НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–18
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 4–18
https://fizika.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-1-4-18, EDN: SGQUIN

Научная статья
УДК 530.182

Влияние ангармоничности на мультистабильность в автоколебательной системе с двумя степенями свободы

С. В. Астахов[1], О. В. Астахов[2], Е. М. Елизаров[3], Г. И. Стрелкова[3]✉, В. В. Астахов[3]

[1]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
[2]Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Научно-технологический университет «Сириус», Россия, 354340, Краснодарский край, пгт. Сириус, Олимпийский пр-т, д. 1
[3]Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Астахов Сергей Владимирович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Центра квантовых технологий физического факультета, s.v.astakhov@quantum.msu.ru, https://orcid.org/0000-0002-7682-1919, AuthorID: 936913
Астахов Олег Владимирович, кандидат физико-математических наук, руководитель приемной комиссии, astahov.ov@talantiuspeh.ru, https://orcid.org/0000-0003-3798-5774, AuthorID: 547443
Елизаров Евгений Михайлович, инженер и аспирант кафедры радиофизики и нелинейной динамики, elizarovem5@gmail.com, https://orcid.org/0009-0008-8309-6197, AuthorID: 1162456
Стрелкова Галина Ивановна, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиофизики и нелинейной динамики, strelkovagi@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-8667-2742, AuthorID: 34836
Астахов Владимир Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры радиофизики и нелинейной динамики, astakhovvv@icloud.com, https://orcid.org/0000-0001-9597-6214, AuthorID: 34841

Аннотация. Простейшей классической автоколебательной системой с двумя степенями свободы является генератор Ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром. Для нее характерно явление затягивания частоты, обусловленное появлением бистабильности и гистерезиса. Ранее был выявлен бифуркационный механизм затягивания и бистабильности. Бифуркационный анализ был проведен для случая слабого возбуждения, когда система демонстрирует квазигармонические автоколебания. Однако остается открытым вопрос о влиянии ангармоничности, которая развивается в системе с ростом параметра возбуждения, на явление мультистабильности, на бифуркационный механизм ее формирования. Сохраняется ли эффект затягивания частоты и соответствующие бистабильные состояния в широкой области значений управляющих параметров? Происходит ли формирование новых мультистабильных состояний? Как выглядит бифуркационная структура плоскости управляющих параметров? В данной работе перечисленные вопросы исследуются на примере автоколебательной системы, состоящей из осциллятора Рэлея с дополнительным линейным осциллятором. Численное моделирование и бифуркационный анализ состояний равновесия и предельных циклов выполнены с помощью пакета программ XPPAUTO. Представлены результаты двупараметрического анализа в широкой области значений параметра возбуждения и расстройки по частотам, описаны типичные режимы автоколебаний и их бифуркации.

Ключевые слова: осциллятор Рэлея, затягивание частоты, мультистабильность, гистерезис, бифуркационный анализ

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 20-12-00119, https://rscf.ru/project/23-12-45017/).

Для цитирования: *Астахов С. В., Астахов О. В., Елизаров Е. М., Стрелкова Г. И., Астахов В. В.* Влияние ангармоничности на мультистабильность в автоколебательной системе с двумя степенями свободы // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 1. С. 4–18. https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-1-4-18, EDN: SGQUIN

Article

Impact of anharmonicity on multistability in a self-sustained oscillatory system with two degrees of freedom

S. V. Astakhov[1], **O. V. Astakhov**[2], **E. M. Elizarov**[3], **G. I. Strelkova**[3]✉, **V. V. Astakhov**[3]

[1]Lomonosov Moscow State University, GSP-1 1 Leninskie Gory, Moscow 119991, Russia
[2]Sirius University of Science and Technology, 1 Olimpiyskiy Pr., urban settlement Sirius, Krasnodar region 354340, Russia
[3]Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Sergey V. Astakhov, s.v.astakhov@quantum.msu.ru, https://orcid.org/0000-0002-7682-1919, AuthorID: 936913
Oleg V. Astakhov, astahov.ov@talantiuspeh.ru, https://orcid.org/0000-0003-3798-5774, AuthorID: 547443
Evgeny M. Elizarov, elizarovem5@gmail.com, https://orcid.org/0009-0008-8309-6197, AuthorID: 1162456
Galina I. Strelkova, strelkovagi@sgu.ru, https://orcid.org/0000-0002-8667-2742, AuthorID: 34836
Vladimir V. Astakhov, astakhovvv@icloud.com, https://orcid.org/0000-0001-9597-6214, AuthorID: 34841

Abstract. ***Background and Objectives:*** The van der Pole oscillator with an additional oscillatory circuit represents one of the simplest self-sustained oscillator system with two degrees of freedom. It is characterized by the phenomenon of frequency pulling, caused by the appearance of bistability and hysteresis. The bifurcation mechanism of pulling and bistability was previously identified, and the bifurcation analysis was carried out for the case of weak excitation when the system exhibits quasi-harmonic self-sustained oscillations. However, the question remains open about the influence of anharmonicity, which develops in the system with increasing excitation parameter, on the phenomenon of multistability and on the bifurcation mechanism of its formation. Is the effect of frequency pulling and the corresponding bistable states preserved over a wide range of values of the control parameters? Are new multistable states being formed? What does the bifurcation structure of the control parameter plane look like? In this paper, the above issues are studied using as an example a self-sustained oscillatory system consisting of the Rayleigh oscillator with an additional linear oscillator. ***Materials and Methods:*** Numerical simulation and bifurcation analysis of equilibrium states and limit cycles were performed using the XPPAUTO software package. ***Results:*** The results of a two-parameter analysis in a wide range of excitation and frequency detuning parameters have been presented, typical modes of self-sustained oscillations and their bifurcations have been described. ***Conclusion:*** It has been shown that the classical phenomenon of frequency pulling is observed only at small values of the excitation parameter of the system. The bistability region, where two limit cycles coexist, corresponding to in-phase and anti-phase oscillation modes in coupled oscillators, is bounded by both the detuning parameter and the excitation parameter.

Keywords: Rayleigh oscillator, frequency pulling, multistability, hysteresis, bifurcation analysis

Acknowledgements: The study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 20-12-00119, https://rscf.ru/project/23-12-45017/).

For citation: Astakhov S. V., Astakhov O. V., Elizarov E. M., Strelkova G. I., Astakhov V. V. Impact of anharmonicity on multistability in a self-sustained oscillatory system with two degrees of freedom. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2024, vol. 24, iss. 1, pp. 4–18 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-1-4-18, EDN: SGQUIN

Введение

Мультистабильность является фундаментальным нелинейным явлением, которое широко наблюдается и активно исследуется в системах различной природы [1–13]. Под этим явлением понимают сосуществование в фазовом пространстве динамической системы нескольких аттракторов, которые можно пронаблюдать, меняя начальные условия системы. Мультистабильность имеет важное, зачастую определяющее значение в свойствах и функциональных возможностях различных систем. Например, установлено, что мультистабильность лежит в основе механизмов хранения памяти и обработки информации в нейронных сетях [14]. В ряде случаев она играет отрицательную роль, понижая устойчивость системы к воздействию флуктуаций, помех, что приводит к нарушению режимов работы технических устройств [1, 15].

В связи с этим важно знать условия возникновения и исчезновения мультистабильности при вариации параметров системы, бифуркационные механизмы ее формирования. Возникновение мультистабильности может быть связано с бифуркациями типа вил состояний равновесия и предельных циклов, с седло-узловыми бифуркациями рождения пар неподвижных точек или предельных циклов, когда в расширенном пространстве динамических переменных и параметров системы формируются складки и сборки для неподвижных точек и предельных циклов [16, 17]. В связанных системах с удвоением периода возможно формирование развитой фазовой мультистабильности [18], когда при переходе к хаосу через каскад удвоений периода каждый из циклов претерпевает бифуркацию удвоения дважды. После первой бифуркации рождается устойчивый цикл удвоенного периода, после второй – седловой. Далее по параметру неустойчивый цикл претерпевает субкритическую бифуркацию вил и становится устойчивым [19]. Возникающие режимы одного периода различаются фазовыми сдвигами между колебаниями подсистем. В результате в фазовом пространстве могут сосуществовать циклы одного периода, разных периодов, торы и различные виды хаотических аттракторов.

