

## РАСЧЕТ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО АНТРОПОМОРФНОГО РОБОТА

Ипатов Д. В.<sup>1</sup>, Петров К. В.<sup>2</sup>

(ФГБОУ ВО Московский политехнический университет,  
Москва)

Чернобрывец М. А.<sup>3</sup>

(ФГАОУ ВО Московский государственный технический  
университет имени Н.Э. Баумана (Национальный  
исследовательский университет), Москва)

Кулагин К. А.<sup>4</sup>

(ФГБУН Институт проблем управления  
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается разработка и исследование образовательного антропоморфного робота комплекта «СТЕМ Академия». Для анализа кинематических характеристик использована методика Денавита – Хартенберга. Для расчета действующих на робота внешних сил была составлена динамическая модель, учитывающая действующие на приводы силы тяжести на основе метода Ньютона – Эйлера. Построена модель зависимости точки нулевого момента от углов поворота сервоприводов с учетом положения центра масс каждого звена. Проведено экспериментальное определение точки нулевого момента с использованием датчиков деформации, результаты которого были сравнены с теоретическими данными. Введен новый термин «область гарантированной статической устойчивости» (ОГСУ), являющийся подмножеством понятия «области устойчивости» и дополняющийся учетом технологических факторов. Проведен экспериментальный анализ ОГСУ, который показал, что ОГСУ не соответствует размерам области устойчивости, описываемым физическим контуром стопы. Сравнение теоретических и экспериментальных результатов показало, что рассчитанную математическую модель возможно интегрировать в систему управления антропоморфным роботом, а также в симулятор программирования движений для оценки статической устойчивости. Полученные результаты позволяют предсказывать устойчивость целевого положения в статике и могут служить основой для дальнейших исследований алгоритмов динамической стабилизации.

<sup>1</sup> Дмитрий Владимирович Ипатов, студент (ipatow.dima2014@yandex.ru).

<sup>2</sup> Константин Владимирович Петров, студент (r.92rab@gmail.com).

<sup>3</sup> Михаил Андреевич Чернобрывец, студент (misha8cher@gmail.com).

<sup>4</sup> Константин Александрович Кулагин, н.с. (Kka86@bk.ru).

Ключевые слова: антропоморфные роботы, анализ кинематических характеристик, анализ динамических характеристик, область устойчивости, область гарантированной статической устойчивости, точка нулевого момента.

## **1. Введение**

Современная робототехника ориентирована на создание антропоморфных систем, способных к безопасному взаимодействию с человеком в динамических средах. Основной проблемой таких роботов остается обеспечение устойчивости при движении.

Для решения этой проблемы используется комплексная математическая модель, объединяющая кинематические, динамические и балансовые аспекты, без которых невозможна устойчивая и безопасная работа системы. Основой такой модели выступают алгоритмы решения прямой и обратной задач кинематики. А чтобы сохранять устойчивость при динамических нагрузках, в модель интегрируется анализ точки нулевого момента, определяющей границы устойчивости.

Целью исследования является определение зависимости точки нулевого момента от углов поворота сервоприводов с учетом центра масс каждого звена, а также экспериментальное выявление области гарантированной статической устойчивости. При проведении исследования использовались классические методы управления, основанные на статическом балансе, игнорируя инерционные силы. Для оценки точности расчета математической модели также проводится экспериментальное определение точки нулевого момента с использованием датчиков деформации, которые устанавливаются на стопы робота. Исследование проводится с использованием сервоприводного антропоморфного робота образовательного робототехнического комплекта «СТЕМ Академия».

## **2. Обзор литературы**

В исследовании используется стандартная методика Денавита – Хартенберга [15], которая описывает матричное пред-

ставление кинематики, используемое в данной работе для построения геометрической модели человекоподобного робота и расчёта углов сервоприводов. Более детальное описание и применение методики для многозвенных систем представлено в работах Крейга [14].

Динамическое моделирование, необходимое для учета сил и моментов, рассматривается в работах [6, 20]. В рамках данного исследования динамическая модель строится на основе кинематической, что согласуется с подходом [4], где подчеркивается взаимосвязь кинематики и динамики для точного управления.

Устойчивость антропоморфных роботов анализируется через концепции центра масс (ЦМ) и точки нулевого момента (*ZMP*). Теоретическая база для расчёта *ZMP* заложена в работах [16] и [21]. Указанные подходы адаптированы в данной работе для расчёта области гарантированной статической устойчивости с учетом особенностей исследуемого робота с утяжеленными стопами.

Отдельным направлением является образовательная робототехника, где упор делается на доступность и простоту. В статье [22] описан инструмент на базе Physical Etoys для программирования робота Bioloid, но из-за отсутствия учета кинематической модели и динамики антропоморфный робот может потерять равновесие. Учитывая особую значимость кинематической и динамической моделей для повышения устойчивости системы управления, как показано в работах [15, 20], представленный инструмент для программирования может привести к повреждениям системы робота.

Текущее исследование объединяет классические теории кинематики [14, 15], современные подходы к устойчивости [16, 21]. Это позволяет создать комплексную математическую модель, адаптированную для сервоприводных гуманоидов.

### **3. Материалы и методы**

#### **3.1. КОНСТРУКЦИЯ РОБОТА**

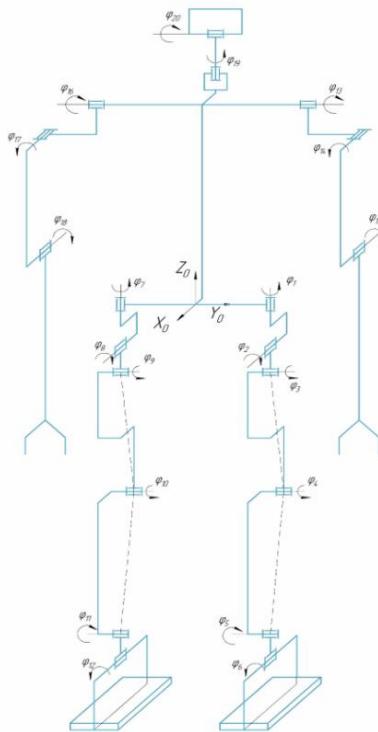
Антропоморфный робот комплекта «СТЕМ Академия» создан на базе конструктора Bioloid Premium, но с некоторыми модификациями. Использование алюминиевых и стальных ком-

понентов вместо пластмассовых увеличило массу с 1,8 кг до 3,175 кг. Это обеспечило повышенную жёсткость конструкции, но потребовало перераспределения масс для сохранения баланса. Высота робота увеличена с 385 мм до 410 мм. Масса стопы повышена с 39 г до 316,5 г за счет использования стальных пластин. Относительно предыдущих версий робота перераспределение масс позволило сместить проекцию центра масс ближе к опорной поверхности. Для текущей модели расчетная высота центра масс составляет 168,46 мм против 200,3 мм старой версии. Робот имеет 20 степеней свободы: по 6 звеньев в каждой ноге, по 3 звена в каждой руке, 2 звена в голове и туловище, к которому крепятся руки, ноги и голова. Каждое звено реализовано с помощью российских сервоприводов AR-S430-01, работающих по протоколу Dynamixel. Структурная схема робота представлена на рис. 1. В силу конструкции робота каждая нога имеет 2 пары шарниров, расстояния между центрами которых равны нулю, и их оси перпендикулярны: 2 и 3, а также 5 и 6 – для левой ноги, и симметричные им пары шарниров – для правой ноги.

