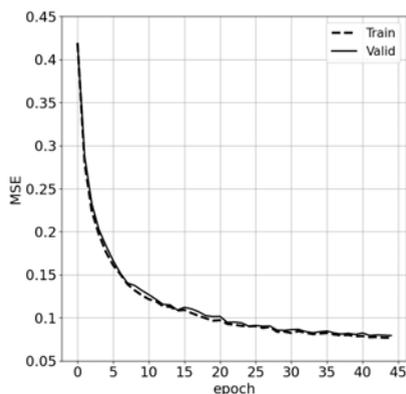


Рис. 3. График динамики качества работы модели

Архитектура модели и процесс обучения были реализованы с использованием фреймворка PyTorch языка программирования Python 3. Модель обучалась на персональном компьютере с шестиядерным процессором Intel core i5-10400f в связке с графическим ускрителем Nvidia RTX 3060Ti с 8Гб оперативной памяти под управлением WSL2 с операционной системой Ubuntu Server 22.04. Процесс обучения на графическом процессоре занял  $2,5 \times 10^4$  с, или порядка 7 часов реального времени.

Качество работы модели было протестировано на отложенной выборке только входных сигналов с тремя объектами, расположенными внутри области, определяемой физическим ограничением разрешения исходной малой апертуры ЦАР.

Для визуальной оценки качества экстраполяции значений принятого зашумленного сигнала на реальной ЦАР обученной

моделью визуализируем несколько результатов экстраполяции на рис 4. Представленные графические представления по строкам сетки изображений показывают результаты экстраполяции для различных вариантов взаимного расположения целей в угломерном пространстве в пределах ширины диаграммы приема до половинной мощности реальной решётки.

На графиках сверху вниз показаны сравнительные результаты: во второй колонке экстраполяции сигналов по исходным значениям в первой колонке и в третьей колонке представлены идеальные значения, которых мы хотели бы в идеальном случае достичь по модели (6) для апертуры большего размера.

Графики представляют собой двумерную плоскую столбчатую диаграмму значений коэффициентов рассчитанной матрицы действительных значений сигнала на различных вариантах размеров апертуры. По оси абсцисс и ординат на всех графиках показаны порядковые номера устройств, расположенных в двумерной решетке друг относительно друга на расстояниях  $d_x, d_y$ , указанных ранее в постановке задачи. Цветом от белого до черного показаны возрастающие значения принятых сигналов на устройствах.

Первая строчка результата показывает рассчитанные значения коэффициентов для сигнала (10), представленного тремя объектами, расположенными на одной оси по вертикали ( $\beta = 0$ ) с разными значениями расположениями объектов друг относительно друга с координатами по горизонтали, отстоящими друг от друга на величину в треть ширины диаграммы приема реальной решетки  $(\alpha/(3\delta\alpha), 0), (0, 0), (-\alpha/(3\delta\alpha), 0)$ . Заметим, что экстраполяция структурно совпадает с идеальной, но существуют мелкие искажения в особенности на границах. Для остальных представленных сравнений (строка 2, 3, 4) можно сделать схожий вывод.

Далее на основе полученных результатов построим графическую оценку качества решения задачи экстраполяции на основе графиков ошибок восстановления идеального сигнала на апертуре большего размера для сценария сближающихся целей.

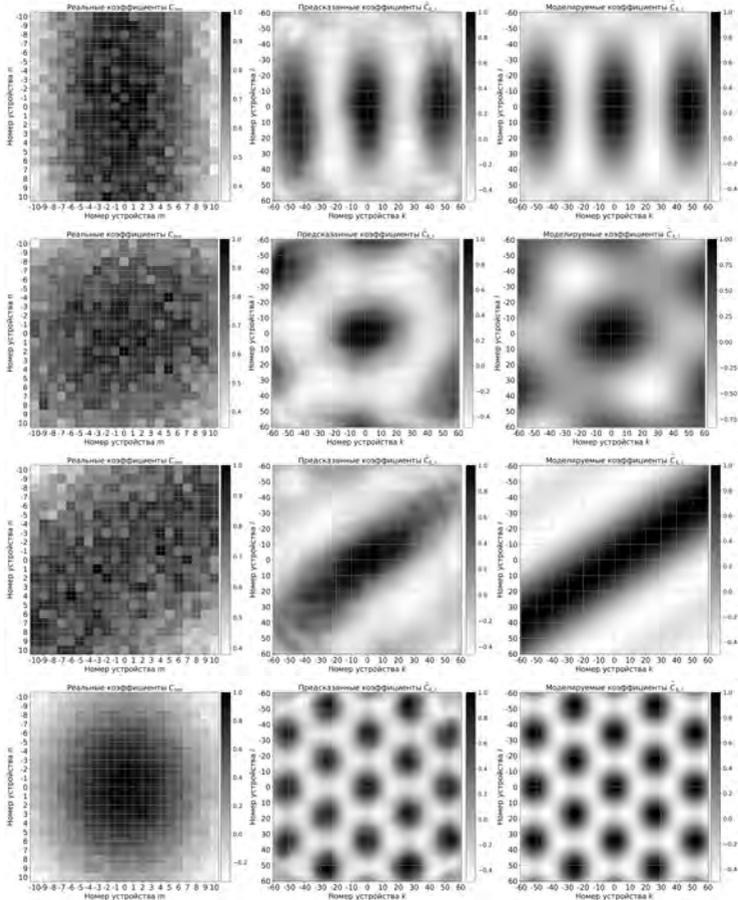


Рис. 4. График пространственных данных интенсивности действительных значений коэффициентов принятого сигнала на приемных устройствах  $C_{n,m}$  для реальной апертуры и зашумленных данных (первая колонка),  $\hat{C}_{k,l}$  для экстраполяции за пределы апертуры (вторая колонка) и  $\tilde{C}_{k,l}$  для модельных значений коэффициентов на большой апертуре (третья колонка)

Для оценки качества работы модели при сближающихся целях построим график (рис. (5)) с отображением метрик (12)–(13),

а также смежных метрик среднего отклонения по модулю ( $MAE$ ) и гибридной функции ошибок  $Huber$  [17].

На рис. 5 показаны значения метрик при увеличивающихся расстояниях между объектами в двумерном пространстве в относительных угловых величинах в единицах диаграммы приема до половинной мощности реальной апертуры. С помощью вертикальной штрих-пунктирной линии отмечено теоретическое ограничение в виде ширины диаграммы приема апертуры с виртуальными источниками излучения. Линиями на графике указаны значения метрик ошибок экстраполяции сигналов по сравнению с теоретически возможным результатом большей апертуры по (6) с моделируемыми распределениями сигналов источников (10).

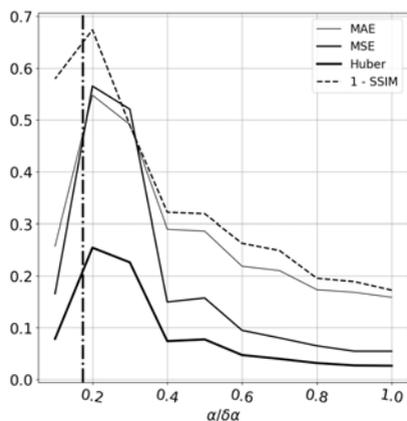


Рис. 5. Метрики качества в зависимости от расстояния между объектами

Сплошной тонкой линией зависимости указаны значения метрики  $MAE$  среднего отклонения значений коэффициентов по модулю, средней толщины линией указаны значения  $MSE$  (12), сплошной толстой линией показана зависимость гибридной метрики  $Huber$  по мере сближения целей, а также штриховой линией визуализированы значения обратной метрики  $1 - SSIM$ , которые изменяются в диапазоне от 0 до 1, где минимальное значение показывает на максимальную структурную схожесть экстраполя-

ции и идеальных значений, а максимальное – на полное различие результата и теоретической зависимости.

Покажем качество восстановления принятого сигнала  $\widehat{U}(\alpha, \beta)$  на основе которого в дальнейшем планируется принятие решения о положении объектов в угломерной развертке. Отобразим результат вычисления принятого сигнала по найденным в результате двумерной экстраполяции моделью  $G$  значений коэффициентов  $\widehat{C}_{k,l}$  на излучателях за пределами реальной апертуры.

Рассмотрим сценарий постепенно сближающихся целей с расстояния ширины диаграммы приема до половинной мощности реальной апертуры друг относительно друга и вплоть до расстояния в пределах теоретической ширины диаграммы приема виртуальной экстраполированной апертуры. На рис.6 показаны результаты вычисления принятого сигнала  $\widehat{U}(\alpha, \beta)$  в сценарии сближающихся целей.

На рис. 6 показано 4 варианта (сверху вниз) расположения объектов в двумерном угломерном пространстве. Мощность сигнала от всех источников моделируется одинаковой и большей, чем мощность шума.

Первая колонка графиков показывает линии уровня принятого сигнала  $U(\alpha, \beta)$ , рассчитанного для реальной апертуры ЦАР. Графики отображены по осям в величинах углов, выраженных в относительных единицах ширины ДН до половинной мощности реальной ЦАР. Белый цвет указывает на низкую интенсивность сигнала в точке пересечения углов развертки, в то время как затеняющиеся области указывают на увеличивающиеся амплитуды сигнала, вплоть до максимальной в виде черного цвета.

Вторая колонка графиков демонстрирует также линии уровня принятого сигнала  $\widehat{U}(\alpha, \beta)$ , рассчитанного для предсказанных коэффициентов за пределами реальной апертуры в тех же обозначениях, что и в первой колонке, а третья колонка графиков показывает истинное расположение моделируемых точечных объектов в угломерном пространстве.

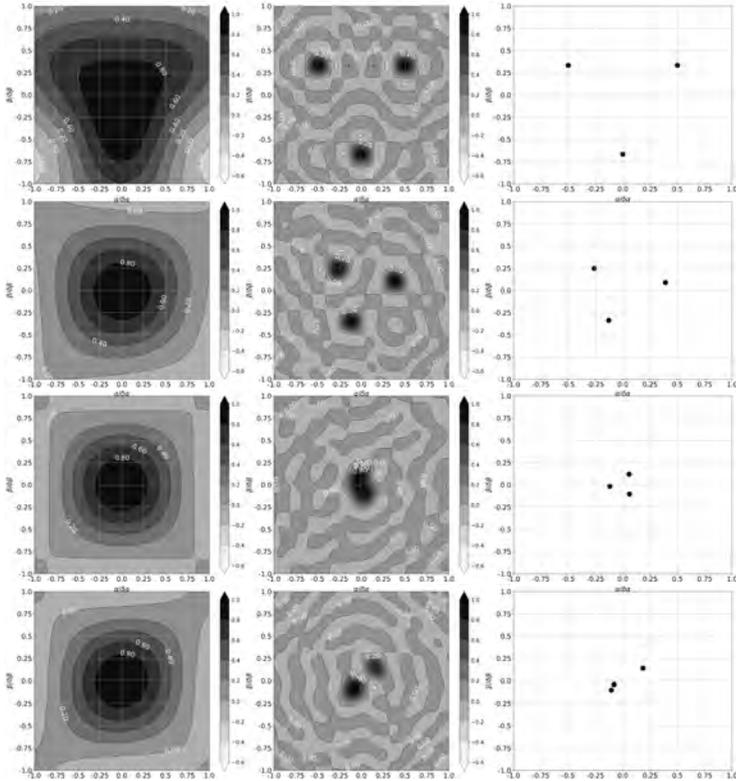


Рис. 6. График линий уровня функции двух переменных  $U(\alpha, \beta)$  реальной апертуры (первая колонка) и  $\hat{U}(\alpha, \beta)$  виртуальной апертуры (вторая колонка) при различных вариантах расположения объектов, генерирующих сигнал  $I(\alpha, \beta)$  (третья колонка)

На визуализациях (рис. 6) можем отметить следующие особенности работы модели. Первая особенность заключается в хорошей локализации точечных целей в точках центров главных лепестков рассчитанного сигнала. Вторая особенность заключена в относительно близком моделировании теоретической ширины диаграммы приема виртуальной апертуры, меньшей, по графической оценке, как минимум в 4 раза, что видно в единицах исходной ширины ДН реальной апертуры. Третья особенность мо-

делирования сигнала по экстраполированным значениям заключается в хорошем разрешении сливающихся целей в точном соответствии с теоретическими оценками для функционирования системы с такой же конфигурацией и числом излучателей. Из графиков (рис. 6) также отметим, что виртуальная ЦАР разрешает объекты в меньшем угловом пространстве по сравнению с реальной ЦАР с достоверным расположением.

Отдельно рассмотрим ситуацию двух разрешимых скопленных объектов в случае, если имеется группа близких объектов и один удаленный в пределах ширины ДН исходной ЦАР. Данная модельная ситуация показана на рис. 6 в последней серии графиков. Отметим, что в данном случае расчет сигнала по коэффициентам показывает увеличенную интенсивность общего сигнала для группы сливающихся объектов и меньшую выделенную интенсивность принятого сигнала для удаленного объекта, что еще является разрешимым случаем.

Полученные результаты демонстрируют отличное качество разрешения объектов в пространстве, позволяя превысить исходных показатель пространственного углового разрешения реальной апертуры как минимум в 4 раза. Также показано, что не идеальные прогнозы при решении задачи экстраполяции с применением сверточной нейронной сети могут быть использованы при расчете принятого сигнала с большим успехом и вносить лишь минимальные искажения без потери качества разрешения объектов.

Предлагаемый метод решения задачи сверхразрешения объектов в двумерном угловом пространстве отличается от классических подходов в том, каким образом обрабатывается поступающий сигнал на систему детекторов, и может быть использован совместно с такими методами, как MUSIC [11] и ESPRIT [24] для уточнения углов направления прихода отраженного сигнала от объектов. Стоит отметить, что показанные результаты не являются конкурирующими с классическими алгоритмами, а представляют лишь дополнительные возможности для уточнения полученных результатов и модификации методов разрешения объ-

ектов для устройств с низкой разрешающей способностью.

Недостатком предлагаемого подхода является необходимость привязки алгоритма и его обучение на заранее выбранной архитектуре двумерной ЦАР с фиксированными параметрами излучателей и их взаимным расположением.

## **6. Заключение**

В данной статье были исследованы методы дистанционного зондирования объектов с использованием цифровых антенных решёток и предложен подход, основанный на применении нейронных сетей для повышения углового разрешения системы. Представленная модель демонстрирует способность существенно улучшать пространственное разрешение ЦАР, превышая исходные показатели реальной апертуры как минимум в четыре раза. Это достигается посредством экстраполяции данных по высоте и ширине, что позволяет получать прогнозные значения коэффициентов на виртуальных излучателях, эквивалентных увеличенной апертуре.

Качество работы модели было подтверждено с помощью метрики структурной схожести, показывающей высокую степень визуального и структурного соответствия между сгенерированными и реальными изображениями. Полученные результаты демонстрируют, что даже при наличии неидеальных прогнозов применение сверточной нейронной сети позволяет минимизировать искажения без потери качества разрешения объектов.

Однако недостатком данного подхода является необходимость обучения модели на заранее выбранной архитектуре двумерной ЦАР с фиксированными параметрами количества излучателей и их взаимным расположением. В данной работе продемонстрирована возможность работы модели с количеством целей до трех включительно в пределах диаграммы приема двумерной системы до половинной мощности. Для большего числа целей работа построенной модели не тестировалась. В будущем планируется исследовать возможности адаптации алгоритма к различным конфигурациям ЦАР и условиям работы.

Таким образом, разработанный метод способствует преодолению ограничений, обусловленных физическими размерами антенны, и открывает новые перспективы в области дистанционного зондирования с использованием цифровых антенных решёток.

### Литература

1. АВТАНИ Т. et al. *Accelerating convolutional neural network with FFT on embedded hardware* // IEEE Trans. on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems. – 2018. – Vol. 26, No. 9. – P. 1737–1749.
2. AGARAP A.F. *Deep learning using rectified linear units (relu)* // ArXiv preprint. – 2018. – DOI: arXiv:1803.08375.
3. ALMEIDA M.S., FIGUEIREDO M.A. *Deconvolving Images with Unknown Boundaries Using The Alternating Direction Method Of Multipliers* // IEEE Trans. Image Process. – 2013. – Vol. 22, No. 8. – P. 3074–3086.
4. BOWEN R. S., CHANG H., HERRMANN C. et al. *OCONet: Image Extrapolation by Object Completion* // IEEE CVF Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Nashville, TN, USA, – 2021. – P. 2307–2317. – DOI: 10.1109/CVPR46437.2021.00234.
5. CANDÉS E.J., FERNÁNDEZGRANDA C. *Super-Resolution from Noisy Data* // Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2013. – Vol. 19, No. 6. – P. 1229–1254.
6. DA WANG Y., ARMSTRONG R., MOSTAGHIMI P. *Super resolution convolutional neural network models for enhancing resolution of rock micro-ct images* // ArXiv preprint. – 2019. – DOI: arXiv:1904.07470.
7. DUDIK M., PHILLIPS S.J., SCHAPIRE R.E. *Maximum Entropy Density Estimation with Generalized Regularization and an Application to Species Distribution Modeling* // Journal of Machine Learning Research. – 2007. – No. 8. – P. 1217–1260.

8. ELASRI M., ELHARROUSS O., AL-MA'ADEED S. et al. *Image Generation: A Review* // Neural Processing Letters. – 2022. – Vol. 54, No. 5. – DOI: 10.1007/s11063-022-10777-x.
9. FARTOOKZADEH M. *Frequency diverse arrays (FDAs) vs. phased arrays: On the application of FDAs for secure wireless communications* // ArXiv preprint. – 2020. – DOI: arXiv:2004.08585.
10. GOODFELLOW I. et al. *Generative adversarial nets* // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2014. – Vol. 27.
11. HU YI-DING, DENG WEI-YAO, WU GU-XIN et al. *A wideband MUSIC algorithm using an improved empirical wavelet transform* // Measurement Science and Technology. – 2024. – Vol. 36, No. 1. – DOI: 10.1088/1361-6501/ad9516.
12. KINGMA D.P. *Adam: A method for stochastic optimization* // ArXiv preprint. – 2014. – DOI: arXiv:1412.6980.
13. LAGOVSKY B.A. *Superresolution by Extrapolation for Solving Remote Sensing Problems* // 25th Int. Crimean Conf. “Microwave and Telecommunication Technology”. Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 2. – P. 1144–1146.
14. LEDIG C. et al. *Photo-realistic single image super-resolution using a generative adversarial network* // Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2017. – P. 4681–4690.
15. LIU WANLI. *Super resolution DOA estimation based on deep neural network* // Scientific Reports. – 2020. – Vol. 10, No. 1. – DOI: 10.1038/s41598-020-76608-y.
16. LU Y., GUAN H., YANG K. et al. *Improving the Accuracy of Direction of Arrival Estimation with Multiple Signal Inputs Using Deep Learning* // Sensors (Basel). – 2024. – Vol. 24, No. 10. – P. 2971–2982. – DOI: 10.3390/s24102971.
17. MALEKZADEH P. et al. *A Robust Quantile Huber Loss with Interpretable Parameter Adjustment in Distributional Reinforcement Learning* // ICASSP 2024-2024 IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP). – IEEE,

2024. – P. 6120–6124.
18. NILSSON J., AKENINE-MILLER T. *Understanding ssim* // ArXiv preprint. – 2020. – DOI: arXiv:2006.13846.
  19. O'SHEA K. *An introduction to convolutional neural networks* // ArXiv preprint. – 2015. – DOI: arXiv:1511.08458.
  20. PRATT H. et al. *Fcnn: Fourier convolutional neural networks* // Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases: European Conf. – ECML PKDD 2017, Skopje, Macedonia, September 18–22, 2017, Proceedings, Part I 17. – Springer International Publishing. – 2017. – P. 786–798.
  21. RONNEBERGER O., FISCHER P., BROX T. *U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation* // Medical image computing and computer-assisted intervention–MICCAI 2015: 18th Int. Conf. – Munich, Germany, October 5-9, 2015, proceedings, part III 18. – Springer International Publishing, –2015. – P. 234–241.
  22. SHCHUKIN A.A., PAVLOV A.E. *Parameterization of User Functions in Digital Signal Processing for Obtaining Angular Superresolution* // Russian Technological Journal. – 2022. – Vol. 10, No. 4. – P. 38–43.
  23. TAN W.Q., HOU Y.G. *Estimation Of Direction Of Source Arrival Based upon MUSIC and Capon* // Journal of Nanchang Institute of Technology. – 2008. – Vol. 27, No. 1. – P. 20-23.
  24. TANG ZH., ZHOU K., XU Y. et al. *An Estimation Method for Soft Fault Reflection Coefficient of Power Cable Based on Sliding-Window TLS-ESPRIT* // IEEE Trans. on Power Delivery. – 02.10.2024. – Vol. 39, No. 6. – P. 3092–3100. – DOI: 10.1109/TPWRD.2024.3452779.
  25. TIKHONOV A.N., ARSENIN V.YA. *Methods of solving ill-posed problems* // – Moscow.: Nauka, 1974
  26. UZUN I.S., AMIRA A., BOURIDANE A. *FPGA implementations of fast Fourier transforms for real-time signal and image processing* // IEEE Proc. on Vision, Image and Signal Processing. – 2005. – Vol. 152, No. 3. – P. 283–296.

27. WU LIU-LI, LIU ZHANG-MENG, HUANG ZHI-TAO. *Deep Convolution Network for Direction of Arrival Estimation With Sparse Prior* // IEEE Signal Processing Letters. – 2019. – Vol. 26, No. 11. – P. 1688–1692. – DOI: 10.1109/LSP.2019.2945115.
28. ZEILER M., KRISHNAN D., TAYLOR G. et al. *Deconvolutional networks* // Proc. of the IEEE Computer Society Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. – 05.08.2010. – P. 2528–2535. – DOI: 10.1109/CVPR.2010.5539957.
29. ZHOU S., JIANG L. *Modern description of Rayleigh's criterion.* // Physical Review A. – 2018. – Vol. 99. No. 1. – DOI: 10.1103/PhysRevA.99.013808.

## **METHOD OF SIGNAL EXTRAPOLATION ON TWO-DIMENSIONAL ANTENNA SYSTEM USING DEEP NEURAL NETWORK ALGORITHMS TO SOLVE THE SUPER-RESOLUTION PROBLEM**

**Evgeny Rubinovich**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (Moscow, Profsoyuznaya st., 65, rubinvch@gmail.com).

**Ivan Yurchenkov**, Russian Technological University, Moscow, graduate student (yurchenkov@mirea.ru).

**Vladimir Nazarkin**, Russian Technological University, Moscow, graduate student (vovannazark89@mail.ru).

*Abstract: The article deals with methods of remote sensing of objects using digital antenna arrays (DAA). This approach allows obtaining information about objects without direct physical contact by analyzing the radiation reflected or emitted by them. The features of the formation of the directional pattern (DN) of a DAA consisting of a two-dimensional flat rectangular array of radiating elements are described. The mathematical model of the DN of an individual radiator and the system as a whole is presented taking into account the wave number, the distance between the elements and scanning angles. Special attention is paid to the limitations of the resolving power of the system due to the Rayleigh criterion and related to the linear dimensions of the antenna. In the region of small angular deviations the model components are approximated, which simplifies the calculation, but limits the possibility of distinguishing closely located sources. The problem arises of digital processing of the received signals to increase the angular resolution of the system. The article discusses methods and algorithms based on deep neural networks, aimed at overcoming these limitations and improving the quality of acquired images in remote sensing using DAA. The article demonstrates qualitative results of the proposed solution on the DAA with fixed parameters. Examples of the work of the considered algorithm are shown visually.*

**Keywords:** angular super-resolution, convolutional neural networks, digital antenna array, Rayleigh criterion, extrapolation.

УДК 537.86

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.А. Галяевым.*

*Поступила в редакцию 04.12.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*

## РАСЧЕТ ОПТИЧЕСКОГО ПОТОКА ЛУКАСА – КАНАДЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ТЕОРЕМ ОТСЧЕТОВ

Фархадов М. П.<sup>1а</sup>, Теплухин Р. Г.<sup>2б</sup>, Абраменков А. Н.<sup>3а</sup>,  
Абдулов А. В.<sup>4а</sup>, Лычков И. И.<sup>5б</sup>

(<sup>а</sup> ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; <sup>б</sup> ФГБОУВО  
Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана (национальный исследовательский  
университет), Москва)

*Рассмотрен расчет оптического потока Лукаса – Канаде с применением конечномерных теорем отсчетов на основе преобразования Фурье. Данный расчет учитывает все пиксели изображения на этапе вычисления производных изображения и потенциально может обеспечить высокую точность вычисления оптического потока. Предложен гибридный метод расчета производной, сочетающий результаты метода конечномерных теорем отсчетов с результатами оператора Щаара для повышения точности расчета оптического потока. Приведены результаты экспериментов по расчету оптического потока с использованием метода конечномерных теорем отсчетов и гибридного метода на реальных видеопотоках. Установлено, что применение метода конечномерных теорем отсчетов позволяет повысить точность расчета оптического потока на видео со слабым освещением и затененными областями. Полученные результаты могут быть применены в различных задачах компьютерного зрения, например, для отслеживания движущихся объектов.*

Ключевые слова: оптический поток Лукаса – Канаде, оператор Щаара, оператор градиента Гаусса, дискретное преобразование Фурье, дифференцирование цифрового изображения.

---

<sup>1</sup> Маис Паши Оглы Фархадов, д. т. н., с.н.с. (mais@ipu.ru).

<sup>2</sup> Рустам Геннадьевич Теплухин, студент (teplukhinrg@student.bmstu.ru).

<sup>3</sup> Александр Николаевич Абраменков, н.с. (aabramenkov@asmon.ru).

<sup>4</sup> Александр Викторович Абдулов, н.с. (aabdulov@asmon.ru).

<sup>5</sup> Игорь Игоревич Лычков, ст. преподаватель (lychkovi@bmstu.ru).

## **1. Введение**

Двадцать первый век характеризуется быстрым развитием технологий искусственного интеллекта, которые позволяют решать сложные задачи средствами вычислительной техники. Компьютерное зрение относится к области искусственного интеллекта и занимается распознаванием образов на цифровых изображениях и видеопотоках, включая регистрацию изображений, трехмерную реконструкцию сцены, визуальную одометрию, обнаружение, отслеживание и сегментацию движущихся объектов в видеопотоке, а также распознавание событий в видеопотоке. Вычисление перемещений отдельных пикселей изображения между последовательными кадрами видеопотока называется расчетом оптического потока и является важным этапом во многих алгоритмах компьютерного зрения.

Методы на основе искусственных нейронных сетей обеспечивают наивысшие показатели точности расчета оптического потока [21], однако они характеризуются большим объемом вычислений и требуют использования высокопроизводительных серверов с большой массой и габаритами для решения задач реального времени. Существуют также методы на основе облегченных архитектур нейронных сетей [14, 24], которые могут работать на мобильных устройствах, однако они заметно проигрывают в точности расчетов. Ввиду указанных обстоятельств актуальными остаются методы расчета оптического потока на основе классических подходов цифровой обработки сигналов [4, 25]. Они характеризуются умеренным объемом вычислений и обеспечивают приемлемую точность вычислений, что позволяет использовать их во встраиваемых системах управления с автономным питанием, имеющих малую массу и габариты.

Наиболее популярным классическим методом расчета оптического потока является метод оптического потока Лукаса – Канаде [6]. Он используется в современных алгоритмах визуальной одометрии [12, 17] для управления движением мобильных роботов в автономном режиме. Первым этапом данного метода является расчет производных цифрового изображения. В популярной открытой библиотеке алгоритмов компьютерного

зрения OpenCV [8] в реализации метода Лукаса – Канаде [6] для расчета производной используется оператор Щаара [20], но никаких формальных обоснований по этому поводу не приводится. Расчет производной дискретного сигнала сопряжен с усилением влияния шумов исходного сигнала на результат расчета и представляет собой плохо обусловленную вычислительную задачу, которая изучается до сих пор [11]. Публикаций по теме сравнения разных методов вычисления производной цифрового изображения применительно к задаче расчета оптического потока крайне мало [1]. В работе [23] приведено сравнение разных алгоритмов фильтрации изображения для расчета пирамиды изображения, однако в ней рассматривается только предварительная фильтрация изображения с целью понижения разрешения, но не для расчета производных изображения. Настоящая работа призвана дополнить существующие исследования в данной области.

Наиболее часто для расчета производных цифрового изображения в литературе используются операторы Собеля, Щаара и градиента Гаусса [15]. Оператор Собеля для расчета производной цифрового изображения в отдельном пикселе учитывает только окружающие его пиксели в малой окрестности размером  $3 \times 3$  пикселя и в большой степени подвержен влиянию шумов и сбойных значений отдельных пикселей, например, в условиях слабого освещения сцены.

Оператор Щаара в сравнении с оператором Собеля обладает лучшей пространственной изотропностью, однако он также учитывает лишь малую окрестность размером  $3 \times 3$  пикселя.

Оператор градиента Гаусса [15] может обрабатывать более широкую окрестность пикселя, выполняет размытие и более эффективно подавляет шумы на изображении, однако в конечном счете он учитывает только ограниченную область изображения.

В работе [2] был предложен метод расчета производной цифрового изображения на основе конечномерных теорем отсчетов. Данный метод основан на преобразовании Фурье и учитывает все пиксели изображения при вычислении производной в его отдельном пикселе. Данный метод использует больше ин-

формации по сравнению с операторами Собеля, Щаара и градиента Гаусса, за счет чего потенциально может обеспечивать высокую точность расчета оптического потока. Возможность применения метода конечномерных теорем отсчетов для вычисления производных цифрового изображения применительно к задаче расчета оптического потока Лукаса – Канаде мало изучена. По этой теме опубликована статья [1], однако в ней основная часть эксперимента проводилась на синтетических видеопотоках.

Целью настоящей работы является применение метода конечномерных теорем отсчетов для повышения точности расчета оптического потока Лукаса – Канаде на реальных видеопотоках.

Существует отдельное направление исследований, в которых для расчета производной цифрового изображения применяется математический аппарат дробной производной, т.е. производной дробного порядка [5]. Аналогично методу конечномерных теорем отсчетов, методы на основе дробной производной учитывают все пиксели цифрового изображения, поэтому потенциально могут получать высокую точность вычислений в условиях шумов и сбойных отсчетов. Дробная производная применяется в различных задачах компьютерного зрения, включая выделение границ объектов на изображении [3], фильтрацию шумов изображения [19], расчет оптического потока [22]. Известны модификации алгоритмов оптического потока Лукаса-Канаде [10, 13] и оптического потока Хорна – Шунка [16] для дробной производной. Однако современные методы расчета дробной производной по Капуто и по Капуто – Фабрицио [9] предполагают выполнение предварительного расчета обычной производной цифрового изображения, например, в работе [16] для этого используется локальный оператор дифференцирования с маской размером  $1 \times 5$  пикселей. Настоящая работа призвана повысить точность расчета обычной производной цифрового изображения за счет нелокального подхода к дифференцированию, таким образом, её результаты можно использовать и для развития методов компьютерного зрения, использующих дробную производную.

Остальная часть статьи организована следующим образом. Раздел 2 представляет методику и результаты эксперимента по применению метода конечномерных теорем отсчетов для вычисления оптического потока на наборе данных KITTI (Karlsruhe Institute of Technology and Toyota Technological Institute) Vision Benchmark Suite [18]. В разделе 3 предлагается гибридный метод расчета производной, который объединяет результаты метода конечномерных теорем отсчетов с результатами оператора Щаара для повышения точности расчета оптического потока. Раздел 4 представляет результаты эксперимента по применению предложенного гибридного метода для расчета оптического потока на наборе данных KITTI Vision Benchmark Suite, а также обсуждение полученных результатов.

## 2. Применение конечномерных теорем отсчетов

Для расчета производных цифрового изображения в литературе предлагаются операторы Собеля, Щаара и градиента Гаусса. Оператор Собеля для расчета производной цифрового изображения в отдельном пикселе учитывает только окружающие его пиксели в малой окрестности размером  $3 \times 3$  пикселя и в большой степени подвержен влиянию шумов и сбойных значений отдельных пикселей, например, в условиях слабого освещения сцены. Оператор Собеля реализуется на основе цифрового фильтра с маской, представленной в формуле (1):

$$(1) \quad Mx_s = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad My_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оператор Щаара реализуется цифровым фильтром с маской, представленной в формуле (2). Данный оператор используется для расчета производной изображения в реализации алгоритма оптического потока Лукаса – Канаде из открытой библиотеки OpenCV.

$$(2) \quad Mx_{Sh} = \begin{bmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & -10 & -3 \end{bmatrix}, \quad My_{Sh} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Плохо обусловленную задачу дифференцирования изображения можно заменить на хорошо обусловленную задачу дифференцирования свертки изображения с некоторой вспомогательной функцией. В качестве вспомогательной функции лучше всего выбрать функцию Гаусса, поскольку она является гладкой, самоподобной, линейно разделимой и инвариантной к повороту [7]. Оператор градиента Гаусса определяется формулами (4) и (5) для соответствующих осей, в которых под умножением подразумевается операция свертки; оператор основан на использовании функции Гаусса  $g(x, y)$  (3), может обрабатывать более широкую окрестность пикселя, выполняет размытие и более эффективно подавляет шумы на изображении, однако в конечном счете он учитывает только ограниченную область изображения.

$$(3) \quad g(x, y) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\left(\frac{x^2}{\sigma^2}\right)} \right) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right)} \right),$$

$$(4) \quad Mx_G(x, y) = F(x, y) * \frac{dg(x, y)}{dx},$$

$$(5) \quad My_G(x, y) = F(x, y) * \frac{dg(x, y)}{dy}.$$

В [1] было предложено использовать метод конечномерных теорем отсчетов для вычисления производной двумерного цифрового изображения в алгоритме расчета оптического потока Лукаса – Канаде.

Введем обозначения:  $x_{img}$  – значения пикселей входного сигнала;  $W$  и  $H$  – ширина и высота входного двумерного цифрового изображения;  $CA$  – комплексные компоненты спектра исходного двумерного цифрового изображения;  $k$  – индекс частоты;  $j$  – номер пикселя двумерного цифрового изображения.

Суть метода конечномерных теорем отсчетов заключается в применении прямого дискретного преобразования Фурье к входному изображению для получения его спектра (7) путем матричного умножения на матрицу гармоник, которая определяется формулой (6):

$$(6) \quad M_{harmonic}(k, j) = \left( \cos\left(\frac{2\pi kj}{W \cdot H}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{2\pi kj}{W \cdot H}\right) \right),$$

$$k = \overline{0, W-1}, \quad j = \overline{0, H-1},$$

$$(7) \quad CA = M_{harmonic} \times x_{img} \times M_{harmonic}^T.$$

Далее потребуются операторы дифференцирования в частотной области  $MD_x$  и  $MD_y$ , с правильными сопряженным симметриями, которые формируются по формулам (8) и (9). Данные операторы получаются из соображения о том, что операция взятия производной эквивалентна умножению спектра сигнала на  $i\omega$ , где  $i$  – мнимая единица,  $\omega$  – циклическая частота гармоники спектра. Под  $s, j, k$  в формулах (8) и (9) понимаются позиции анализируемой точки спектра вдоль соответствующей оси.

$$(8) \quad MD_x(s, j) = \begin{cases} \left(\frac{2i \cdot \pi}{W}\right) \cdot s, & s = 0, \overline{\frac{W}{2}-1}, j = \overline{0, H-1}, \\ -\left(\frac{2i \cdot \pi}{W}\right) \cdot (W-s), & s = \overline{\frac{W}{2}}, W-1, j = \overline{0, H-1}. \end{cases}$$

$$(9) \quad MD_y(k, s) = \begin{cases} \left(\frac{2i \cdot \pi}{H}\right) \cdot s, & s = 0, \overline{\frac{H}{2}-1}, k = \overline{0, W-1}, \\ -\left(\frac{2i \cdot \pi}{H}\right) \cdot (H-s), & s = \overline{\frac{H}{2}}, H-1, k = \overline{0, W-1}. \end{cases}$$

Вычисленные операторы дифференцирования поэлементно умножаются на спектр исходного двумерного цифрового изображения:

$$(10) \quad CA_x(k, j) = CA(k, j) \cdot MD_x(k, j), \quad k = \overline{0, W-1}, \quad j = \overline{0, H-1},$$

$$(11) \quad CA_y(k, j) = CA(k, j) \cdot MD_y(k, j), \quad k = \overline{0, W-1}, \quad j = \overline{0, H-1}.$$

Производные изображения  $Deriv_x$  и  $Deriv_y$  по соответствующим осям являются следствиями применения обратного дискретного преобразования Фурье к результатам предыдущего этапа (13) и (14) путем матричного умножения на матрицу интерполированных гармоник (12):

$$(12) \quad M_{Iharmonic}(k, j) = \left( \cos\left(\frac{2\pi kj}{W \cdot H}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi kj}{W \cdot H}\right) \right),$$

$$k = \overline{0, W-1}, \quad j = \overline{0, H-1},$$

$$(13) \quad Deriv_x = M_{Iharmonic}^T \times CA_x \times M_{Iharmonic},$$

$$(14) \quad Deriv_y = M_{Iharmonic}^T \times CA_y \times M_{Iharmonic}.$$

Общее значение градиента  $G$  для двумерного цифрового изображения рассчитывается как вектор, составленный из отдельных компонентов производных по осям абсцисс и ординат:

$$(15) \quad \vec{G}(k, j) = (Deriv_x(k, j), Deriv_y(k, j)),$$

$$k = \overline{0, W-1}, \quad j = \overline{0, H-1}.$$

Таким образом, предполагается улучшение точности расчета производной двумерного изображения в силу того, что расчет производной цифрового изображения с помощью преобразования Фурье не обладает выраженной локальностью вычислений по сравнению с применением оператора Щаара.

Используемая в данном разделе система отслеживания характерных точек основана на пирамидальной реализации алгоритма Лукаса – Канаде [6], требующей вычисления производных изображения.

Целью настоящей работы является сравнение результатов отслеживания при использовании оператора Щаара и преобразования Фурье для вычисления производных изображений. Исходя из вышеизложенного предполагается, что увеличение точности расчета производной увеличит качество отслеживания характерных точек на изображениях.

Исходная реализация алгоритма Лукаса – Канаде с оператором Щаара была взята из открытой библиотеки OpenCV [8]. Затем данная реализация была модифицирована путем замены

оператора Шаара на преобразование Фурье. Для проведения тестирования воспользуемся набором видеопоследовательностей KITTI Vision Benchmark Suite [18]. Данный набор предназначен для оценки алгоритмов, использующих оптический поток, включает в себя 200 видеопоследовательностей (по 2 изображения), снятых в условиях городской среды, и информацию о движении объектов. Разрешение каждого кадра видеопоследовательности составляет 375 на 1242 пикселя. Все видеопотоки сопровождаются файлами, содержащими рассчитанные значения оптического потока для каждого кадра. Они используются для расчета правильной траектории перемещения характерной точки.

На рис. 1 представлен первый кадр одной из видеопоследовательностей, с нанесенными на него точками синего цвета.

На рис. 2 представлены траектории перемещения точек видеопоследовательности. Синим цветом выделены эталонные траектории, зеленым – при использовании преобразования Фурье, красным – при использовании оператора Шаара.



*Рис. 1. Первый кадр видеопоследовательности*



*Рис. 2. Первый кадр видеопоследовательности  
(с траекториями перемещения точек)*

Перейдем к рассмотрению результатов работы алгоритмов на всех видеопоследовательностях набора данных. На рис. 3 и 4 (по оси ординат – количество видеопоследовательностей, по оси абсцисс – значения средних погрешностей отслеживания точек) представлены гистограммы распределения средних погрешностей отслеживания точек по количеству видеопоследовательностей в зависимости от выбранного метода расчета производной.

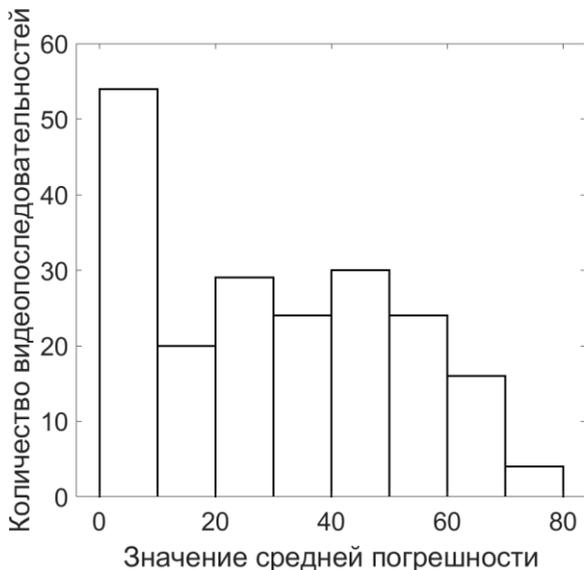


Рис. 3. Распределение средних погрешностей отслеживания точек при использовании преобразования Фурье

Средняя погрешность для видеопоследовательности  $EE$  рассчитывалась как среднее значение корня квадратного из суммы квадратов разностей, полученных значений координат точки с эталоном по всем пикселям (16), где  $V_i = (x_{i1}, y_{i1})$  – вычисленный вектор,  $V_{gi} = (x_{i2}, y_{i2})$  – эталонный вектор для  $i$ -го пикселя, а  $n$  – общее количество пикселей.

$$(16) \quad EE = \frac{\sum_{i=1}^n |V_i - V_{gi}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{(x_{i1} - x_{i2})^2 + (y_{i1} - y_{i2})^2}}{n}.$$

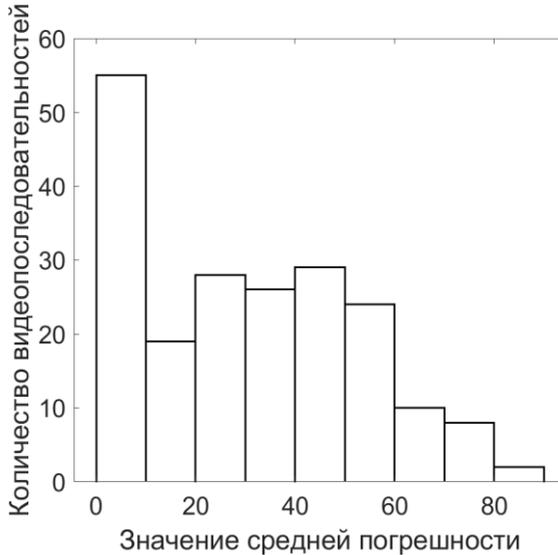


Рис. 4. Распределение средних погрешностей отслеживания точек при использовании оператора Щаара

На рис. 5 и 6 (по оси ординат – количество видеопоследовательностей, по оси абсцисс – количество потерянных точек при отслеживании) представлены гистограммы распределения потерянных при отслеживании точек по количеству видеопоследовательностей в зависимости от выбранного метода расчета производной.

Таким образом, в ходе проведенного эксперимента по определению точности реализованных алгоритмов расчета оптического потока с помощью оператора Щаара и преобразования Фурье были получены следующие результаты:

- для 98 пар видеопоследовательностей алгоритм с использованием преобразования Фурье дал более точные результаты перемещения пикселей, чем оператор Щаара;
- для 198 пар видеопоследовательностей алгоритм с использованием преобразования Фурье смог отследить большее или равное количество точек после их перемещения, чем оператор Щаара;

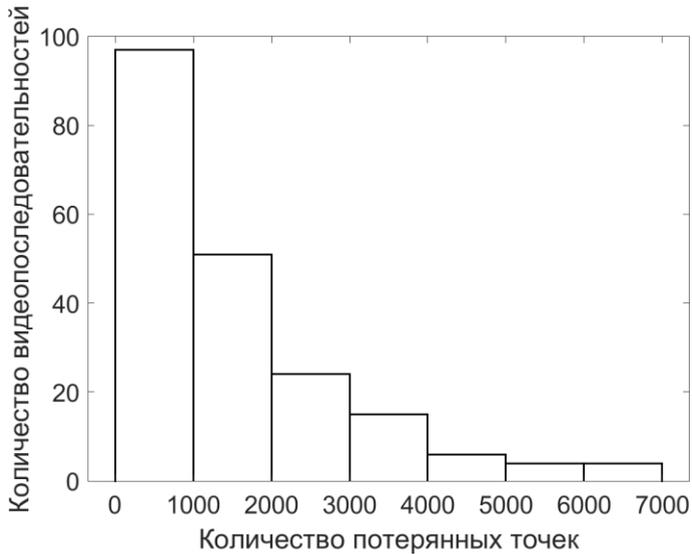


Рис. 5. Распределение количества потерянных точек при использовании преобразования Фурье

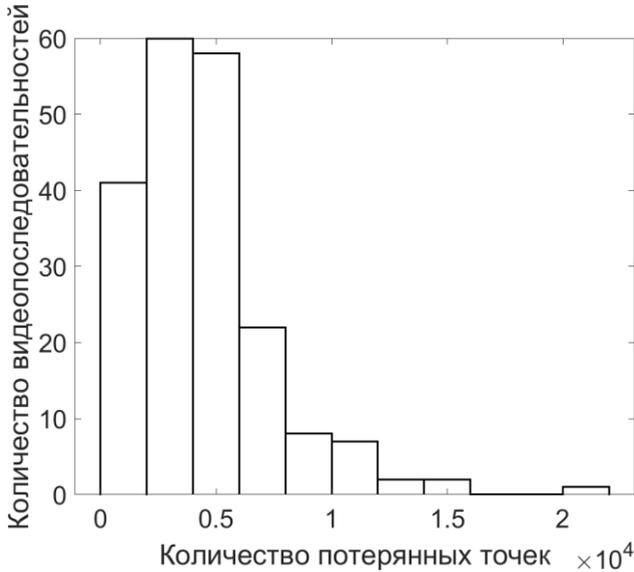


Рис. 6. Распределение количества потерянных точек при использовании оператора Щаара

– средний процент успешно отслеженных точек для алгоритма с использованием преобразования Фурье составил 98,39%, с оператором Щаара – 95,34%;

– среднее отклонение по всем парам видеопоследовательностей составило 30,38 при использовании преобразования Фурье и 30,67 при использовании оператора Щаара.

Результаты тестирования производительности алгоритмов при использовании преобразования Фурье и оператора Щаара представлены в таблице 1.

В строке 5 указано общее время выполнения программы и среднее время выполнения функции `calcOpticalFlowPyrLK()` в режиме Release (значения разделены знаком «/»). Значения в строках 2–4 получены путем вычисления среднего времени выполнения функции для 250 вызовов. В третьем столбце в строках 2–4 в скобках указано время выполнения прямого преобразования Фурье, перемножения спектра изображения на матрицу с правильной сопряженной симметрией и обратных преобразований Фурье.

Таким образом, использование преобразования Фурье увеличивает время вычисления оптического потока Лукаса – Канаде в 1,34 раза при отслеживании всех допустимых пикселей изображения. Однако данная проблема может быть решена путем аппаратного ускорения выполнения преобразования Фурье при расчете производной изображения.

Таблица 1. Тестирование производительности

	Оператор Щаара	Преобразование Фурье (ДПФ)
512 × 512 (мс)	1	10 (7)
1024 × 576 (мс)	1,4	21,9 (16,2)
1920 × 1080 (мс)	3,7	80,8 (63,8)
Обработка 200 пар кадров (мс)	97200 / 329	116134 / 440,5

По итогам проведенного тестирования алгоритмов отслеживания точек установлено, что использование преобразования Фурье в алгоритме расчета оптического потока Лукаса – Канаде

улучшает результат отслеживания точек на 1% для набора данных KITTI Vision Benchmark Suite [18].

Далее в статье предлагается улучшить результат использованием гибридного метода, который позволит комбинировать оператор Шцаара и преобразование Фурье при расчете значения производной.

### **3. Гибридный метод расчета производной цифрового изображения**

По гистограммам на рис. 3 и 4 видно, что использование преобразования Фурье дает преимущество по расчету траекторий перемещения для «плохо» отслеживаемых точек. К таким точкам можно отнести те, что располагаются на однотонных гладких поверхностях (например, стена, небо или асфальт). Оператор Шцаара, в свою очередь, лучше отслеживает точки с малыми перемещениями. Таким образом, гибридный метод расчета производной будет заключаться в выборе между преобразованием Фурье и оператором Шцаара в зависимости от условий освещения, градиентов яркости и других признаков для каждого пикселя изображения.

Результаты применения такого подхода при идеальном выборе метода на основании истинных значений перемещений пикселей для одной из видеопоследовательностей показаны в виде графиков средней погрешности и среднеквадратического отклонения на рис. 7 и 8.

Для анализа распределения погрешностей отслеживания среди точек изображения введем допустимый порог погрешности отслеживания. Рассмотрим подмножество точек изображения со значением погрешности отслеживания, не превышающей допустимый порог хотя бы для одного из двух методов. Вычислим среднее значение и среднеквадратическое отклонение координат точек рассмотренного подмножества. На рис. 7 и 8 по оси абсцисс откладывается величина допустимого порога погрешности отслеживания, а по оси ординат откладываются средние значения погрешности отслеживания или среднеквад-

ратические отклонения координат точек рассмотренного подмножества изображения.

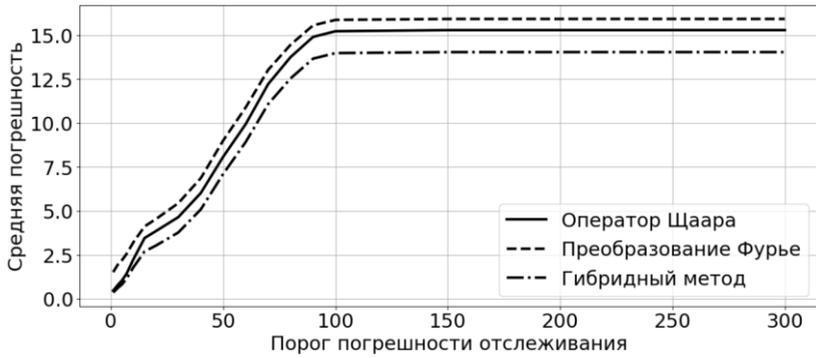


Рис. 7. Средние значения погрешности отслеживания точек при использовании гибридного метода

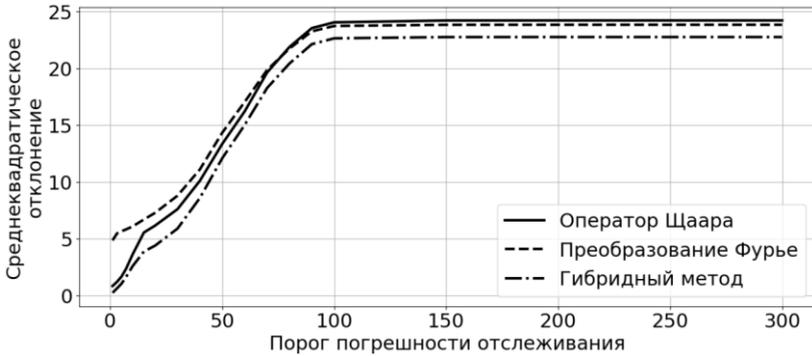
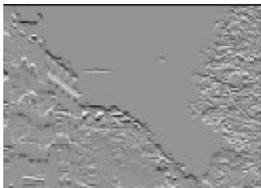
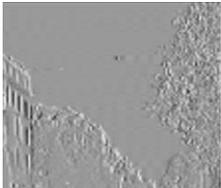
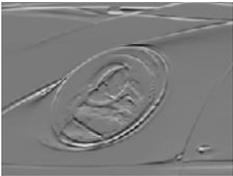
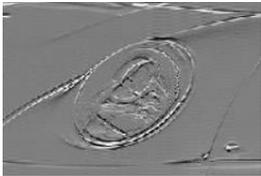


Рис. 8. Среднеквадратические отклонения отслеживания точек при использовании гибридного метода

Как видно из взаимного расположения графиков погрешностей, использование гибридного метода расчета производной изображения потенциально может улучшить результат отслеживания точек. При идеальном выборе метода расчета производной с наилучшей точностью можно получить повышение точности до 20%.

При расчете производной с помощью преобразования Фурье контрастные объекты на изображении могут отбрасывать полосы искажений, которые распространяются на однотонные области изображения в виде артефактов, показанных в таблице 2. Артефакты повышают точность расчета оптического потока изображения в однотонных областях, поскольку их перемещение повторяет перемещение контрастных объектов и дает подсказку об истинном направлении движения.

Таблица 2. Артефакты производной

	Оператор Шцаара	Преобразование Фурье (ДПФ)
Небо		
Асфальт		
Фара автомобиля		

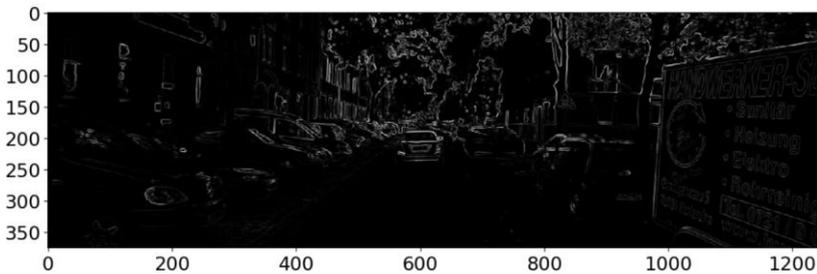
Таким образом, необходимо предусмотреть в гибридном алгоритме расчета производной проверку однотонности области изображения.

В качестве признака однотонности можно использовать дисперсию участка изображения. Необходимо вычислить ло-

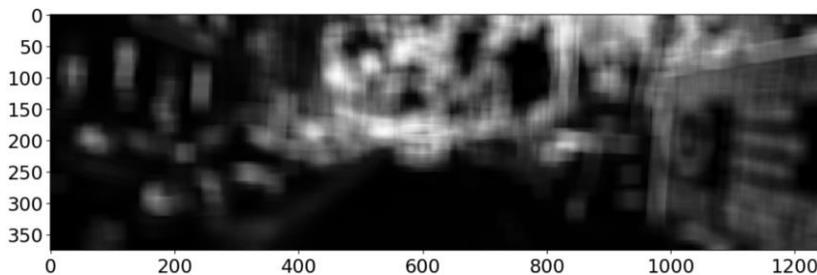
кальный показатель дисперсии для изображения производной, поскольку дисперсия производной лучше характеризует степень разнообразия изображения, нежели дисперсия исходных пикселей изображения (например, для изображения с резким черно-белым переходом яркости). Далее выполняется сглаживание полученного изображения дисперсии с помощью *box-фильтра*.

Значение пикселя сглаженной производной характеризует дисперсию исходного изображения в окрестности данного пикселя и является мерой однотонности этой окрестности. Чем меньше дисперсия, тем выше однотонность.

На рис. 9 и 10 показаны изображения вычисленной и сглаженной дисперсии для производной одного изображения из видеопоследовательности.



*Рис. 9. Дисперсия производной изображения*



*Рис. 10. Сглаженная дисперсия производной изображения*

Таким образом, получены правила выделения однотонных областей на изображении. В таких областях вычисления производной для каждого пикселя необходимо выполнять с помощью

преобразования Фурье. На рис. 11 показан результат нахождения точек изображения, расположенных в однотонных областях.

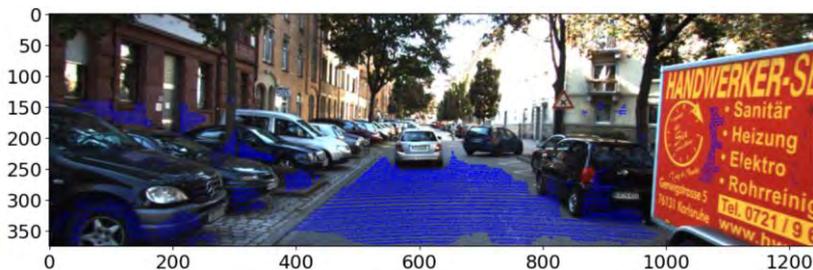


Рис. 11. Пример выделения однотонных областей

Применение правила однотонности, заключающегося в расчете производной с помощью преобразования Фурье при показателе дисперсии меньше 70, к видеопоследовательности, первый кадр которой приведен на рис. 11, позволило улучшить отслеживание точек в видеопоследовательности, что отражено на рис. 12 и 13 для среднего значения погрешности и средне-квадратического отклонения.

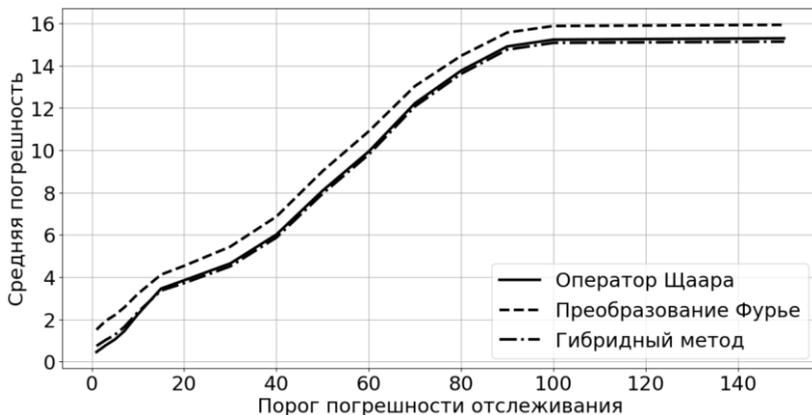


Рис. 12. Средние значения погрешности отслеживания точек при использовании гибридного метода, дополненного правилом однотонности

Из графиков видно, что гибридный метод стал работать лучше преобразования Фурье на низких погрешностях отслеживания, но все-таки немного хуже оператора Щаара.