При исследовании бифуркационного механизма затягивания частоты в классической автоколебательной системе с двумя степенями свободы [20, 21] – в генераторе Ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром – было установлено [22, 23], что появление сосуществующих устойчивых предельных циклов в области затягивания частоты обусловлено двумя последовательными суперкритическими бифуркациями Андронова–Хопфа состояния равновесия и субкритической бифуркацией Неймарка–Сакера седлового предельного цикла. Этот бифуркационный механизм формирования бистабильности был выявлен при малых значениях параметра возбуждения в генераторе и слабой диссипации в дополнительном колебательном контуре, когда система является квазигармонической. Однако для подобных автоколебательных систем с двумя степенями свободы остается открытым вопрос о влиянии параметра возбуждения, когда с его увеличением автоколебания становятся ангармоническими, на явление мультистабильности, на бифуркационный механизм ее формирования. Сохраняется ли эффект затягивания частоты и соответствующие бистабильные состояния в широкой области значений на плоскости управляющих параметров возбуждения и расстройки по собственным частотам? Происходит ли формирование новых мультистабильных состояний? Как выглядит бифуркационная структура плоскости управляющих параметров?

В статье представлены результаты двупараметрического анализа автоколебательной системы с двумя степенями свободы, состоящей из осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором. На плоскости «параметр возбуждения – параметр расстройки по собственным частотам» построены области характерных режимов, выявлены области мультистабильности и определены бифуркации, которые приводят к сосуществующим аттракторам. В данной автоколебательной системе с двумя степенями свободы

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена исследуемая модель автоколебательной системы с двумя степенями свободы. В разделе 3 описаны результаты численного моделирования и бифуркационного анализа состояний равновесия и предельных циклов, выполненных с помощью пакета программ XPPAUTO [24]. В разделе 4 проведено обсуждение полученных результатов.

1. Исследуемая система

1.1. Математическая модель

Исследуемая автоколебательная система с двумя степенями свободы состоит из осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором.

Осциллятор Рэлея относится к базовым моделям теории колебаний. Он представляет собой одну из простейших моделей автоколебательных систем с одной степенью свободы. Уравнение Рэлея [25] описывает, например, хорошо известные механические автоколебательные системы – маятник Фроуда [26] и систему Кайдановского–Хайкина [27]. Примером радиофизической системы, описываемой уравнением Рэлея, может служить генератор на нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью, включенном в колебательный контур [28]. Осциллятор Рэлея представляет собой осциллятор с нелинейной диссипацией, величина которой нелинейно зависит от скорости (в механической интерпретации), тогда как в осцилляторе Ван дер Поля диссипация определяется координатой по нелинейному закону. Заменой переменных уравнение Рэлея переходит в уравнение Ван дер Поля.

В осцилляторе Рэлея, так же как и в генераторе Ван дер Поля, наблюдается мягкое возбуждение устойчивых автоколебаний. Единственное состояние равновесия с ростом управляющего параметра при переходе через нулевое значение претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа. Из неустойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого растет пропорционально корню из надкритичности. При малых значениях параметра наблюдаются квазигармонические автоколебания. С ростом управляющего параметра развивается явление ангармоничности. Близкие к синусоидальным автоколебания постепенно превращаются в релаксационные. Однако в осцилляторе Ван дер Поля форма временных реализаций становится прямоугольной, а в осцилляторе Рэлея – пилообразной.

Исследуемая автоколебательная система с двумя степенями свободы может быть представлена в виде двух связанных осцилляторов:

$$\begin{gathered} \ddot{x} - (\varepsilon - \dot{x}^2)\,\dot{x} + p^2 x + p^2\gamma(x - x_1) = 0, \\ \ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + x_1 + \gamma(x_1 - x) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

или описана системой четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{gathered} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\varepsilon - y^2)\,y - p^2 x - p^2\gamma(x - x_1)\,, \\ \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{y}_1 = -\alpha y_1 - x_1 - \gamma(x_1 - x)\,. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь пары динамических переменных (x, y) и (x_1, y_1) определяют состояние осциллятора Рэлея (основного контура) и линейного диссипативного осциллятора (дополнительного контура) соответственно; ε – параметр возбуждения автоколебательной системы; α – параметр диссипации линейного осциллятора; γ – коэффициент связи между осциллятором Рэлея и линейным осциллятором; p – параметр расстройки по собственным частотам осциллятора Рэлея и линейного осциллятора.

Такие уравнения можно получить при описании, например, механической автоколебательной системы Кайдановского–Хайкина [27, 21, 25], состоящей из грузика, закрепленного на пружине и расположенного на движущейся с постоянной скоростью ленте, который взаимодействует с другим грузиком, закрепленным на пружине и расположенным на покоящейся поверхности. Радиофизическим примером такой системы является генератор, состоящий из двух связанных колебательных контуров, один из которых возбуждается активным нелинейным элементом с отрицательной дифференциальной проводимостью.

1.2. Двухконтурный генератор на активном нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью

На рис. 1 представлена схема генератора на активном нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью и двумя колебательными контурами.

Исходя из приведенной схемы и используя законы Кирхгофа, запишем уравнения:

$$\begin{gathered} I + i_g + i_c + i + I_c = 0, \\ i_1 + i_{g1} + i_{c1}\ I_c = 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Вольт-амперную характеристику нелинейного элемента определим в виде

$$I = -au + bu^3. \tag{4}$$

Указанные на рис. 1 токи и напряжения на элементах схемы связаны соотношениями:

$$i_g = gu, \quad i_c = C\frac{du}{dt}, \quad u = L\frac{di}{dt} \quad ,u_1 = L_1\frac{di_1}{dt},$$

$$i_{g1} = g_1\, u_1, \quad i_{c1} = C_1\frac{du_1}{dt}, \quad u - u_1 = L_c\frac{dI_c}{dt}.$$

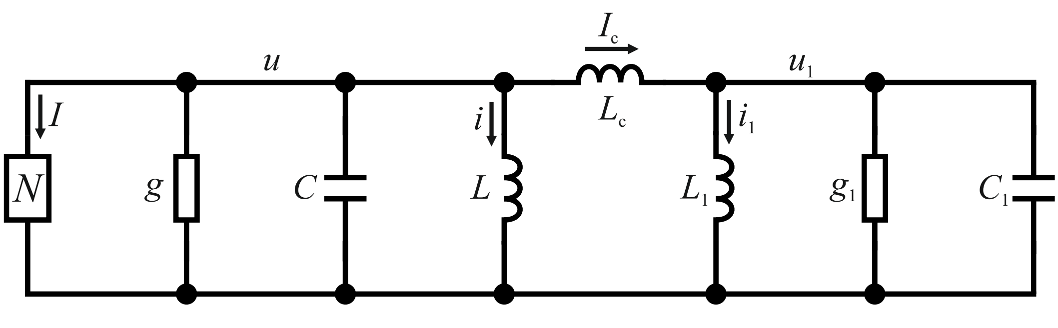


Рис. 1. Схема генератора на активном нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью и двумя колебательными контурами

Fig. 1. Scheme of a generator based on an active nonlinear element with a negative differential conductivity and two oscillatory circuits

Подставляя данные соотношения в (3) с учетом (4), запишем уравнения относительно токов i и i_1:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} \quad \left[\frac{a-g}{C} \quad \frac{bL^2}{C}\left(\frac{di}{dt}\right)^2\right]\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}i+\frac{1}{LC}\left(\frac{L}{L_c}i-\frac{L_1}{L_c}i_1\right)=0,$$

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2}+\frac{g_1}{C_1}\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{L_1C_1}i_1+\frac{1}{L_1C_1}\left(\frac{L_1}{L_c}i_1-\frac{L}{L_c}i\right)=0.$$

Переходя к новому времени, нормированным переменным и параметрам, эту систему можно представить в виде (1) и (2), где

$$x=\sqrt{\beta}\frac{i}{i_0},\quad x_1=\sqrt{\beta}\frac{i_1}{i_0},\quad \beta=\frac{bL^2 i_0^2}{C\sqrt{L_1C_1}},\quad \dot{x}=\frac{dx}{d\tau},$$

$$\tau=\omega_{01}t,\quad p^2=\frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2},\quad \omega_0^2=\frac{1}{LC},\quad \omega_{01}^2=\frac{1}{L_1C_1},$$

$$\varepsilon=\frac{a-g}{C\omega_{01}},\quad \alpha=\frac{g_1}{\omega_{01}C_1},\quad \gamma=\frac{L}{L_c},\quad L_1=L.$$

Таким образом, изображенный на рис. 1 двухконтурный генератор на нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью представляет собой осциллятор Рэлея, взаимодействующий с линейным диссипативным осциллятором (1).