Технические характеристики гуманоидного робота приведены в таблице 1.

Таблица 1. Технические характеристики гуманоидного робота

Параметр	Значение
Высота	410 мм
Общая масса	3,175 кг
Количество степеней свободы	20
Тип сервоприводов	AR-S430-01
Максимальный крутящий момент сервопривода	1,5 Н·м (при 12 В)
Масса одной стопы	316,5 г
Размер стопы	130 × 75 мм
Источник питания	LiPo аккумулятор 11,1В 2200 мАч
Система управления	Controller OpenCM9.04



*Рис. 1. Структурная схема робота с указанием расположения сервоприводов и основных узлов*

### 3.2. МЕТОДИКА ДЕНАВИТА – ХАРТЕНБЕРГА ДЛЯ АНАЛИЗА КИНЕМАТИКИ

Для анализа кинематических характеристик робота была использована методика Денавита – Хартенберга (*D-H*), которая позволяет систематически описывать геометрию кинематических цепей с помощью четырех параметров [9]:

- 1)  $a_i$  – длина звена;
- 2)  $\alpha_i$  – угол скручивания звена;
- 3)  $d_i$  – смещение звена;
- 4)  $\theta_i(\varphi_i)$  – угол поворота сочленения.

Для робота была построена полная кинематическая модель, включающая все 20 степеней свободы. Параметры *D-H* для конечностей робота представлены в таблицах 2–6.

Для заполнения таблиц *D-H* параметрами для ног робота в схему обозначения систем координат ног вводятся следующие обозначения:

- $L1$  – расстояние вдоль оси  $X_1$  между осями  $Z_0$  и  $Z_1$ ;
- $L2$  – расстояние вдоль оси  $Z_1$  между осями  $X_1$  и  $X_2$ ;
- $L3$  – расстояние вдоль оси  $X_3$  между осями  $Z_2$  и  $Z_3$ ;
- $L4$  – расстояние вдоль оси  $X_4$  между осями  $Z_3$  и  $Z_4$ ;
- $L5$  – расстояние вдоль оси  $X_5$  между осями  $Z_4$  и  $Z_5$ ;
- $L6$  – расстояние вдоль оси  $X_6$  между осями  $Z_5$  и  $Z_6$ ;
- $L7$  – расстояние вдоль оси  $X_7$  между осями  $Z_6$  и  $Z_7$ .

Таблица 2. Параметры для левой ноги

	$\theta_i(\varphi_i)$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	-90	0	- $L1$	0
1	$180 + \varphi_i$	- $L2$	0	90
2	$-90 + \varphi_i$	0	- $L3$	90
3	$-\delta + \varphi_i$	0	- $L4$	180
4	$-2\delta + \varphi_i$	0	- $L5$	180
5	$-\delta + \varphi_i$	0	- $L6$	-90
6	$\varphi_i$	0	- $L7$	0

Таблица 3. Параметры для правой ноги

	$\theta_i(\varphi_i)$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	-90	0	$L1$	0
1	$180 - \varphi_i$	- $L2$	0	90
2	$-90 - \varphi_i$	0	$L3$	90
3	$-\delta + \varphi_i$	0	$L4$	180
4	$-2\delta + \varphi_i$	0	$L5$	180
5	$-\delta + \varphi_i$	0	$L6$	-90
6	$-\varphi_i$	0	$L7$	0

На рис. 2 представлено обозначение систем координат и *D-H* параметров на схеме ног робота.

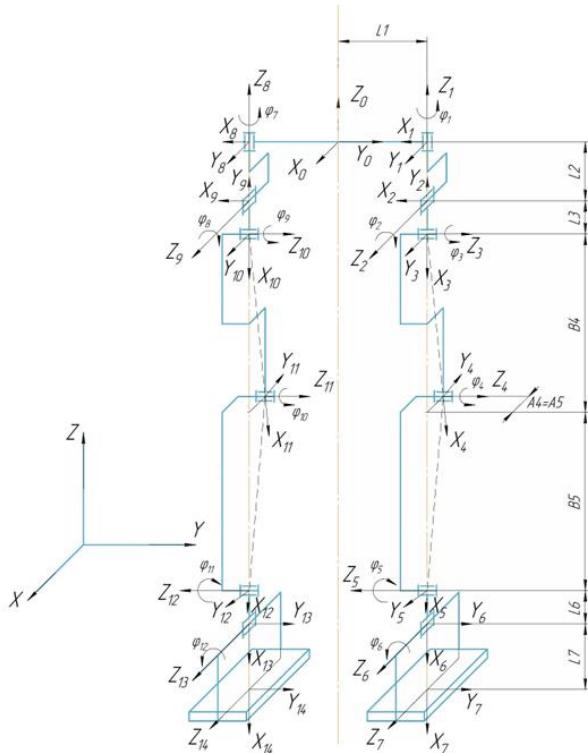


Рис. 2. Обозначения систем координат для ног

Из схемы бедра и голени робота (рис. 3) мы можем выделить формулы (1) и (2) для заполнения параметров таблиц 2 и 3:

$$(1) \quad \delta = \arctg \frac{A_4}{B_4}.$$

$$(2) \quad L4 = L5 = \sqrt{A_4^2 + B_4^2}.$$

Таким образом, измеренные и рассчитанные параметры в таблицах 2 и 3:  $L1 = 39,6$  мм;  $L2 = 26,25$  мм;  $L3 = 0$  мм;  $L4 = L5 = 80$  мм;  $L6 = 0$  мм;  $L7 = 29,25$  мм;  $\delta = 7,18$ .