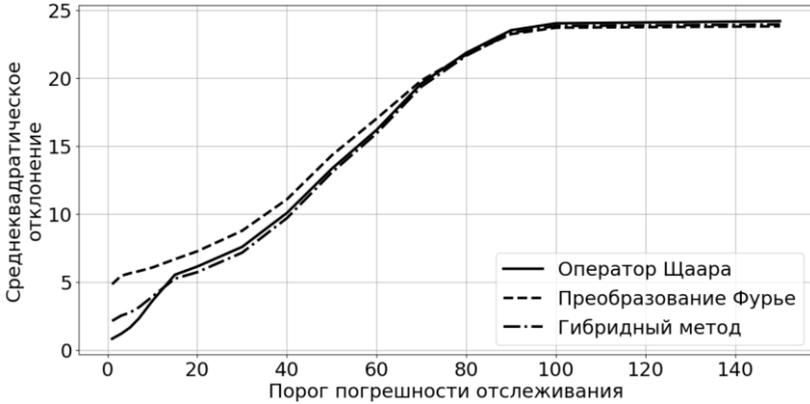


Рис. 13. Среднеквадратические отклонения отслеживания точек при использовании гибридного метода, дополненного правилом однотонности

Еще одним условием в гибридном методе является момент переключения между оператором Щаара и преобразованием Фурье при расчете значения производной изображения. На рис. 14 показан график зависимости среднего значения погрешности от порога погрешности отслеживания. Из него можно сделать вывод, что преобразование Фурье начинает превосходить оператор Щаара по средним показателям точности только на пикселях, которые отслеживаются обоими методами с большими погрешностями.

Точка перехода между преобразованием Фурье и оператором Щаара соответствует погрешности в 45 пикселей.

Отклонение перемещения пикселя при использовании оператора Щаара от перемещения пикселя при использовании преобразования Фурье можно рассматривать как меру оценки погрешности расчета перемещения этого пикселя при использовании оператора Щаара, что подтверждается графиком на рис. 15,

из которого видно, что данное утверждение выполняется не менее чем для 85% пикселей.

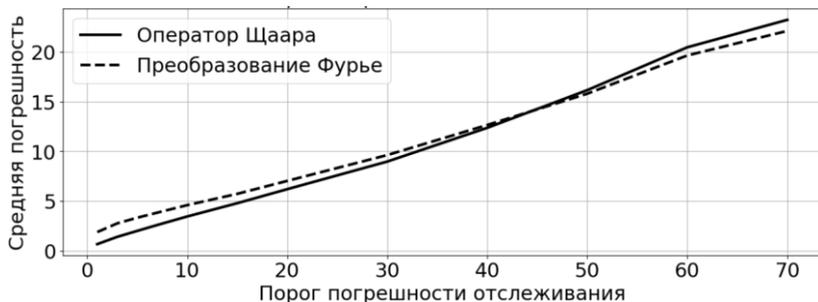


Рис. 14. Определение порогового значения погрешности

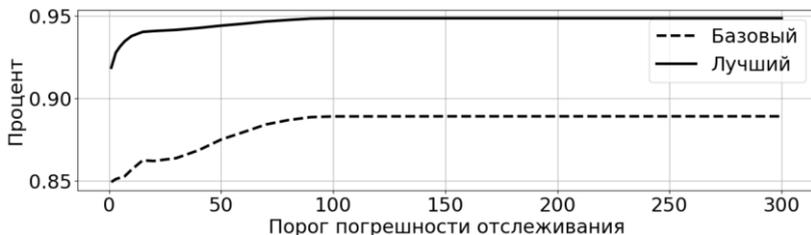


Рис. 15. Отклонение перемещения пикселя

Опишем итоговый набор правил, с помощью которого принимается решение об использовании преобразования Фурье или оператора Щаара для расчета производной в гибридном методе. Стоит уточнить, что числовые значения в условиях подобраны экспериментально.

Если показатель дисперсии меньше 70 или отклонение результата при использовании оператора Щаара от эталона превышает 45 пикселей, то выбирается преобразование Фурье. Иначе выбирается результат вычислений для оператора Щаара.

На рис. 16 описанные выше условия представлены в виде блок-схемы, в которой приняты следующие обозначения: *variance* – показатель дисперсии; *scharfCross* – разность между перемещениями полученных значений перемещения точек с помощью оператора Щаара и преобразования Фурье; *hybridDelta* –

выбранное значение перемещения пикселя;  $fourierDelta$  – перемещения пикселя для преобразования Фурье;  $scharrDelta$  – перемещения пикселя от эталонного значения для оператора Щаара.

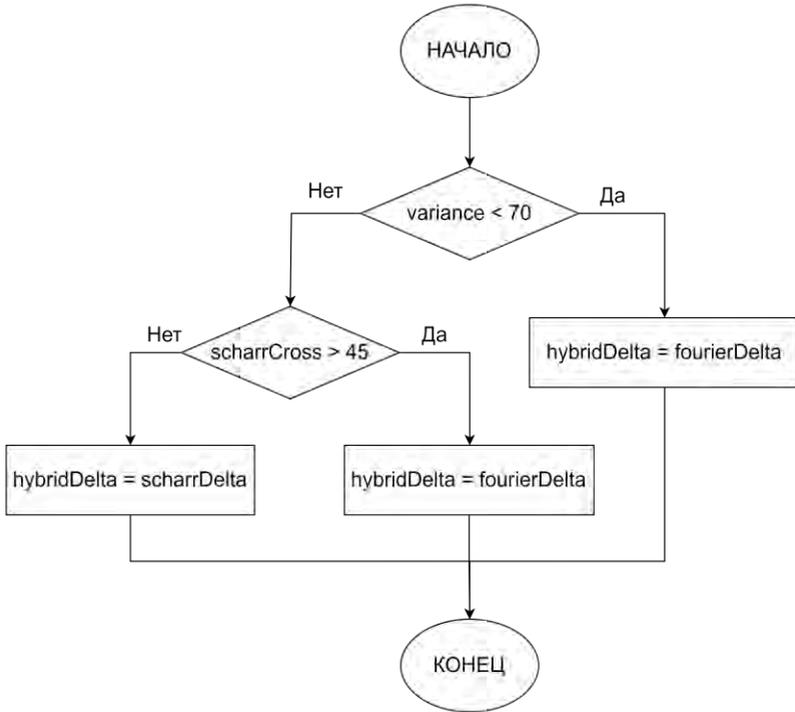


Рис. 16. Условия гибридного метода

#### 4. Применение гибридного метода для расчета оптического потока

В таблице 3 приведены средние значения погрешности и среднеквадратических отклонений для всех видеопоследовательностей набора данных KITTI Vision Benchmark Suite.

Для 127 видеопотоков среднее значение погрешности гибридного метода лучше, чем у оператора Щаара, и для 161 – чем у преобразования Фурье. Для 190 видеопотоков среднеквадра-

тическое отклонение гибридного метода лучше, чем у оператора Щаара, и для 14 – чем у преобразования Фурье. Для 98 видеопотоков среднее значение погрешности преобразования Фурье лучше, чем у оператора Щаара. Для 192 видеопотоков среднеквадратическое отклонение преобразования Фурье лучше, чем у оператора Щаара.

Таблица 3. Результаты тестирования гибридного метода

	Средняя погрешность	Среднеквадратическое отклонение
Оператор Щаара	30,67	44,74
Преобразование Фурье	30,38	38,92
Гибридный метод	29,98	39,56

На рис. 17 и 18 представлены гистограммы распределения разностей между гибридным методом и оператором Щаара для средних значений погрешностей и среднеквадратических отклонений. Положительная разность соответствует выигрышу гибридного метода, а отрицательная разность – выигрышу оператора Щаара. По оси ординат откладывается количество видеопоследовательностей с данной разницей, а по оси абсцисс – значение разности.

Таким образом, средний выигрыш гибридного метода по сравнению с оператором Щаара по среднему значению погрешности оставил 1,43 пикселя, а средний проигрыш – 0,60 пикселя. В выделенной зоне рис. 17 располагаются те видеопоследовательности, у которых выигрыш по средней погрешности для гибридного метода превысил 2,2 пикселя. Средний выигрыш гибридного метода по сравнению с оператором Щаара по среднеквадратическому отклонению составил 5,44 пикселя, а средний проигрыш – 0,33 пикселя.

На рис. 19–22 показаны кадры видеопоследовательностей, на которых выигрыш по средней погрешности у гибридного метода выше, чем у оператора Щаара, на 2,2 пикселя.

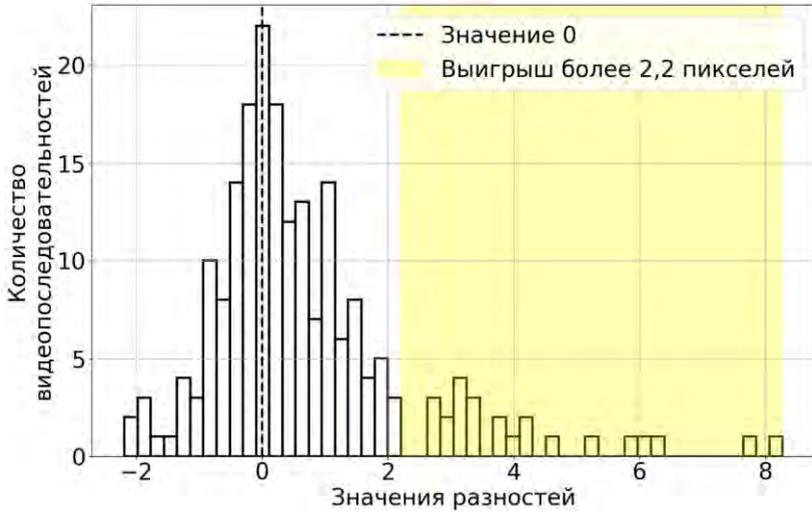


Рис. 17. Распределение разностей средних значений погрешности на всех видеопоследовательностях

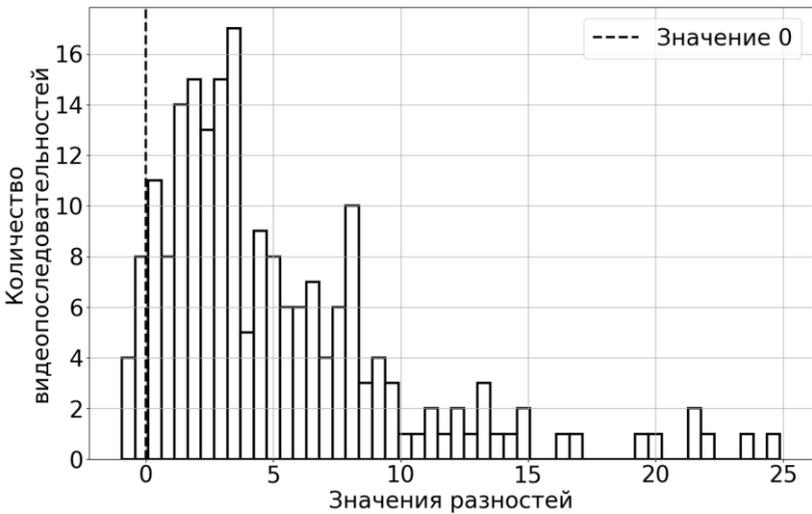


Рис. 18. Распределение разностей среднеквадратических отклонений на всех видеопоследовательностях



*Рис. 19. Кадр первой видеопоследовательности, для которой результат использования гибридного метода дает выигрыш более чем на 2,2 пикселя*



*Рис. 20. Кадр седьмой видеопоследовательности, для которой результат использования гибридного метода дает выигрыш более чем на 2,2 пикселя*



*Рис. 21. Кадр сто четвертой видеопоследовательности, для которой результат использования гибридного метода дает выигрыш более чем на 2,2 пикселя*



*Рис. 22. Кадр сто девяносто шестой видеопоследовательности, для которой результат использования гибридного метода дает выигрыш более чем на 2,2 пикселя*

## **5. Заключение**

В статье был апробирован метод конечномерных теорем отсчетов для вычисления производной цифрового изображения применительно к задаче отслеживания объекта в видеопотоке на основе алгоритма оптического потока Лукаса – Канаде на наборе данных KITTI Vision Benchmark Suite.

В соответствии с методом конечномерных теорем отсчетов для вычисления производной двумерного изображения было использовано дискретное преобразование Фурье, как альтернатива применению операторов Щаара и Собеля.

Предложен гибридный метод расчета производной изображения, основанный на использовании оператора Щаара и преобразования Фурье в соответствии с выполнением правила однтонности и превышения порогового значения погрешности.

Эксперименты на реальных видеопотоках показали увеличение точности расчета оптического потока алгоритмом Лукаса-Канаде в случае использования метода конечномерных теорем отсчетов вместо оператора Щаара в среднем на 1%. Также использование преобразования Фурье поспособствовало увеличению количества успешно отслеженных точек в среднем на 3%. Однако преобразование Фурье для проведения расчетов оптического потока требует больше времени, чем оператор Щаара.

При использовании гибридного метода расчета производной изображения среднее значение погрешности по сравнению

с оператором Щаара уменьшилось на 2%. Среднеквадратическое отклонение погрешности по сравнению с оператором Щаара уменьшилось на 11,5%.

При рассмотрении видеопоследовательностей с лучшими значениями по средней погрешности для гибридного метода были определены следующие общие признаки: открытая местность, большое количество затененных областей или темных объектов.

Следует отметить, что применение метода конечномерных теорем отсчетов в составе гибридного метода расчета производной цифрового изображения позволило повысить среднюю точность расчета оптического потока всего на 2% в среднем по всем 200 видеопоследовательностям набора данных KITTI Vision Benchmark Suite. Однако на отдельных видеопотоках со слабым освещением и большим количеством затененных областей увеличение точности расчета оптического потока достигает 10%. Это связано с тем, что расчет производной с использованием преобразования Фурье вносит небольшое количество шумов, отбрасываемых контрастными объектами на изображении. Благодаря таким шумам метод расчета оптического потока Лукаса – Канаде более точно вычисляет перемещения пикселей в однотонных областях, двигаясь по ним, как по направляющим. В дальнейшем особый интерес представляет анализ возможностей применения метода конечномерных теорем отсчетов для вычисления оптического потока в условиях слабого освещения и низкой текстурированности окружающих объектов.

В перспективе исследование может быть расширено рассмотрением способов аппаратного ускорения вычислений прямого и обратного дискретных преобразований Фурье для уменьшения разницы в быстродействии по сравнению с применением оператора Щаара, а также изучением возможностей по увеличению точности отслеживания точек гибридным методом.

### **Литература**

1. ЛЫЧКОВ И.И., ТЕПЛУХИН Р.Г. *Применение конечномерных теорем отсчетов для отслеживания транспортных средств* // Материалы III Международной научно-практической конферен-

- ции «Интеллектуальные транспортные системы» – М., 2024. – С. 654–666.
2. ТЕРЕНТЬЕВ Е.Н., МАХНЮК М.В., БАЛАБАН Е.Д. и др. *Градиентная морфология в оценивании параметров объектов в изображениях* // Материалы 21-й Международной конференции «Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса». – М., 2023. – Т. 13. – С. 56.
  3. ABOUTABIT N. *A new construction of an image edge detection mask based on Caputo – Fabrizio fractional derivative* // The Visual Computer. – 2021. – Vol. 37, No. 6. – P. 1545–1557.
  4. AL-QUDAH S., YANG M. *Large Displacement Detection Using Improved Lucas – Kanade Optical Flow* // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No. 6. – P. 3152.
  5. ARORA S., MATHUR T., AGARWAL S. et al. *Applications of fractional calculus in computer vision: a survey* // Neurocomputing. – 2022. – Vol. 489. – P. 407–428.
  6. BOUGUET J.-Y. *Pyramidal implementation of the affine lucas kanade feature tracker description of the algorithm* // Intel Corporation. – 2001. – Vol. 5, No. 1–10. – P. 4.
  7. BOUMA H., VILANOVA A., BESCOS J.O. et al. *Fast and accurate Gaussian derivatives based on B-splines* // Int. Conf. on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. – 2007. – P. 406–417.
  8. BRADSKI G., KAEHLER A. *Learning OpenCV: Computer vision with the OpenCV library*. – "O'Reilly Media, Inc.", 2008. – 557 p.
  9. CAPUTO M., FABRIZIO M. *A new definition of fractional derivative without singular kernel* // Progress in Fractional Differentiation & Applications. – 2015. – Vol. 1, No. 2. – P. 73–85.
  10. CHEN D., SHENG H., CHEN Y. et al. *Fractional-order variational optical flow model for motion estimation* // Philosophical Trans. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 2013. – Vol. 371, No. 1990. – P. 20120148.
  11. EGIDI N., GIACOMINI J., MAPONI P. et al. *An FFT method for the numerical differentiation* // Applied Mathematics and Computation. – 2023. – Vol. 445. – P. 127856.
  12. FERRERA M., EUDES A., MORAS J. et al. *OV<sup>2</sup>SLAM: A fully online and versatile visual SLAM for real-time applications* // IEEE Robotics and Automation Letters. – 2021. – Vol. 6, No. 2. – P. 1399–1406.

13. GONZALEZ-ACUNA R.G., DAVILA A., GUTIERREZ-VEGA J.C. *Optical flow of non-integer order in particle image velocimetry techniques* // Signal Processing. – 2019. – Vol. 155. – P. 317–322.
14. KONG L., SHEN C., YANG J. *A lightweight network for fast optical flow estimation* // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). – IEEE, 2021. – P. 10310–10316.
15. KUMAR S.N., FRED A.L., KUMAR A.H. et al. *Medical image edge detection using Gauss Gradient operator* // Journal of Pharmaceutical Sciences and Research. – 2017. – Vol. 9, No. 5. – P. 695.
16. LAVIN-DELGADO J.E., SOLIS-PEREZ J.E., GOMEZ-AGUILAR J.F. et al. *Robust optical flow estimation involving exponential fractional-order derivatives* // Optik. – 2020. – Vol. 202. – P. 163642.
17. LIN J., ZHANG F. *R<sup>3</sup>LIVE: A Robust, Real-time, RGB-colored, LiDAR-Inertial-Visual tightly-coupled state Estimation and mapping package* // Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA). – IEEE, 2022. – P. 10672–10678.
18. MENZE M., GEIGER A. *Object scene flow for autonomous vehicles* // Proc. of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2015. – P. 3061–3070.
19. NANDAL S., KUMAR S. *Fractional-order anisotropic diffusion for defogging of RGB images* // Int. Journal of Image and Graphics. – 2020. – Vol. 20. – No. 01. – P. 2050001.
20. SCHARR H. *Optimal filters for extended optical flow* // Int. Workshop on Complex Motion – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. – P. 14–29.
21. SHAH S.T.H., XUEZHI X. *Traditional and modern strategies for optical flow: an investigation* // SN Applied Sciences. – 2021. – Vol. 3, No. 3. – P. 289.
22. SHAKYA S., KUMAR S., GOSWAMI M. *Deep learning algorithm for satellite imaging based cyclone detection* // IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing. – 2020. – Vol. 13. – P. 827–839.
23. SHARMIN N., BRAD R. *Optimal filter estimation for Lucas-Kanade optical flow* // Sensors. – 2012. – Vol. 12, No. 9. – P. 12694–12709.
24. SUN D., YANG X., LIU M.-Y. et al. *Pwc-net: Cnns for optical flow using pyramid, warping, and cost volume* // Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. – 2018. – P. 8934–8943.
25. WINKLER J.R. *Error Analysis and Condition Estimation of the Pyramidal Form of the Lucas-Kanade Method in Optical Flow* // Electronics. – 2024. – Vol. 13, No. 5. – P. 812.

## **LUCAS – KANADE OPTICAL FLOW COMPUTATION BASED ON THE FINITE DIMENSIONAL SAMPLING THEORIES**

**Mais Farkhadov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, professor (mais@ipu.ru).

**Rustam Teplukhin**, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, student (teplukhinq@student.bmstu.ru).

**Alexander Abramenzov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Research Fellow (aabramenzov@asmon.ru).

**Alexander Abdulov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Research Fellow (aabdulov@asmon.ru).

**Igor Lychkov**, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, senior lecturer (lychkovi@bmstu.ru).

*Abstract: This paper considers Lucas – Kanade optical flow computation using the finite dimensional sampling theories based on Fourier transform. Such a procedure regards all image pixels for image derivative evaluation and is able to provide high accuracy of optical flow computation. This paper proposes a hybrid image differentiation method which combines the finite dimensional sampling theories with Scharr operator in order to improve accuracy of optical flow computation. Experiments on optical flow computation for real videos on the basis of the finite dimensional sampling theories as well as the hybrid method have been conducted and their results are presented. Leveraging of the finite dimensional sampling theories allows to improve accuracy of optical flow computation for videos including poor illumination and shaded regions. The research results can be applied in various computer vision tasks such as visual object tracking.*

Keywords: Lucas – Kanade optical flow, Scharr operator, Gauss gradient operator, discrete Fourier transform, image derivative.

УДК 004.932

ББК 16.631

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Л.Б. Рапопортом.*

*Поступила в редакцию 16.10.2024.*

*Опубликована 31.01.2025.*

## ВЛИЯНИЕ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРЫ НА ИНТЕГРАЛЬНЫЙ РИСК СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА В СЛУЧАЕ ЗВЕЗДОБРАЗНОЙ СТРУКТУРЫ

Широкий А. А.<sup>1</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

*Работа посвящена исследованию влияния структуры сложной системы на ее интегральный риск. При решении задач управления рисками часто возникает необходимость учесть структурные эффекты, к каковым чаще всего относят перенос риска и распространение отказов. В настоящем исследовании обсуждается влияние положения элементов защищаемой системы внутри фиксированной звездообразной структуры на ее интегральный риск. Показано, что задача оптимального с точки зрения минимизации риска размещения элементов в такой структуре не может быть точно решена эвристическими методами. Предложен алгоритм ее решения с ограниченной погрешностью. Для случая равенства ожидаемых ущербов при успешной атаке элемента системы рассчитаны верхние оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов системы при использовании предложенного алгоритма, а также предложена методика быстрой оценки рисков для систем со звездообразной структурой. Наконец, для частного случая, когда риски элементов находятся в определенном соотношении, найдено точное решение задачи оптимального размещения элементов. Полученные результаты будут в дальнейшем использованы для решения аналогичной задачи в более сложных структурах — в частности, древовидных, — с последующим обобщением на случай сложных сетей произвольной топологии.*

Ключевые слова: сложные системы, риск, структура системы, управление рисками, алгоритмы минимизации риска, задача оптимального размещения элементов.

### 1. Введение

Многие сложные системы реального мира, такие как электросети, Интернет, транспортные сети и сети сложных информационных систем, проявляют при случайных сбоях или преднамеренных атаках свойства, обусловленные их структурой. Для описания этих свойств исследователи часто используют модели

<sup>1</sup> Александр Александрович Широкий, к.ф.-м.н., с.н.с. (shiroky@ipu.ru).

управления рисками на основе сложных сетей. При этом можно сфокусироваться как на структуре системы в целом, так и на количественных оценках рисков и (или) ожидаемых потерь при наступлении неблагоприятного события неопределенности. Также следует отметить, что эти явления могут рассматриваться как в статике, так и в динамике. В таблице 1 представлена классификация структурных свойств и перечислены применяемые при их изучении модели и методы.

*Таблица 1. Модели и методы исследования свойств, обусловленных структурой сложной системы, проявляемых при случайных сбоях или преднамеренных атаках*

	Статический подход	Динамический подход
Свойства сложной сети	Топологические метрики Статистические метрики	Синхронизация Консенсус
Оценка рисков и убытков	Надежность Уязвимость	Каскадные сбои

При рассмотрении собственных свойств сети в статике предметом исследования является изменение ее свойств при удалении вершин или ребер. Для описания свойств используются различные топологические или статистические метрики. Среди первых наиболее часто используются показатели центральности (центральность по степени, посредничеству, близости или собственному вектору [16, 22, 26]), эффективности (характеристическая длина пути [4, 7, 21]) и кластеризации (коэффициент кластеризации [23, 30, 34]). Среди вторых часто встречается самоорганизующаяся критичность [6, 13, 32].

При динамическом подходе обычно изучаются явления сходимости траекторий узлов (синхронизация [11, 24, 35], консенсус [5, 17, 33]), а также инструменты управления ими [12, 27, 28].

В случае изучения сложных сетей, отражающих реальные объекты, появляется потребность в количественной оценке ущерба, возникающего в результате реализации неблагоприятного события неопределенности. При рассмотрении сети в статике к таковым относятся надежность и уязвимость [9, 12, 29]. Надежность показывает, в какой степени сеть способна противостоять тако-

му событию без ухудшения ее производительности. Уязвимость, в свою очередь, определяется как способность сети непрерывно функционировать при случайных сбоях или преднамеренных атаках.

Рассмотрение сети в динамике предполагает изучение сценария, когда нарушение функционирования одного узла приводит к снижению надежности и повышению уязвимости связанных узлов. Последовательный отказ нескольких узлов может вызвать каскадный сбой [14, 20, 31].

Связанным классом задач являются задачи распределения ресурса для управления рисками. Как правило, их формулировки являются вариациями классической задачи торга (Nash bargaining problem, [18]). Базовые концепции ее решения были сформированы самим Нэшем [19], позднее было получено монотонное решение на основе альтернативной системы аксиом [15]. Эти решения с разнообразными модификациями применяются для управления рисками и сегодня (см., например, [2, 10]).

Схожий аксиоматический подход можно применить для анализа рисков в динамической системе. При этом, как правило, задача тем или иным способом сводится к статической. Например, в работе [8] решается задача управления экономическими рисками для конечного множества предприятий при различных сценариях. В работе [1] решается задача управления рисками в сложной системе с заданным взаимным влиянием элементов с помощью анализа сходящихся многошаговых когнитивных игр. Тем не менее подобные вышеприведенным работы встречаются крайне редко. Причиной этого, по всей видимости, является трудоемкость синтеза алгоритмов решения, обеспечивающих монотонность, т.е. гарантирующих, что выделение ресурса для снижения риска одного элемента не приведет к увеличению значения риска для другого элемента вследствие влияния структуры.

Настоящая работа посвящена исследованию влияния положения элементов защищаемой системы в заданной структуре на интегральный риск системы. В предшествующих работах [3, 25] исследовались простые цепные структуры. Здесь обсуждаются

более сложные звездообразные структуры с одновершинным периметром. Главным результатом работы является алгоритм решения задачи псевдо-оптимального размещения элементов защищаемой системы в структуре типа «звезда с  $t$  лучами» с элементами равной «стоимости» (иными словами, величины ожидаемого ущерба для всех элементов системы полагаются равными).

Структура изложения материала в работе следующая. В разделе 2 вводятся необходимые определения и формулируется общая постановка задачи. Раздел 3 содержит обсуждение нескольких возможных эвристических подходов к ее решению в частном случае равенства ущербов и контрпримеры к ним. В разделе 4 предложен ряд разумных с точки зрения практики ограничений, позволяющих получить приближенное к оптимальному решение для случая элементов с равными ущербами. Верхние оценки погрешности решения строятся в разделе 5. В разделе 6 предложена методика быстрой оценки рисков систем со звездообразной структурой. Наконец, в разделе 7 приведено точное решение для случая, когда ожидаемые ущербы элементов различны, но их риски находятся в некотором заданном соотношении.

## 2. Постановка задачи

Предположим, что защищаемая система включает в себя  $n$  элементов (объектов произвольной природы)

$$s_1, \dots, s_n \in S, n \in \mathbb{N}.$$

Предположим также, что каждому элементу поставлены в соответствие два числа:

$p_i^0 \in (0, 1]$  – удельная вероятность успешной атаки  $i$ -го элемента;

$u_i > 0, u \in \mathbb{R}^+$  – ущерб, который будет нанесен, если  $i$ -й элемент будет успешно атакован.

Определение 1. Удельным локальным риском  $i$ -го элемента назовем величину

$$\rho_{s_i}^0 = u_i p_i^0.$$

Зададим структуру

$$W = \langle G(V, E), T \rangle, T \subseteq V,$$

где  $G(V, E)$  – ориентированный граф со множеством вершин  $V$  и множеством дуг  $E$ , а  $T$  – подмножество  $V$ , называемое периметром. В настоящей работе рассматриваются структуры с периметром, включающим в себя ровно одну вершину.

Будем считать, что заданная структура ограничивает возможности атакующего по выводу из строя элементов системы: любая атака должна начинаться с узла-периметра, а последующие атакуемые элементы – быть достижимыми из него (иначе говоря, должен существовать простой путь, соединяющий вершину-периметр с целевой вершиной, причем все входящие в него вершины, за исключением целевой, должны быть успешно атакованы).

Определение 2. Структурой типа «звезда с  $m$  лучами» будем называть такую структуру  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$ , что

$$V = \left\{ \{v_0\} \cup \bigcup_{b=1}^m \bigcup_{l=1}^{l_b} \{v_{bl}\} \right\},$$

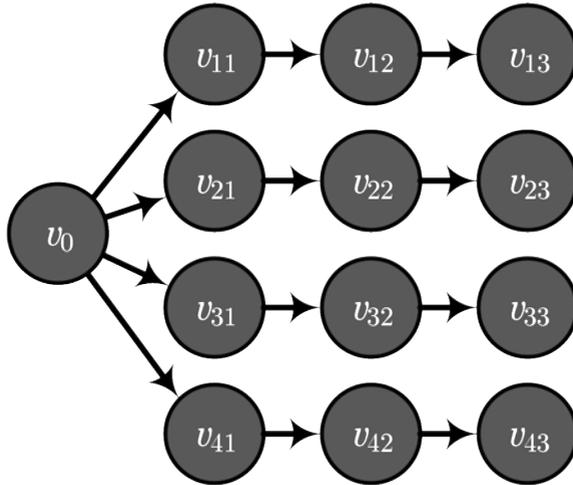
$$E = \left\{ \bigcup_{b=1}^m \left\{ (v_0, v_{b1}) \cup \bigcup_{l=2}^{l_b} (v_{b(l-1)}, v_{bl}) \right\} \right\},$$

$$T = \{v_0\}.$$

Здесь  $l_b \in \mathbb{N}$  – число вершин в  $b$ -м луче, представляющем собой простую цепь с началом в вершине  $v_{b1}$ . Для всех таких вершин периметр  $v_0$  является смежной вершиной. В общем случае  $l_b$  не ограничены. На рис. 1 приведен пример звездообразной структуры с четырьмя лучами длины 3 каждый.

Определение 3. Если для структуры атаки  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$  существует взаимно однозначное отображение  $M : V \rightarrow S$ , то будем называть его отображением структуры  $W_m$  на множество  $S$ .

*Определение 4.* Взаимно однозначное отображение  $M^{-1} : S \rightarrow V$ , обратное ранее определенному отображению  $M : V \rightarrow S$ , будем называть размещением элементов  $S$  в структуре  $W_m$ .



*Рис. 1.* Звездообразная структура с четырьмя лучами, каждый из которых имеет длину 3

Заметим, что критерием существования такого отображения будет являться совпадение числа вершин в графе  $G(V, E)$  с числом  $n$  элементов защищаемой системы. Если число вершин бесконечно, то множество  $S$  должно быть счетным.

*Определение 5.* Локальным риском элемента защищаемой системы, размещенного в вершине  $v_{bl}$  структуры типа «звезда с  $t$  лучами», будем называть величину

$$\rho_{M(v_{bl})} = u_{M(v_{bl})} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)},$$

где  $\langle v_0, v_{bl} \rangle$  – простой путь, соединяющий вершину-периметр  $v_0$  с вершиной  $v_{bl}$ .

Локальный риск элемента, размещенного в вершине  $v_0$ , равен его удельному локальному риску. Отметим, что в рассматри-

ваемом случае простой путь всегда существует и является единственным.

Определение 6. *Интегральным риском системы со множеством защищаемых элементов  $S$ , размещенным в структуре атаки типа «звезда с  $m$  лучами»  $W_m$  с помощью взаимно однозначного отображения  $M^{-1} : S \rightarrow W_m$ , будем называть величину*

$$\rho(S, W_m, M^{-1}) = \rho_{M(v_o)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \rho_{M(v_{bl})}.$$

Отметим, что поскольку локальные риски в смысле определения 5 уже учитывают положение элемента в структуре системы, значение интегрального риска является простой суммой локальных рисков. Это, в частности, позволяет при необходимости легко рассчитать промежуточные значения интегрального риска для произвольных подсистем (подструктур).

Пусть защищаемая система включает в себя множество элементов  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , с соответствующими им вероятностями успешной атаки  $P = \{p_{s_1}, p_{s_2}, \dots, p_{s_n}\}$  и ущербами  $U = \{u_{s_1}, u_{s_2}, \dots, u_{s_n}\}$ . Предположим, что ожидаемая атака имеет структуру типа «звезда с  $m$  лучами»  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$ , причем  $\sum_{b=1}^m l_b = n - 1$ . Тогда задача минимизации интегрального риска защищаемой системы состоит в поиске такого размещения элементов  $S$  в структуре  $W_m$ , что

$$(1) \quad \rho(S, W_m, M^{-1}) \rightarrow \min.$$

Для частного случая  $m = 1$  решение в общем виде приведено в работе [25]. Однако уже для  $m = 2$  найти критерий упорядоченности вершин, обеспечивающий минимизацию интегрального риска, не удастся. Поэтому далее мы сформулируем ряд предположений, позволяющих решить эту задачу для реальных систем с приемлемой точностью. Но вначале рассмотрим несколько эвристических подходов к решению задачи (1), являющихся естественным обобщением результата, полученного в работе [25], но не позволивших получить точное решение.

### 3. Эвристические алгоритмы решения задачи минимизации интегрального риска

Положим, что ожидаемые ущербы в случае успешной атаки элементов системы равны, т.е.

$$u_{s_i} = u \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Тогда задача (1) принимает вид

$$(2) \quad \rho(S, W_m, M^{-1}) = u \left( p_{M(v_0)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)} \right) \rightarrow \min.$$

Исходя из общих соображений, оптимальным видится такое размещение элементов, что чем выше вероятность успешной атаки, тем дальше от периметра должен располагаться элемент. Это хорошо согласуется с результатом, полученным ранее в работе [25] для простой цепной структуры. Напомним его.

*Определение 7.* Будем говорить, что узлы  $s_i, s_j \in S$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ ,  $i \neq j$ , нестрого упорядочены по возрастанию (убыванию) локального риска, и записывать  $s_i \preceq s_j$  ( $s_i \succcurlyeq s_j$ ), если при заданной структуре атаки  $W_1$  (в смысле определения 2) для любых размещений  $M_1^{-1}, M_2^{-1}$  таких, что

$$\exists p_1, q_1, p_2, q_2 : \begin{cases} p_1 < q_1, \\ p_2 > q_2, \end{cases}$$

$$s_i = M_1(v_{p_1}) = M_2(v_{p_2}), \quad s_j = M_1(v_{q_1}) = M_2(v_{q_2}),$$

выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \rho(S, W_1, M_1^{-1}) &\leq \rho(S, W_1, M_2^{-1}) \\ \left( \rho(S, W_1, M_1^{-1}) \geq \rho(S, W_1, M_2^{-1}) \right). \end{aligned}$$

**Утверждение 1.** Пусть  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда  $\forall i < n$

$$s_i \preceq s_{i+1} \Leftrightarrow \frac{u_i}{u_{i+1}} \leq \frac{p_{i+1}^0 (1 - p_i^0)}{p_i^0 (1 - p_{i+1}^0)};$$

$$s_i \succcurlyeq s_{i+1} \Leftrightarrow \frac{u_i}{u_{i+1}} \geq \frac{p_{i+1}^0 (1 - p_i^0)}{p_i^0 (1 - p_{i+1}^0)}.$$

В рассматриваемом частном случае равенства ущербов это утверждение означает, что удельные вероятности успешной атаки размещенных элементов должны возрастать (точнее не убывать) с удалением от периметра.

Сформулируем следующее

**Утверждение 2.** Для каждого минимизирующего интегральный риск размещения  $M^{-1} : S \rightarrow V$  выполняется следующее: если для произвольных  $b, c, l : b, c \in \{1, \dots, m\}, l \in \mathbb{N}$  в структуре  $W_m$  существуют вершины  $M(v_{bl}), M(v_{c(l+1)})$ , то  $P_{M(v_{bl})} \leq P_{M(v_{c(l+1)})}$ .

Доказав это утверждение, можно упростить задачу, изолированно рассматривая подмножества вершин, находящиеся от периметра на фиксированном расстоянии. К сожалению, это утверждение неверно. Рассмотрим достаточно простой контрпример для структуры атаки с двумя лучами.

Пусть защищаемая система включает в себя множество  $S = \{s_i\}_{i=1}^{11}$  элементов со следующими удельными вероятностями успешной атаки:

$$p_1^0 = p_2^0 = 0,01,$$

$$p_3^0 = p_4^0 = p_5^0 = p_6^0 = 0,3,$$

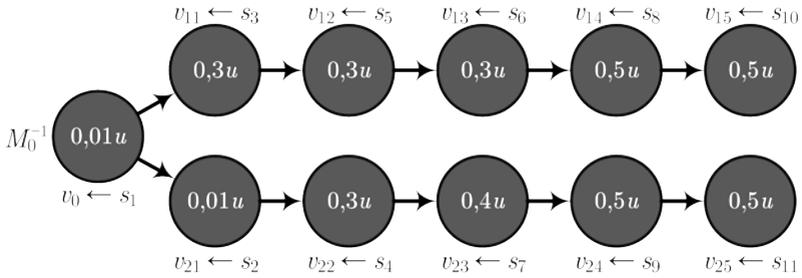
$$p_7^0 = 0,4,$$

$$p_8^0 = p_9^0 = p_{10}^0 = p_{11}^0 = 0,5.$$

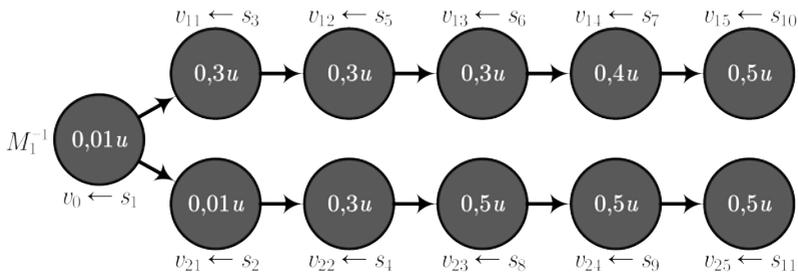
Зададим структуру  $W_2$  с  $l_1 = l_2 = 5$ .

**Контрпример 1.** Вначале построим размещение  $M_0^{-1}$ , удовлетворяющее одновременно условиям из утверждений 1 и 2 (рис. 2а). Получим

$$\rho(S, W_2, M_0^{-1}) = 1452,35u \cdot 10^{-5}.$$



а)



б)

Рис. 2. Пример размещения, для которого а) выполнены утверждения 1 и 2; б) выполнено утверждение 1, а утверждение 2 не выполнено, но при этом значение интегрального риска меньше

Теперь построим размещение  $M_1^{-1}$ , отличающееся от  $M_0^{-1}$  тем, что  $M_1^{-1}(v_{23}) = M_0^{-1}(v_{14})$ , а  $M_1^{-1}(v_{14}) = M_0^{-1}(v_{23})$  (рис. 2б). Получим

$$\rho(S, W_2, M_1^{-1}) = 1448,825u \cdot 10^{-5} < < 1452,35u \cdot 10^{-5} = \rho(S, W_2, M_0^{-1}).$$

Получившееся размещение (рис. 2б) удовлетворяет критерию упорядоченности вершин в смысле утверждения 1, но не утверждению 2. Поскольку оно обеспечивает меньшее значение интегрального риска, утверждение 2 неверно. ●

Заметим, что вероятности успешной атаки элементов, отображенных в вершины  $v_{11}$  и  $v_{21}$ , довольно сильно отличаются (в примере выше – в тридцать раз). Таким образом, значения интегрального риска, подсчитанные для лучей в отдельности, значительно различаются, что и вызывает иллюстрируемый контр-примером эффект. Отсюда естественным образом возникает идея строить размещение итеративно, постепенно удаляясь от центра, так чтобы промежуточные значения интегральных рисков в подструктурах-лучах были примерно равными. Для рассматриваемой системы таковым будет отображение  $M_2^{-1}$  (рис. 3).

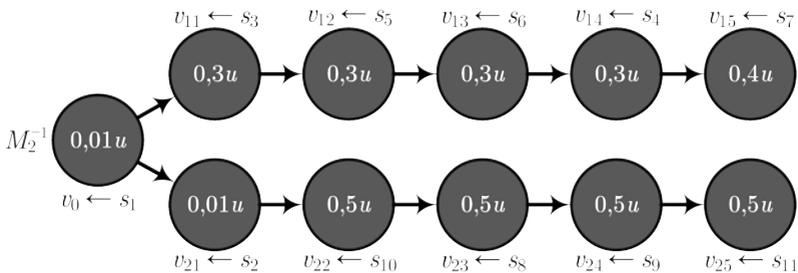


Рис. 3. Пример размещения, выравнивающего промежуточные значения интегрального риска, полученные по мере удаления от периметра

Рассчитаем для него значение интегрального риска. Получим

$$\begin{aligned} \rho(S, W_2, M_2^{-1}) &= 1447,715u \cdot 10^{-5} < \\ &< 1448,825u \cdot 10^{-5} = \rho(S, W_2, M_1^{-1}), \end{aligned}$$

что даже меньше, чем для отображения  $M_1^{-1}$ . Однако построенное отображение также не является решением задачи (2), поскольку имеет место

**Контрпример 2.** Построим размещение  $M_3^{-1}$  (рис. 4), отличающееся от  $M_2^{-1}$  тем, что

$$M_3^{-1}(v_{22}) = M_2^{-1}(v_{15}), \quad M_3^{-1}(v_{15}) = M_2^{-1}(v_{22}).$$

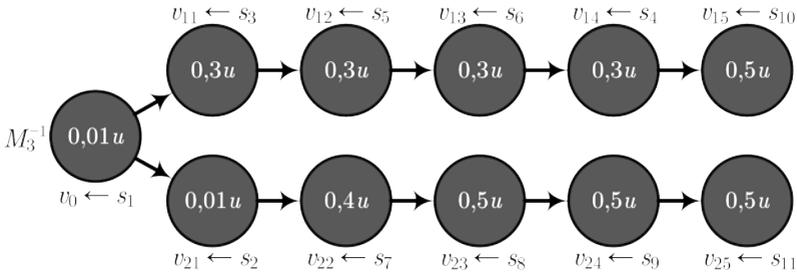


Рис. 4. Пример размещения, не обеспечивающего минимальную разность промежуточных значений интегральных рисков, рассчитываемых в процессе построения размещения, но являющегося решением задачи (2)

Рассчитаем для него значение интегрального риска. Получим

$$\begin{aligned} \rho(S, W_2, M_3^{-1}) &= 1446,65u \cdot 10^{-5} < \\ &< 1447,715u \cdot 10^{-5} = \rho(S, W_2, M_2^{-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, предложенная эвристика также не обеспечивает решение задачи (2).•

В заключение попытаемся построить критерий предпочтения для оптимального в смысле минимизации интегрального риска размещения элементов в подмножестве вершин, находящихся на фиксированном расстоянии  $j$  от периметра, т.е. в  $\{v_{bj}\}_{b=1}^m$ . Произвольно выберем из этого множества две вершины  $v_{pj}$  и  $v_{qj}$ . Проверим, при каких условиях для минимизирующего интегральный риск отображения  $M^{-1} : S \rightarrow V$  будет выполнено неравенство

$$p_{M(v_{pj})}^0 \leq p_{M(v_{qj})}^0.$$

Для удобства записи обозначим  $p = p_{M(v_{pj})}^0$ ,  $q = p_{M(v_{qj})}^0$ . Для остальных вершин вместо  $p_{M(v_{bl})}^0$ ,  $b < m, l < l_b, b, l, l_b \in \mathbb{N}$ , будем писать  $p_{lb}$ , а вместо  $p_{M(v_0)}^0 - p_0$ . Также введем обозначение для интегрального риска подструктуры, являющейся простой цепью

и включающей себя вершины  $v_{bl}, v_{b(l+1)}, \dots, v_{bl_b}$  :

$$\rho(p_{bl}, \dots, p_{bl_b}) = u \sum_{i=l}^{l_b} \prod_{k=l}^i p_{M(v_{ik})}^0.$$

Посчитаем разность  $\Delta$  величин интегрального риска для случаев, когда в вершины  $v_{pj}, v_{qj}$  отображены элементы с удельными вероятностями успешной атаки соответственно  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{q}$  (случай 1), и наоборот (случай 2). Напомним, что  $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$ .

$$\begin{aligned} \Delta &= up_0 \left( p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{p} + p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{p} \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p}) + \right. \\ &\quad + p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{q} + p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{q} \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q}) - \\ &\quad - p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{q} + p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \mathbf{q} \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p}) - \\ &\quad \left. - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{p} - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \mathbf{p} \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q}) \right) = \\ &= up_0 (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \left( p_{p1} \dots p_{p(j-1)} (1 + \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p})) - \right. \\ &\quad \left. - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} (1 + \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q})) \right). \end{aligned}$$

Если  $\Delta \leq 0$ , то значение интегрального риск будет меньше при размещении, как в случае 1. Иначе – как в случае 2. В силу того, что  $\mathbf{p} - \mathbf{q} \leq 0$ , а  $u, p_0 > 0$ , это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &p_{p1} \dots p_{p(j-1)} \left( 1 + \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p}) \right) - \\ &\quad - p_{q1} \dots p_{q(j-1)} \left( 1 + \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q}) \right) \geq 0 \iff \\ (3) \quad &\iff \frac{p_{p1} \dots p_{p(j-1)}}{p_{q1} \dots p_{q(j-1)}} \geq \frac{1 + \rho(p_{q(j+1)}, \dots, p_{pl_q})}{1 + \rho(p_{p(j+1)}, \dots, p_{pl_p})}. \end{aligned}$$

Полученное соотношение (3) говорит нам о том, что оптимальное размещение элементов в подмножестве вершин  $\{v_{bj}\}_{b=1}^m$  зависит от того, какие элементы размещены в вершинах, расположенных к периметру относительно рассматриваемых как ближе,

так и дальше. Таким образом, итеративное построение оптимального размещения невозможно и точное решение задач (1) и (2), по всей видимости, достигается только полным перебором размещений.

Поскольку число возможных перестановок элементов выражается через факториал, такой перебор практически невозможен даже для систем с относительно небольшим числом элементов. Поэтому далее мы будем искать возможность приближенного решения задачи (2) вычислительно простым алгоритмом с некоторой оцениваемой сверху погрешностью.

#### **4. Приближенное решение задачи оптимального размещения элементов системы в заданной структуре**

Как и в прошлом параграфе, будем рассматривать частный случай равенства величин ожидаемого ущерба, т.е. решать задачу (2). С точки зрения практики, выражение

$$(4) \quad p_{M(v_0)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)}$$

можно интерпретировать как величину, характеризующую защищенность системы в целом. Потребуем, чтобы даже для бесконечного числа элементов величина (4) оставалась конечной. Для этого введем понятие предельно допустимого удельного локального риска.

*Определение 8. Предельно допустимым удельным локальным риском элемента защищаемой системы при структуре атаки  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$  будем считать величину*

$$(5) \quad \rho_{max}^0 = \frac{u}{1 + \sqrt{m}}.$$

Отметим, что если  $\forall i \rho_i^0 = \rho_{max}^0, i \in \{1, \dots, n\}, n < \infty$ , то

$$p_{M(v_0)} + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} p_{M(v)} = \frac{1}{u} \left( \rho_{max}^0 + \sum_{b=1}^m \sum_{l=1}^{l_b} \prod_{v \in \langle v_0, v_{bl} \rangle} \rho_{max}^0 \right) < 1,$$

а при  $n = \infty$  это выражение равно единице. Содержательно введенное ограничение отражает практически разумное соображение, что чем больше элементов включает система, тем лучше должен быть защищен каждый элемент в отдельности.

Теперь выясним, как ведет себя интегральный риск при постепенном усложнении структуры защищаемой системы. В простейшем случае, когда система состоит из единственного элемента  $s_1$ , его размещение в структуре  $W_1 = \langle G(V = \{v_0\}, E = \emptyset), T = \{v_0\} \rangle$  единственно, и интегральный риск системы при заданных ограничениях не превышает величины  $\frac{u}{2}$ .

Если же в защищаемой системе  $n$  элементов, а структура состоит из  $m = n - 1$  лучей, включающих в себя по одной дуге, то верхняя оценка интегрального риска, вносимого элементом  $v_0$ , равна

$$(6) \quad \rho_{max}^0 = \frac{u}{1 + \sqrt{n-1}},$$

а вклад элементов, отображенных в вершины  $v_{b1}, b = \overline{1, n-1}$ , составит не более чем

$$(7) \quad u(n-1) \left( \frac{\rho_{max}^0}{u} \right)^2 = \frac{u(n-1)}{(1 + \sqrt{n-1})^2}.$$

Заметим, что при  $n \rightarrow \infty$  выражение (6) стремится к нулю, а выражение (7) – к  $u$ . Далее для удобства будем говорить, что луч имеет длину  $k$ , если путь от вершины-периметра до висячей вершины луча включает в себя ровно  $k$  дуг.

Наконец, рассмотрим вариант структуры атаки с  $m = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  лучами, где запись  $\lfloor x \rfloor$  здесь и далее означает выделение целой

части числа  $x$ . В случае четных  $n$  один из лучей будет иметь длину 1, а остальные – 2. Для нечетных  $n$  все лучи будут иметь длину 2. Верхняя оценка интегрального риска, вносимого элементами, отображенными в вершины  $v_{b2}$ ,  $b = \overline{1, m}$ , составит

$$\frac{m}{u^2} (\rho_{max}^0)^3 = \frac{um}{(1 + \sqrt{m})^3}.$$

Эта величина при  $n, m \rightarrow \infty$  тоже стремится к нулю.

Отсюда следует два важных вывода. Во-первых, чем больше лучей имеет структура, тем меньшее влияние на интегральный риск системы оказывают элементы, отображенные в вершины  $v_{bl}$  с  $l \geq 2$ . Во-вторых, при  $m \geq 4$  прирост риска на множестве вершин  $\{v_{bl}\}_{b=1}^m$ ,  $l \geq 3$ , не превышает пяти процентов от максимально возможного значения. Конкретные величины для небольших значений  $m$  и  $l$  приведены в таблице 2.

Таблица 2. Верхние оценки прироста риска в структуре с  $m$  лучами на подмножествах вершин, удаленных от периметра на 1–3 дуги, а также соответствующие верхние оценки величин интегрального риска (в скобках); округление до четвертого знака с избытком

Число лучей $m$	$\rho_{max}^0$	Подмножество вершин			
		$\{v_0\}$	$\{v_{b1}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b2}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b3}\}_{b=1}^m$
1	$\frac{u}{2}$	0,5 $u$ (0,5 $u$ )	0,25 $u$ (0,75 $u$ )	0,125 $u$ (0,875 $u$ )	0,625 $u$ (0,9375 $u$ )
2	$\frac{u}{1+\sqrt{2}}$	0,4143 $u$ (0,4143 $u$ )	0,3432 $u$ (0,7574 $u$ )	0,1422 $u$ (0,8995 $u$ )	0,0589 $u$ (0,9584 $u$ )
3	$\frac{u}{1+\sqrt{3}}$	0,3661 $u$ (0,3661 $u$ )	0,402 $u$ (0,768 $u$ )	0,1472 $u$ (0,9151 $u$ )	0,0539 $u$ (0,969 $u$ )
4	$\frac{u}{1+\sqrt{4}}$	0,3334 $u$ (0,3334 $u$ )	0,4445 $u$ (0,7778 $u$ )	0,1482 $u$ (0,926 $u$ )	0,0494 $u$ (0,9754 $u$ )
5	$\frac{u}{1+\sqrt{5}}$	0,3091 $u$ (0,3091 $u$ )	0,4775 $u$ (0,7865 $u$ )	0,1476 $u$ (0,9341 $u$ )	0,0456 $u$ (0,9797 $u$ )

Заметим, что для вершины-периметра, а также вершин  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m$ , находящихся на расстоянии одной дуги от него, решение задачи оптимального размещения элементов защищаемой

системы тривиально в силу необходимости выполнения критерия упорядоченности элементов, доказанного в [25]. А именно, в периметр в рассматриваемом частном случае следует поместить элемент с минимальным удельным локальным риском (минимальной вероятностью успешной атаки), а в вершины  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m - m$  элементов из оставшихся с наименьшим удельным локальным риском, начиная с номера  $b$ , соответствующего самому длинному лучу.

Таким образом, наибольший интерес с точки зрения практики представляет решение задачи оптимального размещения элементов защищаемой системы в подмножестве вершин структуры атаки, которые от периметра отделяет две дуги, т.е.  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$ .

Отметим также, что величина

$$(8) \quad \frac{mt}{(1 + \sqrt{m})^n}$$

для фиксированных значений  $n \geq 4$  (т.е. соответствующих подмножествам  $\{v_{b3}\}_{b=1}^m$ ,  $\{v_{b4}\}_{b=1}^m$  и т.д.) монотонно убывает с ростом  $m$ . В то же время первая производная выражения (8) при  $n = 3$  имеет корень  $m = 4$ , поэтому верхняя оценка прироста риска достигает максимума в случае, если структура атаки имеет 4 луча.

Этот факт позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением именно таких структур как «наименее благоприятных» в смысле поиска оптимального размещения элементов для минимизации интегрального риска. Величины отклонения от оптимального решения будут максимальны именно при  $m = 4$ .

Для приближенного решения задачи (2) предлагается использовать следующий алгоритм.

1. Выбрать элемент с наименьшим удельным локальным риском и поместить его в вершину-периметр  $v_0$ .

2. Из оставшихся выбрать  $m$  элементов с наименьшими удельными локальными рисками и разместить их в вершинах  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m$  так, чтобы длины соответствующих этим вершинам лучей находились в обратной зависимости от удельного локального риска, отображенного в вершину элемента.

3. Для каждого из подмножеств вершин  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$ ,  $\{v_{b3}\}_{b=1}^m, \dots$  последовательно выбирать по  $k \leq m$  элементов с наименьшими удельными локальными рисками из оставшихся и размещать их в вершинах соответствующего подмножества произвольным образом.

В следующем параграфе мы построим верхние оценки погрешности решения задачи (2) этим алгоритмом.

### 5. Верхние оценки погрешностей решения задачи оптимального размещения элементов

Для получения оценок погрешности решения задачи оптимального размещения элементов в структуре типа «звезда с  $m$  лучами» проведем численный эксперимент, состоящий в следующем. Будем последовательно генерировать структуры атаки с числом лучей  $m$  от 2 до 11, каждый из которых имеет длину 3. Зададим следующие ограничения:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 1; \\ p_{M(v_0)}^0 \leq p_{M(v_{bl})}^0 \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}, l < l_b; \\ p_{M(v_0)}^0 > 0; \\ p_{M(v_{bl})}^0 > 0 \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}, l \leq l_b; \\ p_{M(v_0)}^0 \leq \frac{1}{1 + \sqrt{m}}; \\ p_{M(v_{bl})}^0 \leq \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}, l < l_b; \\ p_{M(v_{l_b})}^0 \leq \sum_{l=l_b}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \right)^{l+1}. \end{array} \right.$$

Далее будем генерировать выражения интегрального риска для всех размещений, получаемых путем перестановок элементов, отображенных в подмножества  $\{v_{b1}\}_{b=1}^m$ , а затем – отдельно – в  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$ . Вслед за этим рассмотрим все возможные модули разности этих выражений и для каждого из них проведем

поиск глобального максимума. Разделив получившееся значение на минимум интегрального риска из этих двух вычитаемых друг из друга выражений, мы получим относительную разность между ними. Максимум этих разностей даст нам численную оценку относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов защищаемой системы в заданной структуре.

Результаты эксперимента сведены в таблицу 3. Они показывают, что величина относительной погрешности варьируется в небольших пределах. В частности, увеличение относительной погрешности решения задачи (2) на вершинах, расположенных на расстоянии двух дуг от периметра, составляет 6,07% в наименее благоприятном случае.

Таблица 3. Численные оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов в подмножествах вершин структуры атаки, округление до четвертого знака с избытком (\* – недостоверное значение вследствие переполнения)

Число лучей $m$	Подмножество вершин				
	$\{v_0\}$	$\{v_{b1}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b2}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b3}\}_{b=1}^m$	$\{v_{b4}\}_{b=1}^m$
2	0,2072	0,0583	0,0132	0,0037	0,0012
3	0,1548	0,0434	0,0088	0,0022	0,0007
4	0,2	0,0607	0,0107	0,0024	0,0006
5	0,1709	0,0515	0,0085	0,0018	0,0005
6	0,1899	0,0607	0,0091	0,0018	0,0004
7	0,1707	0,0542	0,0078	0,0015	0,0003
8	0,1807	0,0601	0,008	0,0014	0,0003
9	0,1667	0,0551	0,0071	0,0012	0,0002
10	0,1726	0,0593	0,0072	0,0012	*
11	0,1619	0,0553	0,0065	0,001	*

Заметим, что приросты относительной погрешности для структур с четным числом лучей всегда больше таковых для структур с нечетным числом лучей, большим на единицу. Этот эффект объясняется следующим образом. Допустим, мы имеем оптимальное размещение  $M_0^{-1} : S \rightarrow V$ . Тогда внутри каждого

подмножества  $\{v_{bl}\}_{b=1}^m \in V$  для фиксированного  $l$  выполняется критерий (3).