2. Мультистабильные состояния и бифуркации, приводящие к их появлению

Автоколебательная система (2) имеет четырехмерное фазовое пространство с единственным состоянием равновесия в начале координат, положение которого не зависит от параметров системы. В отсутствие связи ($\gamma = 0$) система распадается на осциллятор Рэлея и линейный диссипативный осциллятор. При малых положительных значениях параметра диссипации α линейный осциллятор при любых начальных условиях демонстрирует затухающие до нуля колебания. Поведение осциллятора Рэлея зависит от параметра возбуждения ε. При отрицательных значениях параметра автоколебания отсутствуют. Единственное состояние равновесия является устойчивым, причем при $\varepsilon < -2$ представляет собой устойчивый узел и при $-2 < \varepsilon < 0$ – устойчивый фокус. Когда ε переходит через ноль, происходит возбуждение автоколебаний. В результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа из неустойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл. При малых значениях параметра возбуждения ε осциллятор Рэлея демонстрирует квазигармонические автоколебания. По мере увеличения ε развивается явление ангармоничности, колебания постепенно превращаются из квазигармонических в релаксационные пилообразной формы.

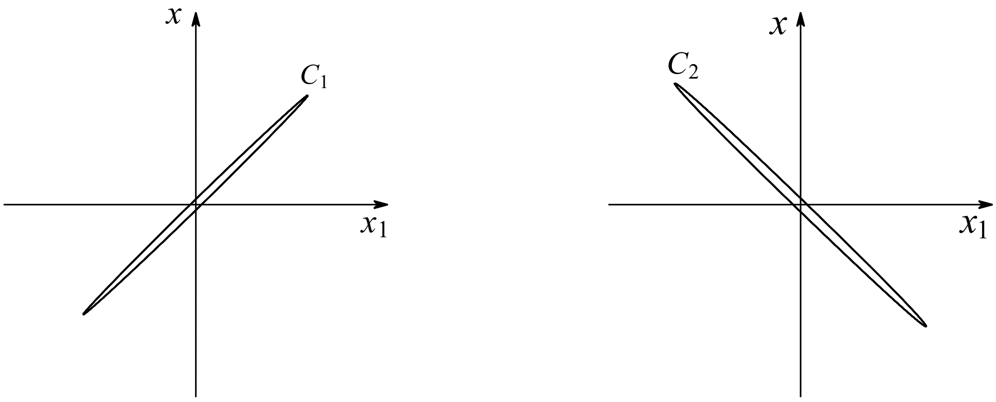
При взаимодействии этих двух осцилляторов с очень простым поведением возникают более сложные явления, а именно формируется мультистабильность, происходит затягивание частоты и гистерезис. В пространстве параметров наблюдается более сложная бифуркационная структура, определяющая механизмы появления мультистабильности.

Рассмотрим поведение системы (2) в зависимости от параметра возбуждения ε и расстройки по собственным частотам p с фиксированными значениями параметра диссипации $\alpha = 0.01$ и коэффициента связи $\gamma = 0.2$.

В автоколебательной системе (2) с увеличением ε мягко возбуждаются квазигармонические автоколебания. Однако при значениях p немного меньше единицы рождается устойчивый предельный цикл, соответствующий синфазным колебаниям в основном и дополнительном контуре, а при p немного больше единицы – устойчивый предельный цикл, соответствующий противофазным колебаниям в контурах. Проекции этих предельных циклов, обозначенные C_1 для синфазных и C_2 для противофазных колебаний, представлены на рис. 2. Эти два цикла участвуют в явлении затягивания частоты, их области существования перекрываются на плоскости параметров, что приводит к мультистабильности и гистерезису. Рассмотрим бифуркации состояния равновесия и предельных циклов, которые определяют эти явления.

На рис. 3 построены бифуркационные линии на плоскости управляющих параметров (ε, p) в диапазоне малых значений ε (от 0 до 0.1), когда автоколебания близки к гармоническим.

Ниже линий l_1^{AH1} и l_2^{AH1} автоколебания отсутствуют. В фазовом пространстве существует устойчивое состояние равновесия. Вблизи бифуркационных линий оно представляет собой устойчивый фокус: все четыре собственных значения являются комплексными с отрицательными действительными частями. Когда $p < 1$, при пересечении линии l_1^{AH1} действительные части одной пары собственных значений переходят через ноль и становятся положительными. Неподвижная точка превращается в седло, в ее окрестности мягко рождается устойчивый предельный цикл C_1. С ростом параметра возбуждения, при пересечении линии l_2^{AH2}, состояние равновесия претерпевает еще одну суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа. Действительные части еще одной пары комплексных собственных значений переходят через ноль. Из седловой



a/*a* *б*/*b*

Рис. 2. Проекции предельных циклов C_1 (*a*) и C_2 (*б*), соответствующие синфазным и противофазным колебаниям в осцилляторах, при $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.2$, $p = 0.995$ (*a*), $p = 1.005$ (*б*)

Fig. 2. Projections of limit cycles C_1 (*a*) и C_2 (*b*) corresponding to in-phase and anti-phase oscillations in the oscillators at $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.2$, $p = 0.995$ (*a*), $p = 1.005$ (*b*)

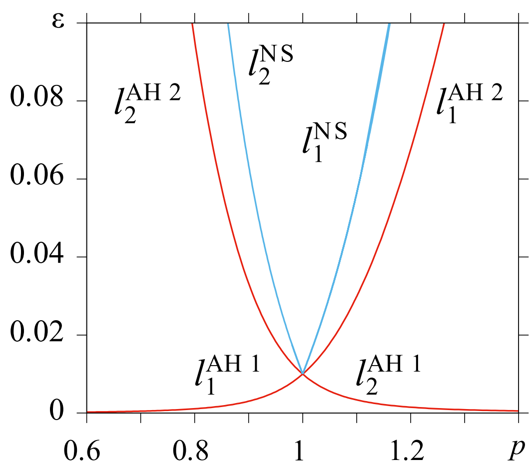


Рис. 3. Линии бифуркационных значений на плоскости управляющих параметров (p, ε) в диапазоне малых значений ε при фиксированных $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.2$. Линии l_1^{AH1}, l_2^{AH1} соответствуют суперкритическим бифуркациям Андронова–Хопфа. При их пересечении из состояния равновесия рождаются устойчивые циклы C_1 и C_2 соответственно. На линиях l_1^{AH2} и l_2^{AH2} из седлового состояния равновесия рождаются седловые циклы C_1 и C_2. Линии l_1^{NS} и l_2^{NS} соответствуют субкритическим бифуркациям Неймарка–Сакера, при которых седловые циклы C_1 и C_2 становятся устойчивыми (цвет онлайн)

Fig. 3. Bifurcation lines in the (p, ε) parameter plane within a range of small values of ε at fixed $\alpha = 0$, $\gamma = 0.2$. Lines l_1^{AH1}, l_2^{AH1} correspond to supercritical Andronov–Hopf bifurcations. When they intersect, stable cycles C_1 and C_2 are born from the equilibrium state, respectively. Saddle cycles C_1 and C_2 appear from a saddle equilibrium on lines l_1^{AH2} and l_2^{AH2}. Lines l_1^{NS} and l_2^{NS} refer to subcritical Neimark–Saker bifurcations at which the saddle cycles C_1 and C_2 become stable (color online)

неподвижной точки рождается неустойчивый предельный цикл C_2. Он имеет четыре мультипликатора, один из которых равен единице, один действительный и по модулю меньше единицы и пара комплексных, расположенных за единичной окружностью на плоскости с координатами $(Re(\mu), Im(\mu))$. На линии l_2^{NS} этот седловой предельный цикл C_2 претерпевает субкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера. Пара комплексно-сопряженных мультипликаторов становится чисто мнимыми, из цикла рождается седловой тор, и C_2 становится устойчивым. Теперь в фазовом пространстве сосуществуют два устойчивых предельных цикла C_1 и C_2. Следует отметить, что точно такой же бифуркационный механизм формирования бистабильности был выявлен и описан в работах [22, 23] для генератора Ван дер Поля с дополнительным контуром. Используя укороченные уравнения для амплитуд и фаз, авторы явно продемонстрировали рождение седлового тора при возникновении бистабильности.