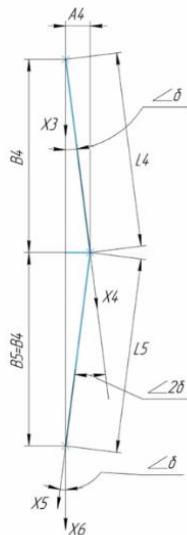


Рис. 3. Геометрическая схема бедра и голени

Для заполнения таблиц *D-H* параметрами для рук робота в схему обозначения систем координат рук вводятся следующие обозначения:

- $B1$  – смещение между пересечением оси  $Z_0$  с осью  $X_1$ ;
- $A1$  – расстояние вдоль оси  $X_1$  между осями  $Z_0$  и  $Z_1$ ;
- $L1$  – расстояние вдоль оси  $Z_1$  между осями  $X_1$  и  $X_2$ ;
- $A2$  – ширина плеча;
- $B2$  – расстояние между осями  $Z_1$  и  $Y_2$ ;
- $L3$  – расстояние вдоль оси  $X_3$  между осями  $Z_2$  и  $Z_3$ ;
- $L4$  – расстояние вдоль оси  $X_4$  между осями  $Z_3$  и  $Z_4$ .

На рис. 4 представлено обозначение систем координат и *D-H* параметров на схеме рук робота.

Таблица 4. Параметры для левой руки

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	0	$B1$	$-A1$	90
1	$-90 + \varphi_i$	$-(L1 + A2)$	$B2$	-90
2	$\varphi_i$	0	$L3$	180
3	$\varphi_i$	0	$L4$	0

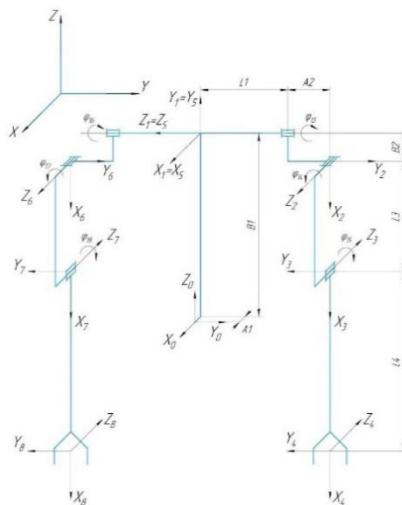


Рис. 4. Обозначение систем координат для рук

Таблица 5. Параметры для правой руки

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$a_i$
0	0	$B1$	$-A1$	90
1	$-90 + \varphi_i$	$L1 + A2$	$B2$	-90
2	$-\varphi_i$	0	$L3$	180
3	$-\varphi_i$	0	$L4$	0

В таблицах 4 и 5 измеренные и рассчитанные параметры равны:  $A1 = 1$  мм;  $B1 = 117,5$  мм;  $L1 = 56$  мм;  $A2 = 27$  мм;  $B2 = 18,03$  мм;  $L3 = 70,5$  мм;  $L4 = 115$  мм.

Для заполнения таблиц D-H параметрами для головы робота в схему систем координат головы вводятся следующие обозначения:

- $A1$  – смещение между пересечением оси  $Z_0$  с осью  $X_1$ ;
- $L1$  – длина звена между пересечением оси  $Z_0$  с осью  $X_1$ ;
- $L2$  – смещение между пересечением оси  $Z_1$  с осью  $X_2$ ;

На рис. 5 представлено обозначение систем координат и D-H параметров на схеме головы робота.

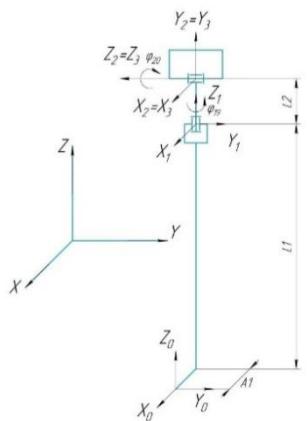


Рис. 5. Обозначение систем координат для головы

Таблица 6. Параметры для головы

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$
0	0	L1	-A1	0
1	$\varphi_i$	L2	0	0
2	$\varphi_i$	0	0	0

В таблице 6 измеренные параметры равны:  $A1 = 14,8$  мм;  $L1 = 128,3$  мм;  $L2 = 24$  мм.

Имея параметры Денавита – Хартенберга для каждого сочленения, можно найти матрицы перехода  $T_i$  от  $(i-1)$ -го к  $i$ -му звену, где углы  $\theta_i$  зависят от текущих положений углов моторов  $\varphi_i$ :

$$(3) T_i = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС СОЧЛЕНЕНИЙ

Для нахождения координат центра масс всего робота воспользуемся данными о массах и координатах центра масс каждого

дого отдельного сочленения робота в той подвижной системе координат (ПСК), относительно которой этот центр масс будет неподвижен. Координаты центра масс каждого звена определены с использованием системы автоматизированного проектирования (САПР) Autodesk Inventor. Для этого были созданы 3D-модели звеньев с учетом их геометрии и плотности материалов, после чего программный модуль рассчитал положение центра масс. В таблице 7 представлены массы и координаты центра масс каждого сочленения робота. Некоторые сочленения робота состоят из нескольких отдельных ПСК, и расчет координат проводится отдельно для каждой.

Для начала необходимо найти массу всего робота:

$$(4) \quad M = M_{\text{тул}} + 2 * \sum_{i=1}^6 M_{\text{ног\_}i} + 2 * \sum_{i=1}^3 M_{\text{рук\_}i} + \sum_{i=1}^2 M_{\text{гол\_}i} .$$

Далее, зная матрицы перехода к каждому из звеньев из прямой задачи кинематики (ПЗК), найдем векторы центра масс каждого сочленения в неподвижной системе координат (НСК):

$$(5) \quad P_i = T_{0 \rightarrow i} * P_{mi} ,$$

где  $T_{0 \rightarrow i}$  – матрица перехода из НСК в  $i$ -ю ПСК;  $P_{mi}$  – вектор центра масс  $i$ -го сочленения в ПСК.

Координаты центра масс вычисляются по формуле

$$(6) \quad P_M = \frac{\sum_{i=1}^{21} P_i * m_i}{M} ,$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -го сочленения.

Так как матрицы перехода к  $i$ -му сочленению  $T_{0 \rightarrow i}$  зависят от текущих положений углов серводвигателей  $\varphi_1, \dots, \varphi_{20}$ , то, следовательно, и координаты центра масс робота будут зависеть от этих углов.