Поскольку это критерий попарного сравнения, то мы можем упорядочить и пронумеровать отображенные в рассматриваемое подмножество элементы номерами от 1 до  $k \leq m$  (некоторые  $v_{bl}$  могут не существовать). Для того чтобы построить отображение  $M^{-1} : S \rightarrow V$  с максимально возможным отклонением (приростом) интегрального риска, полученного перестановками элементов внутри подмножества  $\{v_{bl}\}_{b=1}^m \in V$ , достаточно разместить в нем элементы в обратном порядке.

При этом для нечетных  $k$  элемент с номером  $\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor$  останется на своем месте, а число попарных перестановок будет таким же, как и для  $(k - 1)$ -го элемента. В силу ранее введенного ограничения (5) на максимальное значение удельного локального риска вклад каждой из таких попарных перестановок будет уменьшаться с ростом значения  $k$ .

Следует отметить, что поскольку риск не может быть равен нулю, верхняя оценка прироста интегрального риска с удалением от периметра всегда превышает верхнюю оценку относительной погрешности, рассчитанную на том же удалении. Первые, в свою очередь, вычисляются как  $u \left( \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \right)^{l+1}$ , а бесконечная сумма таких слагаемых сходится:

$$\sum_{l=0}^{\infty} u \left( \frac{1}{1 + \sqrt{m}} \right)^{l+1} = \frac{u}{\sqrt{m}}.$$

Начиная с  $m = 3$  относительная погрешность при произвольном неоптимальном размещении элементов защищаемой системы в вершинах, отделенных от периметра тремя и более дугами, не превышает двух процентов и снижается с увеличением числа лучей в структуре атаки.

Отметим также, что во всех случаях максимум относительной погрешности достигается в случае, когда в системе одновременно присутствуют как элементы с очень маленьким риском (вероятность успешной атаки таких элементов в эксперименте будет равна машинному эпсилон), так и элементы с максимально

допустимым риском. В связи с этим была проведена еще одна серия экспериментов с ограничением разброса рисков.

Определение 9. *Остаточным удельным риском для защищаемой системы, включающей в себя множество элементов  $s_1, \dots, s_n \in S, n \in \mathbb{N}$ , будем называть величину*

$$\rho_{res} : \rho_{s_i}^0 \geq \rho_{res} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Вычислим верхние оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов системы в заданной структуре при значениях остаточного удельного риска  $\frac{\rho_{max}^0}{1000}$ ,  $\frac{\rho_{max}^0}{100}$  и  $\frac{\rho_{max}^0}{10}$ . Результаты приведены в таблице 4.

*Таблица 4. Численные оценки относительной погрешности решения задачи оптимального размещения элементов в подмножествах вершин структуры атаки при заданном пороге остаточного риска, округление до четвертого знака с избытком*

Число вершин $m$	Подмножество вершин					
	$\{v_{b1}\}_{b=1}^m$			$\{v_{b2}\}_{b=1}^m$		
	Остаточный риск			Остаточный риск		
	$\frac{\rho_{max}^0}{1000}$	$\frac{\rho_{max}^0}{100}$	$\frac{\rho_{max}^0}{10}$	$\frac{\rho_{max}^0}{1000}$	$\frac{\rho_{max}^0}{100}$	$\frac{\rho_{max}^0}{10}$
2	0,2064	0,1995	0,1398	0,0581	0,0565	0,0417
3	0,1542	0,1489	0,1041	0,0432	0,0419	0,0301
4	0,1993	0,193	0,1379	0,0605	0,0587	0,0425
5	0,1702	0,1647	0,1168	0,0513	0,0497	0,0354
6	0,1893	0,1834	0,1322	0,0605	0,0586	0,0419
7	0,1701	0,1646	0,1178	0,054	0,0522	0,0368
8	0,1801	0,1745	0,1265	0,0599	0,0579	0,041
9	0,1661	0,1609	0,1158	0,0549	0,053	0,0371
10	0,172	0,1668	0,1214	0,059	0,057	0,0401
11	0,1613	0,1563	0,113	0,055	0,0531	0,0369

При ограничении  $\rho_{res} = \frac{\rho_{max}^0}{1000}$  значения погрешностей мало отличаются от случая, когда остаточный риск специально не ограничен, т.е.  $\rho_{s_i}^0 > 0$ . Но при поднятии границы остаточного 200

риска величина относительной погрешности заметно снижается. Так, если  $\rho_{s_i}^0 \geq \frac{\rho_{max}^0}{10}$ , то при любом размещении элементов защищаемой системы в вершинах  $\{v_{b2}\}_{b=1}^m$  интегральный риск будет превышать минимальный менее чем на 5%.

## 6. Методика быстрой оценки рисков систем со звездообразной структурой

Рассмотрим вопрос об оценке рисков некоторой сложной системы, включающей в себя множество защищаемых элементов  $S$ , размещенных в структуре типа «звезда с  $m$  лучами»  $W_m$ . Предположим, что нам неизвестны как удельные вероятности успешной атаки каждого из защищаемых элементов, так и значения ущербов, наносимых злоумышленником в случае успешной атаки какого-либо элемента. В то же время будем считать, что нам известны ограничивающие вероятность успешной атаки величины  $p_{min}$  и  $p_{max}$  такие, что

$$0 < p_{min} \leq p_i^0 \leq p_{max} < 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда при  $m = 1$  оценка интегрального риска  $\rho_1$  данной системы будет иметь следующий вид:

$$\rho_1^- = u \sum_{l=1}^n (p_{min})^l \leq \rho_1 \leq u \sum_{l=1}^n (p_{max})^l = \rho_1^+,$$

где  $u$  – некоторая оценка «среднего» ущерба. Заметим, что при  $p_{max} \leq \frac{1}{2}$  эти суммы будут конечны даже для системы со счетным множеством защищаемых элементов.

Теперь предположим, что структура системы включает в себя два луча с примерно одинаковыми длинами  $l_1$  и  $l_2$ , т.е.

$$|l_1 - l_2| \leq 1, \quad l_1 + l_2 + 1 = n.$$

Тогда величину интегрального риска  $\rho_2$  такой системы можно оценить снизу и сверху через  $p_{min}$  и  $p_{max}$  соответственно. Запи-

шем вначале выражение для нижней оценки:

$$\rho_2^- = u \left( p_{min} + 2p_{min} \cdot \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (p_{min})^l + p_{min} \left( n - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \right) = u \left( p_{min} + 2 \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (p_{min})^l + \left( n - 1 - 2 \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right).$$

Величина  $n - 1 - 2 \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  будет равна нулю для нечетных  $n$  и единице – для четных. При этом в первом случае мы получим два луча одинаковой длины, а во втором их длины будут отличаться на единицу. Выражение для верхней оценки будет иметь тот же вид с точностью до замены  $p_{min}$  на  $p_{max}$ .

Теперь запишем выражение для нижней оценки интегрального риска системы со структурой, включающей в себя произвольное конечное число лучей  $m$ :

$$\rho_m^- = u \left( p_{min} + m \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \left( n - 1 - m \left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor + 2} \right).$$

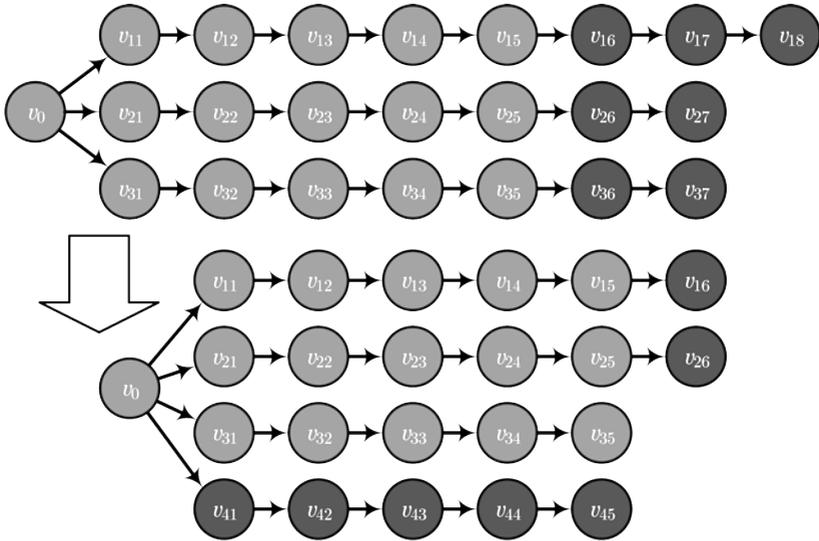
Оценим, насколько изменяется оценка при увеличении числа лучей до  $(m + 1)$ . Для этого запишем выражение для нижней оценки интегрального риска для такой структуры:

$$\begin{aligned} \rho_{m+1}^- = & u \left( p_{min} + (m+1) \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \left( n-1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - (m+1) \left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 2} \right) = u \left( p_{min} + \right. \\ & \left. + m \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \sum_{l=2}^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 1} (p_{min})^l + \left( n-1 - \right. \right. \\ & \left. \left. - (m+1) \left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor \right) (p_{min})^{\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor + 2} \right). \end{aligned}$$

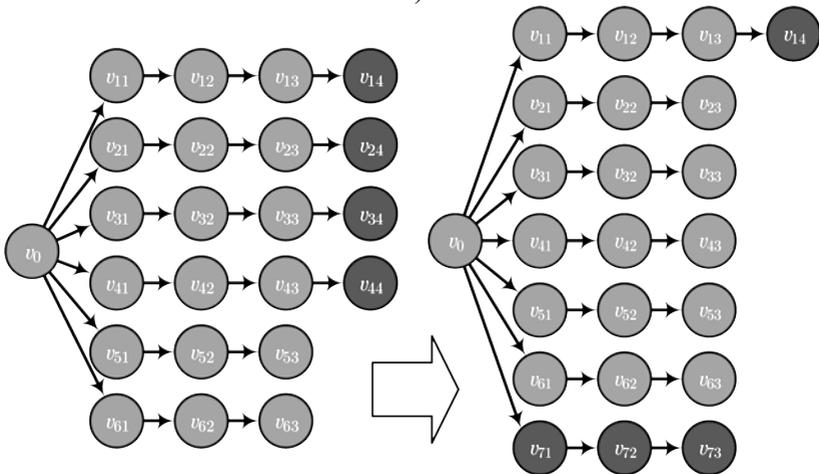
Алгебраически оценить величину  $|\rho_{m+1}^- - \rho_m^-|$  достаточно сложно, поэтому посмотрим, что происходит при переходе от звезды с  $m$  лучами к звезде с  $(m+1)$  лучами визуально (рис. 5). Напомним, что под интегральным риском мы понимаем сумму локальных рисков элементов защищаемой системы. Конкретные значения локальных рисков зависят от положения элементов в структуре, но при построении верхней и нижней оценки значения удельных локальных рисков одинаковы для всех элементов.

Значения локальных же рисков будут тем выше, чем меньше значение второго индекса у вершины. При этом у вершин с одинаковыми вторыми индексами значения локальных рисков будут равны. При добавлении нового  $(m+1)$ -го луча в структуре появляются  $\left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor$  вершин  $v_{(m+1)1}, v_{(m+1)2}, \dots, v_{(m+1)\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor}$ .

Вершины с индексами от  $v_{11}$  до  $v_{m\lfloor \frac{n-1}{m+1} \rfloor}$  будут присутствовать как в структуре с  $m$  лучами, так и в новой, с добавленным дополнительным лучом. Остальные вершины будут иметь в структуре с  $m$  лучами вторые индексы, большие  $\left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor$ , при этом  $n-1-(m+1) \left\lfloor \frac{n-1}{m+1} \right\rfloor$  из них будут иметь одинаковые индексы в обеих структурах (и, соответственно, одинаковые локальные риски).



а)



б)

Рис. 5. а) Переход от структуры типа «звезда с 3 лучами» к структуре «звезда с 4 лучами» при сохранении числа вершин;  
 б) то же – от структуры «звезда с 6 лучами» к структуре «звезда с 7 лучами»

Эти рассуждения приводят нас к тому, что верхние и нижние оценки интегрального риска монотонно возрастают с ростом числа лучей в структуре. Заметив, что

$$\forall z = \text{const}, l > 1 \quad (p_{\min})^l - (p_{\min})^{l+z} \leq (p_{\max})^l - (p_{\max})^{l+z},$$

получаем, что величина  $\rho_m^+ - \rho_m^-$  при  $p_{\min} < p_{\max}$  также монотонно возрастает с ростом  $m$ . При  $p_{\min} = p_{\max}$  достигается равенство верхней и нижней оценок.

### 7. Решение задачи оптимального размещения элементов с различными значениями ущерба

Ранее мы рассматривали частный случай, когда ущерб от успешной атаки элементов оценивается одинаково, т.е.  $u_{s_i} = u \forall i \in \{1, \dots, n\}$ . Предположим, что ущербы различны. В то же время потребуем, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$(9) \quad \frac{1 - p_{s_i}^0}{u_{s_i} p_{s_i}^0} = \frac{1 - p_{s_j}^0}{u_{s_j} p_{s_j}^0} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что для структур вида

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ G \left( V = \{v_0, v_{11}, \dots, v_{1l_1}\}, \right. \right. \\ E &= \left. \left. \left( (v_0, v_{11}) \cup \bigcup_{l=2}^{l_1} (v_{1(l-1)}, v_{1l}) \right) \right\}, \\ T &= \{v_0\} \left. \right\}, \quad 2 < l_1 \leq n - 1 \end{aligned}$$

соотношение (9) обеспечивает равенство интегральных рисков для любого набора отображений

$$\mathbf{M}^{-1} = \left\{ M_t^{-1} : \tilde{S} \rightarrow V \right\}_{j \in J}, \quad \tilde{S} \subseteq S,$$

где  $J$  – некоторое множество индексов. Покажем, что для таких элементов существует точное решение задачи (1).

Вначале заметим, что любая структура типа «звезда с  $m$  лучами» может быть разбита на  $m$  структур вида  $W_1$  следующим образом. Пусть  $W_m = \langle G(V, E), T \rangle$  определена как в определении 2. Тогда определим подструктуры

$$\begin{aligned} W_1^1 &= \langle G(V_1, E_1), T_1 \rangle, \\ W_1^2 &= \langle G(V_2, E_2), T_2 \rangle, \\ &\dots, \\ W_1^m &= \langle G(V_m, E_m), T_m \rangle, \end{aligned}$$

причем для  $b = 1$

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v_0\} \cup \bigcup_{l=1}^{l_1} \{v_{1l}\}, \\ E_1 &= \left\{ (v_0, v_{11}) \cup \bigcup_{l=2}^{l_1} (v_{1(l-1)}, v_{1l}) \right\}, \\ T_1 &= \{v_0\}, \end{aligned}$$

а для остальных  $b = \overline{2, m}$

$$V_b = \bigcup_{l=1}^{l_b} \{v_{bl}\}, \quad E_b = \bigcup_{l=2}^{l_b} \{(v_{b(l-1)}, v_{bl})\}, \quad T_b = \emptyset.$$

Тогда

$$V = \bigcup_{b=1}^m V_b, \quad E = \bigcup_{b=1}^m E_b, \quad T = T_1 = \bigcup_{b=1}^m T_b$$

и можно записать

$$W_m = \bigcup_{b=1}^m W_1^b.$$

Для заданного отображения  $M : V \rightarrow S$  в силу его взаимной однозначности можно найти такое разбиение множества защищаемых элементов

$$S_1, \dots, S_m, \quad S_b \subset S \quad \forall b \in \overline{1, m}, \quad S_b \cap S_d = \emptyset \quad \forall b, d \in \overline{1, m} : b \neq d,$$

что

$$V = \bigcup_{b=1}^m M^{-1}(S_b)$$

и величину  $\rho(S, W_m, M^{-1})$  можно записать как

$$\rho(S, W_m, M^{-1}) = \rho(S_1, W_1^1, M^{-1}) + p_{M(v_0)}^0 \sum_{b=2}^m \rho(S_b, W_1^b, M^{-1}).$$

Теперь покажем, что при выполнении соотношения (9) для любого такого размещения  $M^{-1} : S \rightarrow V$ , что

$$p_{M(v_0)}^0 = \min_{i=1, n} \{p_{s_i}^0\},$$

будет достигаться минимум величины  $\rho(S, W_m, M^{-1})$ . Для удобства перенумеруем защищаемые элементы так, чтобы

$$p_i^0 \leq p_{i+1}^0 \quad \forall i < n, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Тогда  $p_{M(v_0)}^0 = p_1^0$  и

$$\rho_1 = \rho(S, W_m, M^{-1}) = \rho(S_1, W_1^1, M^{-1}) + p_1^0 \sum_{b=2}^m \rho(S_b, W_1^b, M^{-1}).$$

Теперь рассмотрим другое размещение  $M'^{-1}$ , получающееся из  $M^{-1}$  перестановкой двух элементов –  $s_1$  и любого другого  $s_k$ ,  $1 < k \leq n$ , т.е.

$$\begin{aligned} M^{-1}(s_1) &= M'^{-1}(s_k), \quad M^{-1}(s_k) = M'^{-1}(s_1), \\ M^{-1}(s_i) &= M'^{-1}(s_i) \quad \forall i \neq k, \quad i \leq n, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Не умаляя общности, будем считать, что  $M'^{-1}(s_k)$  находится в структуре  $W_1^1$ .

Запишем выражение для значения интегрального риска для размещения  $M'^{-1}$ :

$$\rho_k = \rho(S, W_m, M'^{-1}) = \rho(S_1, W_1^1, M'^{-1}) + p_k^0 \sum_{b=2}^m \rho(S_b, W_1^b, M'^{-1}).$$

Заметим, что в силу соотношения (9)

$$\rho \left( S_1, W_1^b, M'^{-1} \right) = \rho \left( S_1, W_1^b, M^{-1} \right) \quad \forall b \in \{1, \dots, m\}.$$

Поскольку  $p_1^0 \leq p_k^0$ , то и  $\rho_1 \leq \rho_k$ , что означает, что размещение  $M^{-1}$  является решением задачи (1).

## 8. Заключение

В настоящей работе предложен алгоритм решения задачи псевдо-оптимального размещения элементов защищаемой системы в структуре типа «звезда с  $m$  лучами» в частном случае равенства ущербов при успешной атаке различных элементов. В то время как задача оптимального размещения в общем случае может быть решена только полным перебором, предложенный алгоритм позволяет решить ее за линейное время с некоторой оцениваемой погрешностью, зависящей от числа лучей в структуре атаки. Верхние оценки погрешностей решения были экспериментально рассчитаны для небольших структур, состоящих из 2–11 лучей, включающих в себя 2–5 элементов каждый. Выбранные для расчётов параметры структур были, с одной стороны, ограничены доступной вычислительной мощностью, а с другой – точностью машинного представления чисел с плавающей запятой. В то же время даже такой небольшой эксперимент наглядно демонстрирует, что относительная погрешность уменьшается с увеличением числа лучей в структуре сверх четырех. Таким образом, для получения верхних оценок погрешностей такого эксперимента достаточно.

Полученные оценки были уточнены для случая положительно ограниченных минимальных удельных (остаточных) рисков. Кроме того, был предложен метод экспресс-оценки рисков систем с рассматриваемой структурой в ситуации, когда Защитник не знает ни значений собственных вероятностей успешной атаки элементов, ни значений ожидаемого ущерба от них. В то же время он, предположительно, знает значения остаточного и предельного рисков, а также способен представить себе некоторую

среднюю величину ущерба. Было исследовано поведение разности верхней и нижней оценок интегрального риска и установлено, что она увеличивается с ростом числа лучей в структуре системы. Отметим, что относительная погрешность предложенного выше алгоритма неоптимального размещения элементов уменьшается с увеличением количества лучей в «звезде». Таким образом, чем сложнее оценить риск системы, тем лучше работает алгоритм.

Наконец, приведено точное решение задачи оптимального размещения элементов системы в заданной структуре с различными величинами ущербов, но с ограничением (9) на соотношение их собственных рисков. А именно, отношение вероятности того, что элемент не будет успешно атакован, к величине его собственного риска должно быть одинаковым для всех элементов системы. По сути, это условие отражает естественное требование: чем выше ожидаемый ущерб элементу, тем лучше он должен быть защищен. Выполнение этого условия делает элементы нейтральными по отношению к их положению внутри луча, т.е. их перестановка не влияет на интегральный риск соответствующей подсистемы, состоящей только из этого луча.

Решение проблемы состоит в том, чтобы поместить элемент с наименьшей собственной вероятностью успешной атаки в общую для всех лучей вершину-периметр. Это решение не интуитивно, поскольку этот элемент также будет иметь максимальное значение ожидаемого урона среди всех элементов системы. Однако это решение обеспечивает достижение минимального интегрального риска. Приведенный пример иллюстрирует, что собственная вероятность успешной атаки элемента (и, соответственно, безопасность элемента) важнее, чем ожидаемый ущерб, когда речь заходит о периметре.

Полученные результаты могут быть использованы при управлении рисками в сложных сетях. Проведенные численные эксперименты позволяют сделать обоснованный вывод о том, что следует сосредоточиться в первую очередь на снижении уязвимости периметра, а также узлов, непосредственно доступных

из него. Узлы, расположенные дальше, не оказывают существенного влияния на уровень риска системы в целом. Предложенный в работе алгоритм позволяет решать задачу минимизации интегрального риска с любой наперед заданной точностью для систем, имеющих структуру типа «звезда» с одновершинным периметром. В дальнейшем планируется обобщить предложенный алгоритм для систем с древовидной структурой и, в перспективе, с произвольной топологией.

Полученные на данный момент результаты не предполагают широкого применения на практике. Они могут быть использованы, например, для управления рисками в небольших компьютерных сетях, но такие проблемы обычно возникают при защите крупных сетей со сложной топологией. Тем не менее они являются основой для перехода к изучению более сложных структур. Более подробно практические аспекты предполагается обсудить в дальнейших работах, посвященных управлению рисками в сложных сетях произвольной топологии.

### **Литература**

1. КАЛАШНИКОВ А.О., АНИКИНА Е.В. *Управление информационными рисками сложной системы с использованием механизма «когнитивной игры»* // Вопросы кибербезопасности. – 2020. – № 4(38). – С. 2–10.
2. КАЛАШНИКОВ А.О., АНИКИНА Е.В. *Управление рисками сложной сети на основе обобщенной арбитражной схемы* // Вопросы кибербезопасности. – 2022. – № 1(47). – С. 95–101.
3. ШИРОКИЙ А.А. *Учет влияния структуры сложной системы при управлении рисками* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2024. – Вып. 107. – С. 88–106.
4. BLOCH F., JACKSON M.O., TEBALDI P. *Centrality measures in networks* // Soc Choice Welf. – 2023. – Vol. 61. – P. 413–453. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s00355-023-01456-4>

5. BODKHE U., MEHTA D., TANWAR S. et al. *A survey on decentralized consensus mechanisms for cyber physical systems* // IEEE Access. – 2020. – No. 8. – P. 54371–54401.
6. CAJUEIRO D.O., ANDRADE R.F. *Controlling self-organized criticality in complex networks* // Eur. Phys. J. B. – 2010. – Vol. 77, No. 2. – P. 291–296.
7. CHEN B., CAO L. *An optimized algorithm for calculating the average path length of complex network* // Proc. of the 10th Int. Symposium on Computational Intelligence and Design (ISCID) Hangzhou, China, 9–10 December 2017. – Vol. 1. – P. 334–337.
8. CHEN C., IYENGAR G., MOALLEMI C.C. *An axiomatic approach to systemic risk* // Manag. Sci. – 2013 – Vol. 59, No. 6. – P. 1373–1388.
9. CRIADO R., ROMANCE M. *Structural vulnerability and robustness in complex networks: different approaches and relationships between them* // Handbook of optimization in complex networks. – New York, NY: Springer, 2012. – P. 3–36.
10. DEGEFU D.M., HE W., YUAN L. *Monotonic bargaining solution for allocating critically scarce transboundary water* // Water Resour. Manag. – 2017. – Vol. 31, No. 9. – P. 2627–2644.
11. DING D., TANG Z., WANG Y. et al. *Secure synchronization of complex networks under deception attacks against vulnerable nodes* // Appl. Math. Comput. – 2021. – Vol. 399. – e126017.
12. FREITAS S., YANG D., KUMAR S. et al. *Graph Vulnerability and Robustness: A Survey* // IEEE Trans. Knowl. Data Eng. – 2022. – Vol. 35, No. 6. – P. 5915–5934.
13. HOFFMANN H., PAYTON D.W. *Optimization by self-organized criticality* // Sci. Rep. – 2018. – Vol. 8, No. 1. – P. 1–9.
14. JALILI M., PERC M. *Information cascades in complex networks* // J. Complex Netw. – 2017. – Vol. 5, No. 5. – P. 665–693.

15. KALAI E., SMORODINSKY M. *Other solutions to Nash's bargaining problem* // *Econometrica*. – 1975. – Vol. 43, No. 3. – P. 513–518.
16. KANYOU C., KOUOKAM E., EMVUDU Y. *Structural network analysis: Correlation between centrality measures* // *Proc. of the African Conf. on Research in Computer Science (CARI) Yaounde, Dschang, Cameroon, 22 September – 3 October 2022*. – hal-03714191.
17. KOCAREV L. (Ed.) *Consensus and synchronization in complex networks*. – Berlin/Heidelberg, Germany: Springer, 2013.
18. NASH Z. *The bargaining problem* // *Econometrica*. – 1950. – Vol. 18, No. 2. – P. 155–162.
19. NASH Z. *Two-person cooperative games* // *Econometrica*. – 1953. – Vol. 21, No. 1. – P. 128–140.
20. NOWZARI C., PRECIADO V.M., PAPPAS G.J. *Analysis and control of epidemics: A survey of spreading processes on complex networks* // *IEEE Control Syst. Mag.* – 2016. – Vol. 36, No. 1. – P. 26–46.
21. PU H., LI Y., MA C. *Topology analysis of Lanzhou public transport network based on double-layer complex network theory* // *Physica A*. – 2022. – Vol. 592. – e126694.
22. SAXENA A., IYENGAR S. *Centrality measures in complex networks: A survey* // *arXiv preprint*. – 2020. – arXiv:2011.07190.
23. LIU X., ZHANG M., FIUMARA G. et al. *Complex Network Hierarchical Sampling Method Combining Node Neighborhood Clustering Coefficient with Random Walk* // *New Gener. Comput.* – 2022. – Vol. 40, No. 3. – P. 765–807.
24. RADULESCU A., EVANS D., AUGUSTIN A.-D. et al. *Synchronization and Clustering in Complex Quadratic Networks* // *Neural Comput.* – 2024. – Vol. 36, No. 1. – P. 75–106.

25. SHIROKY A., KALASHNIKOV A. *Mathematical Problems of Managing the Risks of Complex Systems under Targeted Attacks with Known Structures* // Mathematics. – 2021. – No. 9(19). – e2468.
26. SIMAS T., CORREIA R.B., ROCHA L.M. *The distance backbone of complex networks* // J Complex Netw. – 2021. – Vol. 9, No. 6. – cnab021.
27. SUAREZ O.J., VEGA C.J., ELVIRA-CEJA S. et al. *Sliding-mode pinning control of complex networks* // Kybernetika. – 2018. – Vol. 54, No. 5. – P. 1011–1032.
28. XING W., SHI P., AGARWAL R.K. et al. *A survey on global pinning synchronization of complex networks* // J. Franklin Inst. – 2019. – Vol. 356, No. 6. – P. 3590–3611.
29. WANG C., XIA Y. *Robustness of complex networks considering attack cost* // IEEE Access. – 2020. – No. 8. – P. 172398–172404.
30. WANG H., WANG J., LIU Q. et al. *Identifying key spreaders in complex networks based on local clustering coefficient and structural hole information* // New J. Phys. – 2023. – Vol. 25, No. 12. – e123005.
31. WANG S., LIU J. *Designing comprehensively robust networks against intentional attacks and cascading failures* // Inf. Sci. – 2019. – No. 478. – P. 125–140.
32. WANG Y., FAN H., LIN W. et al. *Growth, collapse and self-organized criticality in complex networks* // Sci. Rep. – 2016. – Vol. 6, No. 1. – P. 1–12.
33. ZHANG Q., TSENG L.. *Fault-tolerant Consensus in Anonymous Dynamic Network* // arXiv preprint. – 2024. – arXiv:2405.03017.
34. ZHAO J., WANG Y., DENG Y. *Identifying influential nodes in complex networks from global perspective* // Chaos Solitons Fractals. – 2020. – Vol. 133. – e109637.
35. ZHAO L.H., WEN S., LI C. et al. *A Recent Survey on Control for Synchronization and Passivity of Complex Networks* // IEEE Trans. Netw. Sci. Eng. – 2022. – No. 9. – P. 4235–4254.

## **IMPACT OF INTERNAL CONFIGURATION ON OVERALL RISK IN COMPLEX SYSTEMS, EXAMINED THROUGH THE RISK REDUCTION PROBLEM IN A SYSTEM OF STAR-SHAPED STRUCTURE**

**Alexander Shiroky**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior researcher (shiroky@ipu.ru).

*Abstract: This paper explores how the internal structure of a complex system affects its overall risk. Addressing risk management challenges often requires considering structural effects such as risk transfer and failure propagation. The study examines how the positioning of elements within a predefined star-shaped structure affects the overall risk of the system. The author shows that analytically solving the issue of optimal element placement to minimize risk in this configuration is not feasible and introduces an algorithm with bounded errors to tackle this problem. When considering equal expected damages from a potential attack on any element, the author provides upper bounds for the relative error of the proposed algorithm and suggests a method for quick risk assessment in systems with a “star” configuration. Additionally, he has derived an exact solution for the optimal placement problem when the risks of the elements share a specific ratio. The obtained results will be used in further research for the resolution of an ambiguous problem in more intricate structures, particularly tree-like structures, with subsequent generalization to complex networks of arbitrary topology.*

**Keywords:** complex systems, risk, system’s structure, risk control, risk minimizing algorithms, problem of optimal elements placement.

УДК 519

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.О. Калашиниковым.*

*Поступила в редакцию 25.10.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*

# О ЗАДАЧЕ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ С КРИТЕРИЕМ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ОТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КВОТ НА ВЫБРОСЫ<sup>1</sup>

Булавчук А. М.<sup>2</sup> Семенова Д. В.<sup>3</sup>

(Сибирский федеральный университет, Красноярск)

*Рассматривается новая задача календарного планирования инвестиционных проектов с критерием максимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы. Авторами сформулирована модель задачи, учитывающая особенности формирующейся в России практики обращения с углеродными единицами. Модель предусматривает возможность реализации неизрасходуемых углеродных единиц. Учтено также влияние на экономический эффект штрафов за перерасход квот. Проанализирована постановка с детерминированными характеристиками и две недетерминированные разновидности: стохастическая и нечёткая. При описании проектов считалось, что недетерминированный характер могут иметь величины выбросов. В стохастической постановке проанализирован случай, когда параметры модели независимы и имеют распределение Вейбулла – Гнеденко. Для данного случая предложен вариант сравнения расписаний с помощью стохастического доминирования I порядка. В нечёткой постановке для описания проекта использовались нечёткие треугольные числа. Для выбора наилучшего расписания использовалась ранжирующая функция. Для каждой постановки продемонстрированы подходы к решению на основе модификаций алгоритмов GASPIA и SASPIA. В модифицированном алгоритме GASPIA была использована новая схема скрецивания. Для условного примера проекта проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие применимость предложенных алгоритмов для решения задачи.*

Ключевые слова: задача календарного планирования инвестиционных проектов, углеродные квоты, эвристические алгоритмы, стохастическое доминирование, нечёткое ранжирование.

## 1. Введение

Федеральный закон «Об ограничении выбросов парниковых газов» был принят 22 июля 2021 года [9]. Цель принятия дан-

<sup>1</sup> Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

<sup>2</sup> Александр Михайлович Булавчук, ст. преподаватель ([abulavchuk@sfu-kras.ru](mailto:abulavchuk@sfu-kras.ru)).

<sup>3</sup> Дарья Владиславовна Семенова, к.ф.-м.н., доцент ([dvsemenova@sfu-kras.ru](mailto:dvsemenova@sfu-kras.ru)).

ного документа заключается в создании условий для устойчивого и сбалансированного развития экономики Российской Федерации при снижении уровня выбросов парниковых газов. Закон закрепил такие понятия, как «углеродная единица», «квота выбросов парниковых газов», «единица выполнения квоты». Кроме того, закон должен стать основой для формирования рынка квот на выбросы.

С 1 сентября 2022 года на территории Сахалинской области был начат эксперимент по ограничению выбросов парниковых газов [8]. Целью эксперимента, который продлится до 31 декабря 2028 года, является достижение углеродной нейтральности на территории Сахалинской области и других субъектов федерации, включённых в эксперимент. С 1 января 2023 года была установлена ставка платы за превышение квоты выбросов парниковых газов в эквиваленте 1 тонны диоксида углерода в размере 1 тыс. рублей [6].

Таким образом, принятие указанных нормативных актов свидетельствует о важности проблемы оборота углеродных единиц и заинтересованности государства в сокращении выбросов. Закрепление количественных параметров операций с квотами создаёт основу для построения математических моделей обращения с углеродными единицами.

Оптимизация обращения с углеродными единицами – одно из актуальных направлений экономико-математического моделирования в современном мире. Например, в работе [15] рассматривается модель ценообразования при наличии ограничений на выбросы. Авторы анализируют стратегии поведения участников рынка в зависимости от того, ограничены ли для производителей и продавцов выбросы углекислого газа.

Авторы другой работы, посвящённой влиянию квот на экономику, рассматривают игровую модель взаимодействия государства и предприятий [14]. В работе делаются выводы об оптимальном поведении сторон с точки зрения эффективности государственного регулирования и устойчивого развития организаций. Работа представляет теоретический интерес с точки зрения

моделирования взаимодействия на рынке квот.

Важной задачей регулирования обращения с углеродными единицами является также нахождение оптимального способа распределения квот на выбросы. Практический аспект управления распределением квот в Китае рассматривается, например, в работе [13]. Авторы исследования анализируют уровень социально-экономического развития территорий и предлагают увязывать с ним распределение квот. Таким образом оптимизируются экологические показатели, а также выравниваются темпы развития регионов.

В ином контексте рассматривается торговля квотами в работе [12]. Обращение с углеродными единицами анализируется с точки зрения издержек и доходов, которые в связи с этим возникают. Сформулированная авторами задача является модификацией задачи календарного планирования инвестиционных проектов. Целью является нахождение расписания, минимизирующего издержки проекта. Все параметры в задаче считаются детерминированными. Для нахождения решения авторами разработан алгоритм на основе свёрточной нейронной сети.

В данной работе рассматривается модификация задачи календарного планирования инвестиционного проекта с квотами на объёмы выбросов углекислого газа. Целевой функцией выбрана величина экономического эффекта от обращения с углеродными единицами. При этом анализируется как детерминированная, так и недетерминированные постановки задачи.

## **2. Постановка задачи**

### *2.1. ОСНОВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ МОДЕЛИ*

Рассмотрим инвестиционный проект, при реализации которого используются квоты на выбросы. Общий срок реализации проекта составляет  $T$  лет, в течение которых должны быть выполнены  $N$  работ. Технологические и организационные взаимосвязи между работами можно описать с помощью отношений частичного порядка  $E$ . Сроки реализации работ задаются целым числом лет  $d_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . Пусть  $S = (s_1, s_2, \dots, s_N)$  – рас-

писание проекта, компоненты которого соответствуют моментам времени начала каждой из работ. Очевидно, что  $0 \leq s_j \leq T - d_j$ . Кроме того, для каждой пары работ  $(i, j) \in E$  должно выполняться условие  $s_i + d_i \leq s_j$ .

Каждую из работ в любой из моментов её реализации  $\tau \in \{1, \dots, d_j\}$  можно охарактеризовать планируемой величиной выбросов парниковых газов  $g_j(\tau)$ . В зависимости от подхода к моделированию данные величины могут быть детерминированными или случайными. Еще одним вариантом математического представления величины выбросов является использование нечётких чисел.

Если известна ежегодная величина квоты выбросов  $q(t)$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ , то единицей выполнения квоты в год  $t$  для расписания проекта  $S$  будем называть разность

$$(1) \quad e(t, S) = q(t) - \sum_{j \in V(t)} g_j(t - s_j),$$

где  $V(t)$  — множество работ, выполняемых в интервале  $[t, t + 1)$ . Если в какой-либо момент времени  $e(t, S) < 0$ , то вносится плата за превышение квоты  $h(t)$ . Положительное значение  $e(t, S)$  соответствует неизрасходованной части квоты. Неизрасходованные единицы выполнения квоты могут быть реализованы по цене  $p(t)$ . Такая схема торговли квотами между источниками загрязнений предусмотрена Федеральным законом №34-ФЗ [8].

Таким образом, рассматриваемая задача календарного планирования инвестиционного проекта заключается в поиске расписания  $S$ , соответствующего ограничениям на порядок работ и предельному сроку реализации проекта, а также максимизирующего экономический эффект  $R(S)$  от операций с единицами выполнения квоты. При расчёте экономического эффекта величины доходов и затрат по проекту необходимо дисконтировать [3].

Математическая модель задачи имеет вид:

$$(2) \quad R(S) = \sum_{t \in t^+} \frac{e(t, S) \cdot p(t)}{(1 + r_0)^t} + \sum_{t \in t^-} \frac{e(t, S) \cdot h(t)}{(1 + r_0)^t} \rightarrow \max_S,$$

$$(3) \quad s_i + d_i \leq s_j, (i, j) \in E,$$

$$(4) \quad 0 \leq s_j \leq T - d_j, j \in \{1, 2, \dots, N\},$$

где  $r_0$  – годовая ставка дисконтирования;  $t^+$  – множество моментов времени, в которые  $e(t, S) \geq 0$ , а  $t^-$  – множество моментов времени, в которые  $e(t, S) < 0$ .

Задача (2)–(4) календарного планирования с критерием оптимизации экономического эффекта от использования квот на выбросы является NP-трудной в сильном смысле даже в случае работ единичной длительности. Доказательство NP-трудности можно провести аналогично доказательству, приведённому в [7].

Для решения подобных задач успешно применяются эвристические алгоритмы оптимизации. Ранее авторами было разработано два эвристических алгоритма для задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами (RCPSP) и критерием максимизации чистой приведённой стоимости [1, 10]. Модифицируем эти алгоритмы, чтобы иметь возможность применять их для решения рассматриваемой задачи.

### 3. Эвристические алгоритмы решения задачи

Описание алгоритмов GASPIA и SASPIA для RCPSP с критерием максимизации чистой приведённой стоимости ( $NPV$ ) приведены в работе [10]. В основе обоих алгоритмов лежит генерация расписаний, допустимых для заданных условий частично-порядка и предельного срока проекта. Отношения частично-порядка представляются в виде взвешенного ориентированного графа. Весами графа выступают длительности проектных работ. В основе генерации допустимых расписаний лежит решение уравнения над идемпотентным полукольцом  $\mathbb{R}_{\max,+}$  [5]. Теорема о достаточном условии допустимости расписания по срокам

доказана в [1]. Коэффициентами уравнения выступают элементы матрицы смежности графа.

### 3.1. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА GASPIA

Предложенный ранее алгоритм GASPIA предполагает моделирование эволюции популяции векторов, соответствующих допустимым расписаниям инвестиционного проекта. Модель RCPSР для задачи с критерием максимизации  $NPV$  включает также ограничения на бюджет в каждый момент времени. При отборе расписаний штрафы за нарушение этих ограничений учитывались в составе функции приспособленности. Ещё одной особенностью алгоритма является процедура скрещивания, учитывающая прибыльность работ [1]. Для применения алгоритма к решению задачи (2)–(4) необходимо скорректировать функцию приспособленности и процедуру скрещивания. Этапы генерации, мутации и отбора расписаний остаются без изменений.

В рассматриваемой задаче ограничения на бюджет проекта отсутствуют, а штраф за превышение квот на выбросы учитывается в функции (2). Данная функция может быть непосредственно использована в качестве функции приспособленности.

В генетическом алгоритме GASPIA для пары родителей  $v^k$  и  $v^l$  генотип потомка задаётся вектором  $v^{k \times l}$  с компонентами

$$(5) \quad v_j^{k \times l} = \left| \min \left\{ C_0(j) \cdot v_j^k, C_0(j) \cdot v_j^l \right\} \right|,$$

где  $C_0(j) = 1$  для прибыльных работ и  $-1$  – для убыточных. В рассматриваемой задаче все работы можно рассматривать как убыточные. Дело в том, что использование квоты при выполнении определённой работы приводит к упущенному доходу от продажи соответствующей части квоты. Кроме того, превышение квоты ведёт к прямым потерям в виде величины уплачиваемого штрафа. Поэтому компоненты вектора-потомка будем вычислять по следующей формуле:

$$(6) \quad v_j^{k \times l} = \max\{v_j^k, v_j^l\}.$$

### 3.2. МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА SASPIA

При применении метода имитации отжига для решения оптимизационной задачи необходимо определить пространство пе-  
220

ременных модели, оптимизируемую функцию, закон изменения температуры, функцию вероятности принятия и правило генерации новых значений переменных. Ранее авторами был предложен алгоритм SASPIA для RCPSР с критерием максимизации  $NPV$ , базирующийся на методах идемпотентной алгебры [10]. Для применения этого алгоритма к рассматриваемой задаче необходимо изменить некоторые его элементы. Однако переменными в обоих случаях будут векторы  $v$  из идемпотентного полумодуля  $\mathbb{X}^N$ . Каждому такому вектору соответствует единственное расписание  $S$ , значение целевой функции для которого будем искать по формуле (2).

В качестве схем изменения температуры рассмотрим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(k) &= \frac{\mathcal{T}_0}{k}, \\ \mathcal{T}(k+1) &= \delta \mathcal{T}(k), \end{aligned}$$

где  $\mathcal{T}_0$  – начальное значение температуры,  $\delta$  – параметр, отвечающий за скорость убывания, а  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$  – номер шага. Предельное число шагов  $K$  является одним из параметров алгоритма. В качестве функции вероятности принятия будем использовать следующую зависимость:

$$h(\Delta R, \mathcal{T}) = \exp(\Delta R / \mathcal{T}).$$

При положительных значениях  $\Delta R$  величина  $h(\Delta R, \mathcal{T})$  будет больше 1. Это гарантирует переход к решению с большим значением функции  $R(S(v))$ . Для того чтобы получить новое решение  $v'$ , изменим случайно выбранную координату вектора  $v$ . Данное преобразование позволяет получить расписания  $S(v)$ , удовлетворяющие ограничениям (3)–(4).

#### 4. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим условный проект, состоящий из 14 работ. Проект должен быть завершён в течение 10 лет. Сетевой график про-

екта приведён на рис. 1. Метки с номерами 0 и 15 на рисунке соответствуют моментам начала и завершения проекта.

Все работы имеют единичную длительность и характеризуются одинаковой величиной выбросов  $g_j$  в размере 2 единицы. Будем считать, что квота  $q_t$  на выбросы в каждый момент времени равна 4 единицам. Штрафы  $h_t$  примем равными 10 денежным единицам за единицу выбросов, а цены  $p_t$  равными 5 денежным единицам. Для дисконтирования будем использовать ставку 10% годовых.

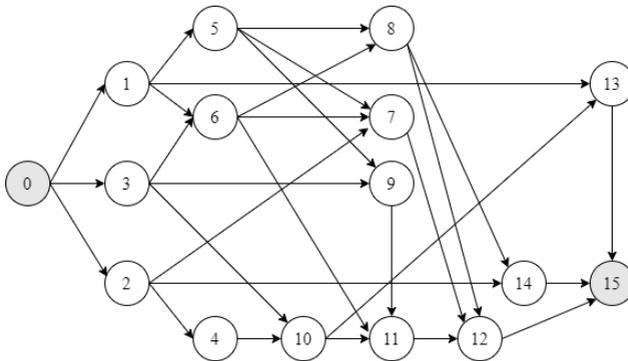


Рис. 1. Сетевой график проекта

Назовём ранним расписание проекта  $S_\alpha$ , в котором ни для одной работы начало не может быть заменено на более раннее без нарушения условий частичного порядка и неотрицательности компонент расписания. Поздним будем называть расписание  $S_\omega$ , ни одна из компонент которого не может быть увеличена. Нетрудно показать, что если цены реализации квот и штрафы за их превышение постоянны, а  $e(t, S_\omega) \geq 0$  для всех  $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ , то позднее расписание  $S_\omega$  будет оптимальным.

Для рассматриваемого проекта раннему и позднему расписанию соответствуют векторы

$$S_\alpha = (0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 4), R(S_\alpha) = -8,354,$$

$$S_\omega = (4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 7, 7, 8, 9, 9), R(S_\omega) = 41,531.$$

На рис. 2 для раннего и позднего расписаний в каждый момент времени приведены суммарные величины выбросов, а также размер квоты (пунктирная линия). Оба расписания предполагают реализацию проекта с уплатой штрафов за превышение квот.

Выполним поиск оптимального решения задачи, используя предложенные модификации алгоритмов GASPIA и SASPIA. Наилучшее найденное решение для обоих алгоритмов соответствует расписанию

$$S^* = (2, 5, 3, 4, 4, 6, 6, 8, 7, 7, 5, 8, 9, 9), R(S^*) = 49,054.$$

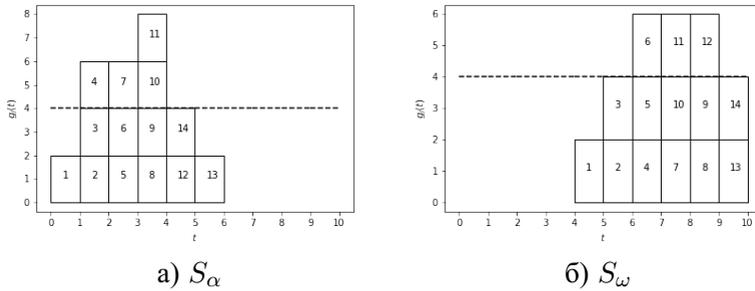


Рис. 2. Распределение выбросов во времени для раннего и позднего расписаний

На рис. 3 для расписания  $S^*$  в каждый момент времени приведены суммарные величины выбросов. В отличие от расписаний  $S_\alpha$  и  $S_\omega$  для оптимального расписания  $e(t, S^*) \geq 0$  для всех  $t \in \{1, 2, \dots, 14\}$ ! приведены результаты 100 экспериментов для модификации алгоритма SASPIA. Эксперименты показывают, что при выбранном числе шагов ( $k_{max} = 1000$ ) рассмотренные температурные схемы обеспечивают близкое качество решения.

Таблица 1. Результаты экспериментов

Температура	Среднее $R$	Отклонение, %
$\mathcal{T}(k) = \frac{5}{k}$	48,581	0,965
$\mathcal{T}(k+1) = 0,9\mathcal{T}(k)$	48,584	0,959

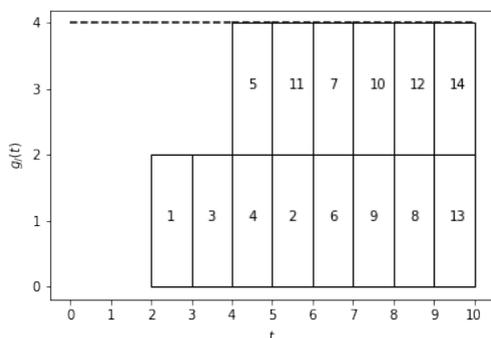


Рис. 3. Распределение выбросов для оптимального расписания  $S^*$

Для модификации GASPIA среднее из наилучших найденных  $R(S^*)$  для 100 экспериментов равно 48,848, а отклонение от наилучшего решения составляет 0,419 %.

Увеличим квоты на выбросы в 6, 7 и 8 периоды реализации проекта с 4 до 6 единиц. Тогда для позднего расписания  $S_\omega$  единицы реализации квот будут неотрицательными в течение всего срока реализации проекта. Позднее расписание для такой постановки обеспечивает экономический эффект  $R(S_\omega) = 69,607$ . Оба рассматриваемых алгоритма дают такое же значение оптимума.

### 5. Недетерминированные варианты задачи

Рассмотренный выше пример характеризуется фиксированными величинами выбросов. Однако на практике фактический объём выбросов может отличаться от запланированного. Это, в свою очередь, может повлиять на оптимальность выбранного расписания. Данная особенность делает целесообразным рассмотрение моделей с нефиксированными параметрами. Рассмотрим две из таких моделей: модель с нечёткими выбросами и модель со случайными выбросами.

### 5.1. МОДЕЛЬ С НЕЧЁТКИМИ ВЕЛИЧИНАМИ ВЫБРОСОВ

Пусть выбросы от каждой из работ  $j$  в момент времени  $\tau$  характеризуются нечёткими треугольными числами  $\tilde{g}_j(\tau)$ . Воспользуемся L-R-представлением треугольных чисел [4]. Тогда выбросы будут характеризоваться тройками вида

$$\tilde{g}_j(\tau) = (m_j(\tau), a_j(\tau), b_j(\tau)),$$

где  $m_j(\tau)$  – мода нечёткого числа, а  $a_j(\tau)$  и  $b_j(\tau)$  – коэффициенты нечёткости, задающие ожидаемую величину отклонений от моды.

Значения целевой функции в модели с нечёткими параметрами также представляют собой треугольные нечёткие числа. В процессе вычисления функции  $\tilde{R}(S)$  выполняются операции сложения и вычитания треугольных нечётких чисел, а также умножение нечёткого числа на чёткое. Эти операции не меняют тип нечёткого числа [4]. Кроме того, необходимо производить сравнение нечётких чисел с нулём. Будем считать нечёткое число  $(m, a, b)$  неотрицательным, если  $m - a \geq 0$ . Если треугольное число, характеризующее выполнение квоты в момент времени  $t$ , неотрицательно, то при расчёте экономического эффекта мы будем учитывать его с коэффициентом  $p(t)$ . В противном случае будем использовать коэффициент  $h(t)$  – штраф за превышение квоты.

Сравнение нечётких значений  $\tilde{R}(S)$  для различных расписаний может быть произведено с помощью ранжирующих функций [11]. В качестве примера рассмотрим формулу ожидаемого значения нечёткого треугольного числа  $\tilde{R}(S) = (R_m, R_a, R_b)$ :

$$(7) \quad \mathbf{E}(\tilde{R}(S)) = \frac{4R_m - R_a + R_b}{4}.$$

Продемонстрируем описанный подход на примере проекта, который рассмотрен выше. Заменим чёткие значения  $g_j = 2$  треугольными нечёткими числами  $\tilde{g}_j = (2, 1, 1)$ . Для раннего и позднего расписания имеем:

$$\tilde{R}(S_\alpha) = (6, 382, 203, 615, 101, 807), \mathbf{E}(\tilde{R}(S_\alpha)) = -19,07,$$

$$\tilde{R}(S_\omega) = (47, 740, 134, 645, 67, 322), \mathbf{E}(\tilde{R}(S_\omega)) = 30,91.$$

Наилучшее найденное решение задачи в нечёткой постановке соответствует расписанию

$$S^* = (0, 5, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 8, 7, 4, 8, 9, 9), \mathbf{E}(\tilde{R}(S^*)) = 69,274.$$

На рис. 4 приведено распределение выбросов для оптимального в нечёткой постановке расписания.

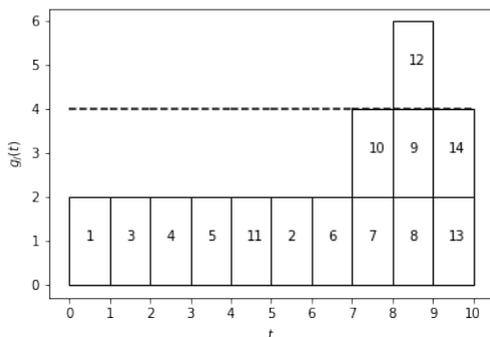


Рис. 4. Распределение выбросов для оптимального расписания  $S^*$  в нечёткой постановке

## 5.2. МОДЕЛЬ СО СЛУЧАЙНЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ ВЫБРОСОВ

Пусть выбросы от каждой из работ  $j$  в момент времени  $\tau$  характеризуются случайными величинами  $g_j(\tau)$  с известными распределениями  $F_{j\tau}$ . Будем считать эти случайные величины независимыми. Размер экономического эффекта от использования квот тоже представляет собой случайную величину. Для одного и того же расписания эта величина будет принимать различные значения в зависимости от случайных величин выбросов для каждой из работ. Тогда каждое расписание можно характеризовать распределением экономического эффекта. Для сравнения расписаний можно использовать величину математического ожидания эффекта или вероятность отклонения эффекта от запланированного значения. Ещё один вариант выбора расписания –

226

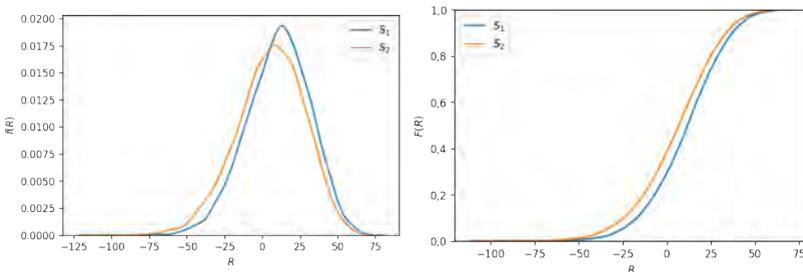
сравнение на основе стохастического доминирования [16]. Такой подход позволит выбрать расписание, которое обеспечит наилучший результат для заданных распределений случайных выбросов.

Пусть проект описывается сетевым графиком, изображённым на рис. 1. Поскольку величины выбросов должны принимать неотрицательные значения, воспользуемся для их моделирования распределением Вейбулла – Гнеденко. Параметры распределения подберём таким образом, чтобы мода распределения была равна 2. Будем считать, что для работ единичной длительности размер выбросов  $g_j \sim W(2\sqrt{2}, 2)$ . Сравним распределение экономического эффекта для расписаний:

$$S_1 = (2, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 8, 7, 7, 7, 8, 9, 9),$$

$$S_2 = (1, 2, 4, 2, 5, 3, 4, 7, 8, 6, 7, 8, 9, 9).$$

На рис. 5 приведены функции плотности и распределения экономического эффекта для рассматриваемых расписаний.



а) плотность

б) функция распределения

Рис. 5. Распределение экономического эффекта

Поскольку случайные значения целевой функции можно интерпретировать как доходы, для выбора наилучшего распределения можно использовать стохастическое доминирование I рода [2]. Доминирование 1-го порядка I рода для распределений  $P$  и  $G$  означает, что для функций распределения выполняется соотношение

$$(8) \quad F_P(x) \geq F_G(x), x \in R.$$

Доминирующее распределение можно рассматривать как менее рискованное. Рис. 5 показывает, что расписание  $S_1$  стохастически доминирует расписание  $S_2$ . Из этого следует, что при выборе монотонной меры риска расписание  $S_1$  будет предпочтительнее расписания  $S_2$ .

## **6. Выводы и перспективы**

В работе сформулирована новая модель задачи календарного планирования инвестиционных проектов, учитывающая экономические эффекты, возникающие при обращении с углеродными квотами. Рассмотрены детерминированная, стохастическая и нечёткие модификации задачи. Для всех модификаций проанализированы численные примеры и продемонстрирована возможность применения разработанных ранее алгоритмов GASPIA и SASPIA. Проведённые эксперименты для детерминированного случая демонстрируют высокое качество полученных решений. Для задач в нечёткой и стохастической постановке продемонстрирован подход к сравнению расписаний. В рамках дальнейшего исследования предполагается рассмотреть вариант многокритериальной задачи, учитывающей не только экономический эффект, но и проектные риски.

## **Литература**

1. БУЛАВЧУК А.М., СЕМЕНОВА Д.В. *Применение методов идемпотентной алгебры в генетическом алгоритме для решения задачи календарного планирования* // Прикладная дискретная математика. – 2022. – №58. – С. 112–124.
2. ВАРОЧКИНА Т.С., НОВОСЕЛОВ А.А. *Стохастическое доминирование I и II рода* // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. – 2004. – №5(2). – С. 15–21.
3. ВИЛЕНСКИЙ П.Л., ЛИВШИЦ В.Н., СМОЛЯК С.А. *Оценка эффективности инвестиционных проектов: Теория и практика*. – М.: Поли Принт Сервис, 2015. – 1300 с.

4. КОФМАН А. *Введение в теорию нечетких множеств*. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
5. ЛИТВИНОВ Г.Л., МАСЛОВ В.П., СОБОЛЕВСКИЙ А.Н. *Идемпотентная математика и интервальный анализ // Вычислительные технологии*. – 2001. – Т. 6, №6. – С. 47–70.
6. *Постановление Правительства Российской Федерации №1441 «О ставке платы за превышение квоты выбросов парниковых газов в рамках проведения эксперимента по ограничению выбросов парниковых газов на территории Сахалинской области»*. – 18.08.2022.
7. СЕРВАХ В.В., ЩЕРБИНИНА Т.А. *О сложности задачи календарного планирования проектов // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика*. – 2008. – Т. 8, Вып. 3. – С. 105–111.
8. *Федеральный закон №34-ФЗ «О проведении эксперимента по ограничению выбросов парниковых газов в отдельных субъектах Российской Федерации»*. – 06.03.2022.
9. *Федеральный закон №296-ФЗ «Об ограничении выбросов парниковых газов»*. – 02.07.2021.
10. BULAVCHUK A.M., SEMENOVA D.V. *Two heuristic algorithms for RCPSP with NPV criterion // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2023. – Vol. 16(5). – P. 639–650.
11. LIU B. *Theory and practice of uncertain programming*. – Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2009. – 213 p.
12. LIU H., ZHANG J., ZHANG X. et al. *A new resource-constrained project scheduling problem with ladder-type carbon trading prices and its algorithm based on deep reinforcement learning // Expert Systems with Applications*. – 2024. – Vol. 255. – P. 1–15.
13. TAO B., WU F., WANG X. et al. *Progressive optimization allocation model for carbon emission quotas: An empirical study of Jiangsu cities // Helyon*. – 2024. – Vol. 10, Iss. 13. – P. 1–14.