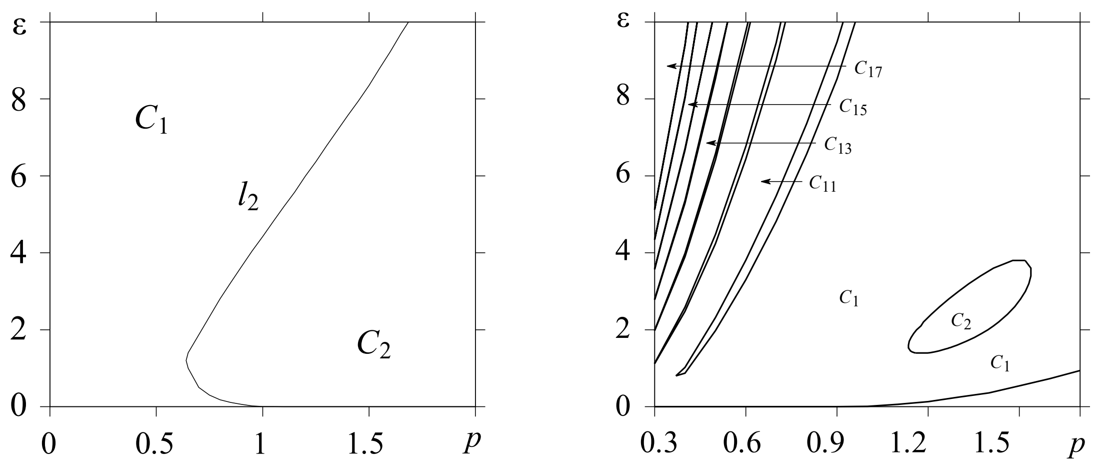
Когда $p > 1$, происходят аналогичные бифуркации с той разницей, что при пересечении линии l_2^{AH1} в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл C_2. Вторая суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа на линии l_1^{AH2} приводит к появлению седлового цикла C_1, который становится устойчивым при пересечении линии l_1^{NS} в результате субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. Область бистабильности, в которой сосуществуют устойчивые предельные циклы C_1 и C_2, гистерезиса и затягивания частоты ограничена бифуркационными линиями l_1^{NS} и l_2^{NS}.

Как видно из рис. 3, эта область затягивания частоты располагается в окрестности линии $p = 1$ с отстройкой по частоте вправо и влево. При $\varepsilon = 0.1$ интервал затягивания ограничен значениями p примерно от 0.7 до 1.3. С уменьшением ε этот интервал сужается и постепенно стягивается в точку. При фиксированном значении параметра возбуждения, например, $\varepsilon = 0.08$, с изменением параметра расстройки по частоте p система демонстрирует следующее поведение. Если расстройка по собственным частотам существенно отличается от единицы, например, $p = 0.6$, в фазовом пространстве существует устойчивый предельный цикл C_1. Других устойчивых режимов здесь нет. При плавном увеличении p устойчивый цикл C_1 наблюдается до точки пересечения с линией l_1^{NS}. Затем происходит жесткий переход на режим автоколебаний с другой амплитудой и частотой, который соответствует устойчивому предельному циклу C_2. Далее, до конца исследуемого интервала значений $p = 1.4$, наблюдается C_2. При обратном движении по параметру p, при пересечении линии l_1^{NS} цикл C_2 бифуркаций не претерпевает, сохраняется прежний автоколебательный режим. Жесткий переход на устойчивый цикл C_1 происходит существенно дальше по параметру – при пересечении линии l_2^{NS}. Наблюдается явление гистерезиса. Здесь имеет место классическая картина затягивания частоты в генераторе с дополнительным контуром.

Таким образом, в области малых значений параметра возбуждения формирование мультистабильности происходит в результате двух последовательных суперкритических бифуркаций Андронова–Хопфа состояния равновесия и одной субкритической бифуркации Неймарка–Сакера седлового предельного цикла.

Далее рассмотрим поведение осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным осциллятором, в широкой области значений параметра возбуждения ε от 0 до 10 при расстройке по собственным частотам p от 0.3 до 1.7 на базе каждого из сосуществующих бистабильных состояний C_1 и C_2. На рис. 4 построены отдельные карты режимов с наследованием начальных условий на базе каждого из указанных циклов.

Устойчивый предельный цикл C_2 существует на плоскости управляющих параметров (ε, p) в области, ограниченной линией l_2 (рис. 4, *а*). При $p > 1$ с уменьшением параметра возбуждения ε цикл C_2 стягивается в неподвижную точку. Здесь границей является линия суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа мягкого рождения устойчивого цикла C_2 из неустойчивого фокуса. Остальная часть границы и слева, и сверху определяется линией субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. На ней предельный цикл C_2 не исчезает, а теряет устойчивость. Изображающая точка уходит с него на устойчивый цикл C_1. Таким образом, жесткий переход с C_2 на C_1 происходит не только с уменьшением параметра расстройки по собственным частотам, но и при



а/*a*   *б*/*b*

Рис. 4. Карты режимов на плоскости управляющих параметров (p, ε), возникающие в системе (2) на базе противофазного цикла C_2 (*а*) и синфазного цикла C_1 (*б*). Линия l_2 на фрагменте (*а*) ограничивает область существования цикла C_2

Fig. 4. Regime maps in the (p, ε) parameter plane in the system (2) on the base of anti-phase cycle C_2 (*a*) and in-phase cycle C_1 (*b*). Line l_2 in fragment (*a*) bounds the region of cycle C_2 existence

увеличении параметра возбуждения. При вариации параметров внутри этой области устойчивый предельный цикл C_2 бифуркаций не претерпевает. Однако характеристики колебаний (форма, амплитуда, период) в основном и дополнительном контурах существенно меняются. Проекции фазовых портретов и временные реализации этого семейства автоколебательных режимов представлены на рис. 5.

Видно, что при $p = 1.0$ и малых значениях параметра возбуждения ($\varepsilon = 0.05, 0.1$, рис. 5, *а*,*б*) в основном и дополнительном колебательном контурах наблюдаются квазигармонические противофазные колебания практически одинаковой амплитуды. В сечении $\varepsilon = 0.05$ при изменении расстройки по частоте от $p = 0.92$ до $p = 1.7$ колебания остаются квазигармоническими, но меняется их период (примерно от $T = 5.5$ до $T = 3.5$) и амплитуды в основном A и дополнительном A_1 контурах. Так, при $p = 1.0$ амплитуды колебаний одинаковые: $A = A_1 = 0.19$, а при $p = 1.7$ амплитуда колебаний в основном контуре ($A = 0.13$) становится больше, чем в дополнительном ($A_1 = 0.01$).

Из рис. 5 видно, что при $p = 1.0$ с увеличением параметра возбуждения ε от нижней до верхней границы области существования автоколебательный режим на базе предельного цикла C_2 заметно видоизменяется. Колебания в дополнительном контуре во всем диапазоне значений остаются квазигармоническими, а в основном контуре плавно превращаются в релаксационные пилообразной формы. Различие в интенсивности колебаний постепенно нарастает и становится довольно существенным у верхней границы области ($A = 2.17, A_1 = 10.39$ при $\varepsilon = 4.0$, рис. 5, *е*).

Карта режимов на плоскости параметров (p, ε) на базе синфазного цикла C_1 (см. рис. 4, *б*) устроена более сложным образом. В исследуемой области значений она ограничена только снизу линией l_1. При $p < 1$ на ней происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. При уменьшении параметра возбуждения устойчивый предельный цикл C_1 плавно стягивается в неподвижную точку в начале координат. При $p > 1$ у нижней границы цикл имеет конечный размер. При пересечении границы происходит жесткий перескок с цикла C_1 на устойчивый цикл C_2. Здесь происходит субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера, в результате которой C_1 теряет устойчивость и изображающая точка уходит на устойчивый C_2. Из рис. 4, *б* видно, что при малой расстройке (в окрестности $p = 1$) с увеличением параметра возбуждения ε вплоть до границы исследуемого диапазона предельный цикл C_1 никаких бифуркаций не претерпевает. Однако при увеличении расстройки вправо и влево от $p = 1$ с ростом параметра возбуждения ε на базе предельного цикла C_1 наблюдаются различные бифуркации. В правой стороне плоскости параметров имеется область, ограниченная линией l_1^{NS}, при входе в которую происходит жесткий переход с цикла C_1 на устойчивый предельный цикл C_2. На линии l_1^{NS} происходит субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. Рассмотрим поведение цикла C_1 при пересечении этой области снизу вверх, например, при фиксированном $p = 1.3$ с увеличением параметра возбуждения ε. При достижении линии l_1^{NS} снизу пара комплексно-сопряженных мультипликаторов выходит на единичную окружность. При пересечении границы цикл C_1 теряет устойчивость, но в его окрестности устойчивый тор не возникает, что свидетельствует о субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. Здесь седловой тор стягивается к предельному циклу, C_1 теряет устойчивость, но не исчезает. С дальнейшим увеличением параметра возбуждения на верхней части границы l_1^{NS} пара мультипликаторов седлового цикла C_1 вновь входит в единичную окружность, предельный цикл становится устойчивым. Далее, до $\varepsilon = 10$ цикл C_1 никаких бифуркаций не демонстрирует.

Более сложное поведение на базе предельного цикла C_1 наблюдается в левой части плоскости параметров при $p < 1$ (см. рис. 4, *б*). Здесь гораздо больше различных бифуркационных линий в отличие от правой части плоскости параметров. Рассмотрим, как меняются режимы колебаний на базе цикла C_1 при вариации управляющих параметров.