*Таблица 7. Массы и координаты центра масс каждого сочленения робота в ПСК, связанной с этим сочленением*

Название сочленения	Масса, г	Левая сторона			Правая сторона		
		X, мм	Y, мм	Z, мм	X, мм	Y, мм	Z, мм
туловище	709,3	-12,8	0	69,75	-12,8	0	69,75
бедро 1	43,7	0,4	17,5	-1,3	-0,4	17,5	-1,3
бедро 2	155,2	14,35	-20,1	0,5	14,35	-20,1	-0,5
бедро 3	48,5	-37,8	-21,65	0,4	-37,8	-21,65	-0,4
голень 1	157,9	-59,01	2,4	0,4	-59,01	2,4	-0,4
голень 2	155,2	-14,05	-0,8	-20,2	-14,05	0,8	-20,2
стопа	316,5	-4,2	6,3	-2,7	-4,2	-6,3	-2,7
плечо	15,2	-13,03	-15,2	-1	-13,03	15,2	-1
предплечье	89,8	-48,73	0,1	2,4	-48,73	-0,1	2,4
кисть	97,6	-86,58	-1,7	2,3	-86,58	1,7	2,3
шея	15,1	0	-15,85	0	0	-15,85	0
голова	210,6	15,9	24,25	0,6	15,9	24,25	0,6

### 3.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОБОТА

Для расчета сил была составлена динамическая модель, учитывающая действующие на приводы силы тяжести. Вывод уравнений был осуществлен на основе метода Ньютона – Эйлера, который подразумевает последовательное вычисление моментов сил, действующих на звенья робота начиная с  $n$ -го до 1-го. Для этого необходимо вычислить координаты центра масс всех звеньев  $M(x_m, y_m, z_m)$ , которые находятся выше по кинематической цепи, чем  $i$ -е звено, и их суммарную массу  $m$  по методике, описанной выше. Также найдем точку  $O_i$  – координаты центра  $i$ -й ПСК  $O_iX_iY_iZ_i$  и орт оси вращения  $i$ -го сервопривода  $Z_i$  в системе координат  $OXZ$  той стопы, которая неподвижно стоит на земле и является мировой системой координат. Для этого найдем  $T_{foot \rightarrow i}$  – матрицу перехода от системы координат (СК) стопы, которая стала неподвижной к  $i$ -й ПСК:

$$(7) \quad T_{foot \rightarrow i} = T_{foot}^{-i} \times T_i,$$

где  $T_{foot}$  – матрица перехода от исходной СК робота к СК стопы;  $T_i$  – матрица перехода от исходной СК робота к СК  $i$ -го звена.

Извлечём из этой матрицы  $4 \times 4$  данные о центре координат  $O_i$  и орт-векторе  $\overline{z_{iO}}$  оси  $O_iZ_i$ :

$$(8) \quad x = O_{ix} = T_{foot \rightarrow i}(1,4), y = O_{iy} = T_{foot \rightarrow i}(2,4), z = O_{iz} = T_{foot \rightarrow i}(3,4).$$

$$(9) \quad z_{i0x} = T_{foot \rightarrow i}(1,3), z_{i0y} = T_{foot \rightarrow i}(2,3), z_{i0z} = T_{foot \rightarrow i}(3,3).$$

Момент  $\overline{M_{oi}}(mg)$  вокруг точки  $O_i$  силы  $mg$  рассчитывается по формуле (10), а вокруг оси  $Z_i$  – по формуле (11):

$$(10) \quad \overline{M_{oi}}(mg) = \overline{O_iM} \times mg,$$

где  $M_{oi}(mg)$  – момент вокруг точки  $O_i$  силы  $mg$ , вектор от центра ПСК до центра масс  $i$  – звена,  $m$  – масса звена  $i$ .

$$(11) \quad M_{zi}(mg) = \text{Пр}_{\overline{M_{oi}}(mg)} \overline{O_iZ_i},$$

где  $M_{zi}(mg)$  – момент силы тяжести  $mg$ , действующей на звено  $i$ , относительно оси вращения сервопривода  $Z_i$ , а  $\text{Пр}_{M_{oi}(mg)}$  – проекция вектора момента на ось  $Z_i$ ,  $\overline{O_iZ_i}$  – единичный вектор оси вращения сервопривода  $Z_i$ .

Расчётная схема представлена на рис. 6.

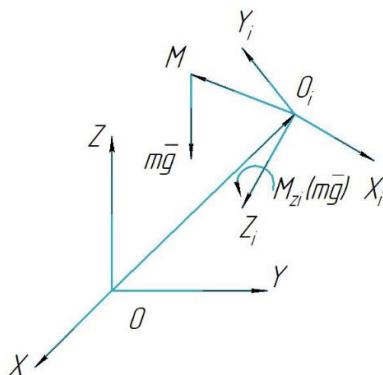


Рис. 6. Схема расчёта момента от силы тяжести, действующей на  $i$ -е звено

Формула (12) следует из того, что у силы тяжести нет горизонтальной составляющей:

$$(12) \quad \bar{m\bar{g}}_x = \bar{m\bar{g}}_y = 0.$$

Тогда окончательная формула для вычисления момента будет

$$(13) \quad M_{zi}(mg) = ((y - y_m) \times z_{i0x} + (x_m - x) \times z_{i0y}) \times mg,$$

где  $(x, y, z)$  – координаты точки  $O_i$ ;  $(x_m, y_m, z_m)$  – координаты центра масс;  $z_{i0x}$  и  $z_{i0y}$  – компоненты единичного вектора.

Также рассмотрим ситуацию, когда робот стоит на двух ногах одновременно и обе поверхности стопы соприкасаются с горизонтальной поверхностью целиком. В этом случае для каждого звена необходимо учесть дополнительный момент, возникающий при действии силы реакции опоры со стороны другой ноги, поэтому надо найти величину этих реакций и точки их приложения. Найдем сначала величины этих реакций.

Так как нижние две подвижности ноги робота пересекаются в одной точке и их оси фиксированы относительно стопы, будем искать реакции со стороны стоп  $R_1$  и  $R_2$  на конструкцию всего остального робота в точке пересечения этих осей. Для расчёта реакций найдем проекции на горизонтальную плоскость радиус-векторов до центра масс всего робота за вычетом стоп  $\overline{O_1M}$  и до

второй стопы  $\overline{O_1O_2}$  ПСК первой стопы, используя рассчитанные матрицы преобразования Денавита – Хартенберга. Тогда  $\overline{O_1H}$  – проекция  $\overline{O_1M}$  на  $\overline{O_1O_2}$  находится по формуле (14), силы реакций на конструкцию робота со стороны стоп  $R_1$  и  $R_2$  рассчитываются по формулам (15) и (16), в которых  $m$  – масса всего робота за вычетом масс стоп. Расчёчная схема приведена на рис. 7.