14. WANG H., FU X. *The impacts of regulatory approaches to carbon quotas on third-party logistics low-carbon financing strategies and emission reduction effects* // MDPI – 2024. – Vol. 16(15). – P. 1–27.
15. WANG J., SI F. *Research on supply chain pricing strategies under carbon emission quota constraints* // Academic Journal of Science and Technology. – 2023. – Vol. 7, No. 3. – P. 292–296.
16. WANG S. *Premium calculation by transforming the layer premium density* // ASTIN Bulletin. – 1996. – Vol. 26, Iss. 1. – P. 1–14.

## ON THE PROJECT SCHEDULING PROBLEM WITH THE CRITERION FOR OPTIMIZING THE ECONOMIC EFFECT FROM THE USE OF EMISSION QUOTAS

**Alexander Bulavchuk**, Siberian Federal University, Krasnoyarsk  
([abulavchuk@sfu-kras.ru](mailto:abulavchuk@sfu-kras.ru)).

**Daria Semenova**, Siberian Federal University, Krasnoyarsk,  
Cand.Sc., associate professor ([dvsemenova@sfu-kras.ru](mailto:dvsemenova@sfu-kras.ru)).

*Abstract: The paper considers a new project scheduling problem with the criterion of maximizing the economic effect of using emission quotas. The authors formulated a problem model that takes into account the peculiarities of the emerging practice of handling carbon units in Russia. The model provides for the possibility of selling unspent carbon units. The impact on the economic effect of fines for overspending quotas is also taken into account. The statement with deterministic characteristics and two non-deterministic varieties – stochastic and fuzzy – are analyzed. When describing projects, it was believed that emission values could be non-deterministic. In the stochastic statement, the case is analyzed when the model parameters are independent and have a Weibull – Gnedenko distribution. For this case, a variant of comparing schedules using first-order stochastic dominance is proposed. In the fuzzy statement, fuzzy triangular numbers were used to describe the project. A ranking function was used to select the best schedule. For each statement, approaches to solving the problem based on modifications of the GASPIA and SASPIA algorithms are demonstrated. The modified GASPIA algorithm used a new crossing scheme. For a conditional example of the project, computational experiments were conducted demonstrating the applicability of the proposed algorithms to solving the problem.*

Keywords: project scheduling problem, carbon quotas, heuristic algorithms, stochastic dominance, fuzzy ranking.

УДК 519.85

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Г.А. Угольницким.*

*Поступила в редакцию 14.10.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*

## **ВЫЯВЛЕНИЕ ОДИНОЧНЫХ АНОМАЛИЙ В ДАННЫХ ОБ ЭНЕРГОПОТРЕБЛЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ БЕЗ УЧИТЕЛЯ**

**Марьясин О. Ю.<sup>1</sup>, Тихомиров Л. И.<sup>2</sup>**

*(Ярославский государственный технический университет,  
Ярославль)*

*Описаны исследования по выявлению одиночных аномалий в данных об энергопотреблении на примере двух разных наборов данных. Рассмотрены способы построения типовых шаблонов энергопотребления и представлен авторский способ построения типового суточного профиля энергопотребления. Для проведения численных экспериментов авторами был выбран 21 метод машинного обучения без учителя, подходящий для выявления одиночных аномалий. По результатам численных экспериментов были отмечены методы, наиболее удачно справившиеся с задачей выявления одиночных аномалий. Особое внимание в работе уделялось методам, не требующим дополнительных параметров, и современным перспективным методам на базе искусственных нейронных сетей. Лучшими алгоритмами по результатам испытаний оказались статистические алгоритмы, основанные на построении гистограмм. Одной из главных проблем, затронутых в работе, является проблема настройки параметра contamination для каждого рассмотренного алгоритма. Одним из решений данной проблемы являются использование пороговых алгоритмов. Показано, что если исходный алгоритм выявляет аномалии недостаточно хорошо (параметр contamination не настроен), то применение пороговых алгоритмов может существенно повысить точность обнаружения аномалий. Отмечены пороговые алгоритмы, использование которых для задач анализа аномалий в данных об энергопотреблении чаще других обеспечивает повышение точности. Применять пороговые алгоритмы можно как к результатам работы отдельных алгоритмов выявления аномалий, так и к результатам работы ансамблей алгоритмов, полученных с использованием различных стратегий комбинирования.*

**Ключевые слова:** обнаружение одиночных аномалий, типовой суточный профиль энергопотребления, машинное обучение, пороговый алгоритм, ансамбли алгоритмов.

---

<sup>1</sup> Олег Юрьевич Марьясин, к.т.н., доцент (maryasin2003@list.ru).

<sup>2</sup> Леонид Игоревич Тихомиров, аспирант (lenusscik@yandex.ru).

## **1. Введение**

В настоящее время сетевые организации должны устанавливать приборы учета (ПУ) электроэнергии, обеспечивающие возможность присоединения к интеллектуальной системе учета электрической энергии (мощности) [2]. Такие системы обеспечивают непрерывную передачу данных от потребителей к энерго-сбытовым компаниям, из-за чего исчезает необходимость ручного снятия показаний с ПУ и появляются новые возможности, такие как возможность более детально следить за объёмом потребления электроэнергии, быстрее обнаруживать сбои и предоставлять потребителям больше доступной информации об их энергопотреблении.

Интеллектуальная система учета позволяет реализовать углубленный анализ данных об энергопотреблении. Такой анализ может использоваться для выявления показаний, сильно отклоняющихся от нормы, т.е. аномалий. Появление аномалий может быть связано как с перегрузками и внеплановыми отключениями электрической сети, так и с кражами электроэнергии из-за незаконных подключений к электросети, негативных воздействий на ПУ электроэнергии, с использованием энергоресурсов предприятий или организаций в личных целях. Выявление аномалий может стать основанием для более пристального наблюдения за профилем энергопотребления как со стороны энергоснабжающей организации, так и со стороны энергопотребителя.

Для анализа аномалий необходимо сначала определить, что будет считаться аномалией. Согласно [5] аномалия представляет собой данные, которые не соответствуют ожидаемому нормальному поведению. Следовательно, для обнаружения аномалий необходимо определить область, представляющую нормальное поведение, а любые данные, не принадлежащие этой области, объявить аномалиями. Но есть целый ряд факторов, усложняющих применение такого подхода [5]. Отметим только те факторы, которые можно отнести к анализу аномалий в данных об энергопотреблении:

– определить область, охватывающую все возможные варианты нормального поведения, очень сложно. Кроме того, граница между нормальным и аномальным поведением часто бывает размытой. Таким образом, аномальное наблюдение, лежащее близко к границе, может быть нормальным, и наоборот;

– злоумышленники часто стараются сделать так, чтобы аномальные наблюдения казались нормальными, тем самым усложняя задачу определения нормального поведения;

– доступность размеченных данных для обучения/проверки моделей, используемых при обнаружении аномалий, обычно является серьезной проблемой;

– часто данные содержат шум, который может быть похожим на аномалии.

В данной работе под аномалией мы будем понимать значительное отклонение энергопотребления от типовых значений энергопотребления или типового шаблона энергопотребления (ТШЭ), полученного для конкретного энергопотребителя и календарного периода времени. К сожалению, в настоящее время нет какой-либо общепринятой методики для построения ТШЭ. Некоторые известные из литературы способы представлены далее. Построение ТШЭ потребителей электроэнергии является начальным этапом при решении задачи выявления аномалий.

Все аномалии данных можно разделить на три группы [17]:

– одиночные (точечные) аномалии (выбросы) данных. Это одиночные данные, которые резко отличаются от других данных и выходят за допустимые пределы. Одиночные аномалии в данных об энергопотреблении могут быть связаны, например, с кратковременными перегрузками или отключениями от электросети у энергопотребителей;

– коллективные аномалии. Коллективные аномалии могут быть охарактеризованы как последовательности данных, имеющих похожий характер, но которые выходят за допустимые пределы. Коллективные аномалии могут быть связаны с длительными отключениями от электросети, с кражами электроэнергии, использованием энергоресурсов предприятий или организаций

в личных целях и другими факторами;

– контекстные аномалии. Контекстные аномалии могут быть представлены как последовательности данных, которые резко отличаются от других данных в том же контексте, но находятся в допустимых пределах. Контекстные аномалии могут быть связаны, например, с ошибками, возникающими при передаче данных от приборов учета.

В данной работе рассматривается применение различных методов машинного (и глубокого машинного обучения) для анализа только одиночных аномалий. При этом для выявления аномалий применяются исключительно методы машинного обучения, использующие обучение без учителя. Это позволяет избежать трудоемкого этапа разметки наборов данных, на основе которых производится обучение и проверка моделей машинного обучения. Основное внимание в работе отводится вопросу отбора наиболее результативных и перспективных методов выявления одиночных аномалий и способам повышения их возможностей.

## **2. Обзор литературы**

### *2.1. Методы построения ТШЭ*

Если для представления ТШЭ использовать «сырые» данные, а затем для анализа закономерностей применять методы кластеризации, например, метод  $k$ -средних, то при большом количестве признаков могут возникнуть проблемы, связанные с большой трудоемкостью расчетов [30]. Поэтому исследователи стремятся использовать для представления ТШЭ не «сырые» данные, а ограниченное число наиболее важных характеристик временного ряда данных об энергопотреблении. В [25] авторы для представления недельных шаблонов поведения временных последовательностей определили такие статистические показатели: среднее, стандартное отклонение, коэффициент асимметрии (skewness), коэффициент эксцесса (kurtosis), энергетическая характеристика, период сезонной составляющей временного ряда. Энергетическая характеристика рассчитывалась как сумма квадратов величин дискретных компонентов быстрого преобразова-

ния Фурье сигнала, деленная на длину окна нормализации.

В [11] авторы поделили сутки на четыре временных интервала: ночь, утро, день и вечер. Для каждого энергопотребителя вычислялось среднее значение мощности  $P_i$  в каждый период времени  $i = 1, 2, 3, 4$  и соответствующее стандартное отклонение  $\sigma_i$ . Кроме того, вычислялись: среднесуточная мощность для каждого энергопотребителя  $P_d$ , средние мощности для летнего  $P_{Si}$  и зимнего  $P_{Wi}$  сезонов в каждый период времени, средние мощности в выходные  $P_{WEi}$  и будние дни  $P_{WDi}$  в каждый период времени за все годы данных. На основании этих показателей для каждого энергопотребителя были определены следующие атрибуты:

– относительная средняя мощность в каждый период времени в течение всего года  $P_{Ri} = P_i/P_d$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ;

– среднее относительное стандартное отклонение за год как среднее значение от  $\sigma_i/P_i$  по всем периодам;

– сезонный показатель как сумма отношений  $|P_{Wi} - P_{Si}|/P_i$  по всем периодам;

– оценка разницы между выходными и будними днями как сумма отношений  $|P_{WDi} - P_{WEi}|/P_i$  по всем периодам.

Полученные атрибуты использовались в [11] для описания годового шаблона поведения энергопотребителей.

При построении ТШЭ важным моментом является задание периода времени, для которого определяются показатели. Это может быть неделя или год, как в рассмотренных ранее примерах, или сутки и месяц. Соответственно, могут быть построены суточные, недельные, месячные и годовые ТШЭ. Важность того или иного шаблона зависит от конкретного энергопотребителя, его профиля деятельности, климатических условий местности, где находится энергопотребитель, и других факторов. Для отдельных энергопотребителей может быть целесообразно использовать при анализе сразу несколько различных ТШЭ.

Данные энергопотребления для конкретного энергопотребителя, полученные в течение суток с периодом в один час, мы будем называть суточным профилем энергопотребления (СПЭ). То-

гда шаблон, представляющий профиль энергопотребления в течение суток и составленный на основе данных, собранных за различный период времени, мы будем называть типовым суточным профилем энергопотребления (ТСПЭ). Построение ТСПЭ дает важную информацию для выявления общих или специфических характеристик функционирования энергетических объектов [15].

В [1] для построения ТСПЭ был использован способ, основанный на идеях, представленных в [11] и [19]. В соответствии с данным способом календарные сутки разбиваются на определенное число временных интервалов. Количество и ширина интервалов должны быть связаны с графиком работы энергопотребителя. В [1] ТСПЭ строился для зданий Ярославского государственного технического университета (ЯГТУ). Как и в [11], сутки были разделены на четыре временных интервала: 00:00–07:00, 07:00–12:00, 12:00–18:00, 18:00–24:00. Для каждого интервала определялось среднее значение и среднеквадратическое отклонение энергопотребления. Кроме того, для каждых суток определялось минимальное и максимальное значение энергопотребления. Определение показателей за одни сутки показано на рис. 1.

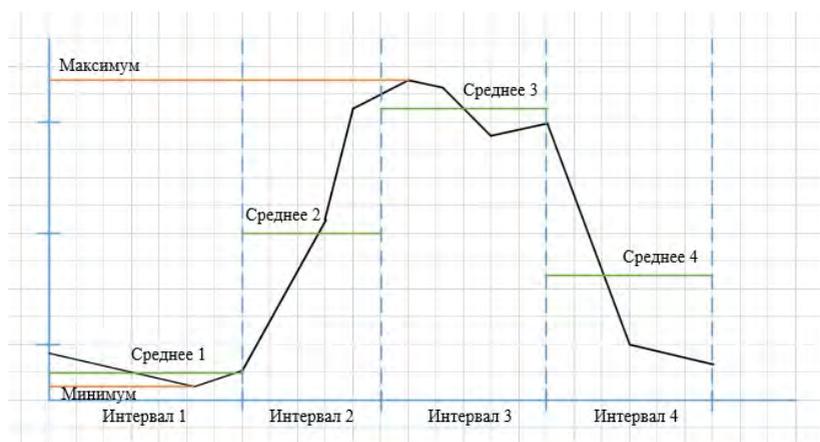


Рис. 1. Разбивка СПЭ на интервалы и определение средних значений

Далее рассчитывались подобные показатели для каждого интервала за весь месяц. Данные параметры были использованы для построения ТСПЭ энергопотребителя за каждый месяц года. На рис. 2 показана диаграмма, представляющая ТСПЭ для общежития номер 1 ЯГТУ за ноябрь 2021 года. Поскольку ТСПЭ строятся и хранятся для каждого месяца каждого года, то этим учитывается сезонность энергопотребления. По мнению авторов это дает больше информации, чем построение ТСПЭ за весь год.

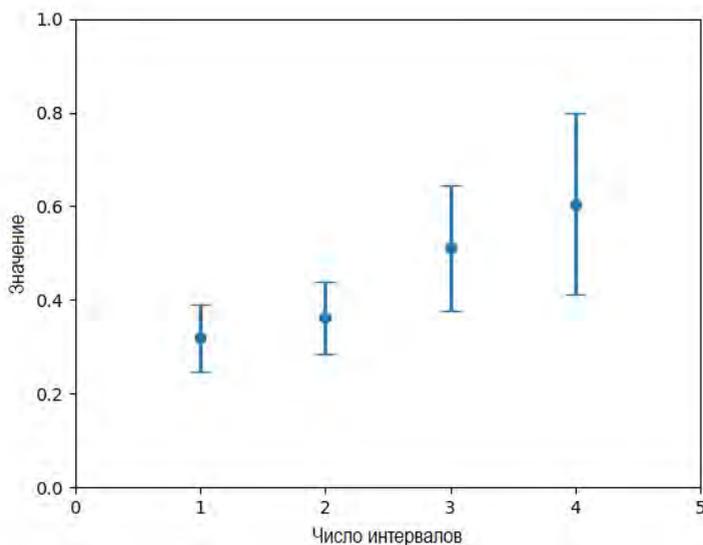


Рис. 2. Диаграмма ТСПЭ для общежития номер 1 ЯГТУ за ноябрь 2021 года

## 2.2. Методы выявления аномалий на основе машинного обучения

Методы машинного обучения, которые могут применяться для выявления аномалий в данных об энергопотреблении, включают как методы обучения без учителя (unsupervised learning), так и методы обучения с учителем (supervised learning) [12]. Методы обучения без учителя можно условно разделить на следующие

238

группы:

- методы кластеризации;
- методы понижения размерности;
- методы на основе линейных моделей;
- методы на основе локальной плотности;
- вероятностные методы;
- ансамблевые методы машинного обучения;
- методы на базе искусственных нейронных сетей (ИНС).

В данном разделе будут описаны только первые две группы методов, которые не применяются далее в данной работе. Это связано в основном с тем, что для работы этих методов требуется несколько признаков в данных. Представители остальных групп методов обучения без учителя будут рассмотрены в следующем разделе.

Классическим методом обучения без учителя для выявления закономерностей изменения электрической нагрузки, определения ТШЭ и наличия аномалий является кластеризация [24]. Кластеризация позволяет разделить данные об энергопотреблении на различные кластеры и, следовательно, помогает классифицировать их на нормальные или ненормальные. Среди методов кластеризации следует отметить метод иерархической кластеризации и алгоритм DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise). Иерархическая кластеризация была использована для анализа профилей электрической нагрузки двух зданий университетской библиотеки [16]. Алгоритм DBSCAN был применен для определения одиночных аномалий в данных об энергопотреблении зданий ЯГТУ [1].

Другими методами обучения без учителя, традиционно используемыми для выявления аномалий, являются методы снижения размерности. Алгоритмы снижения размерности, такие как анализ главных компонент (Principal Component Analysis – PCA), уменьшают размерность данных, одновременно пытаясь минимизировать ошибку их реконструкции. Наибольшая ошибка реконструкции будет генерироваться на тех данных, которые сложнее всего смоделировать, т.е. на данных, которые могут являться

аномальными. Применение PCA для выявления аномалий в данных об энергопотреблении описано в [28].

Среди методов обучения с учителем, которые могут использоваться для выявления аномалий, в последнее время все чаще применяются ИНС. Наиболее популярными нейросетевыми архитектурами, которые используются для решения этой задачи, являются сети долгой краткосрочной памяти (Long Short Term Memory – LSTM) и сверточные нейронные сети (convolutional NN – CNN).

В [31] сеть LSTM использовалась для прогнозирования аномалий в данных об энергопотреблении и их отличия от отклонений, возникающих в зависимости от сезонности, погоды и праздников. CNN также продемонстрировали свою эффективность при обнаружении аномалий в данных временных рядов. В [18] автор решил объединить CNN и случайный лес для отслеживания аномалий потребления электроэнергии из-за краж и тем самым помочь энергоснабжающим организациям решить проблемы, связанные с неэффективным контролем использования электроэнергии.

Использование методов обучения с учителем для выявления аномалий в данных об энергопотреблении требует обучения классификаторов (бинарных или многоклассовых) на основе размеченных наборов данных, где отмечено нормальное или аномальное энергопотребление. Хотя обнаружение аномалий с применением методов обучения с учителем может дать более точные результаты, его использование ограничено на практике по сравнению с методами без учителя из-за большой трудоемкости создания размеченных наборов данных об энергопотреблении. Другой проблемой, возникающей при применении методов обучения с учителем, является то, что аномалии возникают относительно редко. Это приводит к тому, что, при классификации, классы нормальных и аномальных данных будут сильно не сбалансированы, что оказывает влияние на результаты анализа и делает их менее достоверными.

### **3. Выявление одиночных аномалий в данных об энергопотреблении**

#### **3.1. Методы обнаружения одиночных аномалий**

В данной работе для анализа одиночных аномалий рассматриваются различные методы машинного обучения без учителя, среди которых есть как уже хорошо зарекомендовавшие себя, так и методы, появившиеся совсем недавно. Далее в работе понятия «метод» и «алгоритм» будут считаться синонимами и подменять друг друга, хотя с более строгой точки зрения это не так. Различные алгоритмы выявления одиночных аномалий приведены в таблице 1. На выбор методов повлияли такие обстоятельства, как опыт работы авторов с данными алгоритмами, красота и перспективность идеи, заложенной в алгоритм, и то, что большинство из них хорошо показали себя в численных экспериментах. Данные алгоритмы далее будут называться детекторами. Методы распределены по категориям, но некоторые из них можно отнести сразу к нескольким категориям. Для того чтобы не указывать ссылки на литературу для каждого метода и, соответственно, сократить объем статьи, здесь будет указан только один источник [8], где можно найти ссылки на литературу для каждого из перечисленных алгоритмов.

Особое внимание в работе будет уделяться алгоритмам, не требующим дополнительных параметров, таких как ROD, COPOD и ECOD, а также детекторам на базе ИНС. Эти методы, по мнению авторов, являются наиболее перспективными для применения на практике. Ну и конечно будут отмечены те алгоритмы, которые покажут хорошие результаты в обнаружении аномалий. Для них далее будет кратко приведен некоторый теоретический материал, лежащий в основе данных алгоритмов.

Детектор Histogram-based Outlier Score (HBOS) [9] определяет аномалии на основе построения гистограммы данных. В HBOS для каждого отдельного признака сначала строится одномерная гистограмма. Для категориальных признаков выполняется простой подсчет значений каждой категории и вычисляется отно-

Таблица 1. Методы анализа одиночных аномалий

Категория	Метод	Год	Описание
Линейная модель	MCD	1999	Minimum Covariance Determinant
	OCSVM	2001	One-Class Support Vector Machines
На основе плотности	LOF	2000	Local Outlier Factor
	KNN	2000	K-Nearest Neighbors
	CBLOF	2003	Clustering-Based Local Outlier Factor
	HBOS	2012	Histogram-based Outlier Score
	ROD	2020	Rotation-based Outlier Detection
Ансамблевые методы	IF	2008	Isolation Forest
	LODA	2016	Lightweight On-line Detector of Anomalies
	DIF	2023	Deep Isolation Forest
Вероятностные методы	QMCD	2001	Quasi-Monte Carlo Discrepancy
	KDE	2007	Outlier Detection with Kernel Density Functions
	Sampling	2013	Rapid distance-based outlier detection via sampling
	COPOD	2020	Copula-Based Outlier Detection
	ECOD	2022	Outlier Detection Using Empirical Cumulative Distribution Functions
ИНС	VAE	2013	Variational AutoEncoder
	AE	2015	Fully connected AutoEncoder
	DeepSVDD	2018	Deep Support Vector Data Description
	ALAD	2018	Adversarially learned anomaly detection
	SOGAAL	2019	Single-Objective Generative Adversarial Active Learning
	LUNAR	2022	Unifying Local Outlier Detection Methods via Graph Neural Networks

сительная частота. Для числовых признаков можно использовать два разных метода: статические гистограммы ширины бина и динамические гистограммы ширины бина. Первый метод – это стандартный метод построения гистограмм с использованием  $k$  бинов одинаковой ширины. Частота (относительное количество) экземпляров, попадающих в каждый бин, используется в качестве оценки плотности вероятности (высоты бинов). Динамическая ширина бина определяется следующим образом. Сначала значения сортируются, а затем фиксированное количество из  $N/k$  последовательных значений группируется в один бин, где  $N$  – общее количество экземпляров, а  $k$  – количество бинов. Поскольку ширина ячейки определяется первым и последним значением, а площадь одинакова для всех ячеек, можно вычислить высоту каждой отдельной ячейки. Это означает, что ячейки, охватывающие больший интервал диапазона значений, имеют меньшую высоту и, таким образом, представляют меньшую плотность. Однако есть одно исключение: при определенных обстоятельствах более  $k$  экземпляров данных могут иметь одинаковое значение, например, если признак является целым числом, и необходимо оценить распределение с длинным хвостом. В этом случае алгоритм должен допускать наличие более  $N/k$  значений.

Поскольку задачи обнаружения аномалий обычно включают пробелы в диапазонах значений из-за того, что выбросы далеки от нормальных данных, рекомендуется использовать режим динамической ширины, особенно если распределения неизвестны или имеют длинный хвост. Кроме того, необходимо также задать количество бинов  $k$ . Часто используемое практическое правило заключается в задании значения  $k$  как квадратный корень из количества экземпляров  $N$ .

Для каждого признака  $d$  строится индивидуальная гистограмма (независимо от того, категориальная ли она, фиксированной ширины или динамической ширины), где высота каждого отдельного бина представляет собой оценку плотности. Затем гистограммы нормализуются таким образом, чтобы максимальная высота была равна 1.0. Наконец, оценка вероятностей обнару-

жения аномалий HBOS для каждого экземпляра  $p$  вычисляется с использованием соответствующей высоты бинов, в которых находится экземпляр

$$HBOS(p) = \sum_{i=1}^d \log \left( \frac{1}{hict_i(p)} \right).$$

Rotation-based Outlier Detection (ROD) [3] рекомендуется к применению для обнаружения аномалий в многомерных данных, где количество признаков больше или равно 3. Сначала полное пространство признаков разбивается на комбинации 3D-подпространств, в которых векторы, представляющие точки данных в 3D-подпространстве, вращаются вокруг геометрической медианы два раза против часовой стрелки с использованием формулы вращения Родригеса. Результатом вращения являются параллелепипеды, объемы которых интерпретируются как функции стоимости и используются для определения медианных абсолютных отклонений, которые, в свою очередь, служат для получения оценок аномалий для каждого 3D-подпространства. Затем оценки аномалий полного пространства реконструируются путем взятия среднего значения оценок аномалий всех 3D-подпространств. Наконец, все данные ранжируются в порядке убывания их оценок, и данные с наивысшими оценками рассматриваются как перспективные кандидаты на аномалии.

Связь объема параллелепипеда с функцией стоимости устанавливает следующая теорема.

**Теорема 1** (см. [3, с. 3]). Пусть  $D = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in \mathbb{R}^3$  – набор векторов, представляющих точки данных трехмерного набора данных. Если  $t \in \mathbb{R}^3$  – единичный вектор геометрической медианы в  $D$ , описывающий ось вращения, то можно доказать, что  $\forall v \in D$  независимого от  $t$ , ориентированный объем параллелепипеда, образованного вращением  $v$  два раза вокруг  $t$ , согласно правилу правой руки, на два последовательных угла  $\theta_1 < \theta_2 \in (0, 2\pi)$ , используя формулу вращения Родригеса, может быть аппроксимирован функцией стоимости, заданной как

$$(1) \quad f(v, \gamma) = \|v\|^3 (\cos(\gamma) \sin(\gamma^2)),$$

где  $\gamma$  – угол между  $v$  и  $t$ .

Уравнение (1) описывает различия между векторами в наборе данных относительно их величин и угла  $\gamma$ , который отражает степень отклонения от  $m$ .

Детектор Lightweight On-line Detector of Anomalies (LODA) [23] определяет набор  $k$  одномерных гистограмм  $\{h_i\}_{i=1}^k$  каждая из которых аппроксимирует плотность вероятности данных, спроецированных на один вектор проекции  $\{w_i \in \mathbb{R}^d\}_{i=1}^k$ . Векторы проекции  $\{w_i\}_{i=1}^k$  диверсифицируют отдельные гистограммы, что является существенным требованием для улучшения производительности одного детектора для ансамблевых систем.

Выходы  $LODA(x)$  представляют собой среднее значение логарифма вероятностей, вычисленных для отдельных векторов проекций. Приняв  $\hat{p}_i$  для обозначения вероятности, оцененной по  $i$ -й гистограмме, и  $w_i$  для обозначения соответствующего вектора проекции, выход  $LODA(x)$  можно записать как

$$LODA(p) = -k \sum_{i=1}^k \log(\hat{p}_i(x^\top w_i)),$$

что можно переформулировать как

$$(2) \quad LODA(p) = -\log\left(\prod_{i=1}^k \hat{p}_i(x^\top w_i)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Уравнение (2) показывает, что выход LODA пропорционален отрицательному логарифмическому правдоподобию, что означает, что чем менее вероятна точка выборки, тем выше значение выхода, которое она получает, и тем вероятнее она является аномалией. Это выполняется при сильном предположении, что распределения вероятностей на векторах проекций  $w_i$  и  $w_j$  независимы  $\forall i, j \in k, i \neq j$ . Несмотря на то, что это почти никогда не бывает верно на практике, LODA все равно дает очень хорошие результаты. Авторы алгоритма считают, что причины этого аналогичны причинам в наивных байесовских классификаторах, которые дают условия, при которых эффекты условных зависимостей аннулируются.

Copula-Based Outlier Detection (COPOD) [20] основан на использовании функции «копула» для моделирования многомерно-

го распределения данных. СОРОD использует непараметрический подход, основанный на подгонке эмпирических кумулятивных функций распределения (Cumulative Distribution Functions – CDF), называемых «эмпирическими копулами». Пусть  $X$  –  $d$ -мерный набор данных с  $n$  наблюдениями. Эмпирическая CDF определяется как

$$(3) \quad \hat{F}(x) = P((-\infty, x]) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i < x),$$

где  $I$  – так называемая индикаторная функция.

СОРОD – это трехэтапный алгоритм, который принимает  $d$ -мерный входной набор данных  $X = (X_{1,i}, X_{2,i}, \dots, X_{d,i})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и выдает вектор оценок  $O(X)$ . На первом этапе СОРОD подгоняет  $d$  эмпирических левых хвостовых CDF  $\hat{F}_1(x), \dots, \hat{F}_d(x)$ , используя уравнение (3), и  $d$  эмпирических правых хвостовых CDF  $\bar{F}_1(x), \dots, \bar{F}_d(x)$ , заменяя  $X$  на  $-X$ . Также вычисляется вектор асимметрии,  $b = [b_1, \dots, b_d]$ , где

$$b_j = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^3}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2}},$$

где  $x_i$  –  $i$ -е наблюдение,  $\bar{x}_i$  – математическое ожидание  $i$ -го наблюдения.

На втором этапе для каждого  $X_i$  вычисляют наблюдения эмпирических копул  $\hat{U}_{d,i} = \hat{F}_d(x_i)$  и  $\hat{V}_{d,i} = \bar{F}_d(x_i)$  для левого и правого хвостов соответственно. Далее вычисляют скорректированные на асимметрию наблюдения эмпирических копул  $\hat{W}_{d,i} = \hat{U}_{d,i}$ , если  $b_j < 0$ , в противном случае  $\hat{W}_{d,i} = \hat{V}_{d,i}$ .

На третьем этапе вычисляется оценка

$$O_d(X_i) = \max\{(-\log(\hat{U}_{d,i}) - \log(\hat{V}_{d,i}))/2, -\log(\hat{W}_{d,i})\},$$

которая представляет собой степень аномальности измерения  $d$ . Затем оценки по всем измерениям агрегируются. Чем выше значение оценки, тем выше вероятность того, что точка окажется аномалией.

Outlier Detection Using Empirical Cumulative Distribution Functions (ECOD) [21] еще один алгоритм от авторов СОРОD.

Он также основан на том факте, что аномалии являются «редкими событиями», которые проявляются в хвостах распределения. Отличается от СОРОD тем, что финальная оценка вычисляется как

$$O_d(X_i) = \max\{-\log(\hat{U}_{d,i}), -\log(\hat{V}_{d,i}), -\log(\hat{W}_{d,i})\}.$$

Применение обычных автоэнкодеров (AutoEncoders – AE) и вариационных автоэнкодеров (Variational AutoEncoder – VAE) основано на том, что обученные на большом количестве нормальных данных они будут давать значительную ошибку реконструкции при подаче на вход аномальных данных. Структура нейронных сетей энкодера и декодера для AE принимается зеркально-симметричной. У VAE структура нейронных сетей энкодера и декодера может отличаться. Главное, чтобы число нейронов на входе энкодера совпадало с числом нейронов на выходе декодера.

VAE стремится построить некоторый генеративный процесс [4], предельное правдоподобие которого может быть описано как

$$\log(p_\theta(x | z)) = D_{kl}(q_\phi(z | x) \| p_\theta(z)) + L(\theta, \phi, x, z),$$

где  $D_{kl}(\|)$  – расстояние Кульбака – Лейблера;  $p_\theta(x | z)$  – распределение вероятности данных  $x$  при заданных латентных переменных  $z$ ;  $q_\phi(z | x)$  – распределение вероятности латентных переменных  $z$  при заданных  $x$ ;  $p_\theta(z)$  – распределение вероятности латентных переменных  $z$ ;  $L(\theta, \phi, x, z)$  – нижняя граница предельного правдоподобия;  $\phi, \theta$  – параметры распределений энкодера и декодера VAE соответственно. Тогда задача VAE сводится к максимизации нижней границы предельного правдоподобия, которое удовлетворяет условию

$$(4) \quad \begin{cases} \log(p_\theta(x | z)) \geq L(\theta, \phi, x, z) = E_{q_\phi(z|x)}[\log(p_\theta(x | z))] - \\ -D_{kl}(q_\phi(z | x) \| p_\theta(z)). \end{cases}$$

Чтобы сделать оптимизацию в уравнении (4) практически реализуемой, обычно делаются следующие предположения. Априорное  $q_\phi(z | x)$  распределение задается как нормальное распределение с диагональной ковариационной матрицей. Априорное распределение вероятностей принимается равной  $N(0, I)$ . Представление распределений таким образом позволяет исполь-

зовать «трюк репараметризации», где случайная величина  $z_i$  параметризуется как дифференцируемое преобразование

$$z_i = \mu_i + \sigma_i \epsilon,$$

где  $\mu_i, \sigma_i$  – среднее значение и среднеквадратическое отклонение, предсказанное энкодером;  $\epsilon$  – случайное число из  $N(0, I)$ .

$\beta$ -VAE представляет собой модификацию VAE [13], которая вводит регулируемый гиперпараметр  $\beta$  в выражение (4):

$$\begin{cases} \log(p_\theta(x | z)) \geq L(\theta, \phi, x, z) = E_{q_\phi(z|x)}[\log(p_\theta(x | z))] - \\ -\beta D_{kl}(q_\phi(z | x) \parallel p_\theta(z)). \end{cases}$$

Детектор Deep Support Vector Data Description (Deep SVDD) или Deep One-Class Classification основан на методе Support Vector Data Description (SVDD) [26]. Задачей SVDD является нахождение гиперсферы минимального объема, которая охватывает большую часть данных в пространстве признаков, а аномальные данные выходят за пределы гиперсферы. В Deep SVDD для построения гиперсферы используется специально обученная нейронная сеть.

Примем, что  $X \subseteq \mathbb{R}^d$  пространство входных данных, а  $F \subseteq \mathbb{R}^p$  пространство выходных признаков. Пусть отображение  $\phi(\cdot, W): X \rightarrow F$  будет нейронной сетью с  $L \in N$  скрытыми слоями и набором весов  $W = \{W^1, \dots, W^L\}$ , где  $W^l$  – веса слоя  $l \in \{1, \dots, L\}$ . Тогда  $\phi(x, W) \in F$  – это преобразование признаков данных  $x \in X$ , заданное сетью  $\phi$  с параметрами  $W$ . Задачей Deep SVDD является совместное обучение параметров сети  $W$  и минимизация объема гиперсферы, содержащей данные, в выходном пространстве  $F$ , характеризующейся радиусом  $R > 0$  и центром  $c \in F$ .

Для набора обучающих данных  $D_n = x_1, \dots, x_n$  на  $X$  цель обучения Deep SVDD с мягкой границей (soft-boundary Deep SVDD) определяется как

$$(5) \quad \begin{cases} \min_{R, W} \{R^2 + \frac{1}{vn} \sum_{i=1}^n \max\{0, \|\phi(x_i, W) - c\|^2 - R^2\} + \\ + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^L \|W^l\|_F^2\}. \end{cases}$$

Первое слагаемое  $R^2$  минимизирует размер гиперсферы. Второе слагаемое – это штрафной член для точек, лежащих вне

сферы после прохождения через сеть, т.е. если расстояние от точки до центра  $\| \phi(x_i, W) - c \|$  больше радиуса  $R$ . Гиперпараметр  $\nu \in (0, 1]$  контролирует компромисс между размером сферы и нарушениями границы, т.е. позволяет некоторым точкам отображаться вне сферы. Последний член – это регуляризатор на параметрах сети  $W$  с гиперпараметром  $\lambda > 0$ , где  $\| \cdot \|_F$  обозначает норму Фробениуса.

Оптимизация цели (5) позволяет обучить параметры  $W$  таким образом, чтобы точки данных были сопоставлены с центром гиперсферы. В результате нормальные примеры данных будут располагаться близко к центру  $c$ , тогда как аномальные примеры будут находиться дальше от центра или за пределами гиперсферы.

Для случая, когда большинство данных  $D_n$  являются нормальными, что часто бывает в задачах анализа аномалий, предлагается упрощенный вариант цели (5). Тогда цель One-Class Deep SVDD определяется как

$$(6) \quad \begin{cases} \min_W \{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \| \phi(x_i, W) - c \|^2 + \\ + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^L \| W^l \|^2_F \}. \end{cases}$$

One-Class Deep SVDD использует квадратичную функцию потерь для штрафования расстояния каждого представления, полученного путем преобразования сети  $\phi(x, W)$ , до центра  $c \in F$ . Второй член (6), так же как и в (5), является регуляризатором на весах сети с гиперпараметром  $\lambda > 0$ . Можно думать о One-Class Deep SVDD как о поиске гиперсферы минимального объема с центром  $c$ . Но в отличие от Deep SVDD с мягкой границей, где гиперсфера сжимается путем штрафования радиуса на прямую и представлений данных, которые выпадают за пределы сферы, One-Class Deep SVDD сжимает сферу путем минимизации среднего расстояния всех представлений данных до центра.

Детектор Adversarially learned anomaly detection (ALAD) применяет для обнаружения аномалий двунаправленную генеративно-состязательную сеть (Bidirectional Generative Adversarial Networks – BiGAN) [32]. ALAD использует ошибки реконструкции, чтобы определить, является ли выборка данных аномальной.

Формально, определим  $p_X(x)$  как распределение по данным  $x$  в пространстве данных  $X$ , а  $p_Z(z)$  – распределение по скрытым переменным генератора  $z$  в латентном пространстве  $Z$ . Тогда обучение GAN заключается в поиске такого дискриминатора  $D$  и генератора  $G$ , которые решают задачу нахождения седловой точки  $\min_G \max_D V(D, G)$ , где

$$V(D, G) = E_{X \sim P_X} [\log(D(x))] + E_{Z \sim P_Z} [\log(1 - D(G(x)))].$$

Решение задачи поиска седловой точки описываются Леммой 1, которая показывает, что оптимальный генератор позволяет получить распределение  $p_G(x)$ , которое соответствует истинному распределению данных  $p_X(x)$ .

**Лемма 1** (см. [32, с. 2]). *Для фиксированного  $G$  оптимальный дискриминатор  $D_G^*$  равен*

$$D_G^* = \frac{p_X(x)}{p_X(x) + p_Z(z)},$$

*и для этого оптимального дискриминатора  $D_G^*$  глобальный минимум критерия обучения  $C(G) = \max_D V(D, G)$  достигается тогда и только тогда, когда  $p_G(x) = p_X(x)$ .*

Существует несколько подходов, которые можно использовать для адаптации GAN для обнаружения аномалий. Один из подходов заключается в «инвертировании» генератора для поиска латентных переменных  $z$ , которые минимизируют ошибку реконструкции с помощью стохастического градиентного спуска [27]. Такой подход является вычислительно затратным, поскольку каждое вычисление градиента требует обратного распространения через сеть генератора. Сеть ALAD объединяет два подхода: Adversarially Learned Inference (ALI) [6] и Adversarially Learned Inference Conditional Entropy (ALICE) [14]. Основная идея подхода ALI состоит в замене генератора в GAN на пару «энкодер  $E$  и декодер (генератор)  $G$ ». Вычисление латентного представления  $z$  для точки данных  $x$  в этом случае выполняется просто путем пропуска  $x$  через сеть энкодера, что приводит к значительному снижению вычислительных затрат.

Формально модель BiGAN сравнивает совместные распределения  $p_G(x, z) = p_Z(z)p_G(x | z)$  и  $p_E(x, z) = p_X(x)p_E(z | x)$ .

Для этого разыгрывается состязательная игра. Сеть дискриминатора  $D_{xz}$ , принимает  $x$  и  $z$  в качестве входных данных и учится различать их совместные распределения, в то время как сети энкодера и генератора обучаются обманывать дискриминатор. ViGAN определяют дискриминатор  $D_{xz}$ , генератор  $G$  и энкодер  $E$  как решение задачи поиска седловой точки  $\min_{GE} \max_{D_{xz}} V(D_{xz}, E, G)$  с  $V(D_{xz}, E, G)$ , определяемой как

$$\begin{cases} V(D_{xz}, E, G) = E_{X \sim P_X} [\log(D_{xz}(x, E(x)))] + \\ + E_{Z \sim P_Z} [\log(1 - (D_{xz}(G(z), z)))] \end{cases}$$

Решения задачи поиска седловой точки и свойство соответствия распределений  $p_E(x, z) = p_G(x, z)$  описываются Леммой 2.

**Лемма 2** (см. [32, с. 3]). *При фиксированных  $E$  и  $G$  оптимальный дискриминатор  $D_{xz}^*$  равен*

$$D_{xz}^* = \frac{p_E(x, z)}{p_E(x, z) + p_G(x, z)},$$

*и для этого оптимального дискриминатора  $D_{xz}^*$  глобальный минимум критерия обучения  $C(E, G) = \max_{D_{xz}} V(D_{xz}, E, G)$  достигается тогда и только тогда, когда  $p_E(x, z) = p_G(x, z)$ .*

На практике совместные распределения  $p_E(x, z)$  и  $p_G(x, z)$  могут быть не идентичны, поскольку обучение не обязательно сходится к решению проблемы поиска седловой точки. Это приводит к нарушению условия циклической согласованности по переменным  $x$ , когда  $G(E(x)) \neq x$  [6]. Такое нарушение создаст проблемы для методов обнаружения аномалий, основанных на реконструкции.

Для решения этой проблемы подход ALICE [14] предлагает использовать условную энтропию  $H^\pi(x | z) = -E_{\pi(x, z)}[\log \pi(x | z)]$  (где  $\pi(x, z)$  – это совместное распределение по  $x$  и  $z$ ) так, чтобы способствовать выполнению условия циклической согласованности. Это соответствует задаче поиска седловой точки  $\min_{GE} \max_{D_{xz}} V_{ALICE}(D_{xz}, E, G)$ , которая включает регуляризацию условной энтропией ( $V_{CE}$ ) наложенной на энкодер  $E$  и генератор  $G$ :

$$V_{ALICE}(D_{xz}, E, G) = V(D_{xz}, E, G) + V_{CE}(E, G).$$

Регуляризацию условной энтропией можно аппроксимировать с помощью дополнительной сети дискриминатора  $D_{xx}(x, x)$ :

$$\begin{cases} V(D_{xx}, E, G) = E_{X \sim P_X}[\log(D_{xx}(x, x))] + \\ + E_{Z \sim P_Z}[\log(1 - (D_{xx}(G(E(x))))], \end{cases}$$

и, как показано в [13], такой дискриминатор действительно обеспечивает циклическую согласованность.

Чтобы улучшить обучение базовой модели ALICE, авторы [32] ввели еще одну регуляризацию условной энтропией  $H^\pi(z | x) = -E_{\pi(x,z)}[\log \pi(z | x)]$  с помощью дополнительного дискриминатора  $D_{zz}$

$$\begin{cases} V(D_{zz}, E, G) = E_{X \sim P_X}[\log(D_{zz}(z, z))] + \\ + E_{Z \sim P_Z}[\log(1 - (D_{zz}(E(G(x))))]. \end{cases}$$

Объединяя все вместе, метод ALAD решает следующую задачу поиска седловой точки:

$\min_{GE} \max_{D_{xz}, D_{xx}, D_{zz}} V(D_{xz}, D_{xx}, D_{zz}, E, G)$ , где  $V(D_{xz}, D_{xx}, D_{zz}, E, G)$  определяется как

$$\begin{cases} V(D_{xz}, D_{xx}, D_{zz}, E, G) = V(D_{xz}, E, G) + V(D_{xx}, E, G) + \\ + V(D_{zz}, E, G). \end{cases}$$

Таким образом модель ALAD содержит целых пять ИНС. Это сети для энкодера  $E$ , генератора  $G$  и трех дискриминаторов  $D_{xx}$ ,  $D_{zz}$ ,  $D_{xz}$ , обучаемые состязательным образом.

### 3.2. Наборы данных

В настоящее время не наблюдается большого выбора публичных датасетов с данными об энергопотреблении, которые можно использовать для тестирования алгоритмов обнаружения аномалий. Наиболее известным из таких наборов данных является датасет LEAD1.0 (Large-scale Energy Anomaly Detection) [10]. По словам авторов, этот набор данных на данный момент является крупнейшим для анализа энергетических аномалий в открытом доступе. Датасет LEAD1.0 использовался в соревнованиях Great Energy Predictor III, проходивших в 2019 году на платформе Kaggle.

В LEAD1.0 собраны данные почасовых показаний с 1413 ПУ электроэнергии, охватывающих 16 различных типов зданий за один год. Главным достоинством датасета LEAD1.0 является то,

что он размечен на нормальные и аномальные данные. По словам авторов, процесс разметки включал ручную проверку приблизительно 12 миллионов точек данных. Всего было выявлено 199 640 аномальных случаев. Хотя авторы [10] провели титаническую работу, некоторые важные моменты они оставили неописанными в своей статье. Например, не ясно, как определялись недельные и месячные ТШЭ, которые использовались для определения аномалий.

Несмотря на это, датасет LEAD1.0 был использован в данной работе в качестве основного для тестирования алгоритмов обнаружения одиночных аномалий. Недостатком этого набора данных при анализе одиночных аномалий является то, что в нем присутствуют как одиночные, так и коллективные аномалии. Причем для некоторых зданий коллективные аномалии являются преобладающими. Можно рассматривать коллективные аномалии как множество одиночных, но такой подход имеет следующие недостатки:

- для некоторых типов коллективных аномалий снижается эффективность методов, рассчитанных на выявление одиночных аномалий;
- для выявления коллективных аномалий существуют отдельные эффективные методы.

Поэтому далее при выполнении численных экспериментов с датасетом LEAD1.0 один из типов коллективных аномалий был исключен.

В качестве дополнительного набора данных использовался датасет, составленный из почасовых данных энергопотребления двух зданий ЯГТУ за шесть месяцев 2020 и 2021 годов. Данный набор данных будем называть датасет ЯГТУ. Он удобен тем, что в нем присутствуют только одиночные аномалии. Датасет был размечен авторами ранее с применением описанного в разделе 2.1 ТСПЭ на основании предыдущих исследований [22].

### *3.3. Инструменты для выявления одиночных аномалий*

Язык Python сейчас является наиболее популярным языком программирования для анализа данных, в том числе и в области

анализа аномалий. Функции, реализующие алгоритмы выявления одиночных аномалий, имеются во многих библиотеках языка Python. Например, популярная библиотека `scikit-learn` включает функции для алгоритмов MCD, LOF и Isolation Forest. Но, несомненно, самая большая коллекция алгоритмов собрана в библиотеке PyOD [8]. Библиотека PyOD включает в себя более 50 алгоритмов обнаружения аномалий, начиная с алгоритмов, разработанных в 1977 году, и до современных алгоритмов 2022 и 2023 годов. Все детекторы из таблицы 1 представлены в библиотеке PyOD. Поэтому авторы выбрали эту библиотеку в качестве основного инструмента для выявления одиночных аномалий.

### 3.4. Contamination и другие параметры

Все алгоритмы, входящие в состав библиотеки PyOD, имеют параметр `contamination`, который используется для определения порога (`threshold`). В результате работы детекторов для всех точек данных устанавливаются значения вероятностей отнесения данной точки к аномальной. Если для каких-то точек значения вероятностей превышают порог, то такие точки считаются аномалиями. Отсюда возникает проблема настройки параметра `contamination` для каждого конкретного детектора. Даже если исходный алгоритм, например такой как ROD или COPOD, вообще не имеет дополнительных параметров, то для него все равно необходима настройка параметра `contamination`. Далее будут описаны некоторые варианты решения проблемы настройки данного параметра.

Большинство детекторов кроме параметра `contamination` имеют другие и параметры, связанные с природой самого алгоритма. В зависимости от алгоритма количество параметров может изменяться от одного–двух до десяти и более. Например, у алгоритма VAE имеется 16 основных параметров, не считая параметра `contamination` и вспомогательных параметров. Понятно, что чем больше параметров у алгоритма, тем сложнее найти такое сочетание параметров, которое будет давать наилучший результат.

### *3.5. Результаты численных экспериментов по выявлению одиночных аномалий с помощью детекторов*

Описанные в разделе 3.1 детекторы были использованы для выявления одиночных аномалий в данных датасетов LEAD1.0 и ЯГТУ. Данные датасетов разбивались по отдельным зданиям, обрабатывались, а затем разделялись на обучающее и тестовое множества. На обучающем множестве производилось обучение моделей, а на тестовом проверялось качество их работы по различным метрикам. Из-за различия используемых наборов данных этапы обработки данных для каждого из датасетов отличались. Этапы обучения моделей и проверочного тестирования для обеих датасетов выполнялись одинаково.

Сначала рассмотрим результаты анализа аномалий для датасета LEAD1.0. В отличие от соревнований Kaggle, где использовались данные сразу по всем зданиям датасета LEAD1.0 и целью было получить наибольшее совпадение с размеченными данными, авторы решают более практичные задачи. Для энергопотребителей и энергоснабжающих организаций часто полезнее получение аналитики по отдельным энергообъектам. К тому же это значительно уменьшает объем анализируемых данных, а следовательно, ускоряет процесс анализа. Это становится особенно важным, когда применяется не один или два алгоритма, как на соревнованиях, а 21, как в данном исследовании. Поэтому все данные датасета LEAD1.0 были разбиты по отдельным зданиям. При этом разбивка данных по зданиям показала, что у одних зданий число аномалий получилось слишком мало, а у других зданий преобладающими являются коллективные аномалии. Все такие здания были исключены из рассмотрения.

Поскольку, как было сказано ранее, авторы датасета LEAD1.0 не представили полную информацию, как производилась разметка данных, то первичная обработка данных для данного датасета была сведена к удалению из данных одного из типов коллективных аномалий, заполнению пропусков и нормализации данных. Встречающиеся коллективные аномалии в данных были разделены на два типа. К первому типу были отнесены коллек-

тивные аномалии, в которых все данные в пределах аномалии имеют одинаковые значения с учетом определенной погрешности. Второй тип включал аномалии, в которых все данные в пределах аномалии имеют разные значения. Анализ данных показал, что в датасете LEAD1.0 преобладающим является первый тип коллективных аномалий. Такой тип аномалий чаще всего связан с отключениями или значительным снижением нагрузки у энергопотребителей на длительное время и на практике не возникает проблем с выявлением таких аномалий (энергопотребители часто сами сообщают о них). Поэтому данный тип коллективных аномалий был исключен из рассмотрения.

Анализ аномалий производился только по данным об энергопотреблении (показаниям ПУ электроэнергии) для отдельных зданий, т.е. набор данных включал только один признак. Оценка качества работы алгоритмов на тестовом множестве производилось с использованием следующего набора метрик: Precision, Recall, F1 (F-мера), AUC. Эти метрики чаще всего используются при оценке результатов работы моделей, обученных методом обучения без учителя и используемых для выявления аномалий. Хотя далее основной метрикой, по которой будет сравниваться работа алгоритмов, будет метрика F1, остальные метрики также могут дать информацию об их работе.

Для каждого из используемых детекторов производилась индивидуальная настройка параметра contamination путем грубого прямого перебора вариантов с целью достижения максимума метрики F1 по размеченным данным. В данном случае необходимо было получить хотя бы приблизительную оценку параметра contamination. Далее будет рассмотрено, как можно обойти данную ситуацию. Для алгоритмов, имеющих множество других параметров, оптимизация производилась только для ограниченного числа наиболее важных параметров. Значение остальных параметров принималось равным значениям по умолчанию.

Результаты численных экспериментов, полученных для зданий с номерами 1319 и 1258 из датасета LEAD1.0 показаны в таблицах 2 и 3.

Таблица 2. Результаты анализа одиночных аномалий для здания 1319

Детектор	Precision	Recall	F1	AUC
MCD	0,3158	0,4390	0,3673	0,7083
OCSVM	0,3704	0,4878	0,4211	0,7341
LOF	0,0070	0,0488	0,0123	0,4432
KNN	1,0	0,171	0,2917	0,5854
CBLOF	0,1795	0,5122	0,2658	0,7285
HBOS	0,7407	0,4878	0,5882	0,7419
ROD	0,875	0,1707	0,2857	0,5851
IF	0,3846	0,4878	0,4301	0,7347
LODA	0,72	0,4390	0,5455	0,7175
DIF	1,0	0,2927	0,4528	0,6463
QMCD	0,3272	0,4390	0,375	0,7089
KDE	0,3333	0,4390	0,3789	0,7092
Sampling	0,2656	0,4146	0,3238	0,6938
COPOD	0,2653	0,3171	0,2889	0,6482
ECOD	0,4878	0,4878	0,4878	0,7379
VAE	0,3704	0,4878	0,4211	0,7341
AE	0,1842	0,3415	0,2393	0,6529
DeepSVDD	1,0	0,2683	0,4231	0,6341
ALAD	0,3	0,4390	0,3564	0,7075
SOGAAL	0,3278	0,4878	0,392	0,7321
LUNAR	0,1852	0,2439	0,2105	0,6093

Анализ данных таблиц 2 и 3 показывает, что большинство детекторов неплохо справилось с задачей выявления аномалий. Для первого здания 8 детекторов показали значение F1 от 0,4 и выше и еще 4 алгоритма дали значение F1 близкие к 0,4. Для второго здания 16 детекторов показали значение F1 выше 0,5. Несмотря на разные подходы к обработке данных это в целом совпадает с результатами, представленными в [10], с учетом того, что там было представлено только 7 из рассмотренных здесь алгоритмов. Из алгоритмов без дополнительных параметров для первого здания только ECOD показал хороший результат. Для второго здания к нему присоединился COPOD. Из нейросетевых детекторов для первого здания хорошие результаты показа-

Таблица 3. Результаты анализа одиночных аномалий для здания 1258

Детектор	Precision	Recall	F1	AUC
MCD	0,525	0,6	0,56	0,7946
OCSVM	0,525	0,6	0,56	0,7946
LOF	–	–	–	–
KNN	0,833	0,5714	0,678	0,7846
CBLOF	0,525	0,6	0,56	0,7946
HBOS	1,0	0,6	0,5882	0,75
ROD	–	–	–	–
IF	0,525	0,6	0,56	0,7946
LODA	1,0	0,6	0,75	0,8
DIF	1,0	0,6	0,75	0,8
QMCD	0,525	0,6	0,56	0,7946
KDE	0,525	0,6	0,56	0,7946
Sampling	0,2656	0,4146	0,3238	0,7991
COPOD	0,8077	0,6	0,6885	0,7986
ECOD	0,5882	0,5714	0,5797	0,7817
VAE	0,75	0,6	0,6667	0,798
AE	0,0540	0,0571	0,0556	0,5186
DeepSVDD	1,0	0,6	0,75	0,8
ALAD	0,4468	0,6	0,5122	0,7926
SOGAAL	0,1618	0,6286	0,2573	0,7817
LUNAR	0,3208	0,4857	0,3863	0,7326

ли VAE и DeepSVDD. Для второго здания к ним присоединился ALAD. Лучшие результаты для первого здания показали детекторы HBOS и LODA, для второго – алгоритмы LODA, DIF и DeepSVDD.

Теперь рассмотрим результаты анализа аномалий для датасета ЯГТУ. Результаты численных экспериментов, полученных по данным об энергопотреблении для здания общежития номер 1 ЯГТУ, показаны в таблице 4. Прочерки в таблицах 3 и 4 означают, что детекторы выдали нулевые значения метрик из-за внутренних исключений, связанных с отсутствием предсказанных образцов.

Анализ данных таблицы 4 показывает, что результаты определения аномалий для датасета ЯГТУ в целом лучше, чем для

Таблица 4. Результаты анализа одиночных аномалий для здания ЯГТУ

Детектор	Precision	Recall	F1	AUC
MCD	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
OCSVM	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
LOF	–	–	–	–
KNN	0,1667	0,5454	0,2553	0,7516
CBLOF	0,4285	0,5454	0,48	0,767
HBOS	0,75	0,5454	0,6316	0,7713
ROD	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
IF	0,5384	0,6364	0,5833	0,8139
LODA	0,75	0,5454	0,6316	0,7713
DIF	1,0	0,0909	0,1667	0,5454
QMCD	0,5	0,7272	0,5926	0,8579
KDE	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
Sampling	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
COPOD	0,5385	0,6364	0,5833	0,8139
ECOD	0,0769	0,0909	0,0833	0,537
VAE	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
AE	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
DeepSVDD	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
ALAD	0,5833	0,6364	0,6087	0,8147
SOGAAL	–	–	–	–
LUNAR	0,074	0,1818	0,1053	0,5733

датасета LEAD1.0. При этом 9 детекторов из 21 показывают одинаковые высокие результаты. Здесь так же, как и для первого здания датасета LEAD1.0, лучшие результаты показали детекторы HBOS и LODA. Из алгоритмов без дополнительных параметров алгоритмы ROD и COPOD показали хорошие результаты. Из нейросетевых детекторов все алгоритмы, за исключением SOGAAL и LUNAR, показали одинаково высокие результаты.