На рис. 6 представлены проекции предельных циклов, наблюдаемые в сечении $p = 0.5$ при различных значениях параметра возбуждения. При $\varepsilon = 0.1$ все еще наблюдаются квазигармонические колебания (рис. 6, *а*). В интервале значений ε от 0.1 до 2.31 предельный цикл C_1 бифуркаций не претерпевает. Однако по мере увеличения ε форма его постепенно (эволюционно, без бифуркаций) искажается, предельный цикл при $\varepsilon = 1.6$ (рис. 6, *б*) и $\varepsilon = 2.31$ (рис. 6, *в*) по своей форме сильно отличается от C_1 при $\varepsilon = 0.1$. Далее, при небольшом приращении по параметру до $\varepsilon = 2.32$ происходит жесткий переход на другой предельный цикл, проекция которого показана на рис. 6, *г*. Обозначим его C_{11}. При

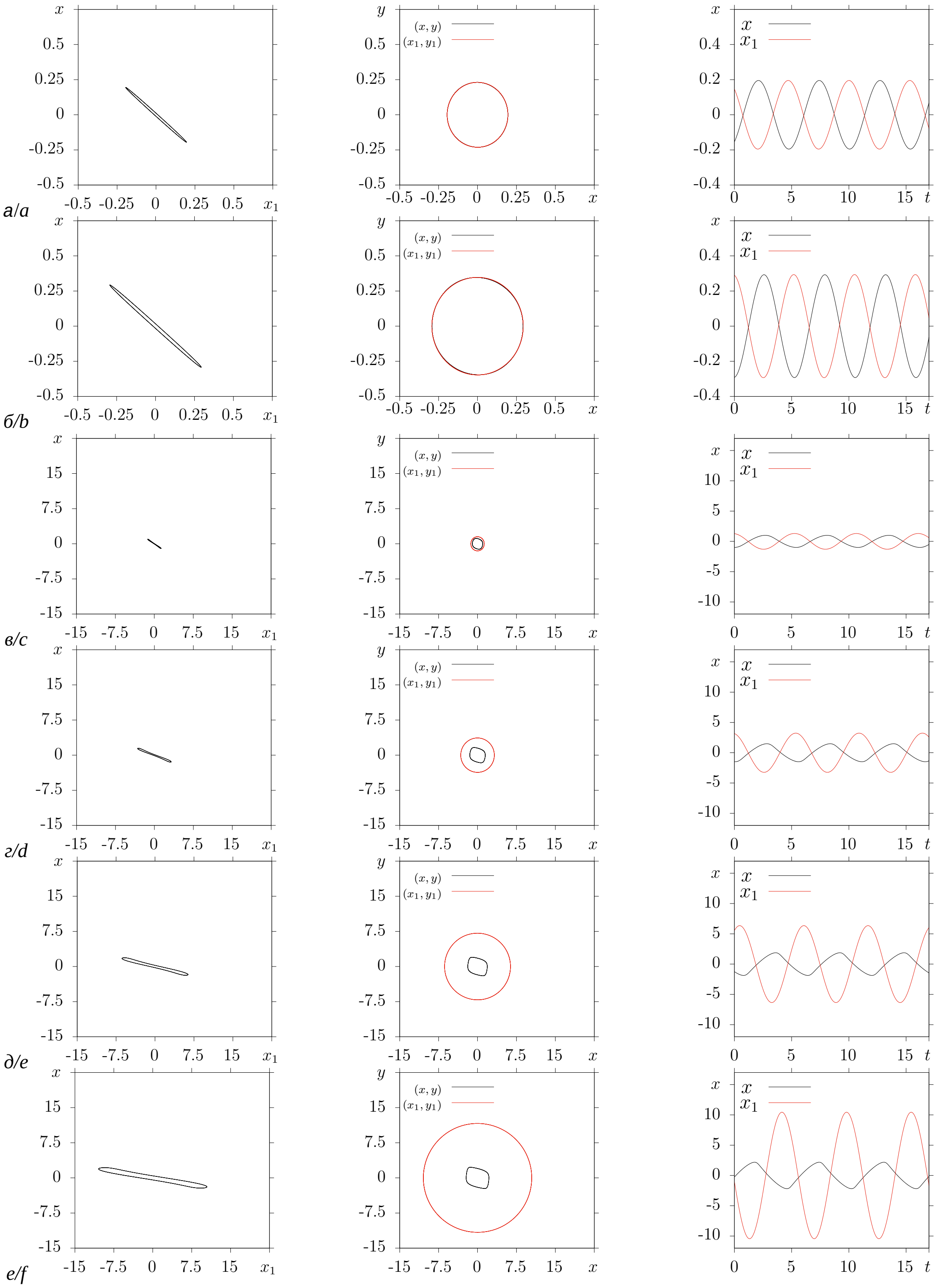


Рис. 5. Проекции фазовых портретов (левый и средний столбцы) и временные реализации (правый столбец) автоколебательных режимов, возникших на базе противофазного цикла C_2 в основном (черные кривые) и дополнительном (красные кривые) контурах, при фиксированном $p = 1.0$ и различных значениях параметра возбуждения ε: 0.05 (*а*), 0.1 (*б*), 1.0 (*в*), 2.0 (*г*), 3.0 (*д*), 4.0 (*е*) (цвет онлайн)

Fig. 5. Projections of phase portraits (left and middle columns) and time series (right column) of self-sustained oscillatory regimes appeared on the base of anti-phase cycle C_2 in the main (black curves) and additional (red curves) circuits for the fixed value of $p = 1.0$ and different values of the excitation parameter ε: 0.05 (*a*), 0.1 (*b*), 1.0 (*c*), 2.0 (*d*), 3.0 (*e*), 4.0 (*f*) (color online)