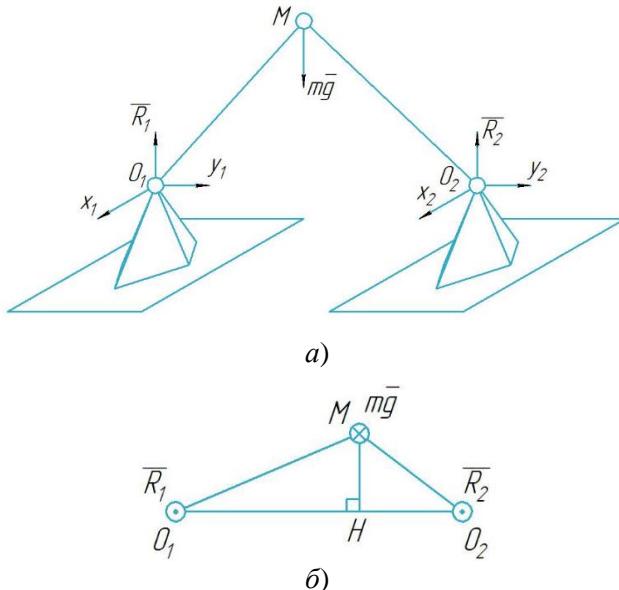


Рис. 7. Схема расчёта реакций а) в шарнирах стоп;  
б) в шарнирах стоп, проекция на горизонтальный план

$$(14) \overline{O_1H} = \text{Пр}_{\overline{O_1M}} \overline{O_1O_2},$$

где  $O_1H$  – расстояние от  $O_1$  до проекции центра масс,  $O_1O_2$  – расстояние между центрами стоп.

$$(15) R_1 = \frac{mg \times (O_1O_2 - O_1H)}{O_1O_2},$$

$$(16) R_2 = \frac{mg \times O_1H}{O_1O_2},$$

где  $R_1$  – вертикальная составляющая силы реакции опоры, действующей на первую стопу ( $O_1$ ) со стороны земли,  $R_2$  – вертикальная составляющая силы реакции опоры, действующей на вторую стопу ( $O_2$ ) со стороны земли.

Искомая точка, в которой приложена реакция со стороны опорной поверхности к стопе, будет совпадать с точкой нулевого момента, так как она является центром давления. Зная точку, приложения силы реакции и её величину, рассчитаем момент, который будет действовать на каждое звено ноги робота:

$$(17) \quad M_{zi}(R) = ((y_m - y) \times z_{i0x} + (x - x_m) \times z_{i0y}) \times (R + m_{foot}g),$$

$M_{zi}(R)$  – момент от силы реакции опоры  $R$  относительно оси сервопривода  $Z_i$ ;  $(x, y, z)$  – координаты точки  $O_i$  (начала СК звена  $i$ ) в системе координат опорной стопы;  $(x_m, y_m, z_m)$  – координаты точки приложения силы реакции  $R$  в СК опорной стопы;  $z_{i0x}$  и  $z_{i0y}$  –  $X$  и  $Y$  компоненты орта оси  $Z_i$  в СК стопы;  $R$  – сила реакции, действующая со стороны стопы другой ноги, рассчитанная по формулам (15) или (16), а  $m_{foot}g$  – сила тяжести стопы, где  $m_{foot}$  – масса одной ступни робота.

Тогда полученная финальная формула (18) момента на выходе динамической модели является суммой моментов от силы тяжести и реакции второй стопы, вычисляемые по формулам (13) и (17) соответственно, причем когда робот стоит на одной ноге,  $M_{zi}(R) = 0$ :

$$(18) \quad M_{zi} = M_{zi}(mg) + M_{zi}(R).$$

### 3.5. РАСЧЕТ ТОЧКИ НУЛЕВОГО МОМЕНТА

*ZMP* используется для оценки устойчивости гуманоидных роботов: если *ZMP* находится внутри опорного полигона (зоны контакта стопы с поверхностью), робот сохраняет равновесие. Расчёт *ZMP* необходим для планирования устойчивых движений и предотвращения падений.

Для расчёта *ZMP* в локальной системе координат стопы используются следующие формулы:

$$(19) \quad x_{ZMP} = \frac{\tau_y}{F_{R_z}},$$

$$(20) \quad y_{ZMP} = \frac{\tau_x}{F_{R_z}},$$

где  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  – компоненты суммарного момента в горизонтальной плоскости,  $F_{R_z}$  – вертикальная составляющая силы реакции опоры.

Суммарная сила реакции опоры определяется как

$$(21) \quad F_R = -F_A - F_G,$$

где  $F_A$  – внешняя сила;  $F_G$  – сила тяжести стопы.

Сумму моментов в горизонтальной плоскости можно найти по формуле

$$(22) \quad \tau_{total} = (r_{foot} \times F_G + \tau_A + r_A \times F_A) \cdot P_{xy},$$

где  $F_G$  – сила тяжести стопы;  $F_A$  и  $\tau_A$  – внешние сила и момент, приложенные к точке крепления сервоприводов;  $r_{foot}$  – вектор от центра стопы до её центра масс;  $r_A$  – вектор до точки приложения силы  $F_A$ ;  $P_{xy}$  – проекция на горизонтальную плоскость.

Внешняя сила  $F_A$  будет вычисляться по формуле (23), когда робот стоит на одной ноге, и по формуле (24), когда робот стоит одновременно на двух ногах:

$$(23) \quad F_A = mg,$$

где  $m$  – масса всего робота за вычетом массы одной ступни.

$$(24) \quad F_A = R,$$

где  $R$  – сила реакции, действующая со стороны робота, вычисляемая по формулам (15) и (16).

Момент  $\tau_A$  будет вычисляться следующим образом:

$$(25) \quad \tau_A = \tau_6 + \tau_5 * \cos(\varphi_6),$$

где  $\tau_5$  и  $\tau_6$  – вычисленные по динамической модели вектора моментов, приложенные к нижним двум подвижностям ноги, а  $\varphi_6$  – угол поворота нижней подвижности ноги.

В случае, когда робот стоит одновременно на двух ногах, мы не можем найти моменты, действующие на звенья робота, не зная точку нулевого момента и наоборот. Возникает задача нахождения неподвижной точки, которая была решена численно:

$$(26) \quad F(ZMP_{left}, ZMP_{right}) = (ZMP_{left}, ZMP_{right}),$$

где  $F$  – функция, которая принимает на вход точки нулевого момента левой и правой ног  $ZMP_{left}$  и  $ZMP_{right}$  соответственно,

рассчитывает по ним моменты, действующие на звенья робота, и по ним считает новые точки нулевого момента; таким образом если мы подадим на вход действительные точки, то на выходе их же и получим.

### 3.6. ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ

Классическое определение области устойчивости описывается теоретическим опорным многоугольником контура стопы, в пределах которого точка нулевого момента должна находиться, чтобы робот сохранял равновесие.  $ZMP$  определяется как точка на опорной поверхности стопы, где суммарный момент горизонтальных сил равен нулю. И если  $ZMP$  выходит за границы опорного многоугольника контура стопы, робот теряет устойчивость. Однако в реальной системе устойчивость ограничивается такими технологическими факторами, как деформация конструкции, люфты или ограниченные мощности сервоприводов в сочленениях, погрешности модели центра масс и сенсоров. Экспериментально измеряемая зона, где робот гарантированно сохраняет равновесие, далее именуется «областью гарантированной статической устойчивости» (ОГСУ). Она является подмножеством теоретического опорного полигона.