Хорошая работа большинства детекторов аномалий для датасета ЯГТУ объясняется тем, что данный набор данных был размечен с использованием описанного в разделе 2.1 ТСПЭ так, чтобы аномалии представляли собой данные, не соответствующие данному ТШЭ. Кроме того, в датасете присутствуют только

отдельные одиночные аномалии и нет коллективных аномалий. Все это значительно облегчило работу детекторов аномалий.

### 3.6. Алгоритмы определения порога

Самая большая проблема детекторов аномалий, рассмотренных в предыдущем разделе, – это необходимость постоянной настройки параметра *contamination*. Как показали численные эксперименты, значение этого параметра зависит как от данных, с которыми работает алгоритм, так и от типа детектора. Такая ситуация значительно усложняет анализ одиночных аномалий на практике.

Ранее было сказано о том, что параметр *contamination* используется для определения порога, который применяется для разделения нормальных и аномальных данных. Порог в библиотеке PyOD определяется по формуле

$$threshold = percentile(p_s, q),$$

где *percentile* – функция для вычисления доли наблюдений, отделяемых значением процентиля;  $p_s$  – значения вероятностей обнаружения аномалий;  $q$  – значение процентиля. При этом  $q$  вычисляется как

$$q = 100(1 - contamination).$$

Точки данных, для которых значения вероятностей превышают порог, будут отнесены к аномалиям. Возникает вопрос: а нельзя ли определять порог, исходя из значений вероятности обнаружения аномалий, каким-нибудь другим способом без использования параметра *contamination*? Одним из решений данной проблемы являются алгоритмы пороговой оценки вероятностей обнаружения аномалий в данных. Такие алгоритмы далее будут называться пороговыми алгоритмами (*thresholding algorithms*). Подход заключается в применении различных статистических и других алгоритмов непосредственно к оценкам вероятностей обнаружения аномалий, генерируемых детекторами. Пороговые алгоритмы заменяют необходимость устанавливать параметр *contamination* или заставлять пользователя заранее угадывать количество аномалий, которые могут существовать в наборе данных.

Существует библиотека PyThresh, которая включает более 30 различных пороговых алгоритмов [7]. Эта библиотека была написана для работы в тандеме с библиотекой PyOD и имеет похожий синтаксис и структуры данных. Различные пороговые алгоритмы из библиотеки PyThresh, которые применялись в данной работе, приведены в таблице 5. Ссылки на литературу для каждого из методов можно найти в [7]. Как видно из таблицы 5 некоторые методы могут выступать и как детекторы, и как пороговые алгоритмы.

Таблица 5. Пороговые алгоритмы

Алгоритм	Описание
AUCP	Area Under Curve Percentage
CLF	Trained Linear Classifier
CLUST	Clustering Based
DSN	Distance Shift from Normal
EB	Elliptical Boundary
FILTER	Filtering Based
HIST	Histogram Based
IQR	Inter-Quartile Region
MAD	Median Absolute Deviation
META	Meta-model Trained Classifier
MIXMOD	Normal & Non-Normal Mixture Models
OCSVM	One-Class Support Vector Machines
QMCD	Quasi-Monte Carlo Discrepancy
REGR	Regression Based
VAE	Variational AutoEncoder
ZSCORE	Z-score
COMB	Thresholder Combination

Пороговые алгоритмы анализируют вероятности обнаружения аномалий, предварительно сгенерированных детекторами. При этом возникает вопрос: какие пороговые алгоритмы лучше подходят для того или иного детектора? Можно ли подобрать наилучшую в плане повышения точности выявления аномалий пару детектора и порогового алгоритма? Нужно ли использовать (если такие есть) одинаковые детекторы и пороговые алгоритмы? Даниель Кулик, один из разработчиков библиотеки PyThresh,

утверждает, что чем более похожи два алгоритма, тем меньше вероятность определения иррационального порогового значения [29]. Однако он же отмечает, что это далеко не всегда так.

Найденные на основании численных экспериментов наилучшие сочетания детекторов и пороговых алгоритмов и точность, достигаемая при этом по метрикам F1 и AUC для зданий 1319 и 1258 датасета LEAD1.0, показаны в таблицах 6 и 7.

Таблица 6. Наилучшие сочетания алгоритмов для здания 1319

Детектор	Пороговый алгоритм	F1	AUC
MCD	DSN(metric='RES')	0,5806	0,7186
OCSVM	–	–	–
LOF	–	–	–
KNN	MTT()	0,4528	0,6463
CBLOF	CLF(method='simple')	0,3922	0,622
HBOS	–	–	–
ROD	DSN(metric='JS')	0,2917	0,5854
IF	–	–	–
LODA	CLF(method='simple')	0,5882	0,7419
DIF	MIXMOD(method='mean')	0,5714	0,7413
QMCD	FILTER(method='detrend')	0,3871	0,7098
KDE	FILTER(method='detrend')	0,3922	0,622
Sampling	META(method='GNBC')	0,5806	0,7187
COPOD	DSN(metric='KS')	0,4561	0,6577
ECOD	DSN(metric='KS')	0,6333	0,7317
VAE	META(method='LIN')	0,5614	0,6951
AE	FILTER(method='savgol')	0,2785	0,7417
DeepSVDD	DSN(metric='RES')	0,6452	0,7436
ALAD	FILTER(method='detrend')	0,6	0,7192
SOGAAL	–	–	–
LUNAR	–	–	–

В таблице 8 показана аналогичная информация для датасета ЯГТУ. Для пороговых алгоритмов также приведено значение основного параметра (это может быть название метода или метрики). Прочерки в таблице означают, что для детектора не было найдено подходящего порогового алгоритма, способного повысить точность выявления аномалий.

Таблица 7. Наилучшие сочетания алгоритмов для здания 1258

Детектор	Пороговый алгоритм	F1	AUC
MCD	DSN(metric='RES')	0,75	0,8
OCSVM	FILTER(method='hilbert')	0,7368	0,7997
LOF	–	–	–
KNN	FILTER(method='savgol')	0,7272	0,7857
CBLOF	CLF(method='simple')	0,75	0,8
HBOS	–	–	–
ROD	DSN(metric='JS')	0,75	0,8
IF	FILTER(method='hilbert')	0,75	0,8
LODA	CLF(method='simple')	0,75	0,8
DIF	CLUST(method='birch')	0,75	0,8
QMCD	CLUST(method='birch')	0,75	0,8
KDE	FILTER(method='resample')	0,75	0,8
Sampling	CLF(method='simple')	0,7241	0,7994
COPOD	HIST(method='minimum')	0,75	0,8
ECOD	DSN(metric='KS')	0,6153	0,7829
VAE	META(method='LIN')	0,75	0,8
AE	FILTER(method='savgol')	0,1	0,7
DeepSVDD	DSN(metric='RES')	0,75	0,8
ALAD	FILTER(method='hilbert')	0,7368	0,7997
SOGAAL	–	–	–
LUNAR	–	–	–

Сравнивая информацию таблиц 6, 7, 8 и таблиц 2, 3, 4, можно отметить, что применение пороговых алгоритмов во многих случаях может существенно повысить точность обнаружения аномалий по сравнению с точностью, обеспечиваемой детекторами. Там же, где детектор уже получил максимальную точность, применение порогового алгоритма не позволяет улучшить результат. Это хорошо видно на примере здания ЯГТУ. Также можно заметить, что есть повторяющиеся пары детекторов и пороговых алгоритмов. Это пары: MCD – DSN(metric='RES'), KNN – FILTER(method='savgol'), CBLOF – CLF(method='simple'), ROD – DSN(metric='JS'), LODA – CLF(method='simple'), ECOD – DSN(metric='KS'), VAE – META(method='LIN'), AE – FILTER(method='savgol'),

Таблица 8. Наилучшие сочетания алгоритмов для здания ЯГТУ

Детектор	Пороговый алгоритм	F1	AUC
MCD	–	–	–
OCSVM	–	–	–
LOF	–	–	–
KNN	FILTER(method='savgol')	0,2716	0,9584
CBLOF	–	–	–
HBOS	–	–	–
ROD	REGR(method='siegel')	0,6315	0,7713
IF	–	–	–
LODA	–	–	–
DIF	CLUST(method='mshift')	0,3142	0,9661
QMCD	–	–	–
KDE	–	–	–
Sampling	–	–	–
COPOD	–	–	–
ECOD	DSN(metric='TMT')	0,2528	0,9542
VAE	–	–	–
AE	–	–	–
DeepSVDD	–	–	–
ALAD	–	–	–
SOGAAL	–	–	–
LUNAR	DSN(metric='LK')	0,2222	0,0866

DeepSVDD – DSN(metric='RES'). К пороговым алгоритмам, применение которых чаще других обеспечивает повышение точности, относятся DSN, FILTER и CLF.

### 3.7. Ансамбли детекторов

Как хорошо известно, комбинации моделей (ансамбли) в машинном обучении часто позволяют получить более высокую точность решения задачи по сравнению с точностью достигаемой отдельными моделями. Поэтому можно попробовать скомбинировать возможности детекторов, которые показали высокие результаты в результате численных экспериментов. В библиотеке PyOD комбинирование возможно как на уровне самих детекторов, так и полученных в результате работы детекторов вероятно-

стей обнаружения аномалий. Первый вариант можно реализовать с помощью алгоритма Locally Selective Combination of Parallel Outlier Ensembles (LSCP). LSCP реализует стратегию Average of Maximum, о которой будет сказано далее.

Во втором варианте комбинируются вероятности обнаружения аномалий, полученные в результате работы детекторов. К вероятностям могут применяться различные стратегии комбинирования. К ним относятся: усреднение (Average), взвешенное усреднение (Weighted Average), взятие максимума (Maximization), Average of Maximum и Maximum of Average. Первые три операции выполняются поточно для всех использованных детекторов. В двух последних операциях детекторы делятся на подгруппы. В операции Average of Maximum берутся максимумы по каждой подгруппе, а затем они усредняются. В операции Maximum of Average рассчитываются средние значения по каждой подгруппе, а затем по ним находится максимум. Для реализации различных стратегий комбинирования в библиотеке PyOD есть соответствующие функции. Для нахождения аномальных точек к вероятностям обнаружения аномалий, полученным в результате комбинирования, необходимо применить какой-нибудь пороговый алгоритм.

В таблице 9 показаны результаты, полученные для различных датасетов и зданий с помощью описанных стратегий комбинирования и применения порогового алгоритма VAE.

Таблица 9. Результаты комбинирования

Стратегия	1319	1258	ЯГТУ
Average	0,6452	0,6774	0,4888
Maximization	0,4528	0,75	0,6087
Average of Maximum	0,6452	0,6774	0,4888
Maximum of Average	0,4528	0,75	0,6087

Для здания 1319 комбинировались вероятности обнаружения аномалий детекторов: HBOS, LODA, DIF, ECOD, VAE и DeepSVDD. Для здания 1258 комбинировались вероятности детекторов: HBOS, LODA, DIF, COPOD, VAE и DeepSVDD.

Для здания ЯГТУ комбинировались вероятности детекторов: NBOS, LODA, MCD, ROD, VAE и DeepSVDD. Пороговый алгоритм VAE оказался одним из группы пороговых алгоритмов, обеспечивающих наилучший результат одновременно для всех рассматриваемых зданий.

Для каждого здания из всех стратегий комбинирования необходимо выбирать те, которые дают наивысшую точность. Сравнивая результаты для лучших стратегий из таблицы 9 с результатами, полученными ранее в данной работе, можно отметить, что применение стратегий комбинирования совместно с пороговым алгоритмом позволяет получить точность на уровне той, которая была достигнута для каждого здания с помощью лучших детекторов или пар «детектор – пороговый алгоритм».

#### **4. Выводы**

Таким образом, в работе описаны исследования по выявлению одиночных аномалий в данных об энергопотреблении на примере двух разных наборов данных. Рассмотрены способы построения ТШЭ, одним из которых является ТСПЭ. Изложен авторский способ построения ТСПЭ, показавший свою эффективность в численных экспериментах. Приведен обзор методов анализа аномалий на основе машинного обучения, из которых авторами был выбран 21 метод, подходящий для выявления одиночных аномалий. Описаны наборы данных и инструменты, которые были использованы для проведения численных экспериментов.

По результатам численных экспериментов были отмечены методы, наиболее удачно справившиеся с задачей выявления одиночных аномалий. Особое внимание в работе уделялось методам, не требующим дополнительных параметров, и современным перспективным методам на базе ИНС. К сожалению, алгоритмы ROD, COPOD и ECOD, не требующие дополнительных параметров, не показали стабильно высокого качества работы для всех вариантов данных. Во всех случаях один или два алгоритма показывали хорошие результаты, а один из них, наоборот, плохие. Тем не менее отсутствие дополнительных параметров делает эти ал-

горитмы привлекательными для использования при анализе аномалий. Из нейросетевых методов следует отметить алгоритмы VAE, DeepSVDD и ALAD, применение которых во всех случаях позволяло достичь высоких показателей. Авторы считают эти алгоритмы наиболее перспективными для анализа аномалий из всех методов на базе ИНС.

Лучшим алгоритмом по результатам численных экспериментов оказался алгоритм LODA. Также очень хорошо себя зарекомендовал алгоритм HBOS. Эти два метода показали стабильно высокие результаты во всех испытаниях. Оба метода имеют одинаковую природу и основаны на построении гистограмм. Авторы рекомендуют всем исследователям, кто столкнется с задачей анализа аномалий, попробовать эти алгоритмы в первую очередь.

Одной из главных проблем, затронутых в работе, является проблема настройки параметра contamination для каждого рассмотренного алгоритма. Одним из решений данной проблемы является использование пороговых алгоритмов. Пороговые алгоритмы позволяют пользователю не заботиться о поиске необходимого значения параметра contamination. В работе показано, что если детектор выявляет аномалии недостаточно хорошо (параметр contamination не настроен), то применение пороговых алгоритмов может существенно повысить точность обнаружения аномалий. Это особенно актуально при анализе аномалий для размеченных наборов данных, когда нельзя проконтролировать полученную точность вычислений. При этом остается проблема выбора подходящего порогового алгоритма, обеспечивающего наиболее высокую точность. К сожалению, здесь нет определенного решения, подходящего для всех случаев. В работе отмечено, что к пороговым алгоритмам, применение которых для задач анализа аномалий в данных об энергопотреблении, чаще других обеспечивает повышение точности, относятся DSN, FILTER и CLF. Следовательно, эти алгоритмы необходимо попробовать в первую очередь.

Применять пороговые алгоритмы можно как к результатам работы отдельных детекторов, так и к результатам работы ансам-

блей детекторов, полученных с использованием различных стратегий комбинирования. В работе показано, что применение стратегий комбинирования совместно с пороговым алгоритмом позволяет обеспечить точность на уровне той, которая может быть достигнута с помощью отдельных детекторов или пар «детектор – пороговый алгоритм». Таким образом, возможны два варианта, обеспечивающие примерно одинаковый результат. Первый вариант заключается в использовании отдельных пар «детектор – пороговый алгоритм», а затем в выборе наилучшей пары. Второй вариант – это применение стратегий комбинирования детекторов совместно с пороговым алгоритмом. Во втором варианте по сравнению с первым дополнительно требуется использование стратегий комбинирования, но зато в этом случае необходим только один пороговый алгоритм. Это можно отнести к преимуществам второго варианта.

Полученные результаты могут использоваться как энергоснабжающими организациями, так и энергопотребителями для повышения качества и надежности энергоснабжения.

### **Литература**

1. МАРЬЯСИН О.Ю., ЛУКАШОВ А.И., ТИХОМИРОВ Л.И. *Обнаружение аномальных отклонений от типового профиля энергопотребления* // Математические методы в технике и технологиях. – 2022. – №8. – Р. 108–113.
2. *О внесении изменений в некоторые акты Правительства Российской Федерации по вопросам совершенствования организации учета электрической энергии. Постановление Правительства Российской Федерации от 29 июня 2020 г. – №950. – 32 с.*
3. ALMARDENY Y., BOUJNAH N., CLEARY F. *A Novel Outlier Detection Method for Multivariate Data* // IEEE Trans. on Knowledge and Data Engineering. – Vol. 32. – 2020. – Р. 1–13.

4. BURGESS C.P., HIGGINS I., PAL A. et al. *Understanding disentangling in  $\beta$ -VAE* // arXiv:1804.03599v1. – 2018. – P. 1–11.
5. CHANDOLA V., BANERJEE A., KUMAR V. *Anomaly Detection: A Survey* // ACM Computing Surveys. – 2009. – Vol. 41. – P. 1–58.
6. DUMOULIN V., BELGHAZI I., POOLE B. et al. *Adversarially learned inference* // arXiv:1606.00704v3. – 2017. – P. 1–18.
7. *GitHub – KulikDM/pythresh: Outlier Detection Thresholding.* – URL: <https://github.com/KulikDM/pythresh> (дата обращения: 30.08.2024).
8. *GitHub – yzhao062/pyod: A Python Library for Outlier and Anomaly Detection, Integrating Classical and Deep Learning Techniques.* – URL: <https://github.com/yzhao062/pyod> (дата обращения: 30.08.2024).
9. GOLDSTEIN M., DENGEL A. *Histogram-based Outlier Score (HBOS): A fast Unsupervised Anomaly Detection Algorithm* // Conference KI-2012. – 2012. – P. 1–6.
10. GULATI M., ARJUNAN P. *LEAD1.0: A large-scale annotated dataset for energy anomaly detection in commercial buildings* // arXiv:2203.17256v1. – 2022. – P. 1–5.
11. HABEN S., SINGLETON C., GRINDROD P. *Analysis and clustering of residential customers energy behavioral demand using smart meter data* // IEEE Trans. on Smart Grid. – 2016. – Vol. 1. – P. 136–144.
12. HIMEUR Y., GHANEM K., ALSALEMI A. et al. *Artificial intelligence based anomaly detection of energy consumption in buildings: A review, current trends and new perspectives* // Applied Energy. – 2021. – Vol. 287. – P. 1–26.
13. KINGMA D.P., WELLING M. *Auto-Encoding Variational Bayes* // Int. Conf. on Learning Representations. – 2013. – P. 1–14.
14. LI C., LIU H., CHEN C. et al. *ALICE: Towards Understanding Adversarial Learning for Joint Distribution Matching* // arXiv:1709.01215v2. – 2017. – P. 1–22.

15. LI K., MA Z., ROBINSON D. et al. *Identification of typical building daily electricity usage profiles using Gaussian mixture model-based clustering and hierarchical clustering* // Applied Energy. – 2018. – Vol. 231. – P. 331–342.
16. LI K., YANG R.J., ROBINSON D. et al. *An agglomerative hierarchical clustering-based strategy using Shared Nearest Neighbours and multiple dissimilarity measures to identify typical daily electricity usage profiles of university library buildings* // Energies. – 2019. – Vol. 174. – P. 735–748.
17. LINDEMANN B., MASCHLER B., SAHLAB N. et al. *A survey on anomaly detection for technical systems using LSTM networks* // Computers in Industry. – 2021. – Vol. 131. – P. 1–11.
18. LI S., HAN Y., YAO X. et al. *Electricity theft detection in power grids with deep learning and random forests* // Journal of Electrical and Computer Engineering. – 2019. – P. 1–12.
19. LIU X., DING Y., TANG H. et al. *A data mining-based framework for the identification of daily electricity usage patterns and anomaly detection in building electricity consumption data* // Energy and Buildings. – 2021. – Vol. 231. – P. 1–22.
20. LI Z., ZHAO Y., BOTTA N. et al. *COPOD: Copula-Based Outlier Detection* // arXiv:2009.09463v1. – 2020. – P. 1–6.
21. LI Z., ZHAO Y., HU X. et al. *ECOD: Unsupervised Outlier Detection Using Empirical Cumulative Distribution Functions* // arXiv:2201.00382v3. – 2022. – P. 1–13.
22. MARYASIN O.YU., TIHOMIROV L. *Analysis of Point and Collective Anomalies in Energy Consumption Data* // Int. Russian Automation Conf. (RusAutoCon–2023). – 2023. – P. 431–436.
23. PEVNY T. *Loda: Lightweight on-line detector of anomalies* // Mach Learn. – 2016. – Vol. 102. – P. 275–304.
24. RAJABI A., ESKANDARI M., GHADI M.J. et al. *A comparative study of clustering techniques for electrical load pattern segmentation* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2020. – Vol. 120. – P. 1–20.

25. RASANEN T., KOLEHMAINEN M. *Feature-Based Clustering for Electricity Use Time Series Data* // Int. Conf. on Adaptive and Natural Computing Algorithms. – 2009. – P. 401–412.
26. RUFF L., VANDERMEULEN R.A., GORNITZ N. et al. *Deep One-Class Classification* // 35th Int. Conf. on Machine Learning. – 2018. – P. 1–10.
27. SCHLEGL T., SEEBOCK P., WALDSTEIN S.M. et al. *Unsupervised anomaly detection with generative adversarial networks to guide marker discovery* // Int. Conf. on Information Processing in Medical Imaging. – 2017. – P. 146–157.
28. SIAL A., SINGH A., MAHANTI A. *Detecting anomalous energy consumption using contextual analysis of smart meter data* // Wireless Networks. – 2019. – P. 1–18.
29. *Thresholding Outlier Detection Scores with PyThresh.* – URL: <https://towardsdatascience.com/thresholding-outlier-detection-scores-with-pythresh-f26299d14fa> (дата обращения: 30.08.2024).
30. VERLEYSEN M., FRANCOIS D. *The curse of dimensionality in data mining and time series prediction* // Int. Work-Conf. on Artificial Neural Networks. – 2005. – P. 758–770.
31. WANG X., ZHAO T., LIU H., HE R. *Power consumption predicting and anomaly detection based on long short-term memory neural network* // IEEE 4th Int. Conf. on Cloud Computing and Big Data Analysis. – 2019. – P. 487–491.
32. ZENATI H., ROMAIN M., FOO C.S. et al. *Adversarially Learned Anomaly Detection* // arXiv:1812.02288v1. – 2018. – P. 1–11.

## **DETECTING POINT ANOMALIES IN ENERGY CONSUMPTION DATA USING UNSUPERVISED MACHINE LEARNING METHODS**

**Oleg Maryasin**, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, PhD in technique, associate professor (maryasin2003@list.ru).

**Leonid Tihomirov**, Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, graduate student (lenusscik@yandex.ru).

*Abstract: The paper describes studies on detecting point anomalies in energy consumption data using two different data sets as an example. Methods for constructing typical energy consumption patterns are considered and the authors' method for constructing a typical daily energy consumption profile is presented. To conduct numerical experiments, the authors selected 21 unsupervised machine learning methods suitable for detecting point anomalies. Based on the results of numerical experiments, the methods that most successfully coped with the task of detecting point anomalies were noted. Particular attention in the work was paid to methods that do not require additional parameters and modern, promising methods based on artificial neural networks. According to the test results, the best algorithms were statistical algorithms based on constructing histograms. One of the main problems addressed in the work is the problem of setting the contamination parameter for each considered algorithm. One of the solutions to this problem is the use of threshold algorithms. It is shown that if the original algorithm does not detect anomalies well enough (the contamination parameter is not configured), then the use of threshold algorithms can significantly improve the accuracy of anomaly detection. Threshold algorithms are noted, the use of which for the tasks of analyzing anomalies in energy consumption data, most often ensures an increase in accuracy. Threshold algorithms can be applied both to the results of individual anomaly detection algorithms and to the results of ensembles of algorithms obtained using various combination strategies.*

**Keywords:** point anomaly detection, typical daily energy consumption profile, machine learning, threshold algorithm, ensembles of algorithms.

УДК 004.67

ББК 32.97

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии В.В. Ключковым.*

*Поступила в редакцию 02.09.2024.*

*Дата опубликования 31.01.2025.*

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНОЙ СМЕРТНОСТИ В ПАНДЕМИЙНЫЙ ПЕРИОД В РАЗРЕЗЕ ФЕДЕРАЛЬНЫХ ОКРУГОВ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ<sup>1</sup>

Маханькова И. В.<sup>2</sup>, Дружинин П. В.<sup>3</sup>

(Институт экономики Карельского научного центра РАН,  
Петрозаводск, Республика Карелия)

Пандемия затронула все сферы жизни во всех регионах Российской Федерации и повлияла на временное увеличение смертности населения России. Проведенные расчеты показывают, что пандемия прошла как две волны, каждая из которых состояла из трех частей с пиками высокой избыточной смертности. Цель данной статьи – на основе математических моделей вычислить избыточную смертность в разрезе федеральных округов с учетом данных последней всероссийской переписи населения, проанализировать влияние COVID-19 на избыточную смертность населения России. При расчете избыточной смертности первым методом учитывалась смертность в предыдущем периоде (2019 год), второй метод основан на расчете тенденции снижения смертности в 2019 году по сравнению с 2018 годом, третий – комбинированный статистический метод SARIMAX – учитывает тенденции смертности с 2015 года. Результатом моделирования является количественная оценка сверхсмертности в России в пандемийный период. Пандемией можно объяснить 57% избыточных смертей в 2020–2021. Составлен прогноз смертности на 2023 год в разрезе федеральных округов. Результаты могут быть учтены при разработке прогнозов социально-экономического развития России на долгосрочный период в части здоровьесбережения населения.

Ключевые слова: пандемия, общая смертность, избыточная смертность, моделирование, прогнозирование.

## 1. Введение

Смертность в Российской Федерации падала с 2005 года по 2019 год, снизившись почти на четверть, но COVID-19 прервал положительную тенденцию. Смертность резко выросла,

---

<sup>1</sup> Исследование подготовлено в рамках государственного задания N FMEN-2022-0001 на 2022 ÷ 2026 гг. «Комплексное исследование и разработка основ управления устойчивым развитием северного и приграничного поясов России в контексте глобальных вызовов».

<sup>2</sup> Ирина Владимировна Маханькова, гл. экономист (makhankova@petrsu.ru).

<sup>3</sup> Павел Васильевич Дружинин, д.э.н., доцент (pdruzhinin@mail.ru).

в 2020 году Российская Федерация оказалась среди двух стран с самой высокой избыточной смертностью [7].

Избыточная смертность (сверхсмертность) – индикатор влияния пандемии на демографическую ситуацию. Всемирная организация здравоохранения на основе данных Всемирного банка представила несколько методов оценки избыточной смертности, в зависимости от наличия ежемесячных данных о смертности от всех причин [13]. Авторы подчеркнули огромную важность наличия надежных и актуальных данных о смертности от всех причин для всех стран [14]. ВОЗ для расчетов избыточной смертности использовала разные модели для разных стран: модель на основе отрицательной биномиальной регрессии, модель Пуассона [15, 17]. Для оценки избыточной смертности в России ВОЗ использована модель отрицательной биномиальной регрессии.

В отдельных исследованиях предпринималась попытка оценить реальную смертность в пандемийный период и было показано, что средняя избыточная смертность в России существенно различается по регионам и составляет в 2020 году 47,2% [9]. Автором [4] было отмечено, что факторы, определяющие избыточную смертность в 2020 и в 2021 годах, различны, что обусловлено адаптацией общества к пандемии. В работе авторов [1] избыточная смертность в России рассчитана на основе средних данных за предыдущее пятилетие, но в таком случае смертность завышена, не учитывается сложившаяся положительная тенденция. Несмотря на рост заболевших в 2022 году, избыточная смертность снизилась, что объясняется мутацией вируса и более легким течением заболевания с минимальными осложнениями. Попытки масштабирования избыточной смертности в регионах в условиях пандемии в 2020 году проведены авторами [2].

Осенью 2023 года Росстат пересчитал численность населения регионов за период между переписями 2010, 2020 гг., и появилась возможность пересчитать избыточную смертность и оценить реальное влияние пандемии на показатели смертности [11].

Авторами [5] проанализированы различные возможные подходы к оценке избыточной смертности в мире и России,

в частности, выделены два класса моделей: неадаптивные модели, основанные на регрессионном анализе, вторые – адаптивные, в основе лежит метод скользящего окна наблюдений. Авторы отмечают, что «настоящее время ограничивает вероятность использования универсального алгоритма для всех ситуаций и вместе с тем обосновывает необходимость разработки аналитических алгоритмов, способных определять наиболее подходящую модель для каждой конкретной ситуации» [5].

Развитие современных информационных технологий позволили многим исследователям использовать алгоритмы анализа временных рядов для прогнозирования смертности, избыточной смертности. Прогнозирование смертности населения для различных стран на основе модифицированных методов Бокса – Дженкинса (ARIMA) представлены авторами [10, 16]. Авторами [18] предложена многопопуляционная модель для прогнозирования уровня смертности среди мужчин и женщин в Малайзии, Тайване, Японии, Гонконге, Австралии, США, Великобритании, Канаде и Швейцарии, основанная на методах ARIMA, ARIMA-GARCH.

В данной статье рассмотрены три различные модели оценки избыточной смертности в России в разрезе федеральных округов. Цель статьи – на основе математических моделей с учетом данных переписи населения проанализировать влияние COVID-19 на избыточную смертность населения в разрезе федеральных округов Российской Федерации.

## **2. Постановка задачи**

Для проведения расчетов использовались данные переписи населения 2020 года и демографические данные Росстата [12]. Росстат в конце 2023 года пересчитал численность населения по регионам РФ с 2012 года, и в результате исчез разрыв в динамике численности населения и некоторых других показателей. Перепись населения позволила увидеть обновленную картину по России.

На основе новых данных были пересчитаны коэффициенты смертности за 2015–2023 годы по федеральным округам, результат представлен на рис. 1. Пересчет коэффициентов прово-

дился с учетом изменений, утвержденных Указом Президента РФ от 3 ноября 2018 г. N 632 «О внесении изменений в перечень федеральных округов, утвержденный Указом Президента Российской Федерации от 13 мая 2000 г. N 849», внесенных в перечень федеральных округов и входящих в их состав субъектов Российской Федерации.

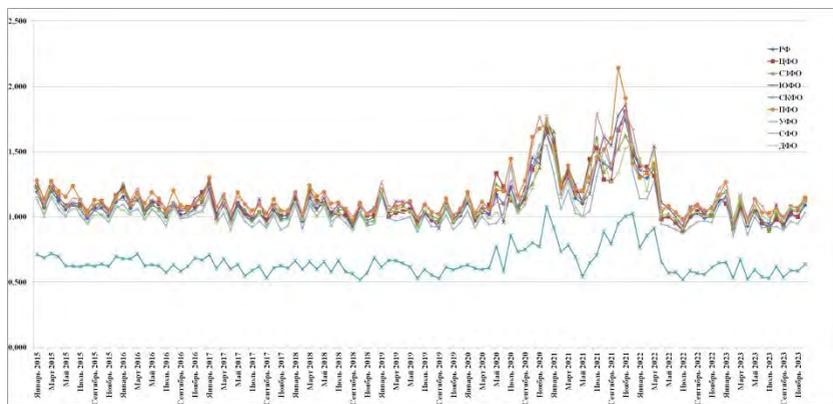


Рис. 1. Коэффициенты смертности по федеральным округам 2015–2023 гг. (на 1000 чел. с учетом ВПН-2020)

Как видно из рис. 1 в пандемию (2020–2022 гг.) наблюдается всплеск удельной смертности во всех федеральных округах России. В статье рассматриваются три года, на которые пришелся период с марта 2020 года по март 2022 года, когда наблюдается рост коэффициента смертности, который многие исследователи связывают с эпидемией COVID-19.

Избыточную смертность можно определять разными способами. Общий принцип: число смертей в пандемийный период сравнивается с числом смертей в допандемийный период. В данной работе смоделированы три различных подхода к определению избыточной смертности. Первый метод: при расчете учитываются смерти в предпандемийном году, второй метод: учитывается тенденция снижения смертности в 2019 году по сравнению с 2018 годом, третий – комбинированный метод – основан на моделировании временных рядов с помощью

*SARIMAX* и учитывает сложившиеся тенденции с 2015 года. Моделирование избыточной смертности проводилось по федеральным округам и по России в целом.

### 3. Моделирование избыточной смертности

#### 3.1. МЕТОД 1

Пусть  $X_{ij}$  – фактически зарегистрированное количество умерших человек за  $i$ -й период  $j$  года;  $Y_i$  – фактически зарегистрированное количество умерших человек за  $i$ -й период 2019 года;  $Z_j$  – численность населения на первое января  $j$  года (с учетом результатов ВПН-2020,  $j = 2020, 2021, 2022$ ).

Избыточная смертность  $S_{ij}$  в  $i$ -м периоде  $j$  года определялась относительно смертности 2019 года:

$$(1) \quad S_{ij} = \frac{(X_{ij} - Y_i)}{Z_j} * 1000.$$

Избыточная смертность, смоделированная этим способом, за 36 месяцев составила примерно 1,07 млн чел. и представлена на рис. 2. По годам избыточная смертность, посчитанная данным способом, составила: в 2020 году – 323 796 человек (0,22% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года); в 2021 году – 644 826 человек (0,44% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года); в 2022 году – 105 095 человек (0,07% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года).

#### 3.2. МЕТОД 2

Пусть  $X_{ij}$  – фактически зарегистрированное количество умерших человек за  $i$ -й период  $j$  года;  $Y_i$  – фактически зарегистрированное количество умерших человек за  $i$ -й период 2019 года;  $T_i$  – фактически зарегистрированное количество умерших человек за  $i$ -й период 2018 года;  $Z_j$  – численность населения на первое января  $j$  года (с учетом результатов переписи населения, где  $j = 2020, 2021, 2022$ ).

Избыточная смертность  $S_{ij}^*$  в  $i$ -м периоде  $j$  года определялась относительно сложившейся тенденции снижения смертности в 2019 г. относительно 2018 года:

$$(2) S_{ij}^* = \frac{X_{ij} + (Y_i - T_i)}{Z_j} * 1000.$$

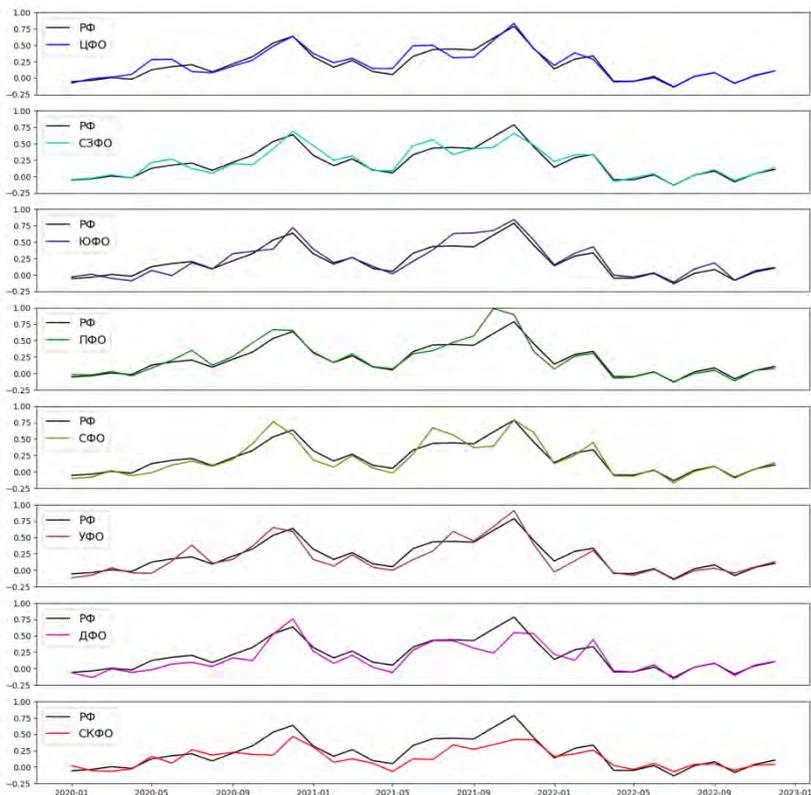


Рис. 2. Избыточная смертность в России в разрезе федеральных округов 2020–2022 гг. относительно 2019 г. на 1000 чел.

Избыточная смертность за 36 месяцев составила примерно 1,24 млн чел. относительно ожидавшейся при сохранении сложившихся тенденций, что на 0,17 млн чел. больше, чем если не учитывать сложившейся тенденции, см. рис. 3. По годам избыточная смертность, посчитанная с помощью второго метода, составила: в 2020 году – 350 956 человек (0,22% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года), в 2021 году –

699 146 человек (0,44% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года), в 2022 году – 186 575 человек (0,13% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года).

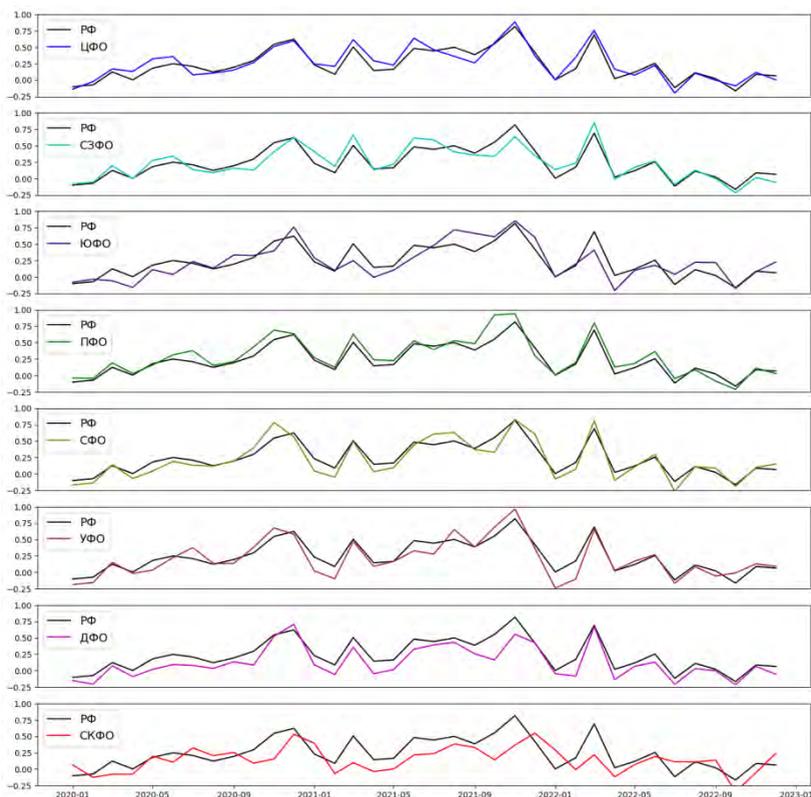


Рис. 3. Избыточная смертность в России в разрезе федеральных округов 2020–2022 гг. с учетом изменений в 2019 г. относительно 2018 г., на 1000 чел.

Смоделированная данным способом оценка избыточной смертности попадает в нижнюю границу доверительного интервала оценки избыточной смертности в России, рассчитанной Всемирной организацией здравоохранения по модели отрицательной биномиальной регрессии на основе демографических и экономических данных Всемирного банка [17].

### 3.3. МЕТОД 3

Пусть  $X_{ij}$  – фактически зарегистрированное количество умерших человек за  $i$ -й период  $j$  года;  $Z_j$  – численность населения на первое января  $j$  года (с учетом результатов переписи населения, где  $j = 2015, \dots, 2022$ );  $K_{ij}$  – коэффициент смертности, рассчитанный как отношение  $X_{ij}$  умерших человек в  $i$ -й период к общей численности населения  $Z_j$ .

$$(3) \quad K_{ij} = \frac{X_{ij}}{Z_j} * 1000.$$

Исходный временной ряд (3) не является стационарным на основании критерия Дики – Фуллера, данные гетерокедастичны;  $\hat{K}_{ij}$  – прогнозные значения ряда  $K_{ij}$ , определялись с помощью сезонной модели  $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)m$ , где  $p, d, q$  – это несезонные параметры, а  $P, D, Q$  – сезонные;  $m$  – период временного ряда/сезонность.

Общий вид модели  $SARIMA(p, d, q)(P, D, Q)m$ :

$$(4) \quad (1-L)^d (1-L^m)^D \hat{K}_{ij} = \mu + \frac{b(L)B(L^m)}{a(L)A(L^m)} \varepsilon_{ij},$$

где

$$a(z) = 1 - \varphi_1 z - \dots - \varphi_p z^p, \quad b(z) = 1 - \theta_1 z - \dots - \theta_q z^q,$$

$$A(z) = 1 - \varphi_1^m z - \dots - \varphi_p^m z^p, \quad B(z) = 1 - \theta_1^m z - \dots - \theta_q^m z^q,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q, \dots$  – коэффициенты;  $L$  – оператор сдвига:

$$LK_{ij} = K_{(i-1)j},$$

$$L\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{(i-1)j},$$

$$Lconst = const;$$

$\varepsilon$  – случайная ошибка («белый шум»);  $p$  – порядок авторегрессии;  $d$  – порядок разности;  $q$  – порядок скользящего среднего;  $P$  – порядок сезонной авторегрессии;  $D$  – порядок сезонной интеграции;  $Q$  – порядок сезонного скользящего среднего;  $m$  – длина сезонного периода.

Усовершенствованная модель  $SARIMAX$  учитывает сезонность, включает экзогенные переменные, которые напрямую не учитываются моделью  $ARIMA$ . Выбранная итеративным спосо-

бом оптимальная модель  $SARIMAX(1, 1, 0)*(1, 1, 0, 12)$  показала наименьший критерий Акаике, наименьшее значение MSE и MAE, нормальность остатков модели и аппроксимировала временной ряд (3), зафиксировав сезонность, аномалии, тенденцию к снижению коэффициента смертности, что видно на рис. 4.

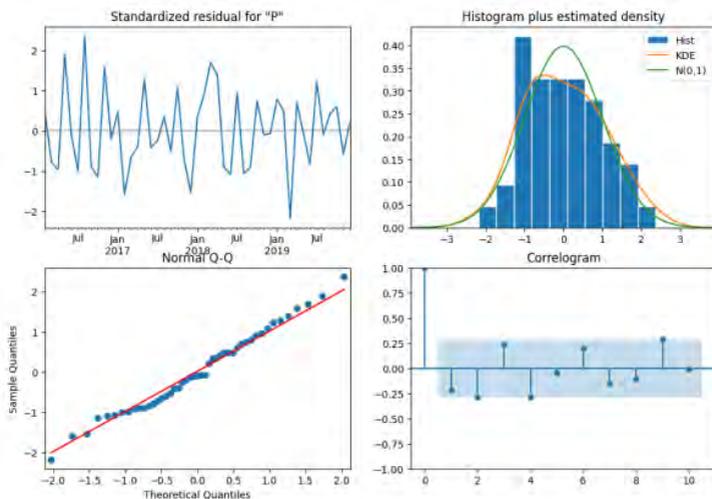


Рис. 4. Модель  $SARIMAX(1,1,0)*(1,1,0,12)$

Избыточная смертность  $S_{ij}^{**}$  в  $i$ -м периоде  $j$  сезонного цикла определялась как

$$(5) \quad S_{ij}^{**} = (K_{ij} - \hat{K}_{ij}).$$

Избыточная смертность в России, смоделированная этим способом, за 36 месяцев составила примерно 1,03 млн чел. (рис. 5). По годам избыточная смертность, посчитанная с помощью третьего метода, составила: в 2020 году – 308 041 человек (0,21% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года), в 2021 году – 630 886 человек (0,43% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года), в 2022 году – 90 209 человек (0,06% от общей численности населения РФ на 01.01.2020 года).

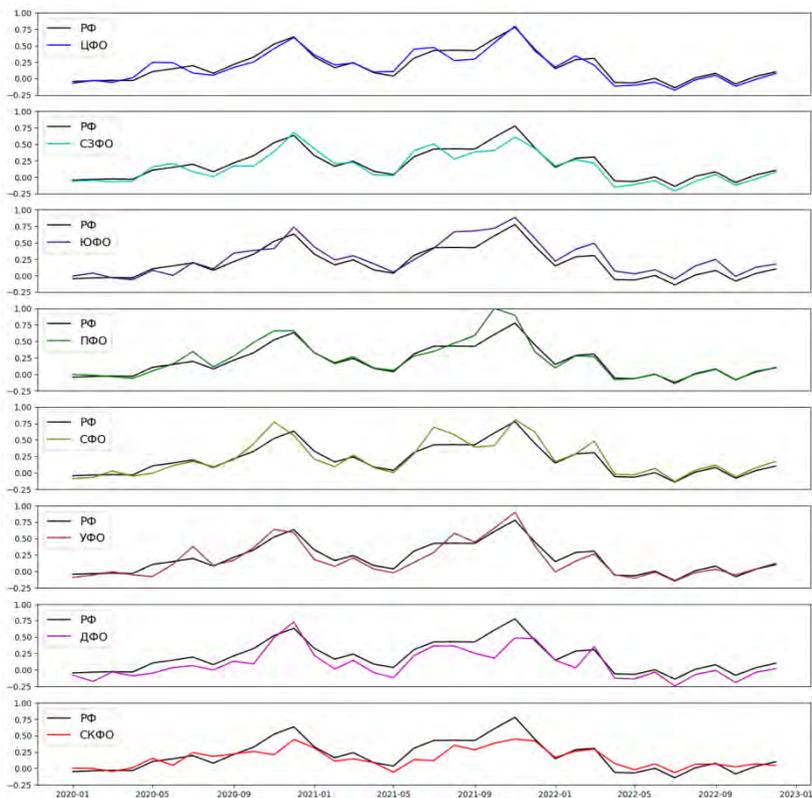


Рис. 5. Избыточная смертность в России в разрезе федеральных округов 2020–2022 гг. SARIMAX, на 1000 чел.

#### 4. Результаты и обсуждения

Временное увеличение смертности населения обычно вызывается внешними причинами – пандемией, войной, экстремальными температурами. Часть избыточной смертности в России можно списать на пандемию, на графиках четко прослеживаются несколько волн. Фактически было две волны, каждая из которых состоит из трех частей: первая и третья сравнительно небольшие и вторая – с очень высокой избыточной смертностью. Всего пиков шесть, из них четыре локальных. Пики волн у некоторых федеральных округов несколько различаются по

месяцам, что определяется их особенностями, и это смещение иногда приводит к отсутствию локального пика. Анализируя графики избыточной смертности по федеральным округам России, представленные на рис. 2, 3, 5 видно, что в мае 2020 года, 2021 года и 2022 года избыточная смертность близка к нулю во всех регионах РФ, что можно объяснить сезонной смертностью.

На всех представленных выше рисунках в 2021 году выделяется Приволжский федеральный округ. Округ терял свое население быстрее других округов в допандемийный период, сохранил «пальму первенства» среди федеральных округов по коэффициенту смертности (рис. 1) в пандемию (вместе с Южным и Сибирским федеральными округами) и удерживает ее в настоящее время. Несмотря на выгодное географическое положение, вполне привлекательный климат, концентрацию промышленных производств, отток населения увеличивается, смертность не уменьшается, рождаемость падает. Близость к ЦФО, негативная экологическая и социально-экономическая ситуация нивелируют преимущества данного округа.

В тройке лидеров по коэффициенту смертности оказался Южный федеральный округ. На всех трех моделях в Южном федеральном округе избыточная смертность в пиковые месяцы завышена. Площадь территории Южного ФО составляет 2,6% от всей территории России, на которой проживает более 11% всего населения России, ЮФО отличается разнообразием этнических групп и развитыми аграрными регионами, высокой плотностью населения. Подъемы избыточной смертности можно объяснить увеличением плотности населения, увеличением контактов населения в отпускные периоды.

Сибирский федеральный округ, обладая большими запасами природных ресурсов, важен с точки зрения экономики, но сталкивается с проблемами демографии и удаленности. Экономическая специализация сибирских регионов плюс демографические проблемы негативно отразились на избыточной смертности [8], но четкую корреляцию эпидемиологических и экономических характеристик в пандемийный период выявить не удалось [6]. Региональная промышленная политика, реализуемая в Сибирском и Дальневосточном округах, направленная на освоение месторождений природных ресурсов вахтовым мето-

дом повлияла на увеличение избыточной смертности в начале пандемии. В то же самое время территории Дальнего Востока России отличаются низкой взаимосвязью, низкой интенсивностью и динамичностью контактов населения, именно поэтому избыточная смертность населения на данных территориях практически не превышает средние значения по РФ в дальнейшем.

В Уральском федеральном округе наблюдается сдвиг избыточной смертности, так как COVID-19 затронул раньше всех регионы с самой высокой миграционной составляющей (Ханты-Мансийский и Ямало-Ненецкие автономные округа). Но самая тяжелая ситуация наблюдается в Курганской области, которая входит в десятку регионов с наибольшим коэффициентом смертности в пандемийный период. Население Курганской области мигрирует в более «богатые» близлежащие регионы (Тюменская область, Свердловская область, большие агломерации: Тюмень, Екатеринбург, Омск), смертность растет, рождаемость снижается.

В Центральном и Северо-Западном федеральных округах наблюдается аналогичная тенденция: столицы перетягивают молодое население, а территории, расположенные близко к столицам, пустеют. В двадцатку «лидеров» по коэффициенту смертности в допандемийный период и в настоящее время в Центральном федеральном округе входят все регионы, за исключением Белгородской, Калужской и Московской областей, в Северо-Западном федеральном округе – Республика Карелия, Новгородская область, Псковская область. В регионах, приближенных к столицам, наблюдается тенденция: рост смертности с увеличением возраста. Молодежь мигрирует, старики умирают. Это можно объяснить тем, что в столицах сосредоточены лучшие технологии, доступность и лучшие условия оказания медицинской помощи больным, более образованное и молодое население. Развитие больших агломераций приводит к негативным последствиям для других частей страны [3].

Северо-Кавказский федеральный округ на фоне остальных округов выделяется наименьшими показателями избыточной смертности, которые в пандемию не превышают максимальных значений по другим федеральным округам в допандемийный период, что объясняется не только его географическим положе-

нием, но и сохранением традиционного образа жизни (экономическая зависимость женщин и сохранение института семьи), самосохранительным поведением населения. Этот федеральный округ среди всех округов России отличается самой высокой продолжительностью жизни, самой высокой рождаемостью, высокой плотностью населения.

Смещение пиков избыточной смертности в Сибирском и Уральском, Центральном ФО можно объяснить более ранним приходом пандемии на эти территории за счет миграционной составляющей.

На картину избыточной смертности повлияла не только пандемия, но и пространственная неоднородность Российской Федерации. Негативные демографические тенденции, наблюдаемые на некоторых территориях России, были усилены пандемией.

Сравнение результатов моделирования избыточной смертности с удельной смертностью от Covid-19 (на 1000 чел.) в России представлено на рис. 6.

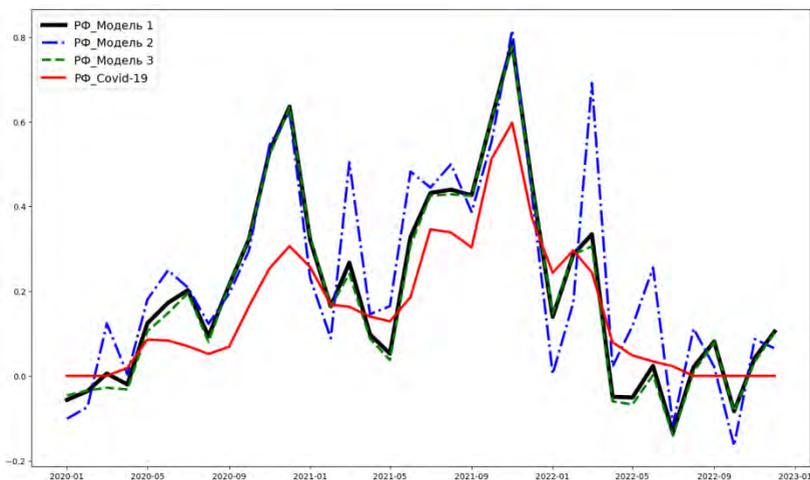


Рис. 6. Результаты расчетов избыточной смертности по трем моделям в РФ и удельная смертность от Covid-19 (по данным Росстата, на 1000 чел.) в 2020-2022 гг.

Результаты, полученные по первой и третьей моделям, практически совпадают, пиковые значения коррелируют со значениями удельной смертности от Covid-19. Необходимо оценить насколько три модели отклонились от истинных значений удельной смертности от Covid-19 в России. Используем показатель RMSE для оценки разницы между удельной смертностью от Covid-19 (истинным значением) и результатами моделирования (предсказанным значениями).

Таблица 1. Оценка результатов моделирования в сравнении с удельной смертностью от Covid-19

	Модель 1	Модель 2	Модель 3
RMSE	0,107	0,168	0,114

Значение ошибки RMSE первой модели меньше соответствующих ошибок других моделей. Из трех моделей избыточной смертности первая оказалась лучше, результат, полученный по второй модели, оказался завышенным. Пандемией можно объяснить около 30% избыточных смертей в 2020 году и до 70% в 2021 году, Covid-19 стал третьей причиной смертности в России вслед за сердечно-сосудистыми и онкологическими заболеваниями. В 2022 году влияние пандемии нивелируется, система здравоохранения адаптируется и по данным официальной статистики смертность снижается, именно это повлекло за собой отказ от подсчета показателя смертности от Covid-19 после июля 2022 года и сказалось на достоверности этого показателя в 2022 году. Удельная смертность в 2023 году ниже показателей 2015–2022 годов. Пандемия закончилась, анализ ее последствий позволит минимизировать их тяжесть, мобилизовать ресурсы и принять правильные шаги в организации системы здравоохранения. Внутренние ограничения и противоречия «центр – периферия» должны быть преодолены и не являться более сдерживающим фактором пространственного развития России.

Выбор первой и второй модели оправдан для оперативной оценки избыточной смертности. Значение ошибки RMSE первой и третьей моделей сопоставимы, но третья модель *SARIMAX* (1, 1, 0)\*(1, 1, 0, 12) позволяет сделать прогноз смертности на будущие периоды. Прогнозирование избыточной смертности –

сложная и многогранная задача, требующая совмещения различных методов и учета разнообразных факторов. Прогноз в разрезе округов РФ на 2023 год представлен в таблице 2.

Таблица 2. Смертность в сравнении с прогнозом смертности (модель  $SARIMAX(1, 1, 0)*(1, 1, 0, 12)$ ) в разрезе федеральных округов Российской Федерации на 2023 год (человек)

2023 год	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Ноябрь	Декабрь	ГОД	RMSE
ЦФО_PRED	49517	42189	45062	44689	44951	41075	43405	41735	40409	45970	41610	43618	524230	
ЦФО	44326	36536	42863	38093	41925	38243	36673	39383	38016	41390	40259	45647	483354	0,103443
СЗФО_PRED	17560	15503	16494	16470	16032	14586	15885	15478	14831	16099	14667	15486	189091	
СЗФО	16529	12635	15519	13183	14368	13515	12395	14242	12911	14779	14458	15913	170447	0,138595
СФО_PRED	20747	17704	17314	18088	18326	16022	18101	17019	16386	18354	16328	17304	211694	
СФО	21140	16381	19100	16520	18926	18071	16530	17511	16468	17864	17986	18785	215282	0,077579
ЮФО_PRED	18555	15429	17125	16955	16908	14788	15975	15148	13662	16804	15492	15738	192580	
ЮФО	19948	15835	19422	16291	18085	16105	15740	18235	15641	17404	17327	18260	208293	0,101926
УФО_PRED	14150	12095	12367	12275	12675	11247	12559	11585	11443	12597	11305	11858	146156	
УФО	14077	10452	12813	10575	12259	11226	11303	11350	11036	11820	11604	12639	141154	0,070917
СКФО_PRED	5921	6006	6222	5866	5880	5003	5772	5190	4960	5407	5434	5960	67622	
СКФО	6642	5427	6885	5341	6070	5514	5404	6319	5481	6020	5979	6490	71572	0,060009
ПФО_PRED	34632	30298	32638	32285	32995	29718	31706	30186	29171	32744	29232	30597	376203	
ПФО	36318	27822	32746	28493	32539	29597	29528	30451	28628	31018	30628	32952	370720	0,062985
ДФО_PRED	10563	9436	9394	9331	9398	8343	9423	8958	8517	9718	8767	9151	111021	
ДФО	9438	7721	9203	7419	8585	7949	7704	8281	7613	8517	8130	8790	99350	0,141422

Полученные результаты и оценки позволяют считать модель  $SARIMAX(1, 1, 0)*(1, 1, 0, 12)$  адекватной и использовать для прогнозирования исследуемого процесса – избыточной смертности/смертности в разрезе федеральных округов РФ. Прогноз для СФО, УФО, СКФО и ПФО более точен, чем для остальных федеральных округов. Результаты могут быть учтены при разработке прогнозов социально-экономического развития России на долгосрочный период в разрезе федеральных округов.

## 5. Выводы

Научный интерес представляет применение математических методов анализа временных рядов к новым областям знаний, позволяющих решать специфические задачи из области демографии и экономики. Анализ существующих моделей оценки избыточной смертности в России показал, что универсального алгоритма не существует. На данный момент актуальной остается разработка общих формальных методов оценки избыточной смертности.

Научно-практическая ценность данной работы заключается в том, что представленные модели оценки избыточной смертности в России в пандемийный период основаны на уточненных данных Росстата, позволяют достоверно оценить реальные человеческие потери в этот период по федеральным округам и России в целом. Результатом моделирования является количественная оценка сверхсмертности в России в пандемийный период. Избыточная смертность в России за период 2020-2022 годы составила 1,07 млн. чел., пандемией можно объяснить 57% избыточных смертей в 2020–2021.

В данной работе апробированы три модели построения избыточной смертности в Российской Федерации, и на основе модели  $SARIMAX(1,1,0)*(1,1,0,12)$  построен прогноз смертности на 2023 год в разрезе федеральных округов.