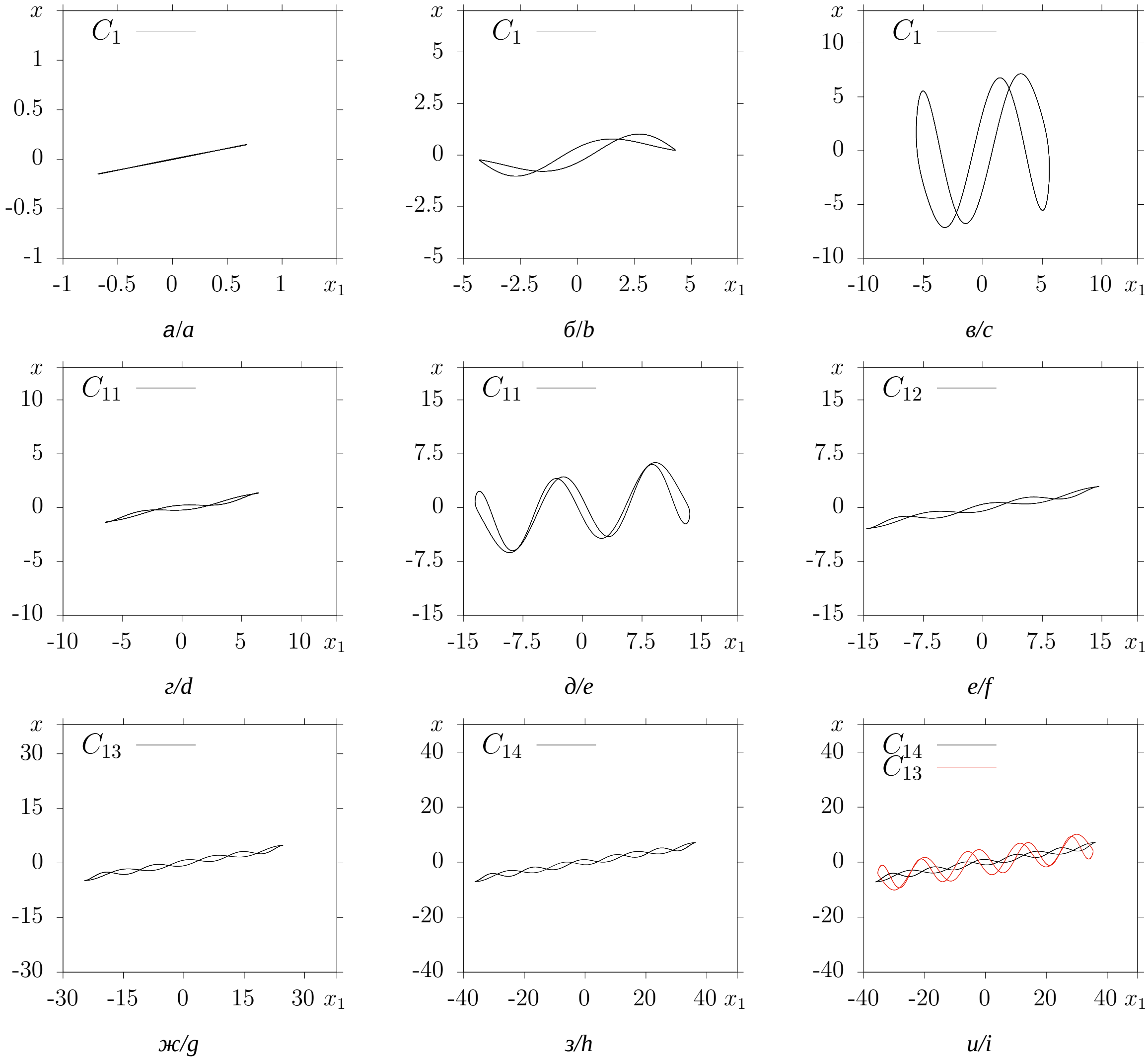


Рис. 6. Проекции (x_1, x) предельных циклов, возникших на базе синфазного цикла C_1 при фиксированном значении расстройки $p = 0.5$ и различных значениях параметра возбуждения ε: 0.1 (*а*), 1.6 (*б*), 2.31 (*в*) – цикл C_1; 2.32 (*г*), 4.35 (*д*) – цикл C_{11}; 4.48 (*е*) – цикл C_{12}; 6.58 (*ж*) – цикл C_{13}; 8.67 (*з*) – цикл C_{14}; 8.65 (*и*) – сосуществующие предельные циклы C_{13} (черная кривая) и C_{14} (красная кривая), образующие одну из областей бистабильности (см. рис. 4, *б*) (цвет онлайн)

Fig. 6. Projections (x_1, x) of the limit cycles arised on the base of in-phase cycle C_1 for the fixed value of frequency detuning $p = 0.5$ and different values of the excitation parameter ε: 0.1 (*a*), 1.6 (*b*), 2.31 (*c*) – cycle C_1; 2.32 (*d*), 4.35 (*e*) – cycle C_{11}; 4.48 (*f*) – cycle C_{12}; 6.58 (*g*) – cycle C_{13}; 8.67 (*h*) – cycle C_{14}; 8.65 (*i*) – coexisting limit cycles C_{13} (black curve) and C_{14} (red curve) which form one of the bistability regions (Fig. 4, *b*) (color online)

обратном движении по параметру наблюдается гистерезис. Предельный цикл C_{11} существует до $\varepsilon = 1.98$. При этом значении наблюдается жесткий переход обратно на предельный цикл C_1. В области гистерезиса сосуществуют устойчивые циклы C_{11} и C_1. Проследим за предельным циклом C_{11} с увеличением параметра возбуждения от $\varepsilon = 2.32$. С ростом ε форма C_{11} плавно трансформируется. При $\varepsilon = 4.35$ он имеет вид, представленный на рис. 6, *д*. При $\varepsilon = 4.48$ происходит жесткий переход на другой предельный цикл, который обозначим C_{12}. Проекция этого предельного цикла представлена на рис. 6, *е*. При обратном движении по параметру перескок с C_{12} на C_{11} происходит при $\varepsilon = 4.24$. Бистабильные состояния C_{11} и C_{12} сосуществуют в интервале значений ε от 4.24 до 4.48. Далее цикл C_{12} претерпевает бифуркацию при $\varepsilon = 6.58$, происходит жесткий переход на C_{13} (рис. 6, *ж*). Устойчивые предельные циклы C_{12} и C_{13} сосуществуют в интервале значений ε от 6.42 до 6.58. При $\varepsilon = 6.42$ происходит жесткий переход с цикла C_{13} на C_{12}. С увеличением ε цикл C_{13} претерпевает бифуркацию при $\varepsilon = 8.67$, происходит жесткий переход на цикл C_{14} (рис. 6, *з*). Интервал бистабильности для этих предельных циклов ограничен значениями $\varepsilon = 8.53$ и $\varepsilon = 8.67$. На рис. 6, *и* показаны проекции двух сосуществующих устойчивых предельных циклов C_{13} и C_{14} при $\varepsilon = 8.65$. Далее по параметру возбуждения до $\varepsilon = 10$ предельный цикл C_{14} никаких бифуркаций не демонстрирует.

Перечисленные предельные циклы и их бифуркации формируют структуру плоскости параметров (p, ε) на базе предельного цикла C_1 при $p < 1$ (см. рис. 4, *б*). Здесь показаны «полосы бистабильности», ограниченные линиями складок для попарно сосуществующих устойчивых предельных циклов C_1 и C_{11}, C_{11} и C_{12}, C_{12} и C_{13}, C_{13} и C_{14} соответственно, по мере перемещения от одной «полосы бистабильности» к другой от центра влево. Кроме рассмотренных предельных циклов и соответствующих областей бистабильности, на плоскости параметров на рис. 4, *б* показаны еще линии складок, ограничивающие области бистабильности для C_{14} и C_{15}, C_{15} и C_{16}, C_{16} и C_{17}.

Для более детальной иллюстрации наблюдаемых бистабильных состояний на рис. 7 показаны проекции предельных циклов и временные реализации семейства автоколебательных режимов, возникшего на базе C_1, при фиксированном значении параметра расстройки по частоте $p = 0.5$ и различных значениях ε. При слабом возбуждении $\varepsilon = 0.1$ наблюдаются квазигармонические автоколебания (рис. 7, *а*), причем амплитуда колебаний в дополнительном контуре значительно меньше, чем в генераторе Рэлея. С ростом ε, еще до бифуркации, колебания становятся ангармоническими (рис. 7, *б*). В генераторе они превращаются в релаксационные пилообразной формы, а в дополнительном контуре во временной реализации на периоде колебаний появляются осцилляции, что приводит к появлению петель на проекциях предельного цикла. Такая ангармоничность в дополнительном контуре с увеличением параметра развивается постепенно. Вначале мягко возникают осцилляции малой интенсивности, затем они нарастают и достигают максимальной величины вблизи точки бифуркации. Здесь интенсивность колебаний больше, чем в генераторе Рэлея (рис. 7, *в*). При переходе через точку бифуркации происходит жесткий переход на другой устойчивый предельный цикл C_{11} (рис. 7, *г*). С увеличением параметра этот цикл развивается аналогичным образом (рис. 7, *д*), как и предыдущий. Далее происходит жесткий переход на предельный цикл C_{12} (рис. 7, *е*) и т. д. Предельные циклы, формирующие «полосы бистабильности», отличаются друг от друга количеством петель, что обусловлено разным числом осцилляций на периоде в дополнительном контуре.

Заключение

Рассмотрена автоколебательная система с двумя степенями свободы, состоящая из осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором, которая полностью тождественна классической системе генератора Ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром [20]. Для этой системы характерно явление затягивания частоты, обусловленное гистерезисом и бистабильностью [21]. В работе [22] для генератора Ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром был выявлен бифуркационный механизм формирования мультистабильности в случае малых значений параметра возбуждения, когда автоколебательная система является квазигармонической. В данной работе авторы расширили исследование явления затягивания частоты и бистабильности, изучив влияние ангармоничности на мультистабильность в автоколебательной системе с двумя степенями свободы, описываемой связанными уравнениями Рэлея и линейного диссипативного осциллятора.

Исследование показало, что классическое явление затягивания частоты наблюдается только при небольших значениях параметра возбуждения ε. Область бистабильности, где сосуществуют два предельных цикла, соответствующие синфазным и противофазным режимам колебаний в связанных осцилляторах, ограничена не только по параметру расстройки p, но и по ε. По мере увеличения параметра возбуждения и развития ангармоничности, когда квазигармонические автоколебания превращаются в релаксационные пилообразной формы, одно из бистабильных состояний (C_2) теряет устойчивость и явление затягивания частоты больше не наблюдается. При больших значениях параметра возбуждения и определенных расстройках по частоте на базе синфазного семейства циклов наблюдаются разнообразные бифуркации, приводящие к новым режимам. Формируются новые мультистабильные состояния. На плоскости параметров при $p < 1$ возникает ряд «полос бистабильности», ограниченных линиями складок для попарно сосуществующих устойчивых