Для определения области гарантированной статической устойчивости формируется опорный многоугольник как выпуклая оболочка точек контакта робота с поверхностью, в которой робот гарантированно сохраняет устойчивость. Площадь ОГСУ может быть меньше опорного многоугольника контура стопы, но сохраняется в его пределах. Условие устойчивости:

$$(27) \quad (x_{ZMP}, y_{ZMP}) \in S,$$

где  $S$  – множество точек, образующих ОГСУ.

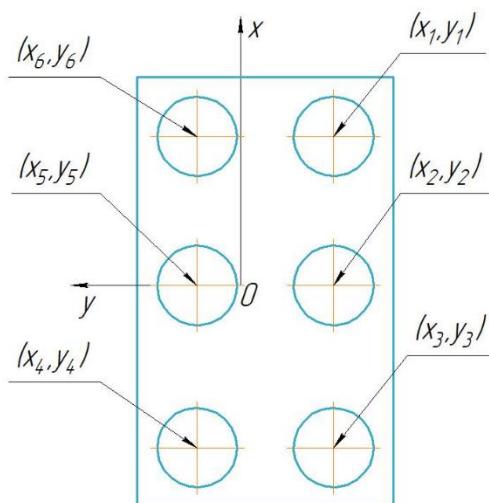
### 3.7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧКИ НУЛЕВОГО МОМЕНТА

Для проведения эксперимента был собран стенд, представляющий собой набор тензодатчиков, которые фиксируются на стопах антропоморфного робота. Схема расположения тензодатчиков на стопе представлена на рис. 8.

Требуется оценить точность расчёта *ZMP* математической моделью с результатами действительных значений, полученных на стенде. Ожидается, что теоретическая *ZMP* совпадает с действительной, но с учетом погрешности.

Для проведения эксперимента определены следующие переменные:

- 1) независимые: углы сочленений робота; количество и расположение точек опоры;
- 2) зависимые: координаты *ZMP*, полученные экспериментально; координаты *ZMP*, рассчитанные математической моделью;
- 3) контролируемые: фиксированные координаты датчиков, напряжение питания, сопротивление проводов, температура и влажность среды.



*Рис. 8. Схема расположения датчиков на стопе*

Для разработки стенда использовались следующие материалы:

- 1) тензорезисторы BF350-3АА;
- 2) микроконтроллер Atmega2560;
- 3) аналого-цифровой преобразователь hx711.

Для проведения эксперимента использовалось следующее программное обеспечение:

- 1) скетч Arduino для управления стендом;
- 2) симулятор-конфигуратор для робота;
- 3) программа, реализующая математическую модель на антропоморфном роботе.

Методика проведения эксперимента следующая. На стопы робота устанавливается стенд с тензодатчиками. Далее рассчитываются координаты положения каждого датчика относительно начала координат каждой стопы. Затем через симулятор-конфигуратор задается позиция гуманоида. После подвешиваем робота так, чтобы он не касался опоры. В этот момент требуется откалибровать датчики на стопе, после чего поставить гуманоида на опору. Затем снимаются показания координат *ZMP* со стендса и математической модели. Итоговый расчет координат точки нулевого момента проводился по формулам

$$(28) \quad x_{ZMP} = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i * F_i)}{\sum_{i=1}^6 F_i},$$

$$(29) \quad y_{ZMP} = \frac{\sum_{i=1}^6 (y_i * F_i)}{\sum_{i=1}^6 F_i},$$

где  $F_i$  – значение тензодатчика;  $x_i$  – координата по оси *X* тензодатчика;  $y_i$  – координата по оси *Y* тензодатчика.

### 3.8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ ГАРАНТИРОВАННОЙ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Требуется определить область гарантированной статической устойчивости, отражающую реальные границы баланса робота с учётом технологических ограничений.

Для проведения эксперимента определены следующие переменные:

- 1) независимые: углы сочленений робота; количество и расположение точек опоры;

2) зависимые: координаты ZMP, рассчитанные математической моделью;

3) контролируемые: напряжение питания, сопротивление проводов, температура и влажность среды.

Для проведения эксперимента использовался антропоморфный робот комплекта «СТЕМ Академия». Также использовалось следующее оборудование:

1) симулятор-конфигуратор для гуманоидного робота;

2) программа, реализующая математическую модель на антропоморфном роботе;

3) стенд для определения точки нулевого момента с помощью тензодатчиков.

Экспериментальное определение ОГСУ робота проводилось по следующей методике:

1. Робот устанавливался в исходное положение на горизонтальной поверхности. Вторая нога фиксируется над опорой.

2. Определено 10 точек на границах стопы (рис. 9), в направлении которых проводится смещение координат точки нулевого момента относительно начала координат стопы. Положения углов сервоприводов меняются таким образом, чтобы точка нулевого момента меняла координаты в направлении определенной точки до момента потери устойчивости (начало падения робота). После чего фиксируются координаты точки нулевого момента, в которых робот сохраняет устойчивость.

3. Для каждой конфигурации с помощью датчиков деформации измерялось положение координат точки нулевого момента на опорной поверхности.

4. Для повышения точности результатов каждый эксперимент повторялся 5 раз. На основе серии экспериментов вычислялись средние значения. Для построения ОГСУ в координатах стопы использовался метод параметрической кубической сплайн-интерполяции с ограничением граничных значений.

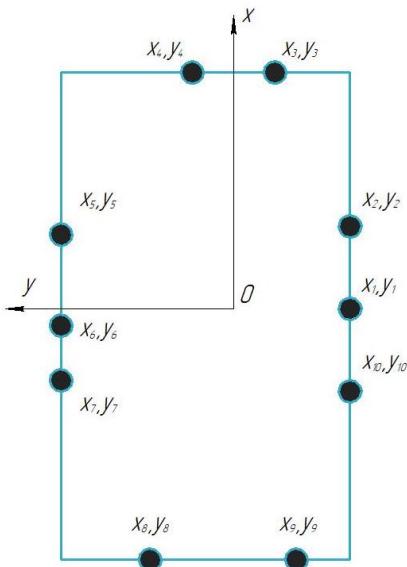


Рис. 9. Схема определения точек интереса, в направлении которых смещается ZMP

#### 4. Результаты проведенных экспериментов

##### 4.1. РАСЧЕТ ТОЧКИ НУЛЕВОГО МОМЕНТА

В ходе эксперимента была составлена таблица данных координат точки нулевого момента, относительно которой рассчитывались среднее значение и погрешность измерений. Итоговые результаты представлены в таблице 8.