### Литература

1. БЛОХ А.И., ПАСЕЧНИК О.А., КРАВЧЕНКО Е.И. и др. *Подходы к оценке избыточной смертности населения в регионах РФ в период пандемии COVID-19* // Медицинский альманах. – 2022. – №1(70). – С. 57–65.
2. ГОРОШКО Н.В., ПАЦАЛА С.В., *Избыточная смертность в период пандемии COVID-19: регионы России на фоне страны* // Социально-трудовые исследования. – 2022. – №46(1). – С. 103–116.
3. ДРУЖИНИН П.В., МОРОШКИНА М.В., СЕДОВА К.Е. *Развитие агломераций и рост экономики регионов* // Конкурентоспособность в глобальном мире: экономика, наука, технологии. – 2023. – №6. – С. 95–99.
4. КАШЕПОВ А.В. *Избыточная смертность населения во время пандемии COVID-19 в регионах России* // Вестник Алтайской академии экономики и права. – 2022. – №9-3. – С. 352–360.
5. КРИГЕР Е.А., ПОСТОЕВ В.А., ГРЖИБОВСКИЙ А.М. *Статистические подходы к оценке избыточной смертности: обзор предметного поля на примере пандемии COVID-19* // Экология человека. – 2023. – Т. 30, №7. – С. 483–498.

6. КРЮКОВ В.А., СЕЛИВЕРСТОВ В.Е. *Пандемия коронавируса: Сибирское измерение* // Научные труды Вольного экономического общества России. – 2022. – Т. 234, №2. – С. 32–53.
7. ЛИФШИЦ М.Л. *Дополнительная смертность в период пандемии COVID-19 в России и других странах* // Human Progress. – 2022. – Т. 8, №2. – С. 8.
8. ПАСТУХОВА Е.Я., МОРОЗОВА Е.А. *Избыточная смертность в сибирских регионах в условиях пандемии COVID-19: динамика и факторы влияния* // Регионоведение. – 2022. – Т. 30, №3. – С. 602–623.
9. СМИРНОВ А.Ю. *Избыточная смертность в сибирских регионах в условиях пандемии COVID-19: динамика и факторы влияния* // Народонаселение. – 2021. – Т. 24, № . – С. 76–86.
10. CARTER L.R., LEE R.D. *Modeling and forecasting US sex differentials in mortality* // Int. Journal of Forecasting. –1992. – Vol. 8, Iss. 3. – P. 393–411.
11. <https://rosstat.gov.ru/folder/12781> (дата обращения 23.01.2025).
12. [https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/EDN\\_12-2023.html](https://rosstat.gov.ru/storage/mediabank/EDN_12-2023.html) (дата обращения 23.01.2025).
13. <https://www.who.int/publications/m/item/methods-for-estimating-the-excess-mortality-associated-with-the-covid-19-pandemic> (дата обращения 23.01.2025).
14. KARLINSKY A., KOBAK D. *Tracking excess mortality across countries during the covid-19 pandemic with the world mortality dataset* // eLife. – 2021. – Vol. 10. – P. e69336.
15. KNUTSON V., ALESHIN-GUENDEL S., KARLINSKY A. et al. *Estimating global and country-specific excess mortality during the Covid-19 pandemic* // Annals of Applied Statistics. – 2023. – Vol. 17, No. 2.
16. LI N., LEE R. *Coherent mortality forecasts for a group of populations: an extension of the Lee-Carter method* // Demography, – 2005. – Vol. 42(3). – P. 575–94.
17. MSEMBURI W., KARLINSKY A., KNUTSON V. et al. *The WHO estimates of excess mortality associated with the COVID-19 pandemic* // Nature. – 2023. – Jan; 613(7942). – P. 130–137.

18. SAMSUDIN N.S., MOHD NOR S.R. *Multi-Population O'Hare with ARIMA, ARIMA-GARCH and ANN in Forecasting Mortality Rate* // Matematika. – 2023 – Vol. 39(3). – P. 213–226.

## MODELLING EXCESS MORTALITY DURING THE PANDEMIC PERIOD AMONG FEDERAL DISTRICTS OF THE RUSSIAN FEDERATION

**Irina Makhankova**, Institute of Economics of Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, Chief Economist (makhankova@petrsu.ru).

**Pavel Druzhinin**, Institute of Economics of Karelian Research Centre of RAS, Petrozavodsk, professor (pdruzhinin@mail.ru).

*Abstract: The pandemic has affected all spheres of life in all regions of the Russian Federation and has had an impact on the temporary increase in mortality in Russia. The calculations show that the pandemic occurred in two waves, each consisting of three parts, with peaks of high excess mortality. The purpose of this article is to use mathematical models to calculate excess mortality by federal districts, taking into account data from the latest all-Russian population census, and to analyze the impact of COVID-19 on excess mortality in Russia. When calculating excess mortality, the first method took into account mortality in the previous period (2019), the second method is based on calculating the downward trend in mortality in 2019 compared to 2018, the third combined statistical method SARIMAX takes into account mortality trends since 2015. The result of the modeling is a quantitative assessment of excess mortality in Russia during the pandemic period. The pandemic can explain 57% of excess deaths in 2020-2021. A mortality forecast for 2023 has been compiled in the context of federal districts. The results can be taken into account when developing forecasts for the socio-economic development of Russia for the long term in terms of health protection of the population.*

Keywords: pandemic, total mortality, excess mortality, modeling, forecasting.

УДК 004.91 + 51-77 + 314.1 + 330.4

ББК 22.172 + 60.7 + 65.051

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

*Поступила в редакцию 21.08.2024.*

*Опубликована 31.01.2025.*

## МЕТОДИКА И ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛИТЕЛЬНОСТИ СВЕТОФОРНОГО ЦИКЛА<sup>1</sup>

Грушевский А. А.<sup>2</sup>, Ильинская Е. С.<sup>3</sup>, Финогеев А. А.<sup>4</sup>  
(ФГБОУ ВО Пензенский государственный  
университет, Пенза)

Одним из основных элементов управления транспортными и пешеходными потоками в дорожной среде является светофорное регулирование. Автоматизация управления светофорным регулированием позволяет рассчитать оптимальные режимы его работы с целью сокращения задержек при движении транспорта и времени ожидания проезда через перекрестки, снижения вероятности образования пробок. Результатом является повышение безопасности дорожного движения и устойчивости городской транспортной системы. В статье рассматриваются вопросы разработки модели, методики и инструментального средства для расчета оптимальных тактов светофорного цикла. Актуальность статьи обусловлена тем, что рост дорожного трафика снижает эффективность использования транспортных средств, увеличивает время задержек и остановок, расход топлива, повышает количество дорожно-транспортных происшествий и нарушений. Объектом исследования является система адаптивного управления светофорами на перекрестках. Целью исследования является анализ и разработка математической модели и методики расчета тактов светофорных циклов в зависимости от текущих условий дорожного движения на перекрестках для сокращения времени ожидания транспорта и пешеходов. Результатом исследований является разработанное программное приложение, которое реализует предложенную методику расчета оптимальной длительности тактов светофорного цикла в зависимости от интенсивности автомобильного и пешеходного трафика, длины очереди.

Ключевые слова: пешеходный поток, светофорный цикл, адаптивный светофор, интеллектуальный светофор, интенсивность трафика, модель светофорного цикла.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 20-71-10087, <https://rscf.ru/project/20-71-10087/>.

<sup>2</sup> Александр Анатольевич Грушевский, аспирант ([sgrushevskii@mail.ru](mailto:sgrushevskii@mail.ru)).

<sup>3</sup> Екатерина Сергеевна Ильинская, магистрант ([ilinskaya58k@mail.ru](mailto:ilinskaya58k@mail.ru)).

<sup>4</sup> Антон Алексеевич Финогеев, к.т.н., доцент ([fanton3@yandex.ru](mailto:fanton3@yandex.ru)).

## 1. Введение

Одним из методов повышения безопасности дорожного движения и снижения числа дорожно-транспортных происшествий (ДТП) является светофорное регулирование [6]. Светофоры предназначены для пропуска участников дорожного движения и для обозначения опасных участков. Они применяются для управления по направлениям или полосам движения, в местах с встречными конфликтующими потоками, в местах пересечения конфликтующих транспортных и пешеходных потоков, в местах организации реверсивного движения, на железнодорожных переездах, разводных мостах, переправах и т.п. [9]. Существует три типа светофоров: светофоры с жестким управлением (с постоянной долговременной настройкой), адаптивные светофоры и интеллектуальные светофоры [10]. Адаптивные светофоры предназначены для простых перекрестков, где нет постоянной загруженности дорожных полос в разных направлениях и периодически появляются свободные временные окна, например на перекрестках с выездом с второстепенной дороги или на регулируемых пешеходных переходах. Часто к таким светофорам относят те, у которых алгоритм работы просто изменяется в зависимости от времени суток, например в часы пик. Адаптивные светофоры работают на основе данных, получаемых с помощью видеокамер или детекторов обнаружения транспортных средств (ТС) и определения параметров транспортных потоков. Детекторы выполняют функции обнаружения подвижных и неподвижных ТС в контролируемой зоне, измерения количества автомобилей по полосам за заданный период, вычисления средней скорости движения по полосе в заданный период времени. Проблема видеокамер заключается в зависимости от погодных условий, когда, например, осадки и туман снижают точность распознавания и измерения характеристик транспортных потоков.

Светофорная система считается интеллектуальной, если она распознает ситуацию на перекрестке и динамически определяет оптимальные фазы переключения с учетом фактических задержек транспортных и пешеходных потоков. Системы работают с использованием детекторов транспортных средств, пешеходных датчиков и комплекса видеокамер. Данные об интенсивности

трафика на всех полосах движения и о скоплениях ТС и пешеходов поступают с датчиков детектирования и камер видеонаблюдения в реальном времени. Детекторы транспорта устанавливаются на уровнях 30, 60, 90 150 метров и стоп-линиях перекрестков. Для светофорного регулирования применяется метод дискретно-событийного управления с использованием модели нейронных сетей [12]. Интеллектуальные светофоры с моделью в виде нейронной сети относятся к системам с искусственным интеллектом [32]. Они учитывают множество различных факторов, а механизм регулирования базируется на обучении нейронной сети. Нейронная сеть по результатам распознавания и анализа транспортных потоков на полосах движения рассчитывает значения тактов переключения светофора для отдельных полос, пешеходов и типовых моделей перекрестков (рис. 1). Целью расчета является подбор тактов так, чтобы суммарно со всех сторон пропустить максимально возможное число ТС за интервал времени в зависимости от размера очереди, одновременно позволяя пешеходам перейти улицу за минимальное время ожидания.

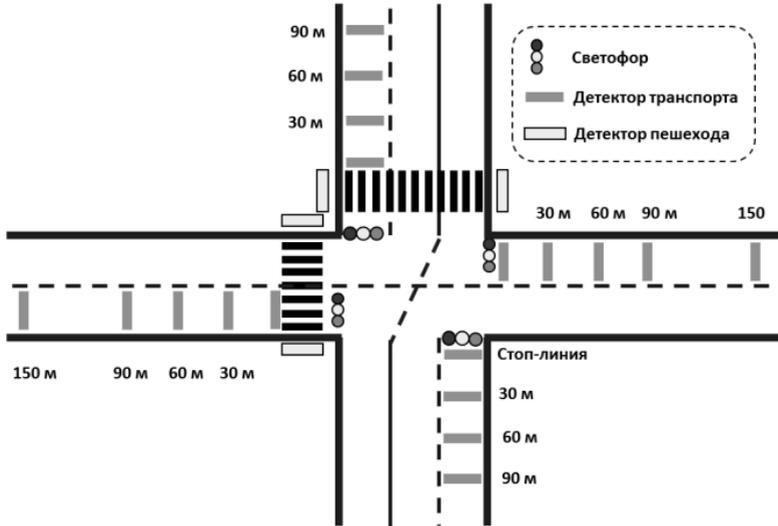


Рис. 1. Модель перекрёстка

Современные нейросетевые технологии позволяют достаточно точно распознать объекты в любых ракурсах при сложных метеоусловиях, обеспечивая более точный подсчет ТС на большом расстоянии [32, 15]. Нейронные сети могут определить состав ТС по разным параметрам для оценки времени движения автомобиля с учетом коэффициентов поправки расчетов [29, 27]. В отличие от адаптивных, светофоры с нейронной сетью могут распознавать и подсчитывать людей, что важно для настройки пешеходного цикла движения, а также распознавать объекты в виде колясок, велосипедов, самокатов и других ТС, которые также необходимо учитывать в процессе регулирования.

В современных автоматизированных системах управления дорожным движением используется информация от видеочамер, детекторов транспортных средств и пешеходных потоков (рис. 1). Полученная информация позволяет организовать управление транспортными потоками, скоординировать работу светофорных объектов на маршрутах движения. Преимуществом комбинированных систем видеонаблюдения и детектирования является возможность одновременного визуального мониторинга и расчета количественных статистик для транспортных и пешеходных потоков. Такие системы собирают данные трех типов:

а) статистическую информацию о дорожном трафике, включая число ТС, скорость ТС, ускорение транспортного потока, плотность, занятость полос и т.п.,

б) информацию о дорожно-транспортных происшествиях (ДТП) и нарушениях правил дорожного движения (ПДД), включая число и тип ДТП, нарушение скоростного режима, образование заторов и пробок, изменение плотности потока, движение по встречной полосе или обочине, замедление потока, наличие сторонних объектов и т.п.,

в) информацию о ТС в зоне пересечений автомобильных дорог, включая наличие, число и среднюю скорость движущихся ТС, наличие и число остановившихся ТС перед светофором, число ТС и длины очередей на полосах движения, число пешеходов, переходящих дорогу, число пешеходов, ожидающих перехода и т.п.

Последний тип данных в основном применяется в системах управления светофорами.

## **2. Теоретический обзор**

Для разработки адаптивных и интеллектуальных систем управления светофорными объектами применяются различные математические и имитационные модели, методы и алгоритмы оптимизации, поддержки принятия решений, статистического и интеллектуального анализа, глубокого машинного обучения, компьютерного зрения и т.д. Система управления светофорами рассматривается как один из компонентов городской интеллектуальной транспортной системы. Такая система обеспечивает моделирование, планирование, прогнозирование и оптимизацию функционирования объектов в дорожной среде с целью обеспечения безопасности дорожного движения и эффективности использования элементов дорожно-транспортной инфраструктуры.

В работе [4] авторами рассматривается математическая графовая модель регулируемого перекрестка, для оптимизации работы которого применяется вариационный генетический алгоритм. Дорожная сеть моделируется как ориентированный граф, где вершинами с весами (характеристиками транспортного потока) являются участки дорог, а дугами – проезды на перекрестках. Сигналы светофоров моделируются включением и выключением дуг. Математическая модель работы графа формализуется системой рекуррентных конечно-разностных уравнений. Критерием оптимизации является максимальное число ТС, которое должно пройти от входных участков к выходным за заданное время светофорной длительности [1].

Обзорная работа [14] представляет различные системы светофорного регулирования, разработанные с использованием современных подходов. Технологии сенсорных сетей, интеллектуальных транспортных систем и методы обработки изображений используются для сбора статистики дорожного движения в реальном времени и оценки данных для изменения светофорных фаз с помощью интеллектуальных контроллеров с нечеткой логикой. Другая обзорная статья [18] представляет сборник материалов по автоматизированным системам управления дорожным движением.

В работе [3] предложен метод адаптивного управления светофорами на основе нечеткой кластеризации. Определение оптимальных значений параметров систем управления светофорами (длительность фаз, радиусы наблюдений за транспортными и пешеходными потоками, пороговые коэффициенты, число кластеров) выполняется с использованием параллельного генетического оптимизационного алгоритма с вещественным кодированием. Исследования в работе [8] также связаны с синтезом математической модели распределения транспортных потоков для управления светофорной сигнализацией. Исходные данные используются в алгоритме расчета оптимальных параметров светофорного регулирования, а также в алгоритме определения длины ленты безостановочного движения и величины оптимального сдвига фазы светофора.

Авторы статьи [16] предложили интеллектуальную систему для последовательности светофоров. Она использует данные о транспортных и пешеходных потоках в реальном времени и алгоритмы машинного обучения для оптимизации. Данные поступают с детекторов, камеры видеонаблюдения и GPS-модулей. На основе данных система регулирует длительность фаз светофоров в последовательности на маршруте для оптимизации транспортного потока. Например, в часы пик длительность разрешающей фазы увеличивается в направлении с наибольшим трафиком. Ретроспективные данные используются в качестве обучающей выборки для оптимизации работы светофоров в разные дни недели и время суток путем поиска закономерностей в транспортных потоках, например, в часы пик. Другая работа [24] также связана с сезонными колебаниями транспортных и пешеходных потоков в городе. Цель исследования заключается в повышении эффективности системы светофоров путем мониторинга транспорта в режиме реального времени с учетом сезонности. Для светофорного регулирования движения также используется навигационный сервис Google Maps с целью минимизации пробок за счет определения плотности трафика и изменения времени ожидания на светофоре.

Большое количество исследователей разрабатывают методы глубокого обучения и обучения с подкреплением для интеллек-

туального управления светофорами. В работе [33] авторы предлагают интеллектуальный метод управления светофорами с использованием алгоритма глубокой сети Q-learning для минимизации задержки ранних и поздних пиков трафика. В статье [30] авторы сравнивают различные решения по управлению сигналами светофора в режимах обучения и представляют свою модель принятия решений, основанную на глубоком обучении с подкреплением. Результаты исследований [22] также связаны с моделью глубокого обучения с подкреплением для управления циклом светофора. Авторы определяют сценарий дорожного движения как ряд состояний, а изменения светофорных циклов – как действия в многомерном марковском процессе принятия решений. Для оптимизации процесса используется сверточная нейронная сеть (CNN) с целью сопоставления состояний с вознаграждениями. Аналогичный подход на базе алгоритма глубокого обучения с подкреплением представлен в статье [21]. Алгоритм извлекает зависимости из данных о трафике в реальном времени и определяет оптимальную стратегию адаптивного управления сигналами светофора. Анализ показывает, что множество исследований в области интеллектуального управления светофорами (ITLC) в основном сосредоточены на совершенствовании метода обучения с подкреплением и метода координации работы светофорной последовательности. Однако для повышения эффективности методов необходимо учитывать условия дорожного движения и синхронизацию работы светофоров на разных перекрестках. В традиционных алгоритмах ITLC, основанных на обучении с подкреплением, при расчете вознаграждения учитывается либо длина очереди автомобилей, либо их время ожидания. Авторы работы [23] предлагают новый алгоритм ITLC с учетом времени отправки и обработки сообщений в сети для синхронизации работы светофоров и модель расчета вознаграждения с одновременным учетом времени ожидания и длины очереди. В статье [17] предлагается использовать альтернативный способ формулировки определений состояния и вознаграждения. Авторы предполагают, что такой подход обеспечивает быструю сходимость к оптимальной стратегии управления.

Для решения задач распознавания и детектирования транспортных средств на перекрестках с помощью видеокамер в сложных погодных условиях коллективом были разработаны собственные методы и инструментальные средства [11, 13, 25, 26]. Предложенные модели и методы позволяют распознавать транспортные средства на зашумленных изображениях, которые получаются при видеофиксации в условиях осадков, идентифицировать объекты при съемке под разными ракурсами и при перекрытиях до 75% на изображениях.

### **3. Материалы и методы**

Выделим две задачи автоматического регулирования дорожного трафика в урбанистической среде. Первой задачей является оптимальное управление длительностью светофорных циклов, второй – координированное управление последовательностью светофорных объектов, объединенных в единую зону на маршруте следования транспортных средств. Для решения задач в городах внедряются адаптивные и интеллектуальные светофоры, которые координируют фазы переключения на основе видеонаблюдения, детектирования ТС и пешеходов, проводят анализ дорожной обстановки на полосах движения, прилегающих к месту регулировки. Оптимальное управление длительностью светофорных циклов заключается в автоматической настройке тактов регулирования очередности пропуска ТС и пешеходов в зависимости от интенсивности конфликтующих транспортных и пешеходных потоков, от количества ожидающих пропуска ТС и пешеходов.

В обоих случаях для оптимального управления светофорными циклами необходимо учитывать ряд входных параметров, а именно:

- геометрические параметры перекрестков дорог (ширину проезжей части, число полос движения, разницу закруглений тротуаров, расстояние до конфликтных точек, наличие разделительных полос, их ширину и т.п.),
- параметры транспортных и пешеходных потоков по всем направлениям движения (картограммы потоков, среднюю скорость движения потоков, состав, длину автомобилей и т.п.),

- схема организации движения на перекрестках, которая включает направления движения на перекрестках и используется для определения и анализа конфликтных точек,
- параметры потоков насыщения и т.д.

*Постановка задачи.* Задачей исследования является разработка методики и программного приложения для расчета оптимальной длительности светофорного цикла для ТС при проезде на перекрестках и для пешеходов при пересечении проезжей части. Основные требования включают следующие положения.

1. Оптимальное время длительности светофорного цикла для ТС должно рассчитываться в зависимости от числа проездов ТС (транспортной загруженности) на полосах дороги до стоп-линии или конфликтной точки перекрестка.

2. Ограничение для максимально возможной загруженности перекрестка устанавливается не более 1500 автомобилей в час на одну полосу движения.

3. Фазы светофорного регулирования зависят от числа полос движения (2, 4 или 6 для основных и второстепенных дорог) и размера перекрестка.

4. При расчете схемы светофорного регулирования рекомендуется стремиться к минимальному числу фаз, к равномерной загрузке полос и к бесконфликтному пропуску пешеходов.

Рассмотрим особенности движения ТС через перекрестки, которые учитываются в методиках расчета и оптимизации светофорного цикла [5, 7]. Как правило, методики расчета используют для модели задержки ТС на перекрестках [31, 28]. В нашем случае выбрана модель, которая основывается на исследовании процессов проезда ТС через перекрёсток [2]:

$$(1) \quad d = \frac{(c-g)q}{gs} \cdot \frac{q_0}{s} + kg,$$

где  $d$  – средняя задержка ТС;  $c$  – длина цикла регулирования;  $g$  – длительность зеленого сигнала;  $q$  – интенсивность прибытия ТС;  $q_0$  – очередь ТС;  $s$  – интенсивность убытия ТС;  $k = [0-0,5]$  – коэффициент, учитывающий случайные задержки.

Критериями оптимальности в данной модели являются минимум задержки ТС в очереди ( $d = \min$ ), и минимальная длина очереди на перекрестке ( $q_0 = \min$ ). Модель адаптируется к ситуа-

ции на дороге и позволяет рассчитывать длительности тактов светофора в следующем цикле по результатам работы в предыдущем цикле.

Светофорный цикл без дополнительных поворотных фаз включает основной такт (для разрешающего в основном направлении и запрещающего сигналов в конфликтующем направлении) и промежуточный такт (рис. 2). Расчеты начинаются с определения длительности промежуточных тактов.

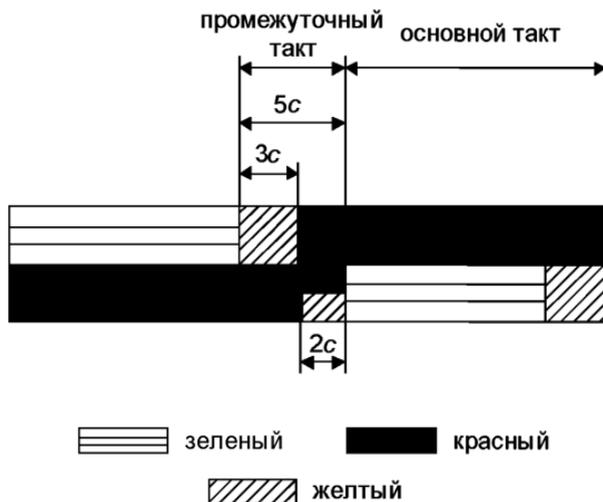


Рис. 2. Работа основных и промежуточного такта светофора

Промежуточный такт рекомендуется для обеспечения безопасности движения в период, когда движение ТС по основному направлению уже запрещено, ТС в конфликтующем направлении еще не получила разрешения на движение. Длительность промежуточного такта должна позволить ТС остановиться у стоп-линии или успеть миновать конфликтные точки пересечения с встречными ТС, начинающими движение в следующем основном такте. Минимальная длительность промежуточного такта работы светофора между разрешающим и запрещающим сигналом не может быть менее 4 с, с учетом того, что желтый сигнал светофора горит 3 с, а красный с желтым – 2 с. Однако статистика

ДТП показывает, что во время короткого промежуточного такта происходит больше всего аварий. Поэтому на перекрестках с повышенными показателями аварийности в переходный период смены сигналов по направлениям для повышения безопасности движения может быть организован режим «кругом красный». Длительность промежуточного такта можно оценить как сумму

$$(2) T_{ni} = t_{pi} + t_m + t_i + t_{(i+1)},$$

где  $t_{pi}$  – время реакции водителя на смену сигналов;  $t_m$  – время для проезда ТС тормозного пути;  $t_i$  – время движения ТС до дальней конфликтной точки;  $t_{(i+1)}$  – время проезда ТС в следующем основном такте конфликтующего направления от стоп-линии до конфликтной точки.

На практике время  $t_{pi}$  в большинстве случаев приблизительно равно времени  $t_{(i+1)}$ , поэтому их можно не учитывать при расчете длительности светофорного такта. Также при включении запрещающего сигнала происходит замедление скорости и торможение ТС перед стоп-линией, за исключением случаев нарушения правил дорожного движения. Тогда длительность промежуточного такта можно определить по формуле

$$(3) T_{ni} = \frac{V_{TC}}{7,2a_{TC}} + \frac{3,6(l_i + l_{TC})}{V_{TC}},$$

где  $V_{TC}$  – средняя скорость ТС при движении к перекрестку и на перекрестке без торможения (км/ч);  $a_{TC}$  – среднее замедление ТС при включении запрещающего сигнала ( $a_{TC} = 0,75 \text{ м/с}^2$ );  $l_i$  – расстояние от стоп-линии до дальней конфликтной точки (м);  $l_{TC}$  – средняя длина ТС (м).

Пешеходы, переходившие проезжую часть на разрешающий сигнал светофора, также должны закончить свое движение до окончания промежуточного такта. Если они не успеют перейти на другую сторону, то за время  $T_{ni}$  они должны вернуться обратно к началу движения или дойти до середины проезжей части (островка безопасности, разделительной линии встречных потоков). Максимальное время, которое требуется пешеходу, можно оценить как

$$(4) T_{ni}^p = \frac{B_{ns}}{4V_p},$$

где  $B_{ns}$  – ширина проезжей части для пешехода на  $i$ -м такте регулирования (м);  $V_p$  – средняя скорость движения пешеходов (в среднем 1,3 м/с).

После определения промежуточных тактов переходим к определению длительности основных тактов во всех фазах. Для расчета длительности здесь необходимо учитывать фазовые коэффициенты по каждому направлению движения, включая поворотные фазы. В случае интенсивного транспортного потока и наличия поворотов может потребоваться добавить в светофорный цикл поворотные такты, что увеличивает число фаз. Отметим, что при увеличении числа фаз пропускная способность всех полос снижается. Пропускная способность поворота ТС зависит от интенсивности встречного основного потока. Поэтому длительность времени такта на пропуск поворотного потока пропорциональна его интенсивности. Если интенсивность встречного потока не превышает 120 ТС в час, то отдельной фазы на пропуск такого потока не предусматривается и ТС должны проезжать в возможные свободные промежутки между ТС встречного потока. В противном случае рассчитывается длительность 3 фазы поворотного сигнала светофора. Также при интенсивности транспортного потока менее 120 ТС в час ТС могут проезжать через пешеходный поток без дополнительной фазы запрещающего сигнала для пешеходов, но только если интенсивность пешеходного потока не превышает 900 человек в час.

Фазовые коэффициенты можно определить как

$$(5) \quad y_{ij} = \frac{N_{ij}}{M_{ij}},$$

где  $y_{ij}$  – фазовый коэффициент направления;  $N_{ij}$  – интенсивность движения для периода суток;  $M_{ij}$  – поток насыщения на полосу (в нашем случае принимается как 1500 ТС в час). После расчета множества фазовых коэффициентов выбирается их максимум в данной фазе для дальнейших расчетов.

Полная длительность цикла регулирования вычисляется по формуле

$$(6) \quad T = \frac{1,5T_n + 5}{1 - Y}, \text{ где } T_n = \sum_{i=1}^n T_{ni}, \text{ а } Y = \sum_{i=1}^n y_i.$$

Длительность основных тактов для фаз определяется по формуле

$$(7) \quad t_i = \frac{(T-T_n)y_i}{Y},$$

где  $T$  – длительность светофорного цикла;  $T_n$  – сумма промежуточных тактов;  $Y$  – сумма фазовых коэффициентов  $y_i$ . Длительность проверяется на соответствие времени пропуска пешеходов и трамваев при их наличии.

Длительность основного такта пешеходов  $t_p$  определяется по формуле

$$(8) \quad t_p = \frac{B_p}{V_p} + 5,$$

где  $B_p$  – ширина пешеходного перехода;  $V_p$  – средняя скорость движения пешеходов.

При расчете циклов используется средняя скорость транспортных потоков по направлениям, которую можно определить по навигационным сервисам типа Yandex Map.

При изменении средних скоростей для оптимизации основных тактов в фазах и для корректировки длительности цикла применяется формула

$$(9) \quad T_{cor} = \frac{A}{2B} + \sqrt{\frac{A^2}{4B^2} - \frac{(T_n + T^*)(1,5T_n + 5)}{B}},$$

где  $A = 2,5T_n - T_n \cdot Y + T^* + 5$ ,  $B = 1 - Y$ ;  $T_{cor}$  – корректируемая длительность цикла;  $Y$  – сумма фазовых коэффициентов,  $T^* = \sum t_j$  – суммарная длительность  $j$ -х основных тактов;  $T_n$  – суммарная длительность промежуточных тактов.

Длительность основных тактов  $T^*$  вычисляем по формулам

$$(10) \quad t_i^* = y_i K^* T^*;$$

$$(11) \quad K^* = \frac{T^* - T_n}{T^* - 1,5T_n - 5}.$$

#### 4. Результаты

Модель длительности циклов и методика расчета тактов светофора реализована в виде программного приложения. Приложение используется для адаптивной настройки оптимального светофорного цикла. Для его тестирования и верификации взяты параметры работы светофора в городе Пенза, полученные в ходе мониторинга работы и оценки интенсивности транспортного и пешеходного потоков на перекрестке (рис. 3).

```
Введите количество полос: 2
Введите количество фаз: 2
Введите интенсивность N для фазы 1: 925
Введите длину В для фазы 1: 12
Введите длительность  $t_n$  для фазы 1: 3
925.0 12.0 3.0 1.85 0.4
Введите интенсивность N для фазы 2: 578.125
Введите длину В для фазы 2: 20
Введите длительность  $t_n$  для фазы 2: 4
578.125 20.0 4.0 1.85 0.25
Введите текущее время суток: 15
Стартовая длина цикла: 44.29 с.
Фаза 1 удовлетворяет условиям для пешеходов (12.0).
t в расчетах расстояния и скорости = 22.95
Внимание: Фаза 2 требует увеличения времени для пешеходов (20.0). Времени 14.34 не хватает
t в расчетах расстояния и скорости = 20.38
OPTIMAL AND CORRECTED Tcor = 53.61
Оптимизированный цикл: 53.61 с.
```

Рис. 3. Входные данные для оптимизации светофорного цикла

На первом шаге в приложении определяется оптимальное время для основного такта (зеленого света) пешеходного светофора для оптимальной настройки всего светофорного цикла. Во второй фазе 14 с для основного такта (зеленого света) явно недостаточно для перехода пешеходов на другую сторону, поэтому необходимо время увеличить, что приведет к увеличению всего цикла, чтобы не создавать пробок для ТС.

Приложение позволяет задавать и настраивать интенсивность дорожного и пешеходного трафика в зависимости от времени суток и выполнять адаптивную настройку основных тактов светофора с учетом данного параметра. Для каждой фазы светофора по направлениям параметр интенсивности задается для двух пиковых периодов времени – утреннего (7:00-10:00) и вечернего (17:00-19:00), обычных периодов – дневного (10:00-17:00) и вечернего (19:00-23:00), ночного периода (23:00-7:00). Для пиковых периодов экспериментально установлено, что на данном светофорном объекте в утренний период интенсивность увеличивается в 1,25 раза, в вечерний период интенсивность увеличивается в 2 раза, а в ночной период снижается в 0,5 раз по сравнению с обычной интенсивностью в дневное время.

Алгоритм расчета реализован в виде скрипта, который в статье не приводится из-за его объема. Приведем псевдокод и краткое описание основных этапов работы.

Псевдокод:

ВВОД количествоПолос, количествоФаз

Для каждой фазы:

ВВОД интенсивность, длинаПешеходногоПерехода, промежуточныйТакт

ЕСЛИ количествоПолос = 1, ТО потокНасыщения = 1250

ИНАЧЕ ЕСЛИ количествоПолос = 2, ТО потокНасыщения = 1250 \* 1,85

ИНАЧЕ ЕСЛИ количествоПолос = 3, ТО потокНасыщения = 1250 \* 2,55

ИНАЧЕ потокНасыщения = 1250 \* 3,05

фазовыйКоэффициент = интенсивность/потокНасыщения  
длительностьЦикла = (1,5 \* СУММА(промежуточныйТакт) + 5)/(1 – СУММА(фазовыйКоэффициент))

Для каждой фазы:

длительностьОсновногоТакта = ((длительностьЦикла – СУММА(промежуточныйТакт)) \* фазовыйКоэффициент)/(СУММА(фазовыйКоэффициент))

длительностьОсновногоТактаПешехода = (длинаПешеходногоПерехода/1,3) + 5

A = 2,5 \* СУММА(промежуточныйТакт) - СУММА(промежуточныйТакт) \* (СУММА(фазовыйКоэффициент) + СУММА(длительностьОсновногоТакта) + 5

B = 1 – (СУММА(фазовыйКоэффициент)

корректируемаяДлительностьЦикла = (A/2 \* B) + КОРЕНЬ((КВАДРАТ(A)/4 \* КВАДРАТ(B)) – (((СУММА(промежуточныйТакт) + СУММА(длительностьОсновногоТакта)) \* ((1,5 \* СУММА(промежуточныйТакт)) + 5))/B)

длительностьОсновныхТактов = (СУММА(длительностьОсновногоТакта) – СУММА(промежуточныйТакт))/(СУММА(длительностьОсновногоТакта) – 1,5 \* СУММА(промежуточныйТакт) – 5).

На этапе ввода данных алгоритм присваивает переменным введённые значения для количества полос и для количества фаз:

```
num_lanes = int(input("Введите количество полос: "))
```

```
num_phases = int(input("Введите количество фаз: "))
```

```
phases_traffic = []
```

Далее, исходя из количества фаз, пользователь может ввести значения для задания интенсивности фазы, длины пешеходного перехода и начальной длительности промежуточного такта работы светофора:

```
for i in range(num_phases):
    N = float(input(f"Введите интенсивность N для фазы {i + 1}: "))
    V = float(input(f"Введите длину V для фазы {i + 1}: "))
    tn = float(input(f"Введите длительность tn для фазы {i + 1}: "))
```

На втором этапе алгоритм рассчитывает фазовый коэффициент направления относительно заданной пользователем интенсивности и коэффициентов для четырех возможных полос  $k_n$ :

```
kn = {1: 1, 2: 1,85, 3: 2,55, 4: 3,05}[num_lanes]
y = N/(1250 * kn)
```

После расчета информация выводится на экран для проверки. Так как алгоритм учитывает время суток, то для показателей интенсивности с учетом сезонности применяется коррекция относительно текущего времени в 24-часовом формате.

На третьем этапе происходит расчёт исходного цикла регулировки. Здесь создается объект класса TrafficSignalOptimizer, в который передаются заданные переменные в виде словаря, а также пустые списки для уточненных и неуточненных показателей. После передачи данных производятся расчёты первоначального неуточнённого цикла регулировки. В ходе начального расчёта цикла находятся длительности тактов зелёного сигнала. Затем проводится суммирование известных длительностей, чтобы проверить корректность расчета первоначального цикла регулировки:

```
traffic_optimizer = TrafficSignalOptimizer(
    phases_traffic, num_lanes, phases_concr_t, phases_nonconcr_y)
original_duration = traffic_optimizer.calculate_cycle_duration()
Method «calculate_cycle_duration()»:
def calculate_cycle_duration(self):
    Tn = sum(phase["tn"] for phase in self.phases)
    sum_yi = sum(phase["y"] for phase in self.phases)
    T = (1,5 * Tn + 5)/abs(1 - sum_yi)
    for phase in self.phases:
        phase["t"] = phase["y"] * (((T - Tn) * T)/(T - 1,5 * Tn - 5))
```

```
original_cycle_duration = sum(phase["t"] + phase["tn"] for  
phase in self.phases)  
return original_cycle_duration
```

Стартовая длина цикла выводится на экран.

На четвёртом этапе для каждой фазы в цикле проводятся расчёты времени, необходимого пешеходам для прохождения перехода. Для этого используются заданные длины пешеходных переходов во всех направлениях, а средняя скорость пешехода принимается как 1,3 м/с. Если в ходе расчета длительность получается меньше длительности такта зелёного сигнала, то длительность такта зелёных сигналов записывается в список неуточнённой длительности. Если длительность такта зелёного сигнала окажется меньше, чем расчётная длительность относительно расстояния и скорости, то её значение используется вместо первоначальной длительности такта зелёного сигнала. Полученный результат записывается в список для уточнённых значений:

```
for phase in traffic_optimizer.phases:  
    B = phases_traffic[i]["B"]  
    traffic_optimizer.single_check_pedestrian_crossing_time(B, i)  
    t = traffic_optimizer.phases[i]["t"]  
    print(f't в расчетах расстояния и скорости = {t:.2f}')  
    i += 1
```

На последнем этапе для новых уточнённых и неуточнённых длительностей тактов зелёных сигналов запускается алгоритм оптимизации «optimize\_cycle\_duration()», чтобы скорректировать их длительность:

```
optimized_duration = traffic_optimizer.optimize_cycle_duration()  
print(f"Оптимизированный цикл: {optimized_duration:.2f} с.")  
Method «optimize_cycle_duration()»:  
def optimize_cycle_duration(self):  
    Tn = sum(phase["tn"] for phase in self.phases)  
    sum_yi = sum(phase["y"] for phase in self.phases_nonconcr_y)  
    A = (  
        2,5 * Tn  
        - Tn * sum_yi  
        + sum(phase["t"] for phase in self.phases_concr_t)  
        + 5  
    )
```

```

b = abs(1 - sum_yi)
Tcor = (A/ (2 * b)) + (
    A**2/(4 * b**2)
    - ((Tn + sum(phase["t"] for phase in self.phases_concr_t)) *
(1,5 * Tn + 5))
    / b
) ** 0,5
print(f'OPTIMAL AND CORRECTED Tcor = {Tcor:.2f}')
Kcor = (Tcor - Tn)/(Tcor - 1,5 * Tn - 5)

```

Приведем пример расчётов длительностей тактов светофорного цикла. Пусть  $y_1 = 0,4$ ;  $y_2 = 0,25$ ;  $t_{n1} = 3$  с;  $t_{n2} = 4$  с. Длительность цикла составляет 2 фазы, а коэффициент полос = 1,85.

Тогда:

$$(12) T_n = 4 + 3 = 7 \text{ с,}$$

$$(13) T = \frac{(1,57+5)}{(1-(0,4+0,25))} = 44 \text{ с,}$$

$$(14) t_1 = 0,4 \cdot \left( \frac{\left(\left(\frac{4}{7}\right) \cdot 44\right)}{(44-1,5 \cdot 7-5)} \right) = 23 \text{ с,}$$

$$(15) t_2 = 0,25 \cdot \left( \frac{\left(\left(\frac{4}{7}\right) \cdot 44\right)}{(44-1,5 \cdot 7-5)} \right) = 14 \text{ с.}$$

Определим исходный цикл как:  $T = t_1 + t_{n1} + t_2 + t_{n2} = 23 + 3 + 14 + 4 = 44$  с.

Далее проверим достаточность длительности такта зеленых сигналов  $t_1$  и  $t_2$ . Время, необходимое для перехода дороги Б вдоль дороги А определим, как:  $t_{n1} = 5 + (12/1,3) = 14$  с. Видно, что  $t_{n1} = 14 < t_1 = 23$ .

Для перехода дороги А вдоль дороги Б определим:  $t_{n2} = 5 + (20/1,3) = 20$  с. Видно, что  $t_{n2} = 20 > t_2 = 4$  с. Согласно методике, принимаем уточненную длительность  $t_2 = 20$  с.

Определим скорректированную длительность цикла:  $A = 2,5 \cdot 7 - 7 \cdot 0,4 + 20 + 5 = 39,7$  с,  $B = 1 - 0,4 = 0,6$  с.

$$(16) T_{cor} = \left(\frac{39,7}{1,2}\right) + \sqrt{\left(\frac{39,7^2}{1,2^2}\right) - \frac{(7+20)(10,5+5)}{0,6}};$$

$$(17) T_{cor} = 33 + \sqrt{1089 - 700} = 33 + 19,7 = 52 \text{ с (округл.);}$$

$$(18) t_{cor1} = 0,4 \cdot \frac{(52-7) \cdot 52}{52-10,5-7} = 25,6 = 26 \text{ с (округл.).}$$

Окончательный цикл регулировки будет следующий:  
 $T_{cor} = 26 + 3 + 20 + 4 = 53$  с.

В результате расчета для двух фаз светофорного цикла мы получаем уточнённую длительность светофорного цикла, равную 53 секундам, которая включает уточнённую длительность такта зелёных сигналов и длительность промежуточного такта работы.

## **5. Заключение**

Актуальность разработки методики и инструментального средства автоматического расчета светофорного цикла обусловлена тем, что постоянный рост загрузки городской дорожной сети увеличивает задержки на светофорах, особенно в часы пик, число остановок, расход топлива, повышает вероятность дорожно-транспортных происшествий и нарушений ПДД. Задержки на светофорах являются причиной образования заторов и пробок. Транспортные пробки – один из наиболее негативных факторов современной городской среды. Целью исследований является создание методики расчета тактов светофорного цикла и приложения для автоматического управления работой адаптивного светофора.

В результате исследований разработана методика расчета, которая реализована в виде программного приложения для оптимизации цикла регулировки светофора, включающего в себя найденные и уточнённые длины тактов зелёных сигналов с учетом множества фаз. Алгоритм учитывает ширину дороги, длину пешеходного перехода, время суток, количество полос, интенсивность фазы, количество самих фаз, а также промежуточные такты работы. В дальнейшем предполагается реализовать отображение результатов расчета для различных светофоров на цифровой карте с привязкой к конкретным геопространственным координатам светофорных объектов. Основным ограничением данной версии приложения является максимально допустимое число фаз светофора не более 4. Однако использование приложения заметно упрощает процесс настройки адаптивных светофоров, так как программа производит расчёты и оптимизацию под каждую отдельно взятую дорожную ситуацию. Это позволяет

светофору в автоматическом режиме динамично изменять длительность цикла регулировки без стороннего вмешательства. Программное приложение достаточно универсально и не требует дополнительной настройки в зависимости от типа светофора, модели перекрестка или дорожной ситуации. Приложения разработано для применения в качестве компонента интеллектуальной системы мониторинга и управления в дорожно-транспортной среде [20, 19].

### Литература

1. АНТОНИАДИ Г.Д., АРХИПОВ В.О., ЦУПРИКОВ А.А. *Анализ модели задержки Вебстера* // Ежемесячный научный журнал «Евразийский союз учёных». – 2018. – №11(56), ч. 9. – С. 6–12.
2. АНТОНИАДИ Г.Д., АРХИПОВ В.О., ЦУПРИКОВ А.А. *Математическая модель задержки автотранспорта на регулируемом перекрёстке* // Информационные технологии. – 2019. – Т. 25, №4. – С. 210–215.
3. БЕКЛАРЯН А.Л., БЕКЛАРЯН Л.А., АКОПОВ А.С. *Имитационная модель интеллектуальной транспортной системы «умного города» с адаптивным управлением светофорами на основе нечеткой кластеризации* // Бизнес-информатика. – 2023. – Т. 17, № 3. – С. 70–86.
4. БЕЦКОВ А.В., ДИВЕЕВ А.И., СОФРОНОВА Е.А. *Об интеллектуальной транспортной системе в больших городах* // Труды международного симпозиума «Надёжность и качество». – 2021. – Т. 1. – С. 295–298.
5. БОРОВСКОЙ А.Е., ШЕВЦОВА А.Г. *Методика выбора рационального режима работы светофорного объекта на автомобильном транспорте* // Трансп.: Наука, техн., упр./ ВИНТИ РАН. – 2012. – №6. – С. 50–53.
6. *ГОСТ Р 52282-2004 — Технические средства организации дорожного движения. Светофоры дорожные. Типы и основные параметры. Общие технические требования. Методы испытаний.* – URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200038801> (дата обращения: 01.09.2024).

7. *Методические рекомендации по разработке и реализации мероприятий по организации дорожного движения. Использование программных продуктов математического моделирования транспортных потоков при оценке эффективности проектных решений в сфере организации дорожного движения.* – М.: Минтранс РФ, 2017. – 72 с. – URL: <https://mintrans.gov.ru/file/404538> (дата обращения: 09.09.2024).
8. НАУМОВА Н.А., ДОМБРОВСКИЙ А.Н., ДАНОВИЧ Л.М. *Метод управления светофорной сигнализацией в условиях функционирования интеллектуальных транспортных систем // Фундаментальные исследования.* – 2017. – №9-1. – С. 64–68.
9. *Отраслевой дорожный методический документ ОДМ 218.4.005-2010. Рекомендации по обеспечению безопасности движения на автомобильных дорогах.* – М., 2011. – URL: <https://irtechnologies.ru/assets/odm-218.4.005-2010.pdf> (дата обращения: 09.09.2024).
10. *Отраслевой дорожный методический документ ОДМ 218.6.003–011. Методические рекомендации по проектированию светофорных объектов на автомобильных дорогах.* – М., 2011. – URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293771/4293771345.pdf> (дата обращения: 09.09.2024).
11. СУЛИЦКИЙ М.В., ЗЕЛЕНСКИЙ И.С., САДОВНИКОВА Н.П. и др. *Разработка интеллектуальной системы распознавания объектов для решения задач ситуационного управления в городе // Современные наукоемкие технологии.* – 2023. – № 7. – С. 104–109.
12. ТИМОФЕЕВА О.П., МАЛЫШЕВА Е.М., СОКОЛОВА Ю.В. *Проектирование интеллектуальной системы управления светофорами на основе нейронной сети // Современные проблемы науки и образования.* – 2014. – №6. – URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=16496> (дата обращения: 01.09.2024).
13. ПАРЫГИН Д.С., БУРОВ С.С., АНОХИН А.О. и др. *Платформа для моделирования массовых перемещений объектов и субъектов в условиях городской среды // Программные продукты и системы.* – 2021. – Т. 34, №2. – С. 354–364. – URL: <http://www.swsys.ru/files/2021-2/354-364.pdf>.

14. AGRAWAL A., PAULUS R. *Intelligent traffic light design and control in smart cities: a survey on techniques and methodologies* // Int. Journal of Vehicle Information and Communication Systems. – 2020. – Vol. 5, No. 4. – P. 436–481.
15. ANDRIYANOV N.A., DEMENTIEV V.E., TASHLINSKII A.G. *Detection of objects in the images: from likelihood relationships towards scalable and efficient neural networks* // Computer Optics. – 2022. – Vol. 46, No. 1. – P. 139–159.
16. BEEVI S., PRATHAP J., GOWTHAM N. et al. *Efficient Traffic Flow Management System Using Ai-Powered Traffic Lights in DEEP Learning* // Int. Journal of Emerging Technologies and Innovative Research. – 2023. – Vol. 10, No. 11. – P. 514–521. – URL: <http://www.jetir.org/papers/JETIR2311467.pdf>.
17. BOUKTIF S., CHENIKI A., OUNI A. et al. *Traffic Signal Control Based on Deep Reinforcement Learning with Simplified State and Reward Definitions* // 4th Int. Conf. on Artificial Intelligence and Big Data (ICAIBD-2021), Chengdu, China. – IEEE, 2021. – P. 253–260.
18. DUSHKIN R.V. *Thematic Review of the Association of Traffic Engineers: Adaptive Traffic Management Systems and Road Controllers*. – 2017. – URL: [https://www.researchgate.net/publication/324154125\\_Thematic\\_Review\\_of\\_the\\_Association\\_of\\_Traffic\\_Engineers\\_Adaptive\\_Traffic\\_Management\\_Systems\\_and\\_Road\\_Collectors](https://www.researchgate.net/publication/324154125_Thematic_Review_of_the_Association_of_Traffic_Engineers_Adaptive_Traffic_Management_Systems_and_Road_Collectors).
19. FINOGEEV A.G., FINOGEEV A.A., FIONOVA L.R. *Intelligent monitoring system for smart road environment* // Journal of Industrial Information Integration. – 2019. – Vol. 15. – P. 15–20.
20. FINOGEEV A.G., BERSHADSKY A.M., FINOGEEV A.A. et al. *Multiagent Intelligent System of Convergent Sensor Data Processing for the Smart&Safe Road* / Chatchawal Wongchoosuk (eds.) // Intelligent System. – IntechOpen. – 2018. – Chapter 5. – P. 102–121. – URL: <https://www.intechopen.com/books/intelligent-system/multiagent-intelligent-system-of-convergent-sensor-data-processing-for-the-smart-safe-road>.
21. GAO J., SHEN Y., LIU J. et al. *Adaptive Traffic Signal Control: Deep Reinforcement Learning Algorithm with Experience Replay and Target Network* // ArXiv abs/1705.02755. – 2017.

22. LIANG X., DU X., WANG G. et al. *A Deep Reinforcement Learning Network for Traffic Light Cycle Control* // IEEE Trans. on Vehicular Technology. – 2019. – Vol. 68, No. 2. – P. 1243–1253.
23. LIU D., LI L. *A traffic light control method based on multi-agent deep reinforcement learning algorithm* // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13, No. 1. – P. 9396.
24. MAHIMA K.T.Y., ABEYGUNAWARDANA R.A.B., GINIGE T.N.D.S. *Dynamic Traffic Light Controlling System Using Google Maps and IoT* // From Innovation to Impact (FITI-2020). – IEEE, 2020. – Vol. 1. – P. 1–5.
25. OSIPOV A., PLESHAKOVA E., GATAULLIN S. et al. *Deep Learning Method for Recognition and Classification of Images from Video Recorders in Difficult Weather Conditions* // Sustainability. – 2022. – Vol. 14, No. 4. – P. 2420.
26. PARYGIN D., FINOGEEV A. *Management of Information from Surveillance Cameras at the Infrastructure Facility* // New Trends and Applications in Internet of Things (IoT) and Big Data Analytics. – Cham: Springer International Publishing, 2022. – P. 173–186.
27. RANYAL E., SADHU A., JAIN K. *Road condition monitoring using smart sensing and artificial intelligence: A review* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 8. – P. 3044.
28. ROBERTSON D.I., BRETHERTON R.D. *Optimizing networks of traffic signals in real time – the SCOOT method* // IEEE Trans. on Vehicular Technology. – 1991. – Vol. 40, No. 1. – P. 11–15.
29. SHEN X., CHEN Y.C., TAO X. et al. *Convolutional neural pyramid for image processing* // arXiv preprint arXiv:1704.02071. – 2017.
30. SUN H., SUN Y., YU B. *Applications on Deep Reinforcement Learning in Traffic Signal Control* // IEEE 4th Int. Conf. on Civil Aviation Safety and Information Technology (ICCASIT-2022). – IEEE, 2022. – P. 680–685.
31. WEBSTER F.V. *Traffic Signal Settings* // Road Research Technical Paper. – 1958.
32. ZHANG Y., HUANG G. *Traffic flow prediction model based on deep belief network and genetic algorithm* // IET Intelligent Transport Systems. – 2018. – Vol. 12, No. 6. – P. 533–541.

33. ZHOU C., LIU S., LI X. et al. *An Intelligent Traffic Signal Control System Based on Deep Reinforcement Learning* // Information Communication Technologies Conference (ICTC-2020). – IEEE, 2020. – P. 255–259.

## METHODOLOGY AND TOOLS FOR OPTIMIZING THE DURATION OF THE TRAFFIC LIGHT CYCLE

**Alexander Grushevsky**, Penza State University, Penza, Russia, PhD student (sgrushevskii@mail.ru).

**Ekaterina Ilyinskaya**, Penza State University, Penza, Russia, Master's Degree student (ilinskaya58k@mail.ru).

**Anton Finogeev**, Penza State University, Penza, Russia, PhD in Engineering, Associate Professor (fanton3@yandex.ru).

*Abstract: One of the main elements of traffic and pedestrian flow control in the road environment is traffic light regulation. Automation of traffic light regulation allows calculating the optimal modes of its operation in order to reduce delays in traffic and waiting time for vehicles to pass through intersections, and reduce the likelihood of traffic jams. The result is increased road safety and sustainability of the urban transport system. The article considers the development of a model, methodology, and tool for calculating the optimal traffic light cycle steps. The relevance of the article is due to the fact that the growth of road traffic reduces the efficiency of vehicle use, increases the time of delays and stops, fuel consumption, and increases the number of traffic accidents and violations. The object of the study is an adaptive traffic light control system at intersections. The purpose of the study is to analyze and develop a mathematical model and methodology for calculating traffic light cycle steps depending on current traffic conditions at intersections in order to reduce the waiting time of vehicles and pedestrians. The result of the research is a developed software application that implements the proposed method for calculating the optimal duration of the traffic light cycle depending on the intensity of automobile and pedestrian traffic and the length of the queue.*

**Keywords:** pedestrian flow, traffic light cycle, adaptive traffic light, intelligent traffic light, traffic intensity, traffic light cycle model.

УДК 656.1 + 004.94

ББК 39.37

*Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.К. Погодаевым.*

*Поступила в редакцию 16.10.2024.*

*Опубликована 31.01.2025.*

**КОНЦЕПЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СЕТИ ПОЛИГОНОВ  
ДЛЯ ОТРАБОТКИ СЦЕНАРИЕВ ПРИМЕНЕНИЯ  
ГЕТЕРОГЕННЫХ ГРУПП ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ  
С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПРИВОДОМ В СЛОЖНЫХ  
КЛИМАТИЧЕСКИХ И ЛАНДШАФТНЫХ УСЛОВИЯХ:  
ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ  
И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ<sup>1</sup>**

**Коргин Н. А.<sup>2</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва;*

*Московский физико-технический институт, Москва)*

**Мещеряков Р.В.<sup>3</sup>**

*(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

*Описывается проект по созданию распределенной сети центров исследований проблем и перспектив применения гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях для решения задач обеспечения проведения полевых исследований в интересах научных организаций и эксплуатации приборной базы уникальных научных установок и перспективы его дальнейшего развития. Описываются обобщенный подход, основанный на концепции активного планирования из теории управления организационными системами, результаты опытной апробации отдельных элементов концепции на трех пилотных узлах сети на основе инфраструктуры региональных центров РАН, расположенных в регионах со сложными климатическими и ландшафтными условиями и направления дальнейшего развития проекта. Предложена формальная математическая модель, позволяющая описать процесс согласования интересов в рамках одного узла сети как центра коллективного пользования с расширяемым функционалом и числом пользователей. В заключение предлагается дальнейшая программа научных исследований по проблеме функционирования гетерогенной группы транспортных средств с электрическим приводом как элементов малой распределенной энергосистемы на базе развиваемой сети полигонов по трем основным направлениям – мобильный транспорт как элемент энергосистемы, методы идентификации моделей и синтеза управления для подвижных объектов при движении по нежестким поверхностям с изменяемыми характеристиками и методы*

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено частично за счет гранта Российского научного фонда №23-29-00681, <https://rscf.ru/project/23-29-00681>.

<sup>2</sup> Николай Андреевич Коргин, д.т.н., г.н.с. ([nkorgin@ipu.ru](mailto:nkorgin@ipu.ru)).

<sup>3</sup> Роман Валерьевич Мещеряков, д.т.н., г.н.с. ([mrv@ipu.ru](mailto:mrv@ipu.ru)).

*анализа и синтеза моделей влияния человека для транспортных средств, сопоставимых по массе с весом человека.*

Ключевые слова: электрический транспорт, групповое управление, организационно-техническая система, центр коллективного пользования, микрогрид.

## **1. Введение**

Проект по созданию распределенной сети полигонов для отработки сценариев применения гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях (далее – Проект) был инициирован под эгидой центра интеллектуальных робототехнических систем ИПУ РАН в 2023 году при частичной поддержке РФФ по результатам серии полевых испытаний опытных платформ малогабаритного транспортного средства повышенной проходимости на электроприводе, предназначенного для передвижения по снежному покрову [9]. Опытные образцы малогабаритных транспортных средств повышенной проходимости на электроприводе, предназначенные для передвижения по снежному покрову (рис. 1) разрабатываются отечественными промышленными партнерами ИПУ РАН в рамках разветвленной сети научного и академического сотрудничества [7], а их апробация проходит в географических локациях со сложными климатическими и ландшафтными условиями – в высокогорных районах Кавказа и горных регионах Заполярья, где размещаются как уже существующие объекты научной инфраструктуры КБНЦ РАН, КНЦ РАН и САО РАН, так и планируемые к созданию, такие как международная арктическая станция «Снежинка» на Полярном Урале [6].

«Бум» разработки транспортных средств с электрическим приводом (ЭТС), наблюдаемый повсеместно, порождает целый ряд вызовов и возможностей не только в рамках традиционных парадигм использования транспортных средств, но и формируя принципиально новые направления.