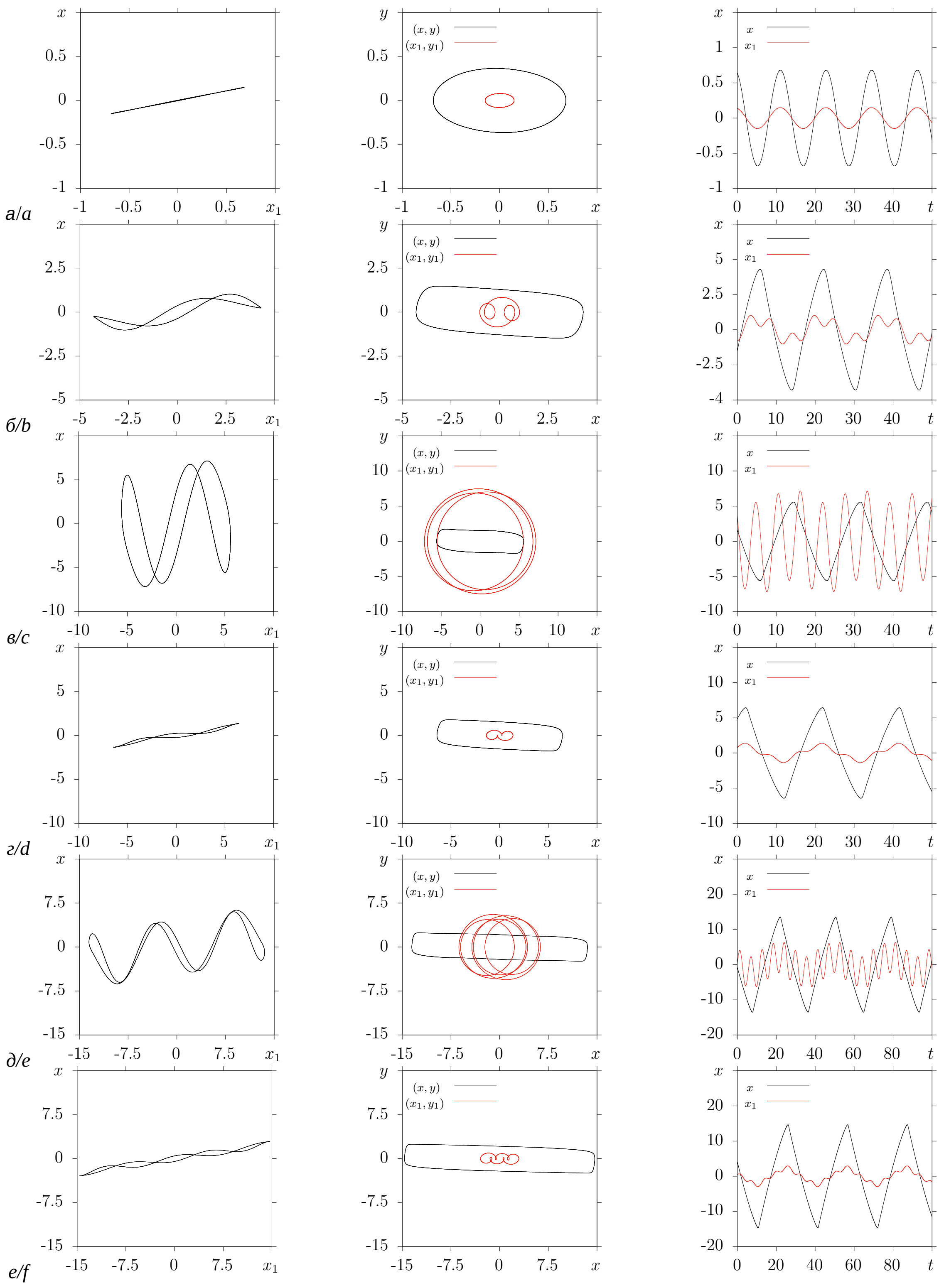


Рис. 7. Проекции предельных циклов (левый и средний столбцы) и временные реализации (правый столбец) семейства колебательных режимов, возникшего на базе цикла C_1 в основном (черные кривые) и дополнительном (красные кривые) контурах, при фиксированном параметре расстройки $p = 0.5$ и различных значениях параметра возбуждения ε: 0.1 (*а*), 1.6 (*б*), 2.31 (*в*), 2.32 (*г*), 4.35 (*д*), 4.48 (*е*) (цвет онлайн)

Fig. 7. Projections of limit cycles (left and middle columns) and time series (right column) of self-sustained oscillatory regimes appeared on the base of in-phase cycle C_1 in the main (black curves) and additional (red curves) circuits for the fixed value of $p = 0.5$ and different values of the excitation parameter ε: 0.1 (*a*), 1.6 (*b*), 2.31 (*c*), 2.32 (*d*), 4.35 (*e*), 4.48 (*f*) (color online)

предельных циклов. При малых значениях параметра возбуждения появление мультистабильности определяется двумя последовательными суперкритическими бифуркациями Андронова–Хопфа состояния равновесия и субкритической бифуркацией Неймарка–Сакера седлового предельного цикла. При больших значениях параметра возбуждения мультистабильность возникает через седло-узловые бифуркации рождения пар устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Здесь можно предположить, что механизм формирования мультистабильности через последовательность суперкритических бифуркаций Андронова–Хопфа и субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера более характерен для квазигармонических автоколебательных систем.

В заключение следует отметить, что явления, исследуемые в данной работе, имеют практическое значение. Помимо хорошо известного давно используемого метода стабилизации частоты автоколебаний, в основе которого лежит явление затягивания, недавно было предложено использовать явления, возникающие в генераторе с дополнительным контуром, при создании центральных генераторов ритма [29].

Список литературы

1. *Pisarchik A. N., Hramov A. E.* Multistability in Physical and Living Systems. Switzerland : Springer, 2022. 408 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-98396-3
2. *Pisarchik A. N., Feudel U.* Control of multistability // Phys. Rep. 2014. Vol. 540. P. 167–218. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.02.007
3. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua's circuits // Int. J. of Bifur. and Chaos. 2013. Vol. 23, no. 1. Article number 1330002. https://doi.org/10.1142/S0218127413300024
4. *Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A.* Hidden attractors in dynamical systems // Phys. Rep. 2016. Vol. 637. P. 1–50. http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2016.05.002
5. *Hossain M., Garai S., Jafari S., Pal N.* Bifurcation, chaos, multistability, and organized structures in a predator–prey model with vigilance // Chaos. 2022. Vol. 32. Article number 063139. https://doi.org/10.1063/5.0086906
6. *Manchein C., Santana L., da Silva R. M., Beims M. W.* Noise-induced stabilization of the FitzHugh–Nagumo neuron dynamics: Multistability and transient chaos // Chaos. 2022. Vol. 32. Article number 083102. https://doi.org/10.1063/5.0086994
7. *Meucci R., Ginoux J. M., Mehrabbeik M., Jafari S., Sprott J. L.* Generalized multistability and its control in a laser // Chaos. 2022. Vol. 32. Article number 083111. https://doi.org/10.1063/5.0093727
8. *Bao H., Zhang J., Wang N., Kuznetsov N. V., Bao B. C.* Adaptive synapse-based neuron model with heterogeneous multistability and riddled basins // Chaos. 2022. Vol. 32. Article number 123101. https://doi.org/10.1063/5.0125611
9. *Skardal P. S., Adhikari S., Restrepo J. G.* Multistability in coupled oscillator systems with higher-order interactions and community structure // Chaos. 2023. Vol. 33. Article number 023140. https://doi.org/10.1063/5.0106906
10. *Perks J., Valani R. N.* Dynamics, interference effects, and multistability in a Lorenz-like system of a classical wave–particle entity in a periodic potential // Chaos. 2023. Vol. 33. Article number 033147. https://doi.org/10.1063/5.0125727
11. *Dogonasheva O., Kasatkin D., Gutkin B., Zakharov D.* Multistability and evolution of chimera states in a network of type II Morris–Lecar neurons with asymmetrical nonlocal inhibitory connections // Chaos. 2022. Vol. 32. Article number 101101. https://doi.org/10.1063/5.0117845
12. *Sathiyadevi K., Premraj D., Banerjee T., Lakshmanan M.* Additional complex conjugate feedback-induced explosive death and multistabilities // Phys. Rev. E. 2022. Vol. 106. Article number 024215. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.024215
13. *Mugnaine M., Sales M. R., Szezech J. D., Viana Jr. R. L.* Dynamics, multistability, and crisis analysis of a sine-circle nontwist map // Phys. Rev. E. 2022. Vol. 106. Article number 034203. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.034203
14. *Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J.* Multistability and Delayed Recurrent Loops // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 76, no. 4. P. 708–711. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.708
15. *Baer T.* Large-amplitude fluctuations due to longitudinal mode coupling in diode-laser pumped intracavity-doubled Nd:YAG lasers // J. Opt. Soc. Am. B. 1986. Vol. 3. P. 1175–1180. https://doi.org/10.1364/JOSAB.3.001175
16. *Томпсон Дж. М. Т.* Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М. : Мир, 1985. 254 с.
17. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. New York : Springer-Verlag, 1998. 591 p.
18. *Астахов В. В., Безручко Б. П., Гуляев Ю. В., Селезнев Е. П.* Мультистабильные состояния диссипативно связанных фейгенбаумовских систем // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15, вып. 3. С. 60–65.
19. *Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S.* Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 63. Article number 056212. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.056212
20. *Van der Pol B.* On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two Degrees of Freedom // Phylosophical Magazine and Journal of Science. 1922. Ser. 6. P. 700–719.
21. *Андронов А. А., Витт А. А.* К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы // Журнал технической физики. 1934. Т. 4, вып. 1. С. 122.