Таблица 8. Результаты экспериментального определения точки нулевого момента

Числовая характеристика	Координата	
	$x_{ZMP}$	$y_{ZMP}$
Среднее измеренное значение, мм	-0,47	14,45
Абсолютная погрешность измерений, мм	0,30	0,11
Рассчитанное значение из модели, мм	-0,44	12,92
Абсолютная погрешность модели, мм	0,04	1,54

#### 4.2. ОБЛАСТЬ ГАРАНТИРОВАННОЙ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РОБОТА

Ниже представлены результаты эксперимента по определению ОГСУ. В таблице 9 представлены итоговые средние значения координат точки нулевого момента по пяти проведенным экспериментам. Также указаны погрешности полученных результатов.

Экспериментально определенная область гарантированной статической устойчивости робота представлена на рис. 10. Представленный опорный многоугольник получен с помощью интерполяции экспериментальных данных о координатах точки нулевого момента. Его площадь равна  $4303 \text{ мм}^2$ , что составляет 42,7% от теоретического полигона, площадь которого равна  $10075 \text{ мм}^2$ .

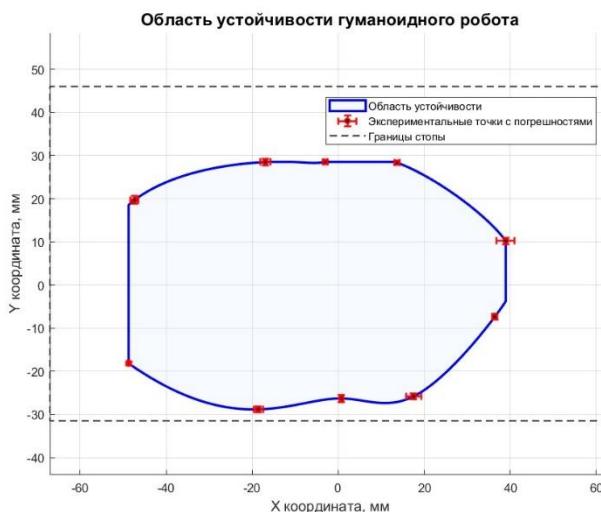


Рис. 10. Область гарантированной статической устойчивости антропоморфного робота

Таблица 9. Результаты экспериментального определения ОГСУ

Номер точки:	Координата $xzmp$ , мм	Абсолютная погрешность $xzmp$ , мм	Относительная погрешность $xzmp$ , %	Координата $yzmp$ , мм	Абсолютная погрешность $yzmp$ , мм	Относительная погрешность $yzmp$ , %	Координаты точек, в направлении которых смешалась ТНМ	
							$X$ , мм	$Y$ , мм
1	0,74	0,44	0,51	-26,29	0,84	1,46	0	-31,5
2	17,49	1,77	2,01	-25,83	0,62	1,08	18	-31,5
3	36,38	0,55	0,63	-7,37	0,7	1,22	63	-8
4	38,94	2,1	2,4	10,23	0,74	1,28	63	10
5	13,68	0,63	0,72	28,36	0,42	0,74	14	46
6	-3,03	0,45	0,52	28,53	0,4	0,69	-3	46
7	-16,92	1,16	1,33	28,5	0,81	1,41	-17	46
8	-47,31	0,92	1,05	19,71	0,88	1,54	-67	20
9	-48,72	0,27	0,32	-18,17	0,42	0,73	-67	-18
10	-18,59	1,09	1,25	-28,82	0,73	1,28	-19	-31,5

#### 4.3. ВЛИЯНИЕ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Основным фактором, влияющим на размер ОГСУ, является положение центра масс робота. Снижение центра масс уменьшает моменты сил, действующие на звенья, что снижает деформации и влияние люфтов. Это расширяет ОГСУ (рис. 9), приближая её к границам теоретического полигона. При высоком ЦМ даже малые погрешности ( $\geq 1$  мм) выводят реальный *ZMP* за пределы опоры. Идея гипотезы заключается в том, что изменение координат центра масс воздействует на границы зоны устойчивости, расширяя или сужая её в зависимости от высоты центра масс над опорой. Как итог, снижение координат центра масс, вызванное перераспределением масс в структуре робота, расширило границы зоны устойчивости.

При разработке конструкции робота необходимо учитывать координаты центра масс всего антропоморфного робота. При большой высоте центра масс ОГСУ будет покрывать меньшую площадь стопы, ограничиваясь небольшим опорным многоугольником. При достаточно низком положении возможно добиться наибольшей ОГСУ для антропоморфного робота вплоть до границ самой стопы.

Гипотетически можно описать связь между центром масс и *ZMP* следующим уравнением:

$$(30) \quad x_{ZMP} = x_{CoM} - \frac{h}{g} * \ddot{x}_{CoM},$$

где  $h$  – высота центра масс над опорой;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\ddot{x}_{CoM}$  – горизонтальное ускорение центра масс. Из выражения следует, что при нулевом ускорении ( $\ddot{x}_{CoM} = 0$ ) *ZMP* совпадает с проекцией центра масс.

#### 4.4. ИМПЛЕМЕНТАЦИЯ МОДЕЛИ В СИМУЛЯТОР РОБОТА

Полученный комплекс математических моделей возможно интегрировать в симулятор антропоморфного робота для получения визуализации, так как потенциальное наличие таких функций упростит подбор углов сервоприводов, минимизируя риск выхода *ZMP* за пределы опорного полигона, а также ускорит процесс тестирования новых поз.

Самым простым способом визуализации данных является отображение 3D-маркеров для отображения *ZMP* в реальном времени, чтобы пользователь мог быстрее определять проблему разрабатываемой позы или движения. Более продвинутый вариант реализации инструмента – создать модуль, анализирующий динамику поведения *ZMP* на стопах. В случае выхода за пределы ОГСУ этой точки будет проведена корректировка углов сервоприводов, указанных пользователем.

Также возможна интеграция мировой системы координат для указания целевых координат конечностей антропоморфного робота в реальном времени, вместо работы напрямую с углами сервоприводов.

## **5. Заключение**

В данной работе выполнено исследование зависимости точки нулевого момента от углов поворота сервоприводов с учетом положения центра масс каждого звена для образовательного антропоморфного робота. Основные результаты работы:

1. С использованием методики Денавита – Хартенберга построена полная кинематическая модель робота и получены аналитические выражения для расчета положения центра масс.
2. Для расчета сил была составлена динамическая модель, учитывающая действующие на приводы силы тяжести.
3. Экспериментально оценена точность расчета точки нулевого момента.
4. Экспериментально определена область гарантированной статической устойчивости робота.

Полученные результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение. С теоретической точки зрения, разработанные модели и методики могут быть использованы для дальнейших исследований в области антропоморфной робототехники. С практической точки зрения, модифицированная конструкция робота и усовершенствованный симулятор представляют собой продвинутый инструмент для образовательных целей, позволяющий наглядно демонстрировать принципы устойчивости и управления антропоморфными роботами.