*Рис. 1. Опытные образцы: двухколейный «утилитарный» снегоход и одноколейный «снегоцикл»*

В развиваемой в настоящее время концепции транспорта как элемента энергосистемы ЭТС выступает одновременно в роли потребителя, накопителя и транспортировщика электроэнергии как в рамках связанной энергосистемы [28], так и отдельных, изолированных объектов [22]. При этом объективные технологические ограничения, такие как время зарядки аккумуляторных батарей, порождают такие технологические задачи, как сопоставление стратегий заряда батарей на борту ЭТС и замены данных батарей, см., например, [26]. А объективные возможности, как то: наличие значительных электрических мощностей и возможность их восполнения в процессе движения ЭТС, порождают такие технологические задачи как проектирование и внедрение систем генерации электроэнергии с различных узлов ТС, см., например, в [15]. Что, в свою очередь, позволяет обеспечивать управляемость и проходимость ЭТС на принципиально другом уровне, чем в ТС с ДВС. В частности, за счет индивидуального адресного управления каждым движителем (колесом или гусеницей), см., например, [24]. Отдельным направлением развития ЭТС является легкий внедорожный транспорт массой 50–500 кг, не предназначенный для движения по дорогам общего пользования (мотоциклы, квадроциклы, багги, снегоходы и т.п.), для которого актуальным является вопрос: как традиционные для этого класса тех-

ники узлы и агрегаты, см., например, [18], целесообразно модифицировать с учетом особенностей и ограничений электрического привода, см., например, [9], или сохраняя «классическую» схему, см., например, [25]. При этом ТС с ДВС указанного класса, как считается, оказывают достаточно значительное влияние на экологию окружающей среды [30]. В то время как ЭТС данного класса также активно рассматриваются как элементы концепции vehicle-to-building (V2B), см., например, [17]. Значимой проблемой для эффективной реализации концепций vehicle-to-grid (V2G) и V2B является необходимость синхронизации систем генерации переменного тока, располагаемых на борту ЭТС – как между ними в случае подключения гетерогенной группы, так и с несущей частотой сети в случае работы на объектах, подключенных к основной энергосистеме. Отдельный интерес для размещения на изолированных объектах инфраструктуры и на ЭТС, особенно перемещающихся в автономном режиме, представляют энергетические системы на базе водородных технологий как решения, которые позволяют запастись энергией от возобновляемых источников и, в перспективе, – от систем регенерации энергии на ЭТС [19]. В настоящее время ведутся исследования по реализации «малых» энергонакопителей для домохозяйств на базе этих технологий, см., например, [21]. В нашей стране коллегами из НГТУ и МФТИ при взаимодействии с отечественными производителями реализован прототип крупногабаритного внедорожного ТС с электрическим приводом и системой хранения энергии на базе водородных технологий [4]. А за рубежом ведутся исследования по вопросу реализации решений на базе легких внедорожных ТС [23].

Поэтому если акцентировать внимание на оценку перспектив развития и вызовов внедорожного электрического транспорта, особенно предназначенного для перемещения по снегу, то актуальным становится запрос на создание натуральных полигонов для исследований по перечисленным выше вопросам.

В статье описываются полевые выезды в рамках Проекта в течение 2023–2024 годов к объектам научной инфраструктуры РАН, перечисляются их основные результаты, обсуждаются дальнейшие направления развития проекта.

## **2. Распределенная сеть полигонов**

В рамках проекта в соответствии с предложенным в [7] подходом к управлению распределённой организационно-технической системой производилось формирование:

1. Концепции распределенной сети полигонов (далее – РСП) как центров коллективного пользования на базе существующей инфраструктуры научных организаций.

2. Реестров:

- а) опытных транспортных платформ (ОТП) и демонстраторов технологий;
- б) технологий фиксации результатов эксперимента;
- в) сценариев применения гетерогенных транспортных систем.

Проводился анализ возможностей материально-технической базы задействованных организаций – ИПУ РАН, КНЦ РАН (Мурманская область), КБНЦ РАН (КБР), САО РАН (КЧР), которые рассматривались как пилотные узлы РСП (рис 2), для решения задач обеспечения полевых испытаний группировок транспортных средств на электрическом приводе и допустимых режимов ее использования.

В качестве первичной структуры информационной модели был предложен следующий перечень:

1. Отдельный полигон:

- а) объекты материально-технической базы (ОМТБ);
- б) локальные сценарии для апробации (ЛС);
- в) ограничения по режиму использования (ОИ).

2. Перемещаемый объект:

- а) опытная транспортная платформа (ОТП);
- б) объект транспортной инфраструктуры (ОТИ);
- в) объект измерительной инфраструктуры (ОИИ).

3. Общие сценарии применения распределенной сети полигонов для апробации и демонстрации решения задач обеспечения проведения полевых исследований в интересах научных организаций и эксплуатации приборной базы уникальных научных установок посредством применения гетерогенных группировок транспортных средств.

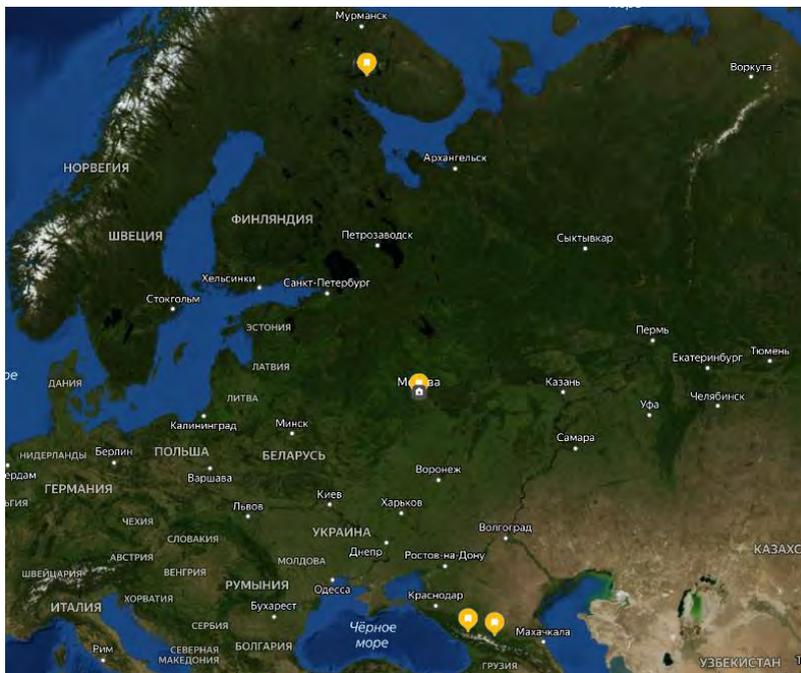


Рис. 2. Расположение первичных узлов РСЦ

В качестве пилотной группы гетерогенных транспортных средств использовалось сочетание из нескольких легких транспортных средств, передвигающихся по снежному покрову (так называемые снегоциклы), созданного на их основе снегохода двухколейной компоновки, БПЛА различной грузоподъемности, осуществляющих задачи навигации, регистрации движения и ретрансляции информации в интересах всей группы ТС (в тех регионах, где это было разрешено текущим законодательством). Кроме того, в ряде сценариев группа дополнялась ТС повышенной грузоподъемности, выступающим в роли «носителя» снегоциклов (рис 3.)

В рамках проекта в течение 2023–2024 гг. была осуществлена серия полевых выездов:

1. К существующим объектам научной инфраструктуры, БТА CAO РАН, КБНЦ РАН и КНЦ РАН.



Рис. 3. Пример гетерогенной группы из снегоцикла, транспортного средства повышенной грузоподъемности и БПЛА

2. К перспективным по месторасположению международной арктической станции «Снежинка» на Полярном Урале и водородному полигону на базе СКБ САМИ ДВО РАН.

3. Для участия в межведомственных опытно-исследовательских учениях «Безопасная Арктика - 2023», организованных МЧС России (рис. 4).



Рис. 4. Учения «Безопасная Арктика 2023» - сценарии десантирования ОТП в составе аэромобильной группы и работа по сопровождению колонн тяжелых ТС

В ходе полевых выездов производилась отработка целого спектра сценариев применения гетерогенных групп ТС с электрическим приводом и сбор данных для их дальнейшего анализа:

- применения легких внедорожных транспортных средств для перемещения по снежному покрову на примере снегоциклов и снегоходов для решения задач обслуживания инфраструктуры уникальных приборных установок в зимний период, что будет подробнее описано в разделе 5.

- групповое движение ОТП и ОТИ в сопровождении БПЛА с целью создания цифровой модели рельефа (пример приведен на рис. 3);

- поддержка проведения научных полевых исследований в области гляциологии [10] и лимнологии [27] в зимних условиях, (рис. 5);

- сопровождения и навигация колонны тяжелых ТС с помощью легкого ТС с электрическим приводом с целью оптимизации маршрута движения в условиях ограниченной видимости и динамически изменяемого снежного покрова (пример также приведен на рис. 4);

- базирование и обслуживание ОТП – легкого ТС с электрическим приводом на базе ОТИ в условиях низких температур и ограниченной мощности доступной для восполнения запаса электроэнергии в батареях ОТП (пример также приведен на рис. 3).



*Рис. 5. Замер толщины снежного покрова на леднике Гара-Баши на г. Эльбрус на высоте 4000 м исследователями ИГРАН и взятие проб донного грунта на о. Дикое, Мурманская обл., исследователями ИППЭС КНЦ РАН*

### **3. Распределенная сеть полигонов как объект исследования для моделирования подходов к решению проблемы согласования интересов**

Приведённый перечень сценариев явился результатом согласования интересов на основе методов активного планирования – имплементации принципа открытого управления из теории открытых систем [5] на основе следующих двух вопросов:

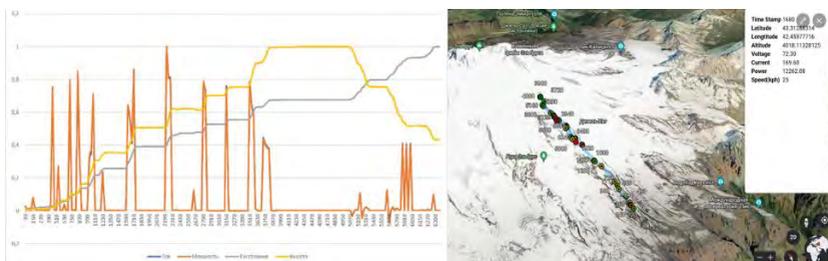
**Вопрос 1.** Со стороны ИПУ РАН как исследователей ОТП: какие возможности может предоставить региональная организация РАН для испытания электротранспорта в сложных климатических и ландшафтных условиях?

**Вопрос 2.** Со стороны региональной организации РАН: чем может быть полезен электрический транспорт для решения задач обеспечения научных исследований, проводимых организацией РАН?

При этом основой в рамках попытки внедрения подходов активного планирования стал принцип делегирования (см. подробнее в [5]): в ходе проекта представителям каждой из трех организаций выделялся некоторый бюджет, который ими расходовался на свое усмотрение для организации работ по анализу возможностей их ОМТБ в рамках ответа на вопрос 1, при необходимости – для организации работ по их модернизации и на организационные мероприятия, связанные с подготовкой к реализации опытных сценариев в рамках ответа на вопрос 2. В ходе реализации самих сценариев представители ИПУ РАН демонстрировали возможности ОТП и осуществляли сбор данных с ОИИ для проведения собственных научных экспериментов (см. пример на рис. 6), в то время как представители организаций осуществляли свою регулярную деятельность при ее поддержке. При этом на базе как отдельного ОТП, так и всей группировки с помощью набора разнородных ОИИ одновременно осуществлялся сбор для ряда отдельных экспериментов, часть которых будет описана далее в разделе 4. То есть каждое ОТП выступало в роли «мобильного» ЦКП как для задач региональной организации, так и для исследователей ИПУ РАН по их теоретическим исследованиям. При этом ОМТБ каждой организации рассматривалась как ЦКП по исследованию характеристик движения одиночных транспортных

средств и гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях, а отдельные ОИИ – как ЦКП приборного уровня, предоставляющие данные для разных исследовательских задач.

В рамках проекта проведенный эксперимент в целом следует признать успешным.



*Рис. 6. Пример результатов измерений совместных характеристик движения и расхода электрической энергии, их отображения на 3D-карте местности*

Анализ ОМТБ КНЦ РАН позволил определить перспективные зоны базирования и работы техники на базе ПАБСИ КБНЦ РАН и начать разработку программы на их основе для подготовки к экспедиции на ОМТБ КБНЦ РАН, расположенным на о. Шпицберген в п. Баренцбург. Был рассмотрен ОМТБ КБНЦ РАН в районе г. Эльбрус – так называемый «домик Географов», расположенный на плато Гара-Баши на высоте 3800 м над уровнем моря (рис. 7), что позволило бы осуществлять работу с техникой, передвигающейся по снежному покрову (а это был первоочередной тип ОТП в рамках проекта) практически в круглогодичном режиме. Его анализ показал, что он находится в плачевном состоянии и, с учетом целого ряда выявленных в рамках анализа юридических и инфраструктурных проблем, принято решение о подготовке программы создания нового объекта ЦКП консорциумом научных образовательных организаций, куда помимо организаций из КБНЦ РАН входят ИГРАН и ИПУ РАН.

На базе ОМТБ САО РАН удалось развернуть полноценную инфраструктуру полигона, что будет более подробно освещено в разделе 5.

На уровне сбора данных с группировки ОТП, дополненной БПЛА, удалось осуществлять сбор данных сразу для серии экспериментов, более детальное описание которых приведено в разделе 4.



Рис. 7. С.н.с. ИГРАН, к.г.н. Лаврентьев И.И. перед выездом на полевые гляциологические работы с применением снегоцикла. ОМТБ КБНЦ РАН – внутри сугроба на заднем плане

Переходя на уровень формальных подходов, с помощью которых в первую очередь можно иллюстрировать наблюдаемый эффект, возможно обратиться к следующей модифицированной модели использования коллективного блага [8].

Для отдельного узла РСП опишем игру в нормальной форме  $n$  агентов ( $N = \{1, \dots, n\}$ ) с целевыми функциями

$$(1) f_i(\theta, x, u) = x_i(\theta u - \sum_{j \in N} x_j)$$

и множеством допустимых действий на проведение собственных исследований  $x_i \in [0, +\infty)$ ,  $i \in N$ . Параметр  $\theta \in R_1^+$  и управление  $u \in R_1^+$  характеризуют «общий ресурс» системы – способность приносить участникам системы полезность от выбираемых действий. В нашей интерпретации это ЦКП и проводимые на его основе исследования. Далее будем предполагать, что владельцем ЦКП является агент 1.

В рамках игры в нормальной форме, когда все агенты осведомлены обо всех параметрах и принимают решения одновременно и независимо, получаем, что равновесие Нэша имеет вид

$x_i^*(\theta, u) = \frac{u\theta}{n+1}$  [8]. При этом значение целевой функции любого агента имеет вид

$$(2) f_i(\theta, x^*, u) = (u\theta)^2(n+1)^{-2}.$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда к ЦКП хочет присоединиться еще один агент  $i = n + 1$ . Нетрудно увидеть, что в этом случае выигрыш любого другого агента в соответствии с (2) уменьшится. То есть все агенты, которые уже эксплуатируют ЦКП, включая его владельца, не заинтересованы в присоединении нового агента. Возможно ли сделать так, чтобы присоединение нового агента было согласованно для всех?

Модифицируем целевую функцию (1) для агентов 1 и  $n + 1$  следующим образом:

$$(3) f_1(\theta, x, u) = x_1(\theta(u + u_1) - \sum_{j \in NU\{n+1\}} x_j) + u_{n+1} - u_1,$$

$$(4) f_{n+1}(\theta, x, u) = x_{n+1}(\theta(u + u_1) - \sum_{j \in NU\{n+1\}} x_j) - u_{n+1},$$

где  $u_{n+1} \in [0, +\infty)$  будет отражать ту часть полезности от доступа к ЦКП, которую агент  $n + 1$  передает владельцу ЦКП для его развития, а  $u_1 \in [0, u_{n+1}]$  – какую его часть владелец ЦКП в действительности пускает в развитие ЦКП.

При этом будем предполагать, что новый пользователь выбирает значение  $u_{n+1}$  в рамках иерархической игры Г1 [8], делегируя [5] владельцу ЦКП принять решение о том, какую часть переданного управления пустить на развитие ЦКП, предполагая, что принятое последним решение о развитии ЦКП за счет этих ресурсов подразумевает допуск нового пользователя к его использованию.

Тогда из (2) с учетом модифицированных функций полезности агентов владельца ЦКП (3) и нового пользователя ЦКП (4) можно получить условия согласованности их интересов:

$$(5) (u\theta)^2(n+1)^{-2} + u_{n+1} \leq (u + u_{n+1})^2\theta^2(n+2)^{-2},$$

$$(6) (u + u_{n+1})^2\theta^2(n+2)^{-2} - u_{n+1} \geq 0,$$

где левая часть условия (5) отражает ситуацию, в которой агент 1 получил ресурсы на развитие ЦКП от агента  $n + 1$ , но не использовал их «по назначению» и не допустил последнего к пользованию ЦКП, а правая – что ресурсы полностью пущены на развитие ЦКП. Условие (6) отражает тот факт, что допуск нового пользователя к ЦКП для него индивидуально рационально. Не трудно

увидеть, что выполнение (5) достаточно для выполнения (6) и всегда найдется такое  $u_{n+1} \geq \frac{u}{n+1}$ , что выполнено (5). А из выполнения (5) также следует, что все остальные пользователи ЦКП тоже будут заинтересованы в таком присоединении нового агента.

Таким образом, предложенная достаточно простая иллюстративная модель показывает, что между владельцем ЦКП и потенциальным его пользователем возможно согласованное взаимодействие, в рамках которого последний выделяет ресурсы на развитие ЦКП, делегируя первому самостоятельно принимать решение об их использовании, а первый, имея возможность распоряжаться ими на свое усмотрение, пустит их все на развитие ЦКП и допустит потенциального пользователя к работе с данным ЦКП. Именно такая ситуация и наблюдалась в ходе реализации проекта.

#### **4. Сценарии исследования характеристик движения опытных транспортных платформ по пересеченной местности**

В ходе проекта разрабатывался и апробировался комплекс сценариев сбора данных о характеристиках движения ОТП разного типа по снежному покрову.

Во-первых, осуществлялся сбор данных для повышения степени автономности информационной системы для динамичных объектов с бортовыми навигационными комплексами [14], суть которых заключается в интеграции данных, собираемых с бортовых навигационных систем, таких как LIDAR, камеры, инерциальные сенсоры, GNSS, и элементов интеллектуальных транспортных систем, таких как базовые станции RTK, и за счет Калмановской фильтрации обеспечивающих повышение точности положения ОТП. Пример работы с данными приведен на рис. 8, где видно, как работа алгоритма повышает точность оценки траектории, предоставляемой исходно одним из сенсоров (красная линия) за счет интеграции с базовой станцией РТК и дополнительным прибором, установленным на этом же ОТП (голубая линия).

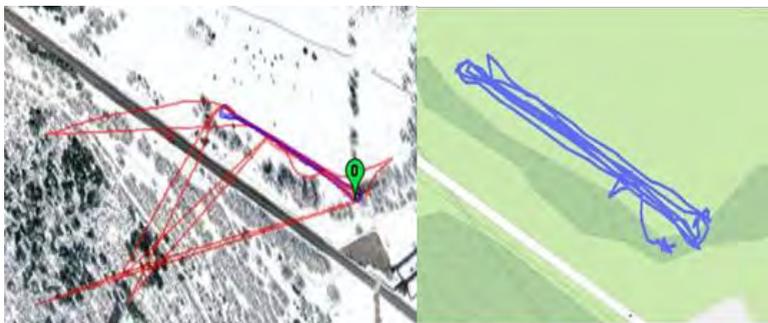


Рис. 8. Повышение точности позиционирования ОТП за счет интеграции данных разных приемников

Во-вторых, исследовалась возможность определения режимов движения ОТП за счет размещения на нем сети GNSS-приемников: в качестве пилотного сценария оценивались различные комбинации размещения GNSS-приемников высокого класса точности на снегоцикле (рис. 9).

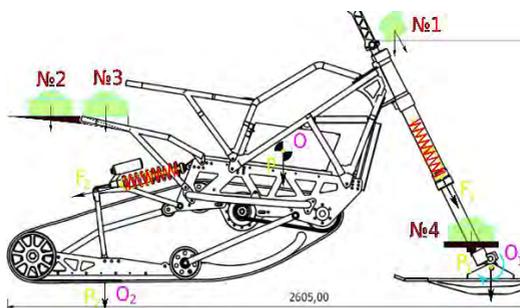


Рис. 9. №1–№4 – позиции размещения GNSS-приемников на снегоцикле

В ходе экспериментов удалось показать, что, совмещая данные даже с пары высокоточных приемников с данными силовой установки ОТП (потребляемая ей электрическая мощность), возможно идентифицировать некоторые особые режимы движения ОТП, такие как «самозакапывание» – заглупление снегоцикла на одном месте – или выход на режим «глиссирования» – быстрого движения по снежной поверхности, когда гусеница практически

не заглубляется, следуя по поверхности следа, проложенного лыжей снегоцикла [11].

На рис. 10 приведен пример собираемых данных при расположении приемников в позициях 1 (на руле) и 3 (на багажнике) снегоцикла. В зоне, выделенной пунктиром, ОТП заглублялось в снег, в правой части графика высота приемника на хвосте снегоцикла «стабилизировалась» с выходом на режим «глиссирования».

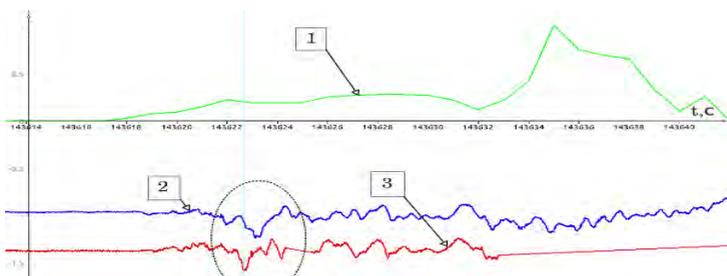


Рис. 10. Движение по «окружности». Кривая 1 – нормированная мощность; 2 – высота приемника №1 (м); 3 – высота приемника №2 (м)

При сопоставлении собираемых данных с визуальным рядом регистрации эксперимента было показано, что математическое моделирование и анализ эффективности управления такими подвижными объектами затрудняется тем, что необходимо учитывать движения самого субъекта, пилотирующего данный объект, которые часто имеют сложную динамику, в связи с чем в ходе проекта были апробированы сценарии сбора данных о положении тела пилота ОТП на основе сети инерциальных датчиков, размещаемых на теле [1, 2].

На рис. 11 приведены фрагменты результатов анализа собранных данных. В центре находится цифровая модель пилота, отражающая положение его тела на основе результатов работы модели SlimeVR, в правом нижнем кадре – результат визуального распознавания движений тела человека с помощью бортового видеорегистратора, расположенного на руле снегоцикла, управляе-

мого пилотом, на верхнем правом – результат визуального распознавания движений тела человека с помощью бортового видеорежистратора, расположенного на руле стационарно стоящего снегохода.



Рис. 11. Сбор данных по регистрации движения тела человека

В заключение данного раздела следует отметить, что рис. 11 наглядно иллюстрирует перспективы взаимной локализации и регистрации движений всех участников гетерогенной группы. В кадре представлен момент, запечатленный одновременно несколькими бортовыми видеорежистраторами.

Правое левое изображение, как уже было упомянуто выше, – регистратор на руле снегоцикла: камера, снимающая в режиме 360° во всех направлениях, что позволяет регистрировать не только положение пилота, но и все события, происходящие вокруг на незначительном удалении от нее, включая движение остальных участников гетерогенной группы. В кадре на нем видно относительное положение стационарно расположенного снегохода, на котором в качестве ОИИ располагается GNSS-приемник, осуществляющий сбор данных в режиме RTK. При этом на самом снегоцикле размещена аппаратура для сбора данных в рамках описанных ранее в разделе двух экспериментов.

Кадр, записанный аналогичной бортовой камерой, размещенной на руле снегохода, регистрирует не только движение снегоцикла, но и позволяет фиксировать полеты БПЛА. На нем красным отмечено положение малого БПЛА типа FPV, запись с камеры которого представлена в левом правом кадре рис. 11, на котором отражено взаимное положение двух наземных ОТП группы – снегоцикла и снегохода.

Наконец, в левом нижнем кадре рис. 11 отражена запись с бортовой камеры еще одного БПЛА, удерживающего заранее заданную позицию и осуществляющего в автоматическом режиме слежение за снегоциклом. На этом кадре видны сразу три подвижных объекта группы: обе наземных ОТП и упомянутый ранее малый БПЛА типа FPV, также отмеченный красным на рисунке.

## **5. Полевые работы на базе инфраструктуры, пример САО РАН**

В 2023 году специалистами ИПУ РАН и САО РАН проводился анализ возможностей материально-технической базы (далее – МТБ) САО РАН для решения задач обеспечения полевых испытаний группировок транспортных средств на электрическом приводе и допустимых режимов ее использования.

В рамках полевого выезда к объектам МТБ БТА, основной уникальной приборной установки САО РАН, проводилась апробация сценариев:

1. Применения легких внедорожных транспортных средств для перемещения по снежному покрову, на примере снегоциклов, для решения задач обслуживания инфраструктуры БТА в зимний период.

2. Проведения полевых испытаний группировок транспортных средств на электрическом приводе, предназначенных для перемещения по снежному покрову в условиях сложного рельефа.

По результатам полевого выезда были определены ОМТБ, пригодные для обеспечения задач хранения и обслуживания ОТП и зоны территории, пригодные для проведения экспериментов, и ОМТБ, для обслуживания которых целесообразно применение

исследуемых ОТП. В частности, по результатам анализа была обоснована целесообразность проведения ряда мероприятий по модернизации отдельных помещений технического блока БТА, не используемых в настоящее время в связи с повышением энергоэффективности систем БТА и значительным уменьшением размеров систем управления БТА в рамках технологического прогресса. В то же время электрические мощности и технический парк оборудования, размещенного непосредственно у БТА, позволяет осуществлять зарядку и хранение значительного парка электрических ОТП, что актуально для проведения полевых экспериментов по групповому движению внедорожных транспортных платформ на электрическом приводе.

По результатам проведенного анализа ОМТБ было принято решение о сооружении изолированного бокса, позволяющего поддерживать необходимый температурный диапазон для комфортного обслуживания и хранения техники, и проведен целый ряд подготовительных работ.

По результатам анализа территории БТА САО РАН и прилегающих территорий были определены:

- непосредственно территория САО РАН (рис. 12, участок 6), исключая доступ сторонних ТС и посторонних лиц, пригодная для проведения полевых испытаний группировок ОТП и размещения высокоточных ОИИ;
- территории, прилегающие к территории САО РАН, с участками сложного рельефа и отсутствующими очагами лавинной опасности, которые в зимний период не используются для народнохозяйственной деятельности – участки 432/4, 205/1, 205/2, 195 и 379 (рис. 12) общей площадью более 20 га, на которых возможна регистрация движения группировок ОТП с применением ОИИ, размещаемой на участке 6.

В качестве локальных сценариев были рассмотрены задачи доступа к удаленным объектам инфраструктуры БТА – насосным станциям и накопительному резервуару. В зимнее время транспортная доступность к данным объектам затруднена, а регулярная расчистка маршрута нецелесообразна в силу отсутствия необходимости регулярного посещения данного объекта и значитель-

ного переноса снежных масс в силу особенностей рельефа. Определены основные параметры маршрутов – протяженность маршрута, профиль, ориентировочное время в пути (см. рис. 13).

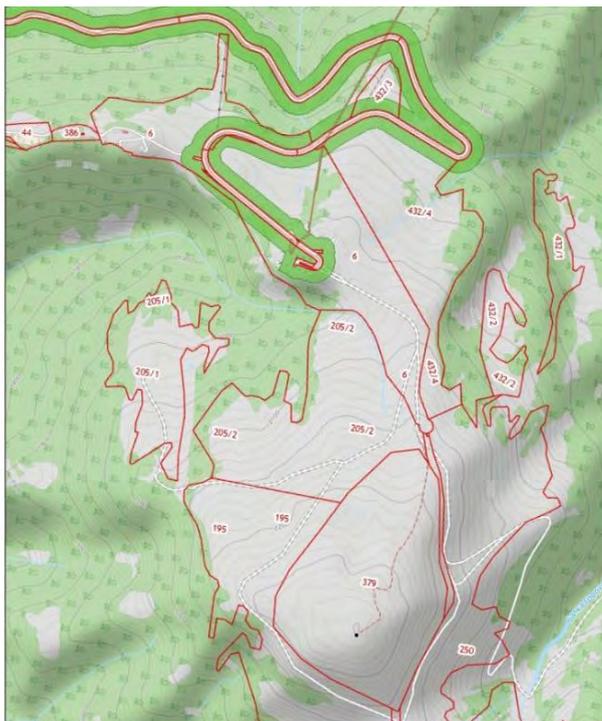


Рис. 12. Территориальная схема в районе БТА САО РАН

В качестве ограничений по режиму использования выделены:

1. Запрет на проведение экспериментов в темное время суток для исключения светового воздействия на уникальную научную установку во время ее функционирования.

2. Ограниченность возможности применения БПЛА из-за особенности ветровых условий и рельефа местности в зимний период.

3. Ограниченный период наличия устойчивого снежного покрова.



Рис. 13. Схема движения к насосной станции БТА CAO РАН в зимних условиях

На основе проведенного анализа с учетом перечисленных выше ограничений был сделан вывод о перспективности применения инфраструктуры обслуживания уникальной приборной установки БТА как центра коллективного пользования (ЦКП) объектами экспериментально-стендовой и полигонной базы для решения задач экспериментальной проверки решений по управлению распределенными организационно-техническими системами, образуемыми гетерогенными группами подвижных объектов при движении по снежному покрову.

В рамках полевого выезда 2024 г. была проведена апробация ОМТБ, подготовленных специалистами CAO РАН для хранения и обслуживания парка ОТП.

В рамках решения задач обслуживания инфраструктуры БТА в зимний период был осуществлен пробный выезд к нижней насосной станции с участием представителей инженерно-технического персонала CAO РАН (рис. 14)

В рамках отработки концепции «vehicle-to-grid» (V2G) применения электрического транспорта как источников питания в сети [20] в условиях отсутствия линий электропередач, связывающих объекты микрогрид, были проведены пробные работы по

обслуживанию ОМТБ с применением электрического инструмента, питаемого от энергосистемы ОТП (рис. 15).



*Рис. 14. На нижней насосной станции БТА САО РАН*



*Рис. 15. Электрический транспорт как элемент энергосистемы для труднодоступной местности*

Был проведен эксперимент по использованию ОТП как источников резервного питания для помещений технического блока, что в настоящее время является крайне актуальным направлением исследований для поселений в географических локациях со сложными климатическими и ландшафтными услови-

ями, см., например, [16], являясь крайне существенным дополнением к моделированию электротранспорта «последней мили» в арктических условиях в рамках концепции «Теплого города», см., например, [12].

По направлению проведения полевых испытаний группировок транспортных средств на электрическом приводе, предназначенных для перемещения по снежному покрову в условиях сложного рельефа, исследователями ИПУ РАН была реализована серия экспериментов на основе сценариев, отработанных на территории ИПУ РАН в 2023 г и описанных в разделе 4 (см. рис. 16) с использованием ОИИ как стационарного базирования, так и на размещаемой на вспомогательных ОТП.



*Рис. 16. Сбор данных на территории БТА САО РАН*

## **6. Дальнейшие направления развития проекта в контексте взаимодействия по линии РАН**

По результатам проекта в 2023 и 2024 годах можно с уверенностью утверждать, что на базе инфраструктуры организаций РАН был реализован полноценный пилот отдельного узла распределенной сети полигонов для отработки сценариев применения гетерогенных групп транспортных средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях. При этом наиболее перспективной для дальнейшего развития

в качестве «пилотного узла» была выбрана инфраструктура уникальной приборной установки БТА, входящей в ЦКП САО РАН.

Созданная на ней инфраструктура базирования и обслуживания ОТП с электрическим приводом позволит в дальнейшем осуществлять проведение полевых исследований не только с парком ТС, доставляемых к месту проведения экспериментов, но и размещаемых в данном узле на постоянной основе. В случае БТА возможность постоянного базирования и обслуживания ОТП является особенно актуальной, так как в рамках проекта был определен целый ряд сценариев применения подобной техники для решения задач обслуживания инфраструктуры уникальных приборных установок. Причем не только в зимний период: задачи из области V2G, такие как автономное питание электрического инструмента при обслуживании объектов, расположенных в труднодоступной местности, или обеспечения резервного бесперебойного питания БТА – крайне актуальной задачи в контексте настоящего состояния энергосистемы региона расположения объекта.

Кроме того, перспективным направлением дальнейшего развития исследований в сфере разработки, апробации и внедрения интеллектуальных технологий управления элементами научно-технической инфраструктуры и приборной базы уникальных научных установок с целью повышения энергоэффективности и минимизации воздействия на окружающую среду может являться проект по организации челночной связи п. Нижний Архыз с БТА за счет дорожных ТС с электрическим приводом – там, где сейчас применяется парк «классических» автомобилей с ДВС.

При этом возможность постоянного базирования и проведения экспериментов с гетерогенными группами ОТП с электрическим приводом на базе инфраструктуры БТА в совокупности с ее изолированностью и компактностью размещения открывает возможность ее применения не только по своему основному назначению в области астрономических наблюдений. Но и междисциплинарного, в других отраслях науки, в частности – теории управления, по вопросам исследования проблем функционирования гетерогенных групп подвижных транспортных средств как в формате коллаборативного взаимодействия на уровне «чело-

век – автономное транспортное средство» и в формате смешанных групп, так и гетерогенных групп мобильных роботов [29]. БТА может потенциально рассматриваться как крупный объект научной инфраструктуры или центр коллективного пользования для более широкого перечня отраслей науки в конкурсах Российского научного фонда и других грантовых программах.

За счет расширения парка ОТП, доступных для исследования в рамках проекта РСП, благодаря сотрудничеству с МФТИ по теме «Разработка, апробация и внедрение интеллектуальных технологий управления объектами и уникальной инфраструктурой в области автономных и полуавтономных транспортных средств с электрическим приводом и полигонов для их испытаний с целью повышения энергоэффективности и минимизации воздействия на окружающую среду» с объектами с многомоторной схемой силового привода и возможностью эксплуатации не только в зимний сезон, становится возможной апробация наработок специалистов ИПУ РАН по управлению многомоторными подвижными объектами с электрическим приводом на данных платформах, см., например, [29].

Отдельно следует выделить проблематику одновременного создания цифровых двойников как подвижных объектов, так и среды, в которой осуществляется движение объекта, для чего планируется интеграция массива собираемых в рамках проекта данных в среду виртуального моделирования, развиваемую в ИПУ РАН [29]. Это позволит в дальнейшем проводить анализ и сопоставление плановых и реализованных траекторий движения гетерогенных групп подвижных объектов в гетерогенных средах.

Совокупность проводимых исследований в дальнейшем позволит получить данные для разработки систем управления движения легких ТС (чей вес сопоставим с весом человека) в автономных и полуавтономных режимах в условиях сложной поверхности и рельефа.

В рамках проекта было определено, что, несмотря на значительное расстояние между планируемой к созданию международной арктической станцией «Снежинка», планируемой к созданию на Полярном Урале [6] и территорией размещения БТА, есть много общих характеристик с точки зрения климата и рельефа, что делает актуальным на период строительства первого объекта,

развертывание полигона по отработке отдельных элементов научной программы и сценариев эксплуатации объектов научной инфраструктуры на базе БГА.

Следующим немаловажным направлением, в котором активно функционирует в настоящее время САО РАН, является просветительская деятельность. Дополнение и диверсификация образовательных и популяризационных мероприятий в области астрономии комплиментарными направлениями, в нашем случае – созданием тестово-ознакомительной площадки для внедорожных экспериментальных транспортных платформ с электрическим приводом, может быть очень перспективным и актуальным проектом в области экологического просвещения населения и развития электротранспорта на территории РФ.

## **7. Заключение**

Реализованный в 23–24 годах проект по апробации элементов эскизной концепции распределенной сети полигонов как центров коллективного пользования на базе существующей инфраструктуры научных организаций показал перспективность предлагаемого подхода к повышению степени эффективности использования существующей материально-технической базы и научно-технической инфраструктуры организаций РАН, расположенных в регионах со сложным климатическими и ландшафтными условиями, включая инфраструктуру обслуживания уникальных приборных установок за счет ее адаптации к решению задач экспериментальной проверки решений по управлению распределенными организационно-техническими системами, образуемыми гетерогенными группами подвижных объектов.

Помимо того, что за счет достаточно незначительных вложений существующая инфраструктура успешно может быть модернизирована для базирования и обслуживания опытных платформ для апробации технических решений, сами организации получают возможность апробации новых подходов к решению уже существующих у них задач обеспечения проведения полевых исследований в интересах научных организаций и эксплуатации приборной базы уникальных научных установок.

**Дальнейшие перспективы** по данному направлению включают в себя, во-первых, расширение сети организаций, на базе которых могут разворачиваться ее «узлы», расширяя географию, сезонность, перечень сценариев проведения полевых исследований в интересах научных организаций и эксплуатации приборной базы уникальных научных установок при поддержке электрического транспорта.

Во-вторых, как было отмечено в статье, на примере одного узла целесообразно сосредоточиться на реализации элементов программы полевых исследований по сбору данных и опытной апробации результатов теоретических исследований специалистов ИПУ РАН по проблемам разработки методов анализа движения и синтеза управления для подвижных объектов в сложно моделируемых средах, управления объектами инфраструктурной и транспортной энергетики, механизмов управления организационно-техническими системами, таких как:

1. Модели и методы согласованного планирования сценариев применения как одиночных подвижных объектов, так и гетерогенных групп транспортных средств разной степени автономности как элементов малой энергосистемы как в рамках концепций «подвижный объект-инфраструктурный объект» (V2B) и «подвижный объект – сеть» (V2G), так и в рамках концепции отдельного транспортного средства как сети независимых потребителей (мультимоторные ТС, бортовые системы, сопутствующая нагрузка) и источников и накопителей электроэнергии разного типа (аккумуляторные батареи, ДВС генераторы, водородные топливные элементы, рекуперативные системы сбора энергии);

2. Методы идентификации моделей и синтеза управления для подвижных объектов при движении по нежестким поверхностям с изменяемыми характеристиками, например, снежного покрова и естественных грунтов разного типа, с помощью сетей ГНСС- (GNSS-) приемников, инерциальных измерительных сенсоров (IMU) и характеристик функционирования силовых и управляющих приводов, их интеграция с методами одновременной локализации и картографии (SLAM);

3. Методы анализа и синтеза моделей человека как значимой составляющей эргатических систем «пилот – подвижный

объект» для транспортных средств, сопоставимых по массе с весом человека, таких как мотоциклы, легкие вездеходы, снегоходы и получившие в последнее время большое распространение так называемые средства индивидуальной мобильности.

### **Литература**

1. БАЗЕНКОВ Н.И. *Моделирование движений человека: методы и актуальные задачи* // Труды 17-й Всероссийской школы-конференции молодых ученых «Управление большими системами» (УБС'2021, Москва). – М.: ИПУ РАН, 2021. – С. 295–300.
2. БАЗЕНКОВ Н.И., ПЫЖЬЯНОВ А.А. *Система сбора данных для реконструкции движения мотоциклиста* // Сборник докладов XIV Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). – М.: ИПУ РАН, 2024. – С. 1961–1964.
3. БИРИН Д.А., МЕЩЕРЯКОВ Р.В., ТУРОВСКИЙ Я.А. *Проблемы управления группой ртк* // XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023). – 2023. – С. 287–290.
4. БЛОХИН А.Н., ГОЛОВ Д.А., РЯБОВ А.Г. *Оценка эксплуатационных свойств вездеходного транспортного средства, работающего на водороде* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2024. – №2(67). – С. 15–22.
5. БУРКОВ В.Н., ЕНАЛЕЕВ А.К., КОРГИН Н.А. *Согласованность и неманипулируемость механизмов организационного управления: текущее состояние проблемы, ретроспектива, перспективы развития теоретических исследований* // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №7. – С. 5–37.
6. ВАСИЛЬЕВ Ю.В. *Арктический полигон водородных технологий «Снежинка»* // Топливные элементы и энергоустановки на их основе: Девятая всероссийская конференция с международным участием, Черноголовка, 20–23 июня 2022 года. – Черноголовка: Изд-во Черноголовка, 2022. – С. 12.
7. КОРГИН Н.А., МЕЩЕРЯКОВ Р.В. *Концепция проекта по созданию распределенной сети полигонов для отработки сценариев применения гетерогенных групп транспортных*

- средств с электрическим приводом в сложных климатических и ландшафтных условиях // Труды 11-й Всероссийской научной конференции «Системный синтез и прикладная си-нергетика»: сборник научных трудов (п. Нижний Архыз, ССПС-2022). – Ростов н/Д.: Южный федеральный универси-тет, 2022. – С. 197–202.*
8. КОРГИН Н.А., НОВИКОВ Д.А. *Иерархические и рефлексив-ные игры // Теория управления (дополнительные главы). – М.: Издательская группа URSS, ООО «ЛЕНАНД», 2019. – С. 510–546*
  9. КРАВЧУК С.Г., КОРГИН Н.А., КЛЮСОВ Н.В. и др. *Про-ектно-образовательный эксперимент в арктическом ди-зайне: формирование облика инновационного снегоходного транспорта // Техническая эстетика и дизайн исследова-ния. – 2023. – Т. 5, №1. – С. 56–68.*
  10. ЛАВРЕНТЬЕВ И.И. и др. *Гляциологические исследования Института географии РАН на Эльбрусе в 2023 г. // Лёд и снег. – 2024. – Т. 63, №. 4. – С. 553–557.*
  11. МОРОЗОВ Ю.В., КОРГИН Н.А. *Особенности постобра-ботки GNSS-позиции на электрическом снегоходе одноко-лейной компоновки при движении по снегу // Труды XVI Все-российской мультikonференции по проблемам управления (МКПУ-2023). – 2023. – С. 195–197.*
  12. ПРОКОПОВА С.М. *«Теплый город» в Арктике: адаптация, оптимизация феноменология // Архитектон: известия ву-зов. – 2022. – №2(78).*
  13. ТРЕФИЛОВ П.М. *Алгоритм интеграции сенсорных данных для оценки состояния автономных роботов в интеллекту-альной транспортной среде // Управление большими систе-мами. – 2024. – Вып. 112. – С. 257–273.*
  14. ТРЕФИЛОВ П.М., КОРГИН Н.А. *Повышение степени авто-номности информационной системы для динамических объек-тов с бортовыми навигационными комплексами // Сборник до-кладов XIV Всероссийского совещания по проблемам управле-ния (ВСПУ-2024). – М.: ИПУ РАН, 2024. – С. 1270–1274.*

15. ALDIN H.N.S. et al. *A comprehensive review of energy harvesting and routing strategies for IoT sensors sustainability and communication technology* // Sensors International. – 2024. – Vol. 5. – P. 100258.
16. BREMDAL B. et al. *E-Mobility and Batteries—A Business Case for Flexibility in the Arctic Region* // World Electric Vehicle Journal. – 2023. – Vol. 14, No. 3. – P. 61.
17. DADMAN S., BREMDAL B., TANGRAND K. *The role of electric snowmobiles and rooftop energy production in the Arctic: The case of Longyearbyen* // J. Clean Energy Technol. – 2021. – Vol. 9. – P. 46–53.
18. DIAKOV A.S., POZDEEV A.V., NOVIKOV V.V. *The main directions of the development of snowmobiles in the Russian Federation* // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences – 2018. – Vol. 224. – P. 02080.
19. HANDWERKER M., WELLNITZ J., MARZBANI H. *Comparison of hydrogen powertrains with the battery powered electric vehicle and investigation of small-scale local hydrogen production using renewable energy* // Hydrogen. – 2021. – Vol. 2, No. 1. – P. 76–100.
20. JOSEPH A., BALACHANDRA P. *Energy internet, the future electricity system: Overview, concept, model structure, and mechanism* // Energies. – 2020. – Vol 13, No. 16. – P. 4242.
21. LIN., LUKSZO Z., SCHMITZ J. *An approach for sizing a PV–battery–electrolyzer–fuel cell energy system: A case study at a field lab* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2023. – Vol. 181. – P. 113308.
22. MAZZEO D. et al. *A smart algorithm to optimally manage the charging strategy of the Home to Vehicle (H2V) and Vehicle to Home (V2H) technologies in an off-grid home powered by renewable sources* // Energy Systems. – 2024. – Vol. 15, No. 2. – P. 715–752.
23. PERTL P. et al. *Development of hydrogen powered fuel cell e-snowmobiles* // SAE Technical Paper. – 2020. – No. 2019-32-0555.
24. SALAMA M.A. et al. *UGV with a distributed electric driveline: Controlling for maximum slip energy efficiency on stochastic terrain* // Journal of Terramechanics. – 2018. – Vol. 79. – P. 41–57.

25. SATTAROV R., AMINEV R., SALATOV N. *Simulation of Snowmobiles-Small Electric Vehicles with a Track* // Int. Ural Conf. on Electrical Power Engineering (UralCon-2024). – IEEE, 2024. – P. 864–868.
26. SCHMIDT S. *Use of battery swapping for improving environmental balance and price-performance ratio of electric vehicles* // ETransportation. – 2021. – Vol. 9. – P. 100128.
27. SLUKOVSKII Z. et al. *Pristine Tundra Lakes in the North of Murmansk Region (Arctic): Geochemistry of Sediments, Pollution Assessment and Heavy Metal Forms* // Int. Journal of Environmental Research. – 2024. – Vol. 18, No. 4. – P. 57.1–57.17.
28. SOVACOOOL B. K. et al. *Actors, business models, and innovation activity systems for vehicle-to-grid (V2G) technology: A comprehensive review* // Renewable and Sustainable Energy Reviews. – 2020. – Vol. 131. – P. 109963.
29. TREFILOV P., KULAGIN K., MAMCHENKO M. *Developing a Flight Mission Simulator in the Context of UAVs Group Control* // Proc. of the 13th Int. Conf. "Management of Large-Scale System Development" (MLSD-2020). – Moscow: IEEE, 2020. – P. 1–4.
30. XIAO X. et al. *Winter tourism and climate change: Exploring local and non-local snowmobilers' perceptions of climate change and adaptation behaviors* // Journal of Outdoor Recreation and Tourism. – 2020. – Vol. 31. – P. 100299.

## **THE CONCEPT OF A DISTRIBUTED NETWORK OF TEST GROUNDS FOR SCENARIOS' ASSESSMENT FOR THE USE OF HETEROGENEOUS GROUPS OF ELECTRIC VEHICLES IN COMPLICATED CLIMATE AND TERRAIN ENVIRONMENT - IMPLEMENTATION EXAMPLES AND DEVELOPMENT PROSPECTS**

**Nikolay Korgin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, (nkorgin@ipu.ru).

**Roman Meshcheryakov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, (mrv@ipu.ru).

*Abstract: The article describes a project of the distributed network of test grounds for scenarios' assessment for the use of heterogeneous groups of electric vehicles in complicated climate and terrain environment for field research support in the interests of scientific organizations and operating the instrumentation base of unique scientific installations and the prospects for its further development. The article describes a general approach based on the concept of active planning from the theory of organizational systems, the results of experimental testing of individual elements of the concept on three pilot network nodes based on the infrastructure of regional centers of the RAS located in regions with complex climatic and landscape conditions, and directions for further development of the project. A formal mathematical model is proposed that allows describing the process of coordinating interests within a single network node as a center for collective use with expandable functionality and number of users. In conclusion, a further program of scientific research is proposed on the problem of the functioning of a heterogeneous group of electric-powered vehicles as elements of a small distributed energy system based on the developing network of testing grounds.*

Keywords: electric transport, group control, organizational and technical system, shared use center.

УДК 007.5

ББК 39.1

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии Б.Р. Андриевским.*

*Поступила в редакцию 11.12.2024.*

*Опубликована 31.01.2025.*

## МОДЕЛЬ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ РЕКОНФИГУРАЦИИ ГЕТЕРОГЕННОЙ ГРУППЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ОБЪЕКТОВ КИБЕРФИЗИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

Подвесовский А. Г.<sup>2а,б</sup>, Филонов А. А.<sup>3а</sup>, Венец В. И.<sup>4а</sup>,  
Настас Г. Н.<sup>5в</sup>, Захарова А. А.<sup>6а</sup>

(<sup>а</sup> ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва; <sup>б</sup> ФГБОУ ВО  
Брянский государственный технический университет,  
Брянск; <sup>в</sup> ФГБУ «НИЦ «Институт имени  
Н.Е. Жуковского», Москва)

Управление взаимодействием объектов киберфизических систем в составе гетерогенной группы требует решения комплекса задач, среди которых можно выделить задачи управления конфигурацией группы, включающие формирование начальной конфигурации, оптимизацию пространственного расположения объектов, целераспределение, а также реконфигурацию группы. Актуальность задачи реконфигурации группы обусловлена важностью обеспечения и сохранения целостности группы в условиях сокращения возможностей, например, по причине выхода из строя отдельных членов группы. В статье рассматривается задача реконфигурации двухуровневой группы разнородных взаимодействующих объектов киберфизической системы на примере реконфигурации двухуровневой группы беспилотных летательных аппаратов, построенной по схеме «ведущий – подчиненный». Для данной задачи предлагается подход к построению модели принятия решений, основанный на сведениях к задаче о паросочетаниях по схеме «многие к одному». Описывается способ формализации предпочтений акторов и рассматривается алгоритм формирования оптимальной конфигурации, представляющий собой модифицированный алгоритм Гейла – Шепли для модели двустороннего матч-инга с динамической вещественной квотой. Обсуждаются результаты экспериментального исследования алгоритма и пути устранения выявленных в ходе исследования недостатков. В заключении дается общая характери-

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, проект 23-19-00342, <https://rscf.ru/project/23-19-00342/>

<sup>2</sup> Александр Георгиевич Подвесовский, к.т.н., доцент ([apodv@tu-bryansk.ru](mailto:apodv@tu-bryansk.ru)).

<sup>3</sup> Александр Андреевич Филонов, аспирант ([afilonovcontact@gmail.com](mailto:afilonovcontact@gmail.com)).

<sup>4</sup> Владимир Иосифович Венец, к.ф.-м.н., с.н.с. ([v.venets@mail.ru](mailto:v.venets@mail.ru)).

<sup>5</sup> Геннадий Николаевич Настас, к.т.н. ([nastasgn@nrczh.ru](mailto:nastasgn@nrczh.ru)).

<sup>6</sup> Алёна Александровна Захарова, д.т.н., доцент ([zaa@ipu.ru](mailto:zaa@ipu.ru)).

*стика возможных направлений дальнейшего развития предложенного подхода к построению модели принятия решений для задачи реконфигурации.*

Ключевые слова: киберфизическая система, беспилотный летательный аппарат, управление группой беспилотных летательных аппаратов, реконфигурация, матчинг, алгоритм отложенного принятия предложения.

## **1. Введение**

В настоящее время одним из актуальных направлений инженерии киберфизических систем (КФС) является повышение уровня их адаптивности и интеллектуальности, принимая во внимание тот факт, что современная КФС, как правило, включает в себя большое число взаимодействующих объектов, как полностью автономных, так и частично автоматизированных и управляемых операторами. Анализ ряда отечественных и зарубежных работ в области прикладных аспектов использования КФС различных типов, в частности, систем беспилотной авиации и мобильных робототехнических систем и комплексов [1, 6, 7, 10, 17, 19, 20], позволяет сделать вывод, что, помимо традиционной задачи расширения спектра функциональных возможностей КФС, в последние годы наблюдается повышенный интерес к таким задачам, как:

- групповое применение объектов КФС для взаимосвязанного решения сложных масштабных задач, в том числе использование гетерогенных групп, включающих в себя объекты, разнородные по типу и функциям;

- повышение автономности функционирования КФС путем уменьшения роли человека-оператора в управлении ее объектами при обеспечении эффективного выполнения стоящих перед системой задач. При этом в условиях группового взаимодействия объектов актуальность данной задачи не только сохраняется, но и увеличивается.

Переход к практике группового применения разнородных объектов КФС приводит к необходимости управления взаимодействием объектов в группе. Такое управление включает в себя распределение задач между членами группы с учетом ее целево-

го назначения, управление информационными потоками внутри группы, координацию взаимодействий между членами группы в процессе исполнения задач и др. [1, 10, 17, 23]. При этом среди требований к системе управления важное место занимает адаптивность, т.е. способность функционировать в условиях изменяющихся условий внешней среды.

Исследованию проблемы автономности КФС различных типов – от робототехнических комплексов до беспилотных транспортных средств – посвящено множество отечественных и зарубежных работ, например [10, 13, 14, 16, 17, 26]. Отмечается, что обеспечение и повышение автономности группы объектов КФС представляет собой более сложную задачу по сравнению с обеспечением автономности отдельного объекта. При этом в контексте обеспечения автономности группы объектов КФС значительную важность приобретает обеспечение и сохранение целостности группы, под которой понимается сохранение способности эффективно выполнять свои функции.

В статье предлагается подход к построению модели принятия решений для одной из задач обеспечения целостности группы разнородных объектов КФС: реконфигурации группы в условиях временного или постоянного сокращения или деградации ее возможностей, например, при выходе из строя отдельных ее компонентов. В качестве примера рассматривается задача реконфигурации двухуровневой группы беспилотных летательных аппаратов (БЛА), построенной по схеме «ведущий – подчиненные», при выходе из строя одного или нескольких ведущих объектов.

## **2. Предметная область и терминология**

Описание предлагаемого подхода к построению модели принятия решений для задачи реконфигурации будем вести на примере КФС, представляющих собой группы совместно действующих беспилотных мобильных средств различного уровня автономности, создаваемые для выполнения некоторой целевой задачи или комплекса задач.

Объекты КФС, задействованные в решении целевой задачи, будем называть *актерами*. Примерами акторов в контексте рассматриваемой предметной области могут являться беспилотные мобильные средства различных типов (летательные аппараты, платформы и др.), объекты инфраструктуры (погрузчики, зарядные станции) и т.д.

Объединение задач, решаемых группой акторов, по некоторому целевому признаку будем называть *миссией*. Примерами миссий могут являться:

- транспортировка разнородных грузов в транспортной сети, содержащей источники и пункты назначения, с использованием группы БЛА, различающихся по летно-техническим характеристикам [3, 5, 25, 29];

- мониторинг и картографирование местности гетерогенной группой БЛА, в состав которой входят БЛА двух типов: ведущие, которые отвечают за сбор информации и взаимодействуют с другими ведущими БЛА с целью координации предусмотренных миссией задач, а также подчиненные, имеющие меньшую степень автономности и непосредственно задействованные в решении задач (например, выполнении аэрофотосъемки), получая назначения от ведущих БЛА и используя при этом информационно-коммуникационные, энергетические и другие типы ресурсов последних [22].

Каждая миссия характеризуется своей *структурой*, которая определяется типом и характером взаимосвязи решаемых задач и *набором параметров*, которые можно задавать при планировании миссии, а также при необходимости варьировать в процессе ее исполнения.

Для исполнения миссии формируется группа акторов, одной из основных характеристик которой является *конфигурация*. Формально конфигурацию группы можно задать в виде системы, содержащей:

- 1) набор множеств, который может включать в себя множество акторов, множество задач, множество объектов внешней среды, непосредственно связанных с миссией (например, маршруты, транспортируемые грузы, объекты мониторинга и др.);

2) набор отношений, которые могут быть определены на указанных множествах. Примерами таких отношений могут быть отношения «ведущий – подчиненные» на множестве акторов, распределение акторов по маршрутам, пространственное расположение акторов и т.д.

К задачам управления конфигурацией будем относить задачи формирования, мониторинга, оценки и корректировки конфигурации в соответствии с некоторым принципом оптимальности, отражающим эффективность решения комплекса задач, с которыми связана миссия. С формальной точки зрения такие задачи относятся к классу задач принятия решений.

### **3. Обзор задач управления конфигурацией группы взаимодействующих объектов киберфизических систем и подходов к их решению**

Рассмотрим задачи, возникающие в процессе управления исполнением миссии группой взаимодействующих объектов КФС, которые можно отнести к классу задач *управления конфигурацией* группы. Для этого воспользуемся предложенным в работах [6, 7] способом разделения общего процесса управления исполнением миссии на фазы, где каждая фаза связана с необходимостью решения некоторой крупномасштабной задачи управления поведением группы. Отметим, что в указанных работах рассматривались задачи управления группой БЛА, однако предложенный способ несложно обобщить на случай управления групповым взаимодействием более широкого класса объектов КФС, указанного в разделе 2.

Таким образом, следуя [6, 7], можно выделить следующие фазы управления группой объектов КФС в процессе исполнения миссии:

- фаза 1: определение состава группы исходя из общей цели миссии;
- фаза 2: управление формированием группы в зоне исполнения миссии;
- фаза 3: мониторинг зоны ответственности;

- фаза 4: целераспределение, под которым понимается распределение между объектами группы конкретных задач, предусматриваемых планом миссии;
- фаза 5: целеуказание по результатам целераспределения с учетом пространственного расположения объектов группы, влияния внешней среды и других факторов;
- фаза 6: оценка результативности действий группы, а также текущего технического состояния входящих в нее объектов;
- фаза 7: реконфигурация группы, предполагающая возврат к фазе 3 уже в новых текущих условиях.