22. *Astakhov S., Astakhov O., Astakhov V., Kurths J.* Bifurcational Mechanism of Multistability Formation and Frequency Entrainment in a van der Pol Oscillator with an Additional Oscillatory Circuit // Int. J. of Bifur. and Chaos. 2016. Vol. 26, no. 7. Article number 1650124-1–1650124-10. https://doi.org/10.1142/S0218127416501248
23. *Astakhov O. V., Astakhov S. V., Krakhovskaya N. S., Astakhov V. V., Kurths J.* The emergence of multistability and chaos in a two-mode van der Pol generator versus different connection types of linear oscillators // Chaos. 2018. Vol. 28. Article number 063118. https://doi.org/10.1063/1.5002609
24. *Ermentrout B.* Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students. Philadelphia : SIAM, 2002. 290 p.
25. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей)*. Теория звука : в 2 т. М. : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. Т. 1. 504 с.
26. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М. : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 916 с.
27. *Ланда П. С.* Нелинейные колебания и волны. М. : Наука. Физматлит, 1997. 496 с.
28. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания. М. : Издательство физико-математической литературы, 2002. 292 с.
29. *Kurkin S. A., Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Astakhov S. V., Hramov A. E.* Central pattern generator based on self-sustained oscillator coupled to a chain of oscillatory circuits // Chaos. 2022. Vol. 32. Article number 033117. https://doi.org/10.1063/5.0077789

References

1. Pisarchik A. N., Hramov A. E. *Multistability in Physical and Living Systems*. Switzerland, Springer, 2022. 408 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-98396-3
2. Pisarchik A. N., Feudel U. Control of multistability. *Physics Reports*, 2014, vol. 540, pp. 167–218. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2014.02.007
3. Leonov G. A., Kuznetsov N. V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua's circuits. *Int. J. of Bifur. and Chaos*, 2013, vol. 23, no. 1, article no. 1330002. https://doi.org/10.1142/S0218127413300024
4. Dudkowski D., Jafari S., Kapitaniak T., Kuznetsov N. V., Leonov G. A., Prasad A. Hidden attractors in dynamical systems. *Physics Reports*, 2016, vol. 637, pp. 1–50. http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2016.05.002
5. Hossain M., Garai S., Jafari S., Pal N. Bifurcation, chaos, multistability, and organized structures in a predator–prey model with vigilance. *Chaos*, 2022, vol. 32, article no. 063139. https://doi.org/10.1063/5.0086906
6. Manchein C., Santana L., da Silva R. M., Beims M. W. Noise-induced stabilization of the FitzHugh–Nagumo neuron dynamics: Multistability and transient chaos. *Chaos*, 2022, vol. 32, article no. 083102. https://doi.org/10.1063/5.0086994
7. Meucci R., Ginoux J. M., Mehrabbeik M., Jafari S., Sprott J. L. Generalized multistability and its control in a laser. *Chaos*, 2022, vol. 32, article no. 083111. https://doi.org/10.1063/5.0093727
8. Bao H., Zhang J., Wang N., Kuznetsov N. V., Bao B. C. Adaptive synapse-based neuron model with heterogeneous multistability and riddled basins. *Chaos*, 2022, vol. 32, article no. 123101. https://doi.org/10.1063/5.0125611
9. Skardal P. S., Adhikari S., Restrepo J. G. Multistability in coupled oscillator systems with higher-order interactions and community structure. *Chaos*, 2023, vol. 33, article no. 023140. https://doi.org/10.1063/5.0106906
10. Perks J., Valani R. N. Dynamics, interference effects, and multistability in a Lorenz-like system of a classical wave–particle entity in a periodic potential. *Chaos*, 2023, vol. 33, article no. 033147. https://doi.org/10.1063/5.0125727
11. Dogonasheva O., Kasatkin D., Gutkin B., Zakharov D. Multistability and evolution of chimera states in a network of type II Morris–Lecar neurons with asymmetrical nonlocal inhibitory connections. *Chaos*, 2022, vol. 32, article no. 101101. https://doi.org/10.1063/5.0117845
12. Sathiyadevi K., Premraj D., Banerjee T., Lakshmanan M. Additional complex conjugate feedback-induced explosive death and multistabilities. *Phys. Rev. E*, 2022, vol. 106, article no. 024215. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.024215
13. Mugnaine M., Sales M. R., Szezech J. D., Viana Jr. R. L. Dynamics, multistability, and crisis analysis of a sine-circle nontwist map. *Phys. Rev. E*, 2022, vol. 106, article no. 034203. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.106.034203
14. Foss J., Longtin A., Mensour B., Milton J. Multistability and Delayed Recurrent Loops. *Phys. Rev. Lett.*, 1996, vol. 76, no. 4, pp. 708–711. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.708
15. Baer T. Large-amplitude fluctuations due to longitudinal mode coupling in diode-laser pumped intracavity-doubled Nd:YAG lasers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1986, vol. 3, pp. 1175–1180. https://doi.org/10.1364/JOSAB.3.001175
16. Thompson J. M. T. *Neustoichivosti i katastrofy v nauke i tekhnike* [Instabilities and catastrophes in science and technology]. Moscow, Mir, 1985. 254 p. (in Russian).
17. Kuznetsov Yu. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. New York, Springer-Verlag, 1998. 591 p.
18. Astakhov V. V., Bezruchko B. P., Gulyaev Y. V. Multistable states in dissipatively coupled Feigenbaum systems. *Tech. Phys. Lett.*, 1989, vol. 15, iss. 3, pp. 60–65 (in Russian).
19. Astakhov V., Shabunin A., Uhm W., Kim S. Multistability formation and synchronization loss in coupled Henon maps: Two sides of the single bifurcational mechanism. *Phys. Rev. E*, 2001, vol. 63, article no. 056212. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.63.056212
20. Van der Pol B. On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two Degrees of Freedom. *Phylosophical Magazine and Journal of Science*, 1922, ser. 6, pp. 700–719.

21. Andronov A. A., Vitt A. A. To the mathematical theory of self-sustained oscillatory systems with two degrees of freedom. *J. of Technical Physics*, 1934, vol. 4, iss. 1, pp. 122 (in Russian).
22. Astakhov S., Astakhov O., Astakhov V., Kurths J. Bifurcational Mechanism of Multistability Formation and Frequency Entrainment in a van der Pol Oscillator with an Additional Oscillatory Circuit. *Int. J. of Bifur. and Chaos*, 2016, vol. 26, no. 7, article no. 1650124-1–1650124-10. https://doi.org/10.1142/S0218127416501248
23. Astakhov O. V., Astakhov S. V., Krakhovskaya N. S., Astakhov V. V., Kurths J. The emergence of multistability and chaos in a two-mode van der Pol generator versus different connection types of linear oscillators. *Chaos*, 2018, vol. 28, article no. 063118. https://doi.org/10.1063/1.5002609
24. Ermentrout B. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*. Philadelphia, SIAM, 2002. 290 p.
25. Strett J. B. (Lord Rayleigh). *Teoriya zvuka: v 2 t. T. 1* [Theory of sound. Vol. 1]. Moscow, Gosudarstvennoe isdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1955. 504 p. (in Russian).
26. Andronov A. A., Vitt A. A., Khaikin S. E. *Teoriya kolebanii* [Theory of oscillations]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1959. 916 p. (in Russian).
27. Landa P. S. *Nelineinye kolebaniya i volny* [Nonlinear oscillations and waves]. Moscow, Fizmatlit, 1997. 496 p. (in Russian).
28. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Ryskin N. M. *Nelineinye kolebaniya* [Nonlinear oscillations]. Moscow, Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 2002. 292 p. (in Russian).
29. Kurkin S. A., Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Astakhov S. V., Hramov A. E. Central pattern generator based on self-sustained oscillator coupled to a chain of oscillatory circuits. *Chaos*, 2022, vol. 32, article no. 033117. https://doi.org/10.1063/5.0077789

Поступила в редакцию 24.09.2023; одобрена после рецензирования 11.12.2023; принята к публикации 15.12.2023
The article was submitted 24.09.2023; approved after reviewing 11.12.2023; accepted for publication 15.12.2023