Дальнейшие исследования будут направлены на разработку алгоритмов динамической стабилизации робота при ходьбе с использованием информации о положении точки нулевого момента и области гарантированной статической устойчивости. Также планируется усовершенствовать существующие алгоритмы, добавив в математическую модель динамическое изменение ОГСУ.

### ***Литература***

1. БОРИСОВ О.И., ГРОМОВ В.С., ПАРКИН А.А. *Методы управления робототехническими приложениями: учебное пособие.* – СПб.: Университет ИТМО, 2016.
2. ГОРОБЦОВ А.С., АНДРЕЕВ А.Е., МАРКОВ А.Е. и др. *Особенности решения уравнений метода обратной задачи для синтеза устойчивого управляемого движения шагающих роботов* // Труды СПИИРАН. – 2019. – Т. 18, №1. – С. 85–122.
3. Грант РНФ N 24-29-00671 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://rscf.ru/project/24-29-00671> (дата обращения: 25.04.2025).
4. ЗЕНКЕВИЧ С.Л., ЮЩЕНКО А.С. *Основы управления манипуляционными роботами: учебник для вузов.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
5. КИЛИН А.А., КИЛИНА Н.А., МАМАЕВ И.С. *Динамика управляемых механических систем.* – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020. – 280 с.
6. КОЛЮБИН С.А. *Динамика робототехнических систем: учебное пособие.* – СПб.: Университет ИТМО, 2017. – 117 с.
7. ЛЕСКОВ А.Г., БАЖИНОВА К.В., СЕЛИВЕРСТОВА Е.В. *Описание кинематики антропоморфных роботов методом блочных матриц* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2018. – №6. – С. 123.
8. ПОПОВ Д.И., КЛИМЧИК А.С. *Моделирование жесткости для шагающих роботов* // Компьютерные исследования и моделирование. – 2019. – Т. 11, №4. – С. 631–651.
9. ПРОТОПОПОВ А.А., СТЕРЕХОВА В.С. *Исследование применимости методов стабилизации движения для малоразмерных антропоморфных роботов* // Молодежь и современ-

- ные информационные технологии : Сборник трудов XVI Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, 3-7 декабря 2018 г., Томск. – Томск: Изд-во ТПУ, 2019. – С. 344–345.
10. Секрет устойчивого хождения антропоморфного робота на двух ногах в автономном режиме [Электронный ресурс]: эссе. – URL: <https://streltsovaleks.narod.ru/WalkingRobots.htm> (дата обращения: 10.04.2025).
  11. СЕМЕНОВ В.А., МОРОЗОВ А.В. *Методы определения центра масс в образовательной робототехнике* // Робототехника и искусственный интеллект. – 2023. – №2. – С. 67–75.
  12. ФУ К., ГОНСАЛЕС Р., ЛИ К. *Робототехника*. – М.: Мир, 1989. – 624 с.
  13. ANGELES J. *Fundamentals of robotic mechanical systems: Theory, methods and algorithms*. – Springer, 2007.
  14. CRAIG J.J. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. – Pearson Education, 2017. – 408 p.
  15. DENAVIT J., HARTENBERG R.S. *Kinematic notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices* // J. Appl. Mech. – 1955. – P. 215–221.
  16. GOSWAMI A. *Postural Stability of Biped Robots and the Foot-Rotation Indicator (FRI) Point* // Int. Journal of Robotic Research. – 1999. – P. 1–11.
  17. HWANG Y.-L., TA T.-N., CHEN C.-H. *Using Zero Moment Point Preview Control Formulation to Generate Nonlinear Trajectories of Walking Patterns on Humanoid Robots* // 12th Int. Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD). – 2015. – P. 2405–2412.
  18. KAJITA S., HIRUKAWA H., HARADA K. et al. *Introduction to Humanoid Robotics*. – Heidelberg: Springer, 2014.
  19. PINA FILHO A.C. de (ed.) *Humanoid Robots: New Developments*. – Croatia: Advanced Robotic Systems International, 2007.
  20. SPONG M.W., HUTCHINSON S., VIDYASAGAR M. *Robot Modeling and Control: First Edition*. – Hoboken: Wiley-Interscience, 2006. – 464 p.
  21. VUKOBRATOVIC M., BOROVAC B. *Zero-Moment Point — Thirty-Five Years of Its Life* // Int. Journal of Humanoid Robotics. – 2004. – Vol. 1, No. 1. – P. 157–173.

22. ZABALA M., MORAN R., BLANCO S. A New Educational Tool for Bioloid Kit // Proc. of 4th Int. Workshop Teaching Robotics, Teaching with Robotics & 5th Int. Conf. Robotics in Education. – Padova, Italy, 2014.

## CALCULATION AND DETERMINATION OF THE STABILITY AREA OF AN EDUCATIONAL ANTHROPOMORPHOUS ROBOT

**Dmitrii Ipatov**, Moscow Polytechnic University, Moscow, Student (ipatow.dima2014@yandex.ru).

**Konstantin Petrov**, Moscow Polytechnic University, Moscow, Student (r.92rab@gmail.com).

**Michael Chernobryvets**, Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow, Student (misha8cher@gmail.com).

**Konstantin Kulagin**, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Research Associate (Kka86@bk.ru).

*Abstract: This article discusses the development and study of the educational anthropomorphic robot of the STEM Academy kit. The robot design features increased mass and mass redistribution with heavier feet to lower the center of mass in order to improve stability. The Denavit – Hartenberg technique was used to analyze the kinematic characteristics. A dynamic model was compiled to calculate the external forces acting on the robot, taking into account the gravity forces acting on the drives based on the Newton – Euler method. A model was constructed for the dependence of the zero moment point on the servo rotation angles taking into account the position of the center of mass of each link. An experimental determination of the zero moment point was carried out using strain gauges, the results of which were compared with theoretical data. A new term, the "region of guaranteed static stability" (ROGSS), was introduced, which is a subset of the fundamental concept of the "region of stability", supplemented by taking into account technological factors. An experimental analysis of the stability area of the ROGSS robot was also conducted, which showed that the ROGSS does not correspond to the dimensions of the stability area described by the physical contour of the foot. Comparison of theoretical and experimental results showed that the calculated mathematical model can be integrated into the control system of an anthropomorphic robot, as well as into a simulator of motion programming for assessing static stability. The results obtained allow predicting the stability of the target position in statics and can serve as a basis for further research into dynamic stabilization algorithms.*

Keywords: anthropomorphic robots, analysis of kinematic characteristics, analysis of dynamic characteristics, stability region, zero moment point.

УДК 531.1

ББК 32.816

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии С.Л. Подвальным.*

*Поступила в редакцию 17.05.2025.*

*Опубликована 30.09.2025.*