К классу задач управления конфигурацией группы могут быть отнесены следующие задачи.

*1. Формирование начальной конфигурации.* Данная задача возникает после определения состава группы на фазе 1. Она может включать в себя подзадачи определения иерархической структуры группы, выделения лидеров и/или подгрупп с учетом информации о задачах, предусматриваемых миссией. В этом случае объектом конфигурирования являются отношения «ведущий – подчиненный» на множестве акторов. К учитываемым факторам можно отнести текущий состав группы, функции акторов, априорную информацию о целях, требования к структуре групп и составу подгрупп.

*2. Управление конфигурацией группы в зоне исполнения миссии.* Задача возникает при входе группы в соответствующую зону и предполагает конфигурирование пространственного расположения объектов группы, исходя из их функциональных возможностей и технических характеристик. Здесь учитываются такие факторы, как текущий состав группы, технические характеристики и функции акторов, априорная информация о целях.

*3. Управление функциями акторов.* Данная задача также возникает при входе группы в зону выполнения миссии на фазе 2 в том случае, если группа включает в себя объекты, способные выполнять несколько различных функций. При этом допустимость их одновременного выполнения связана со спецификой конкретных объектов и условий их функционирования. В рамках данной задачи конфигурированию подвергаются от-

ношения «исполнитель – функция». Конфигурирование может выполняться совместно с конфигурированием пространственного распределения либо на основе его результатов. К учитываемым факторам можно отнести текущий состав группы, функции акторов, априорную информацию о целях.

*4. Целераспределение.* Задача возникает в рамках фазы 4 и связана с распределением задач между членами группы. Таким образом, конфигурируются отношения «исполнитель – задачах». Распределение осуществляется с учетом текущего состава группы, функции акторов, уточненной информации о миссии, текущего пространственного положения акторов.

*5. Реконфигурация после исполнения миссии.* Задача возникает на фазе 7 после окончания процесса выполнения объектами группы назначенных им задач. По итогам оценки технического состояния группы, выполненной на предыдущей фазе 6, может отказаться целесообразной повторная реконфигурация одновременно пространственного расположения, иерархической структуры и распределения объектов по исполняемым функциям с учетом всех факторов, от которых они могут зависеть.

*6. Реконфигурация в процессе исполнения миссии.* Данная задача может возникать на любой из фаз исполнения миссии в ситуациях, когда группа частично утрачивает свои возможности, например, вследствие потери соединения между отдельными объектами, выхода из строя объектов и т.д. В зависимости от конкретной ситуации может требоваться реконфигурация пространственного распределения или иерархической структуры группы с учетом ее текущего состава, функций акторов, текущего пространственного положения акторов.

Таким образом, задачи 5 и 6 представляют собой специальный тип задач управления конфигурацией – задачи реконфигурации, в которых требуется по тем или иным причинам изменить сформированную ранее конфигурацию. При этом целью решения задачи 6, связанной с изменением конфигурации в процессе исполнения миссии, как правило, является обеспечение и сохранение целостности группы в условиях временного или постоянного сокращения ее возможностей. В большинстве

случаев такая задача должна решаться в оперативном режиме, в условиях реального времени.

Далее рассмотрим некоторые существующие подходы к решению задач управления конфигурацией.

В работе [24] рассматривается задача управления гетерогенными группами робототехнических систем (РТС) в рамках парадигмы «роевого интеллекта». Это предполагает отказ от создания единой информационной среды в рамках группы, а сложное поведение всей системы достигается за счет создания набора простых правил взаимодействия каждого устройства с видимыми им соседями.

При этом в рамках данной работы гетерогенный рой рассматривается как совокупность двух минимально взаимодействующих гомогенных роев. Система включает в себя большое количество взаимозаменяемых аппаратов двух типов: подвижных наземных РТС и неподвижных воздушных РТС. РТС одного типа взаимодействуют между собой свободно, передавая сообщения по цепочке. Коммуникация с РТС другого типа осуществляется только при нахождении в непосредственной близости от них. Воздушные РТС управляют формированием и перемещением групп наземных РТС, передавая отдельным аппаратам сообщения о движении и остановке. При этом команды имеют вероятностную природу.

По мнению авторов [24], в контексте управления конфигурацией такой подход позволяет добиться значительной взаимозаменяемости не только отдельных РТС, но и их групп в целом. Кроме того, организованная на этих принципах система демонстрирует адаптируемость к изменению условий выполнения миссии, например параллельному исполнению нескольких задач или работе в условиях недостатка ресурсов. Кроме того, подход подразумевает значительную децентрализацию при небольшой сложности реализации. Направлением возможного применения подобных систем авторы называют автономное строительство.

Вместе с тем, как следует из описания, основным ограничением данного подхода является его ориентированность на случай малого разнообразия как типов акторов (при большой

численности акторов внутри каждого типа), так и выполняемых в рамках миссии задач.

Другой подход к решению задач управления конфигурацией группы (в первую очередь задач формирования и корректировки конфигурации), в большей степени учитывающий гетерогенность группы как по структуре, так и по задачам, основан на применении оптимизационных моделей распределительного типа, в том числе многокритериальных. Примером такой модели является известная еще с 1970-х гг. из работ О.И. Ларичева многокритериальная задача о назначениях (МЗН) [4, 8]. Данная модель описывает формирование множества пар объектов из двух непересекающихся групп на основании оценок предпочтительности объектов друг относительно друга по некоторому набору критериев. В качестве примеров задач, для которых применение данного подхода показало свою эффективность, можно привести распределение рабочих мест между сотрудниками организации [8], распределение рукописей между рецензентами [9]. Применительно к задачам управления конфигурацией КФС имеется пример применения данного подхода для выбора состава аппаратного обеспечения системы Интернет вещей [28].

Вместе с тем, подход на основе МЗН предполагает независимость оценок по критериям от акторов, участвующих в формировании конфигурации и/или ее корректировке. Иными словами, предпочтительность акторов одного множества для акторов другого множества (например, соответствие между ведущими и подчиненными актерами по выполняемым задачам) оценивается не самими актерами, а внешним по отношению к задаче распределения управляющим звеном. Данное обстоятельство обуславливает централизованный характер управления конфигурацией, что, в свою очередь, снижает степень автономности группы.

Для реализации децентрализованного подхода к управлению конфигурацией, называемого также сетевым [14], необходимо, чтобы функции принятия решений были распределены между самими актерами. Иными словами, формирование и оперативная корректировка конфигурации должны осуществ-

ляться бортовыми системами акторов, которые объединяются в единую сеть управления, включающую в себя также внешнюю систему управления, т.е. оператора. При этом в штатном режиме работы действия оператора сводятся главным образом к заданию миссии и постановке целевой задачи для группы, а также мониторингу и контролю за ходом ее выполнения.

Одним из возможных способов реализации указанного подхода является представление задачи управления конфигурации в виде модели двустороннего матчинга [26], основанной на решении задачи о паросочетаниях с применением алгоритма отложенного принятия предложения [18]. В рамках данной постановки в роли субъектов принятия решений выступают сами участники распределения, т.е. акторы, которые самостоятельно формируют свои предпочтения, используемые далее для формирования оптимального распределения. Под оптимальностью в данном случае подразумевается назначение распределяемому наилучшей альтернативы из достижимых для него, исходя из предпочтений других участников. При этом дополнительным важным свойством является устойчивость полученного распределения, т.е. невозможность его дальнейшего улучшения.

Таким образом ключевым отличием подхода на основе матчинга от подхода на основе МЗН является участие акторов в процессе формирования предпочтений, а также децентрализованный характер сбора предпочтений. За счет этого матчинг хорошо показывает себя в задачах, в рамках которых предпочтения формируются динамически в следствие изменения среды и их централизованный сбор и обработка невозможны или нецелесообразны, – например в задачах многоагентного управления [21, 22].

Далее рассмотрим реализацию подхода на основе двустороннего матчинга для реконфигурации двухуровневой группы БЛА, построенной по схеме «ведущий – подчиненные», при выходе из строя одного или нескольких ведущих БЛА.

#### 4. Содержательное описание задачи реконфигурации

Будем далее рассматривать конфигурацию, задаваемую в виде отношения «ведущий – подчиненный» на множестве акторов. Содержательный смысл данного отношения состоит в том, что ведущий предоставляет подчиненному в распоряжение некоторые ресурсы и курирует процесс выполнения им некоторых задач. Предполагается, что каждому ведущему актору соответствует конечное множество подчиненных, ограниченное имеющимися у него ресурсами, а каждый подчиненный актер связан с единственным ведущим. Группы, сформированные в соответствии с этим принципом, будем называть двухуровневыми.

В качестве примера можно рассмотреть комплекс задач мониторинга и картографирования местности, для выполнения которого сформирована группа, состоящая из БЛА двух типов [22]:

- ведущие – крупные БЛА, обладающие значительными сетевыми и вычислительными ресурсами, большой дальностью и автономностью работы. Функционируя в роли ретрансляторов и вычислительных центров, они способны осуществлять оперативное управление действиями других БЛА;

- подчиненные – малые БЛА, оснащенные специализированным оборудованием и предназначенные для решения прикладных задач, таких как фото- и видеосъемка местности, транспортировка грузов, обслуживание каналов связи и др. Каждый такой БЛА способен решать конкретный набор задач, обусловленных оборудованием и конструкцией.

В процессе выполнения задач подчиненный БЛА использует ресурсы, предоставляемые ведущим БЛА. На рис. 1 показан пример конфигурации группового взаимодействия, в рамках которого подгруппа ведущих БЛА ( $n_1, n_2, \dots, n_5$ ) координирует сбор информации, осуществляемый множеством подчиненных БЛА. Каждый такой БЛА подчиняется одному из ведущих, выполняя назначенные задачи и используя его сетевые ресурсы. Так, ведущий БЛА  $n_1$  имеет в подчинении два БЛА, один из которых ( $m_2$ ) занимается передачей сообщений, а другой ( $m_2$ )

осуществляет фотосъемку; ведущий БЛА  $n_2$  имеет в подчинении три БЛА, один из которых ( $m_3$ ) занимается фотосъемкой, а два других ( $m_4, m_5$ ) – обслуживанием каналов связи, и т.д.

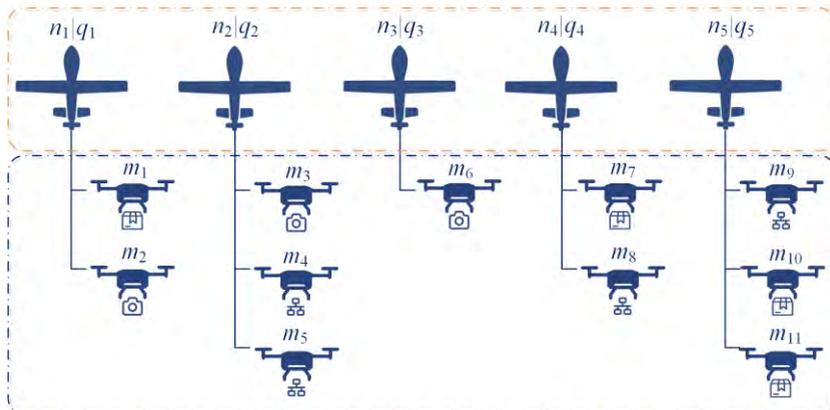


Рис. 1. Пример двухуровневого группового взаимодействия БЛА

Отметим, что описанный принцип формирования конфигурации сохраняется и для произвольной гетерогенной группы, содержащей беспилотные мобильные средства различных типов, а также объекты инфраструктуры.

Каждому ведущему актору  $n_j$  ставится в соответствие квота  $q_j$ , определяющая максимальный объем ресурсов, которые он может предоставить подчиненным акторам для выполнения назначенных им задач. В качестве примера можно привести предоставление подключения к беспроводной сети конечной пропускной способности, при этом количество подключенных устройств и выделяемая им ширина канала ограничены аппаратурой ведущего БЛА. Другими примерами могут являться предоставление портов станции зарядки аккумуляторов БЛА, а также выделение процессорного времени вычислительной системой для выполнения распределенных вычислений. В зависимости от физической природы распределяемого ресурса квота  $q_j$  может принимать целочисленные либо вещественные значения.

По характеру использования ресурсов задачи, выполняемые подчиненными акторами, можно разделить на две группы [22]:

– задачи реального времени, имеющие строгие требования к минимальному объему выделяемого ресурса. Примером может являться видеомониторинг в реальном времени с помощью БЛА, для реализации которого требуется выделение определенной ширины канала связи;

– эластичные задачи, не требующие выполнения в реальном времени. Производительность их выполнения пропорциональна выделяемым ресурсам. Примером такой задачи является передача большого массива данных фотосъемки от подчиненного БЛА к ведущему: чем шире предоставляемый канал, тем меньше времени она потребует. Требования акторов, выполняющих такие задачи, к объему выделяемых ресурсов допускается удовлетворять частично.

Возможны ситуации, когда некоторые ведущие акторы теряют свою работоспособность из-за погодных условий, нехватки электроэнергии или других факторов во время выполнения задачи. Это приводит к тому, что связанные с ними подчиненные акторы не могут получать сетевые ресурсы для выполнения своих задач. В подобных ситуациях возможны следующие способы обеспечения целостности группы:

- 1) реконфигурация группы при сохранении миссии;
- 2) изменение структуры и/или параметров миссии с целью адаптации к изменившимся возможностям группы;
- 3) некоторая комбинация указанных подходов.

В случае, если выполняется *реконфигурация группы*, подчиненные акторы получают доступ к другим ведущим акторам, сохранившим свою работоспособность. Так, в условиях рассмотренного выше примера, при выходе из строя ведущих БЛА  $n_1$  и  $n_2$  связанные с ними малые БЛА –  $m_1, m_2$  (для  $n_1$ ) и  $m_3, m_4, m_5$  (для  $n_2$ ) – теряют возможность получать коммуникационные ресурсы и взаимодействовать по выполнению задач, и в этой связи они должны перейти в подчинение к ведущим БЛА, сохранившим свою работоспособность, –  $n_3, n_4, n_5$ . Отметим, что, помимо прочего, это может предполагать изменение расположения подчиненных БЛА относительно других в группе.

Возвращаясь к общей ситуации, будем называть подчиненного актора, утратившего связь с ведущим, *актором-*

кандидатом. При этом отметим, что выбор актором-кандидатом нового ведущего должен отвечать определенным требованиям рациональности. Такими требованиями могут быть:

- 1) соответствие по выполняемым задачам;
- 2) возможность ведущих акторов удовлетворить требования кандидатов к ресурсам;
- 3) минимизация «накладных расходов», связанных со сменой ведущего актора (например, расхода заряда аккумулятора на перемещение актора-кандидата в зону видимости нового ведущего актора).

## **5. Построение и исследование модели принятия решений**

### **5.1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ РЕКОНФИГУРАЦИИ**

Рассмотрим двухуровневую группу, содержащую в своем составе ведущих и подчиненных акторов, и ее состояние в некоторый момент времени. Обозначим  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_\mu\}$  – множество акторов, перешедших из статуса подчиненных в статус кандидатов, т.е. оставшихся без ведущих в результате выхода последних из строя;  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_\eta\}$  – множество ведущих акторов, сохранивших свою работоспособность. Для каждого ведущего актора  $n_j \in N$  задано значение квоты  $q_j$ , определяющее максимальное число акторов-кандидатов, которых он может принять в подчинение с учетом объема имеющегося у него свободного ресурса. С другой стороны, для каждого подчиненного актора  $m_i \in M$  известно пороговое значение  $q(m_i)$ , характеризующее объем ресурса, необходимый для выполнения возложенных на этого актора задач. Для задач реального времени данное значение будет представлять собой строгое ограничение снизу, для эластичных задач – нестрогое.

Обозначим  $S \subseteq N \times M$  – отношение подчинения, представляющее собой бинарное отношение, такое что если существует пара  $\langle n, m \rangle \in S$ , то это означает, что подчиненный актор  $m$  назначен под управление ведущему  $n$  – ему предоставлена некоторая квота объема  $q(m, n)$ .

Таким образом, задача реконфигурации сводится к формированию отношения  $S$ , удовлетворяющего условиям рациональности, которые были на содержательном уровне описаны выше в разделе 4. Формально эти требования можно задать с помощью набора критериев

$$(1) C = \langle C_t, C_q, C_s \rangle,$$

который включает в себя:

1.  $C_t(n, m)$  – критерий релевантности по задачам, под которым понимается степень соответствия актора-кандидата  $m$  задачам, курируемым ведущим актором  $n$ , и наоборот,  $C_t(n, m)$  – критерий соответствия ведущего актора  $n$  задачам, выполняемым актором-кандидатом  $m$ ;

2.  $C_q(n, m)$  – критерий предоставляемой квоты, определяет объем ресурса, выделяемого подчиненному актору  $m$  при подключении к ведущему актору  $n$  (например, это может быть ширина канала связи).

3.  $C_s(n, m), C_s(m, n)$  – критерии накладных расходов соответственно актора кандидата  $m$  и ведущего актора  $n$  для установления соединения между ними. К накладным расходам могут, например, относиться затраты на перемещение актора-кандидата в зону видимости ведущего, либо на смену режимов трансляции сигнала у ведущего актора [21, 22].

В общем случае приведенные критерии могут иметь различную содержательную интерпретацию, зависящую от постановки задачи, условий выполняемой миссии и конструкции акторов. Также они могут различаться по приоритетам для подчиненных и ведущих акторов.

## 5.2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ РЕКОНФИГУРАЦИИ В ВИДЕ ЗАДАЧИ О ПАРСОЧЕТАНИЯХ

Дальнейшая формализация основана на введении на множестве акторов отношений предпочтения.

Отношение предпочтения для актора-кандидата – бинарное отношение, допускающее следующую интерпретацию:  $\langle n_1, m \rangle > \langle n_2, m \rangle$  тогда и только тогда, когда взаимодействие с ведущим актором  $n_1$  более предпочтительно для актора  $m$ , чем взаимодействие с  $n_2$ .

Отношение предпочтения для ведущего актора – бинарное отношение, допускающее следующую интерпретацию:  $\langle n, m_1 \rangle \succ \langle n, m_2 \rangle$  тогда и только тогда, когда взаимодействие с актором-кандидатом  $m_1$  более предпочтительно для ведущего актора  $n$ , чем взаимодействие с  $m_2$ .

Один из возможных способов задания предпочтений актора может быть основан на лексикографическом порядке важности критериев [12]. Так, применительно к критериям из набора (1) лексикографический порядок для актора-кандидата может иметь вид:

$$(2) \quad C_q(m, n) \succ^L C_i(m, n) \succ^L C_s(m, n).$$

Это означает, что безусловным приоритетом для него будут пользоваться те ведущие акторы, которые обеспечивают требуемый объем квоты, и только при наличии нескольких таких акторов среди них будет выбраться тот, который имеет наибольшее значение показателя релевантности. Если же и таких акторов окажется более одного, то будет приниматься в учет наименее важный критерий, связанный с накладными расходами.

Тогда списком предпочтений подчиненного актора  $m$  будет являться множество  $P_m \subseteq N$ , элементы которого упорядочены по убыванию предпочтительности.

Аналогично можно задать предпочтения ведущего актора:

$$(3) \quad C_i(m, n) \succ^L C_s(m, n),$$

т.е. в первую очередь предпочтение отдается кандидатам, наиболее релевантным ведущему по задачам, а при равенстве данного показателя учитываются затраты на подключение. Соответствующим образом формируется список предпочтений ведущего актора  $P_n \subseteq N$ , элементы которого также упорядочиваются по убыванию предпочтительности.

Далее рассмотрим возможные формы задания критериев из набора (1).

*Критерий релевантности по задачам* может задаваться, исходя из следующих соображений. С точки зрения актора-кандидата  $m$ , релевантность ведущего актора  $n$  для него тем выше, чем меньшее количество типов задач он курирует в данный момент, поскольку в этом случае он может предоставить потенциально больший объем ресурса. Таким образом

$$(4) \quad C_t(m, n) = \begin{cases} \frac{1}{1 + |T_n|}, & \text{если } t \in T_n, \\ 0, & \text{если } t \notin T_n; \end{cases}$$

где  $T_n$  – подмножество задач, курируемых  $n$ ;  $|T_n|$  – мощность данного множества.

В свою очередь, с точки зрения ведущего актора  $n$ , релевантность актора-кандидата  $m$  для него тем выше, чем большее число акторов, уже находящихся у него в подчинении, выполняют ту же задачу, что и  $m$ . Соответственно, можно положить

$$(5) \quad C_t(n, m) = \frac{K(n, m)}{K(n, m) + 1},$$

где  $K(m, n)$  – количество акторов, находящихся в подчинении у  $n$ , которые выполняют ту же задачу, что и  $m$ .

Вернемся к рассмотренному ранее примеру с двухуровневой группой взаимодействующих БЛА. На рис. 2 показана ситуация, когда в результате выхода из строя двух других ведущих БЛА –  $n_1$  и  $n_2$  – связанные с ними малые БЛА –  $m_1, m_2$  (для  $n_1$ ) и  $m_3, m_4, m_5$  (для  $n_2$ ) – потеряли возможность получать коммуникационные ресурсы и взаимодействовать по выполнению задач. В этой связи они должны перейти в подчинение к работоспособным ведущим БЛА –  $n_3, n_4, n_5$ .

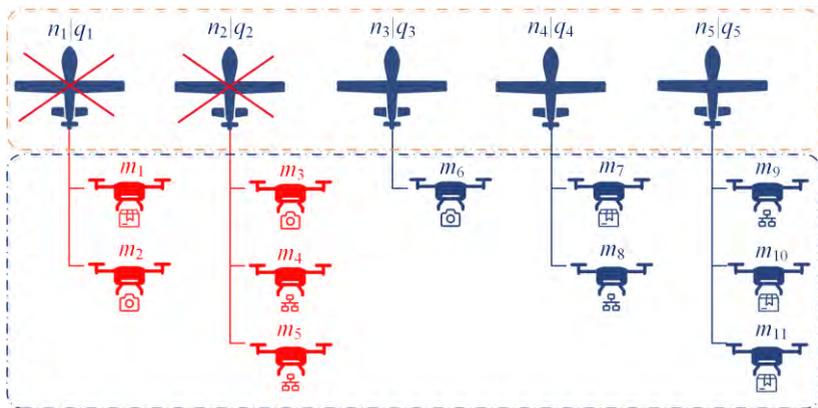


Рис. 2. Пример ситуации, порождающей необходимость реконфигурации

Вернемся к примеру конфигурации, показанному на рис. 1. Пусть в результате выхода из строя ведущих БЛА  $n_1$  и  $n_2$  связанные с ними малые БЛА  $m_1, \dots, m_5$  должны перейти в подчинение к ведущим БЛА, сохранившим свою работоспособность –  $n_3, n_4, n_5$ . В этом случае, используя формулы (4)–(5), получаем отношение релевантности, представленное в виде графа на рис. 3.

Значения в нижней части рис. 3 определяют степени предпочтительности соответствующей пары для актора-кандидата, значения в верхней части – степени предпочтительности для ведущего актора.

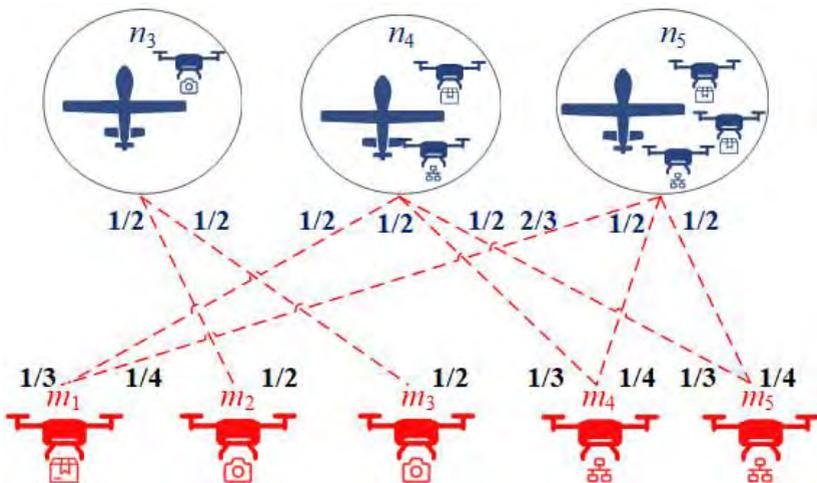


Рис. 3. Граф отношения релевантности для схемы на рис. 2

Возможный вариант задания критерия предоставляемой квоты  $C_q$  следующий. Пусть  $q(m)$  – величина квоты, необходимая для выполнения подчиненным актором  $m$  задачи, назначенной ему в рамках определенной миссии. Будем считать, что вследствие пространственной удаленности акторов, часть сетевого ресурса, представляемого подчиненному актору, будет теряться вследствие помех и должна быть компенсирована выделением большего объема ресурса. С учетом этого обозначим через  $w(m, n)$  эффективную квоту, под которой понимается

объем квоты, который должен выделяться подчиненному актору с учетом компенсации на дополнительные затраты сетевых ресурсов, связанные с установлением соединения с ведущим актором  $n$ :

$$(6) \quad w(m, n) = q(m) \cdot d(m, n) \cdot k_d,$$

где  $d(m, n)$  – расстояние между акторами  $m$  и  $n$ ;  $k_d$  – некоторый коэффициент, обусловленный физической природой сетевого взаимодействия акторов (в рамках данной работы считаем, что он задается экспертным путем).

Ранее было приведено содержательное описание эластичных задач и задач реального времени. Определим функцию ценности для каждого из этих типов задач. Для задач реального времени функция ценности имеет вид:

$$(7) \quad u_{real-time}(m, n) = \begin{cases} 1, & \text{если } q(m, n) > w(m, n); \\ 0, & \text{если } q(m, n) < w(m, n), \end{cases}$$

где  $q(m, n)$  – объем сетевого ресурса, который  $n$  может выделить для  $m$ ;  $w(m, n)_{real-time}$  – некоторый минимальный порог эффективной квоты, связанный с конструкцией актора  $m$  и особенностями задачи, которую он выполняет.

Функция ценности для эластичных задач имеет вид

$$(8) \quad u_{elastic}(m, n) = \frac{q(m, n)}{w(m, n)_{elastic}},$$

где  $q(m, n)$  – объем сетевого ресурса, который  $n$  может выделить для  $m$ ;  $w(m, n)_{elastic}$  – минимальный порог эффективной квоты, связанный с конструкцией  $m$  и особенностями выполняемой им задачи.

Соответственно, критерий эффективной квоты может быть задан в виде

$$(9) \quad C_q(m, n) = \begin{cases} u_{elastic}(m, n), & t - \text{эластичная задача}; \\ u_{real-time}(m, n), & t - \text{задача реального времени}. \end{cases}$$

Способ задания критерия накладных расходов  $C_s$  для ведущих акторов и акторов-кандидатов зависит от того, какими показателями определяются соответствующие накладные расходы. Был предложен подход к заданию и оценке данного критерия на

примере оценки расхода заряда аккумулятора при перелете в зону действия ведущего актора. Для оценки величины расхода заряда использовалась известная из литературы аналитическая зависимость, которая уточнялась на основе обучающего набора данных о полетах с использованием методов интеллектуального анализа данных. Подробное описание данного подхода выходит за рамки данной статьи, его можно найти в работе [10].

### *5.3. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИИ*

Алгоритм формирования оптимальной конфигурации является адаптированной версией алгоритма, описанного в [22], который, в свою очередь, основан на классическом алгоритме Гейла – Шепли для случая «многие к одному» [18]. Классический алгоритм использует целочисленную статическую квоту, которая, в терминологии рассматриваемой задачи, определяет максимальное количество акторов-кандидатов, которые могут быть назначены в подчинение ведущему актору (для каждого ведущего актора значение квоты может быть своим).

В рассматриваемой же ситуации речь идет о распределении некоторого ресурса, т.е. каждому актору-кандидату при распределении выделяется вещественный по своей природе объем разделяемого ресурса. При этом данный объем зависит от запросов всех акторов-кандидатов, находящихся в списке ожидания у ведущего актора на соответствующей итерации, в связи с чем процесс распределения является динамическим.

Кандидат, подающий заявку, сравнивается с наихудшим из уже назначенных ведущему подчиненных. При этом выполняется сравнение кандидатов не только по предпочтительности, но и по требуемой квоте. Если рассматриваемый актор-кандидат более предпочтителен, чем наименее предпочтительный имеющийся, и последнему выделен больший объем квоты, чем минимально необходимо кандидату, то излишек квоты предоставляется указанному актору-кандидату. После этого наименее предпочтительный подчиненный актор пересматривает свои предпочтения с учетом новой квоты. Иначе либо из сети исключается наименее предпочтительный подчиненный актор, либо

отклоняется заявка актора-кандидата. Процесс повторяется, пока есть подчиненные акторы, чье назначение можно улучшить. Алгоритм представлен в виде листинга 1.

*Листинг 1. Алгоритм формирования конфигурации*

```

1: Input: вводим данные необходимые для вычисления списков
    предпочтений
2: Стадия 1: формируем списки предпочтений акторов
3: Формируем списки предпочтений акторов-кандидатов
4: Формируем списки предпочтений ведущих акторов
5: Стадия 2: матчинг
6: Каждый кандидат m подает заявку на назначения наиболее
    предпочтительному ведущему актору n из списка своих предпо-
    чтений.
7: loop:
8:     Каждый ведущий n принимает заявки от кандидатов m
    в соответствии со своими предпочтениями
9:     If оставшаяся квота q ведущего актора n со списком
    уже имеющихся у него в подчинении аторов  $M_n$  меньше
    требования актора-кандидата m, то:
10:         
$$w(m,n) = q_n - \sum_{i \in M_n} q_{n,i}$$

11:     end if
12:     If оставшихся ресурсов n недостаточно чтобы удовле-
13:     творить заявку кандидата m, то последний обновляет
    свой список предпочтений
14: end if
15:     If актор m подал заявку на
    назначение к n квота которого
    уже распределена без остатка
    then
16:         Обозначим актора в  $M_n$ 
    с наименьшей предпочтитель-
    ностью через m'
17:         If  $m > m'$  then
18:             If  $w(m', n) > w(m, n)$  then
19:                 n принимает заявку m и выделяет ему
    квоту объемом  $w(m, n)$ 
20:                 квота, которую n выделял m' уменьшается на
    величину  $w(m, n)$  т.е.  $w(m', n) = w(m', n) - w(m, n)$ , m'
    так же обновляет свой список предпочтений
21:             else
22:                 n принимает заявку m и выделяет ему квоту
    объемом  $w(m', n)$ 
29:     end if

```

Листинг 1. Алгоритм формирования конфигурации (окончание)

```
30:           If актер m перебрал всех возможных n  
           в списке своих предпочтений, then  
31:             m идет на повторный круг обхода  
32:           end if  
33:           Каждый подчиненный актер которому были назначены  
           недостаточные сетевые ресурсы подает заявку следующему  
           ведущему актору в своем списке предпочтений.  
           Если лучшей опции нет, он остается у текущего  
           назначенного ведущего, иначе он переназначается  
           к новому ведущему.  
34:           Цикл прерывается, если не осталось подчиненных ак-  
           торов, которые способны получить ведущего, более  
           предпочтительного чем назначенный им  
35: end loop
```

#### 5.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Экспериментальное исследование алгоритма выполнялось для набора тестовых задач реконфигурации группы. В качестве примера рассмотрим одну из таких задач. Пусть требуется реконфигурация группы, представленной на рис. 1, при выходе из строя ведущих акторов  $n_1$ ,  $n_2$ , что ведет к необходимости перераспределения акторов  $m_1$ , ...,  $m_5$ . Пусть заданы следующие пороговые величины квоты:

- фотосъемка местности – строгий порог квоты, равный 2;
- доставка сообщений – нестрогий порог квоты, равный 4;
- обслуживание каналов связи – нестрогий порог квоты, равный 5.

Иллюстрация работы алгоритма представлена на рис. 4. Опишем основные его шаги.

*Шаг 0.* Формируются начальные списки предпочтений акторов. Пусть возможности ведущих акторов по предоставлению квоты с учетом акторов, уже имеющих у них в подчинении, заданы следующим образом:

$$n_3:(5/7); n_4:(7/16); n_5:(1/14),$$

где первое число обозначает свободную квоту, а второе – ее общий лимит. Тогда начальная конфигурация группы имеет следующий вид:

$$n_3 [5/7]: \{m_6\}; n_4 [7/16]: \{m_7, m_8\}; n_5 [1/14]: \{m_9, m_{10}, m_{11}\}.$$

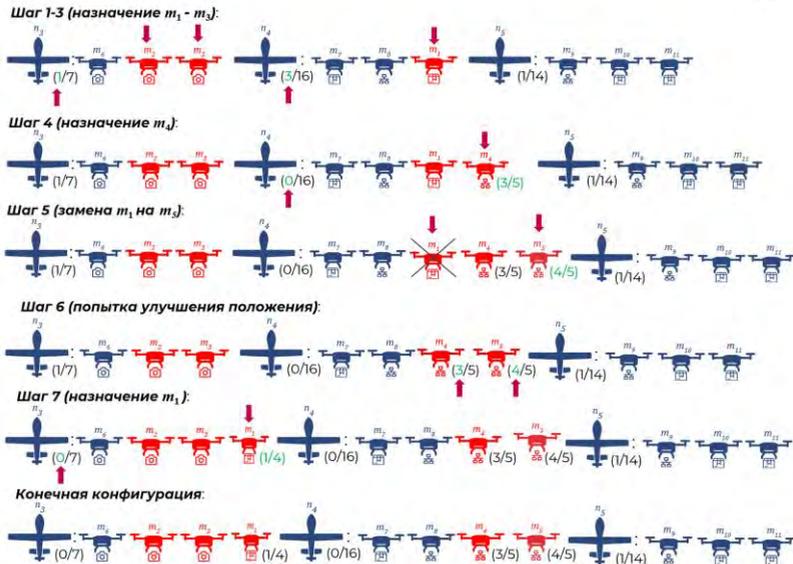


Рис. 4. Иллюстрация работы алгоритма реконфигурации

Пусть накладные расходы акторов-кандидатов были ранее вычислены и нормированы на шкалу от 0 до 1, где 1 означает минимальный расход, а 0 – максимальный, т.е. более предпочтительными являются большие значения. Остальные критерии возможно вычислить по формулам (4)–(5). С учетом этого значения критериев акторов-кандидатов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Начальные оценки критериев акторов-кандидатов

Актор-кандидат	Ведущий актер								
	$n_3$			$n_4$			$n_5$		
	$C_q$	$C_l$	$C_s$	$C_q$	$C_l$	$C_s$	$C_q$	$C_l$	$C_s$
$m_1$	1,25	0,5	0,75	1,75	0,33	0,88	0,25	0,25	0,60
$m_2$	1	0,5	0	1	0,33	0,84	0	0,25	0,63
$m_3$	1	0,5	0,23	1	0,33	0,88	0	0,25	0,38
$m_4$	1	0,5	0,25	1,4	0,33	0,81	0,2	0,25	0,63
$m_5$	1	0,5	0,25	1,4	0,33	0,88	0,2	0,25	0,50

Тогда начальные предпочтения акторов-кандидатов имеют вид:

$$m_1: n_4 > n_3 > n_5;$$

$$m_2: n_3 > n_4 > n_5;$$

$$m_3: n_3 > n_4 > n_5;$$

$$m_4: n_4 > n_3 > n_5;$$

$$m_5: n_4 > n_3 > n_5.$$

Аналогично оценки по критериям для ведущих акторов представлены в таблице 2.

Таблица 2. Начальные оценки критериев ведущих акторов

Ведущий актор	Актор-кандидат									
	$m_1$		$m_2$		$m_3$		$m_4$		$m_5$	
	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$
$n_3$	0,0	0,5	0,5	1,0	0,5	0,9	0,0	0,1	0,0	0,0
$n_4$	0,5	0,5	0,0	0,1	0,0	0,0	0,5	1,0	0,5	0,9
$n_5$	0,7	0,7	0,0	0,1	0,0	0,0	0,5	0,6	0,5	0,5

Соответственно предпочтения ведущих акторов имеют вид:

$$n_3: m_2 > m_3 > m_1 > m_4 > m_5;$$

$$n_4: m_4 > m_5 > m_1 > m_2 > m_3;$$

$$n_5: m_1 > m_4 > m_5 > m_2 > m_3.$$

Наконец, в конце подготовительного шага акторы-кандидаты подают заявки в соответствии со своими предпочтениями. Заявки будут рассматриваться в порядке возрастания номеров акторов.

*Шаг 1.* Ведущий  $n_4$  предварительно принимает заявку кандидата  $m_4$ . Так как требуемая последнему квота  $q(m_1)$  равна 4, а объем нераспределенной квоты актора  $w(m_1, n_4)$  равен 7, то дальнейших действий не предпринимается. Тогда после назначения оставшаяся квота равна 3. Таким образом, на конец шага назначения имеют следующий вид:

$$n_3 [5/7]: \{m_6\};$$

$$n_4 [3/16]: \{m_7, m_8, m_1\};$$

$$n_5 [1/14]: \{m_9, m_{10}, m_{11}\}.$$

*Шаги 2 и 3* выполняются аналогично. Назначения будут иметь вид:

$n_3 [1/7]: \{m_6, m_2, m_3\};$

$n_4 [3/16]: \{m_7, m_8, m_1\};$

$n_5 [1/14]: \{m_9, m_{10}, m_{11}\}.$

*Шаг 4.* Ведущий актер  $n_4$  предварительно принимает заявку кандидата  $m_4$ . Требуемый порог квоты  $w(m_4, n_4)$  является нестрогим и равен 5. Он не может быть удовлетворен в полной мере, так как доступная квота  $q(n_4)$  равна 3. В соответствии с алгоритмом, кандидат  $m_4$  обновляет свои предпочтения с учетом текущих квот ведущих актеров. Новые значения оценок по критериям представлены в таблице 3.

Таблица 3. Предпочтения кандидата  $m_4$  на шаге 4

Актер-кандидат	Ведущий актер								
	$n_3$			$n_4$			$n_5$		
	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$
$m_4$	0,2	0,25	0,25	0,6	0,25	0,81	0,2	0,25	0,63

Соответственно его предпочтения имеют вид:

$m_4: n_4 > n_3 > n_5.$

Хотя значение квоты и меньше порогового,  $n_4$  остается для  $m_4$  наиболее предпочтительным, а в соответствии с исходным предположением задача допускает назначение с неполным соблюдением порога. Таким образом, назначения на конец шага имеют вид:

$n_3 [1/7]: \{m_6, m_2, m_3\};$

$n_4 [3/16]: \{m_7, m_8, m_1, m_4(3/5)\};$

$n_5 [1/14]: \{m_9, m_{10}, m_{11}\}.$

*Шаг 5.* Ведущий  $n_4$  предварительно принимает заявку кандидата  $m_5$ . Все ресурсы  $n_4$  уже распределены, поэтому выполняется сравнение  $m_5$  с наименее предпочтительным для  $n_4$  подчиненным, каковым является  $m_1$ . Требуемый ему порог квоты  $q(m_1)$ , равный 4, не превышает требуемый  $m_5$  порог  $w(m_5, n_4)$ , равный 5. В связи с этим  $n_4$  выделяет кандидату  $m_5$  объем квоты, равный 4, который ранее занимал  $m_1$ ;  $m_5$  обновляет свои предпочтения с учетом выделенной ему квоты;  $m_1$  удаляется из сети ведущего актера  $n_4$  и обновляет свои предпочтения. Новые значения оценок по критериям представлены в таблице 4.

Таблица 4. Предпочтения кандидатов  $m_1$  и  $m_5$  на шаге 5

Актор-кандидат	Ведущий актер								
	$n_3$			$n_4$			$n_5$		
	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$
0,2	0,25	0,25	0,6	0,20	0,81	0,2	0,25	0,63	0,2
0,25	0,25	0,75	0	0,20	0,88	0,25	0,25	0,60	0,25

Тогда новые предпочтения акторов  $m_5$  и  $m_1$  имеют вид:

$$m_5: n_4 > n_3 > n_5;$$

$$m_1: n_3 > n_5 > n_4.$$

Таким образом, назначения на конец шага имеют вид:

$$n_3 [1/7]: \{m_6, m_2, m_3\};$$

$$n_4 [0/16]: \{m_7, m_8, m_4(3/5), m_5(4/5)\};$$

$$n_5 [1/14]: \{m_9, m_{10}, m_{11}\}.$$

*Шаг 6.* В конце итерации происходит пересчет предпочтений акторов, которые получили квоту, меньшую чем их порог – к ним относятся  $m_4$  и  $m_5$ . Значения критериев для них представлены в таблице 5:

Таблица 5. Предпочтения кандидатов  $m_1$  и  $m_5$  на шаге 6

Актор-кандидат	Ведущий актер								
	$n_3$			$n_4$			$n_5$		
	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$
$m_4$	0,2	0,25	0,25	0,6	0,20	0,81	0,2	0,25	0,63
$m_5$	0,2	0,25	0,25	0,8	0,20	0,88	0,2	0,25	0,50

Соответственно, их предпочтения имеют вид:

$$m_4: n_4 > n_3 > n_5;$$

$$m_5: n_4 > n_3 > n_5.$$

При этом  $n_4$  остается наиболее предпочтительным ведущим, поэтому подчиненные акторы  $m_4$  и  $m_5$  не могут улучшить свое положение, перейдя к другому актору. Перераспределения квот между подчиненными одного ведущего актора алгоритм не предусматривает. Таким образом, окончательные назначения на конец итерации имеют вид:

$$n_3 [1/7]: \{m_6, m_2, m_3\};$$

$$n_4 [0/16]: \{m_7, m_8, m_4(3/5), m_5(4/5)\};$$

$$n_5 [1/14]: \{m_9, m_{10}, m_{11}\}.$$

*Шаг 7.* Поскольку все еще имеются нераспределенные акторы-кандидаты, начинается новая итерация. По итогам первой итерации актер-кандидат  $m_1$  остался не распределенным, поэтому он подает заявку повторно. В соответствии с его предпочтениями (шаг 5), наиболее предпочтительным для  $m_1$  является ведущий актер  $n_3$ . Тот предварительно принимает его заявку, но может предложить только нераспределенную квоту  $w(m_1, n_3)$ , равную 1. Соответственно,  $m_1$  обновляет свои предпочтения, оценки критериям представлены в таблице 6.

Таблица 6. Предпочтения кандидата  $m_1$  на шаге 7

Актер-кандидат	Ведущий актер								
	$n_3$			$n_4$			$n_5$		
	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$	$C_q$	$C_t$	$C_s$
$m_1$	0,25	0,25	0,75	0	0,20	0,88	0,25	0,25	0,60

Соответственно его предпочтения имеют вид:

$$m_1: n_3 > n_5 > n_4.$$

Поскольку существенных изменений не произошло, заявка актера-кандидата  $m_1$  ведущим актером  $n_3$  принимается. Таким образом, окончательные назначения имеют вид:

$$n_3 [0/7]: \{m_6, m_2, m_3, m_1(1/4)\};$$

$$n_4 [0/16]: \{m_7, m_8, m_4(3/5), m_5(4/5)\};$$

$$n_5 [1/14]: \{m_9, m_{10}, m_{11}\}.$$

### 5.5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Одним из наблюдаемых свойств алгоритма является достаточно выраженная зависимость результатов распределения квоты ведущих акторов от порядка подачи заявок актерами-кандидатами с эластичными задачами, имеющими нестрогий порог квоты. В связи с этим возможно получение распределения, которое не соответствует предпочтениям участников.

Так, на шаге 6 акторы-кандидаты  $m_4$  и  $m_5$  пытаются улучшить свой результат путем смены ведущего актора. Поскольку  $n_4$  уже является наиболее предпочтительным, это оказывается невозможным. С другой стороны, в соответствии с предпочте-

ниями ведущего актора  $n_4$  кандидат  $m_4$  более предпочтителен для него, чем  $m_5$ . Однако, поскольку кандидат  $m_5$  удовлетворил свой запрос по квоте, заместив собой  $m_1$ , ему были предоставлен больший объем ресурса, чем  $m_1$ , который изначально являлся более предпочтительным для  $n_4$ . Решением могло бы быть изменение условий шага 33 алгоритма (см. листинг 1), если допустить, что акторы-кандидаты при улучшении своих назначений могут не только подавать заявки к другим ведущим, но и повторно подать заявку к текущему ведущему так, чтобы ресурсы ведущего перераспределились между подчиненными в соответствии с его предпочтениями. Тогда на шаге 6 примера вместо результата  $n_4 [0]: \{m_7, m_8, m_4 [3/5], m_5 [4/5]\}$  был бы получен результат вида  $n_4 [0]: \{m_7, m_8, m_4 [5/5], m_5 [2/5]\}$ , который более точно отражает предпочтения  $n_4$ .

Рассмотренная ситуация дает повод сформулировать более общий вопрос: хотя рассмотренный алгоритм достигает полного распределения ресурсов ведущих акторов, можно ли считать такое распределение справедливым? Например, если для ведущего актора  $n_4$  различие по предпочтительности акторов-кандидатов  $m_4$  и  $m_5$  достаточно велико, то выделение соответственно 5 и 2 единиц квоты может быть оправданным. Однако при небольшом различии по предпочтительности более оправданным могли бы быть иные сочетания, вплоть до равного распределения квоты, т.е. по 3,5 единиц. Тем самым представляется целесообразным учет степени предпочтительности кандидатов при выделении квоты. Одним из возможных решений здесь может являться переход к нечеткой модели предпочтений.

Отмеченные пути совершенствования алгоритма составляют предмет дальнейших исследований.

## 6. Заключение

В работе рассмотрена задача реконфигурации группы взаимодействующих разнородных объектов киберфизической системы на примере двухуровневой группы БЛА различных типов, организованной по схеме «ведущий – подчиненные», в рамках которой подчиненные БЛА отвечают за выполнение

задач в рамках миссии, а ведущие курируют выполнение задач, предоставляя подчиненным сетевые ресурсы для этого. Представлен способ сведения данной задачи к задаче о паросочетаниях по схеме «многие к одному», для которой разработана модель предпочтений, и исследован алгоритм нахождения оптимальной конфигурации, в основе которого лежит модель двустороннего матчнга по схеме «многие к одному» с вещественной квотой и модифицированный алгоритм Гейла – Шепли.

Экспериментальное исследование указанного алгоритма на наборе тестовых задач позволило выявить некоторые присущие ему недостатки и в соответствии с этим определить пути его совершенствования, что может рассматриваться как одно из актуальных направлений дальнейшего развития модели принятия решений.

В дополнение к этому можно указать следующие направления развития и совершенствования модели.

Если допустить, что подчиненные акторы способны выполнять не один, а несколько типов задач (например, могут перенастраиваться с одной задачи на другую), то способ оценки релевантности по задачам усложняется и возникает необходимость использования метрик сравнения множеств. Простейшей такой метрикой является индекс Жаккара, используемый для оценки степени совпадения множеств, однако она не является единственно применимой; выбор конкретной метрики определяется содержательным смыслом, вкладываемым в понятие релевантности. Таким образом, в этом случае возникает задача формализации различных представлений релевантности. Дополнительный интерес может представлять ситуация, когда для разных акторов задачи различаются по приоритетности и это различие должно учитываться при оценке релевантности. В этом случае от традиционных метрик для сравнения множеств можно перейти к нечетким [2].

В качестве еще одного направления исследований можно указать переход от одноступенчатой схемы матчнга к двухступенчатой [15]. Например, для задачи группового взаимодействия БЛА необходимость такого перехода возникает в тех случаях, когда обмен данными между ведущими и малыми БЛА

может быть реализован с использованием различных сетевых протоколов или разных режимов приема и передачи сигналов. В этой ситуации возможно формировать распределение по схеме «ведущий БЛА – сетевые протоколы (режимы приема/передачи) – малые БЛА».

Другой пример задачи, требующей использования двухступенчатой схемы матчинга, – организация взаимодействия объектов в масштабных гетерогенных группах, когда использование двухуровневой системы взаимодействия оказывается недостаточным и требуется введение трехуровневой системы, например, «центры управления – ведущие объекты – малые объекты».

### Литература

1. ДОВГАЛЬ В.А., ДОВГАЛЬ Д.В. *Анализ систем коммуникационного взаимодействия дронов, выполняющих поисковую миссию в составе группы* // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. – 2020. – №4(271). – С. 87–94.
2. ДЮБУА Д., ПРАД А. *Общий подход к определению индексов сравнения в теории нечетких множеств* // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения / Под ред. Р.Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – С. 9–21.
3. ЗАХАРОВА А.А., КУТАХОВ В.П., МЕЩЕРЯКОВ Р.В. и др. *Моделирование задач транспортировки грузов в беспилотной авиационной транспортной системе* // Авиакосмическое приборостроение. – 2023. – №3. – С. 3–15.
4. КОЖУХАРОВ А.Н., ЛАРИЧЕВ О.И., *Многокритериальная задача о назначениях* // Автоматика и телемеханика. – 1977. – №7 – С. 71–88.
5. КОРОСТЕЛЕВ Д.А., ПОДВЕСОВСКИЙ А.Г., ЗАХАРОВА А.А. *Организация хранения данных функционирования объектов киберфизических систем* // Программные продукты и системы. – 2024. – Т. 37, №3. – С. 334–343.
6. КУТАХОВ В.П., МЕЩЕРЯКОВ Р.В. *Принципы организации групп БЛА транспортного назначения: направления научных исследований* // Шестой Всероссийский научно-практический

- семинар «Беспилотные транспортные средства с элементами искусственного интеллекта» (БТС-ИИ-2021): Труды семинара. – Переславль-Залесский: Российская ассоциация искусственного интеллекта, 2022. – С. 86–92.
7. КУТАХОВ В.П., МЕЩЕРЯКОВ Р.В. *Управление групповым поведением беспилотных летательных аппаратов: постановка задачи применения технологий искусственного интеллекта* // Проблемы управления. – 2022. – №1. – С. 67–74.
  8. ЛАРИЧЕВ О.И. *Объективные модели и субъективные решения*. – М.: Наука. – 1987. – 144 с.
  9. ЛАРИЧЕВ О.И., СТЕРНИН М.Ю. *Человеко-машинные методы решения многокритериальной задачи о назначениях* // Автоматика и телемеханика – 1998. – №7. – С. 135–156.
  10. МЕФЕДОВ А.В. *Алгоритм оптимального целераспределения автономной группы ударных беспилотных летательных аппаратов* // Информация и космос. – 2018. – №3. – С. 167–171.
  11. ПОДВЕСОВСКИЙ А.Г., ЛАГЕРЕВ Д.Г., ФИЛОНОВ А.А. *Применение интеллектуального анализа данных для оценки расхода заряда аккумулятора беспилотного летательного аппарата* // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. – 2024. – №2. – С. 35–44.
  12. ПОДИНОВСКИЙ В.В. *Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа*. – М.: Изд-во Юрайт, 2022. – 486 с.
  13. ПОЛУНИН С.В. *Ключевые отличия автономных БПЛА от обычных дронов, проблемы и перспективы* [Электронный ресурс] // Военный обзор. – URL: <https://militaryarms.ru/voennaya-texnika/aviaciya/avtonomnye-bpla/> (дата обращения: 22.10.2024).
  14. ХАЛИМОВ Н.Р., МЕФЕДОВ А.В. *Распределенная сетевая система управления группой ударных беспилотных летательных аппаратов* // Системы управления, связи и безопасности. – 2019. – №3. – С. 1–13.
  15. АБРАНАМ D.J., IRVING R.W., MANLOVE D.F. *The Student-Project Allocation Problem* // Algorithms and Computation. ISAAC 2003. Lecture Notes in Computer Science. – 2003. – Vol. 2906. – P. 474–484.

16. BEKEY G. *Autonomous robots: From biological inspiration to implementation and control*. – Cambridge, MA: MIT Press – 2005. – 577 p.
17. CAMPION M., RANGANATHAN P., FARUQUE S. *UAV swarm communication and control architectures: a review* // Journal of Unmanned Vehicle Systems. – 2018. – Vol. 7, No. 2. – P. 93–106.
18. GALE D., SHAPLEY L.S. *College Admissions and the Stability of Marriage* // The American Mathematical Monthly. – 1962. – Vol. 69, No. 1. – P. 9–15.
19. DEKA L., KHAN S.M., CHOWDHURY M. et al. *Transportation Cyber-Physical System and its importance for future mobility* // Transportation Cyber-Physical Systems. – 2008. – P. 1–20.
20. JIRKOVSKÝ V., OBITKO M., MAŘÍK V. *Understanding Data Heterogeneity in the Context of Cyber-Physical Systems Integration* // IEEE Trans. on Industrial Informatics. – 2017. – Vol. 13, No. 2. – P. 660–667.
21. LEE HY., LEE HA., JUNG S. et al. *Stable Marriage Matching for Traffic-Aware Space-Air-Ground Integrated Networks: A Gale-Shapley Algorithmic Approach* // Proc. of the Int. Conf. on Information Networking (ICOIN), Jeju-si, Korea. – 2022. – P. 474–477.
22. LIU D., DU Z., LIU X. et al. *Task-Based Network Reconfiguration in Distributed UAV Swarms: A Bilateral Matching Approach* // IEEE/ACM Trans. on Networking. – 2022. – Vol. 30, No. 6 – P. 2688–2700.
23. IQBAL M., ALI Z., KHAN R. et al. *Motion Planning of UAV Swarm: Recent Challenges and Approaches* // Aeronautics – New Advances. IntechOpen. – 2022. – P. 244.
24. PINCIROLI C., O'GRADY R., CHRISTENSEN A. et al. *Coordinating Heterogeneous Swarms through Minimal Communication among Homogeneous Sub-swarms* // In: Dorigo M. et al. Swarm Intelligence. ANTS 2010 // Lecture Notes in Computer Science. – Vol. 6234. – Springer, Berlin, Heidelberg. – 2010. – P. 558–559.
25. PODVESOVSKII A., ZAKHAROVA A. *Optimization of Heterogeneous Cargo Transportation Using UAVs with Different Priority Schemes for Delivery Tasks* // In: Bolshakov A.A. (eds) Cyber-Physical Systems. Studies in Systems, Decision and Control. – Vol. 554. – Springer, Cham. – 2024. – P. 165–177.

26. RADOVIC M. *Tech Talk: Untangling The 5 Levels of Drone Autonomy* [Электронный ресурс] // Drone Industry Insights. – URL: <https://droneii.com/drone-autonomy> (дата обращения: 22.10.2024).
27. ROTH A.E., SOTOMAYOR M. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis* // Econometric Society Monograph Series. – 1990. – P. 225.
28. SILVA E., JARDIM-GONCALVES R. *Cyber-Physical Systems: a multi-criteria assessment for Internet-of-Things (IoT) systems* // Enterprise Information Systems. – 2019. – Vol. 15, No. 1. – P. 1–20.
29. ZAKHAROVA A., PODVESOVSKII A. *Model for Optimization of Heterogeneous Cargo Transportation Using UAVs, Taking into Account the Priority of Delivery Tasks* // In: Ronzhin A., Kostyaev A. (eds) *Agriculture Digitalization and Organic Production. ADOP 2023* // Smart Innovation, Systems and Technologies. – Vol 362. – Springer, Singapore, 2023. – P. 257–268.

## DECISION MAKING MODEL FOR RECONFIGURATION OF HETEROGENEOUS GROUP OF INTERACTING CYBERPHYSICAL SYSTEM OBJECTS

**Aleksandr Podvesovskii**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; Bryansk State technical Univeristy, Bryansk, Cand.Sci., Associated Professor (apodv@tu-bryansk.ru).

**Aleksandr Filonov**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, postgraduate student (afilonovcontact@gmail.com).

**Vladimir Venets**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sci., Senior Researcher (v.venets@mail.ru).

**Gennady Nastas**, National research center "Institute named after N.E. Zhukovsky", Moscow, Cand.Sci. (nastasgn@nrczh.ru).

**Alena Zakharova**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD, Associated Professor (zaa@ipu.ru).

*Abstract: The control of the interaction of cyberphysical system objects within a heterogeneous group necessitates the completion of a series of tasks, among which we can identify the tasks of group configuration control, including the formation of the initial configuration, the optimization of the spatial location of objects, the distribution of targets, and the reconfiguration of the group. The importance of the*

*task of group reconfiguration is due to the importance of ensuring and preserving the integrity of the group in conditions of reduced capabilities, for example, due to the failure of individual members of the group. This paper considers the reconfiguration of a two-level group of heterogeneous interacting objects of a cyber-physical system. It does so on the basis of the reconfiguration of a two-level group of unmanned aerial vehicles, which have been constructed according to the scheme "master-subordinate." In order to address this issue, we propose an approach for developing a decision-making model that reduces the problem to a set of pair-combinations in accordance with the "many to one" scheme. A procedure for the formalization of preferences is presented, along with an algorithm for the formation of an optimal configuration. This algorithm is a modified Gale-Shapley algorithm for a two-sided matching model with a dynamic real quota. The results of the experimental study of the algorithm, and ways to eliminate the shortcomings identified are presented and discussed. The conclusion presents a comprehensive overview of possible directions for further advancement of the proposed approach to constructing a decision-making model for the reconfiguration problem.*

Keywords: cyber-physical system, unmanned aerial vehicle, control of a group of unmanned aerial vehicles, reconfiguration, matching, deferred acceptance algorithm.

УДК 519.876.2

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии А.И. Алчиновым.*

*Поступила в редакцию 29.10.2024.*

*Опубликована 31.01.2025.*