



## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА

**Шморган Сергей Андреевич**

аспирант 2 года обучения направления  
«Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ»  
Инженерной школы цифровых технологий  
Югорского государственного университета,  
Ханты-Мансийск, Россия  
E-mail: s\_shmorgan@ugrasu.ru

**Неустроева Любовь Владимировна**

кандидат физико-математических наук,  
научный сотрудник,  
Югорский государственный университет,  
Ханты-Мансийск, Россия  
E-mail: l\_neustroeva@ugrasu.ru

**Исследование выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема: «Аналитическое и численное исследование обратных задач об определении параметров источников атмосферного или водного загрязнения и (или) параметров среды», код темы: FENG-2023-0004).**

Предмет исследования: задачи численного определения точечных источников в обратных задачах теплообмена.

Цель исследования: описание теоретических результатов (теорема существования и единственности решения обратной задачи), создание алгоритма решения задачи численного определения точечных источников, исследование его свойств, численная реализация алгоритма и его тестирование и проверка на устойчивость.

Объект исследования: задачи численного определения точечных источников (правой части специального вида) в обратных задачах теплообмена. Источники задаются в виде суммы дельта-функций Дирака с коэффициентами, зависящими от времени и характеризующими мощность соответствующего источника. Они являются неизвестными и подлежат определению вместе с решением уравнения. В качестве данных переопределения задаются значения решения в некотором наборе точек, лежащем внутри области.

Методы исследования: алгоритм основан на методе конечных элементов по пространственным переменным и методе конечных разностей по времени. Неизвестная правая часть определяется на каждом временном слое при помощи условия переопределения.

Основные результаты исследования: описание алгоритма решения, его свойств, результаты численных экспериментов. В том числе описаны условия, когда алгебраическая система, к которой приводится задача, имеет единственное решение, проведено сравнение данных, полученных в результате расчетов, с тестовыми примерами. Расчеты проводились в том числе и с добавлением к данным замеров случайного шума различного уровня. Результаты показали, что решение устойчиво при случайном возмущении данных задачи.

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, обратная задача, теплообмен, численное решение, метод конечных элементов.

## ON THE DETERMINATION OF POINTS SOURCES IN INVERSE HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEMS

**Sergey A. Shmorgan**

Postgraduate Student  
Engineering School of Digital Technologies,  
Yugra State University,  
Khanty-Mansiysk, Russia  
E-mail: s\_shmorgan@ugrasu.ru

**Lyubov V. Neustroeva**

Candidate of Physical and Mathematical Sciences,  
Researcher,  
Yugra State University,  
Khanty-Mansiysk, Russia  
E-mail: l\_neustroeva@ugrasu.ru

**The research was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (topic "Analytical and numerical study of inverse problems on determining the parameters of sources of atmospheric or water pollution and (or) environmental parameters", topic code: FENG-2023-0004).**

Subject of research: problems of numerical determination of point sources in inverse heat and mass transfer problems.

Purpose of research: description of theoretical results (theorem of existence and uniqueness of solutions of the inverse problem), creation of an algorithm for solving the problem of numerical determination of point sources, study of its properties, numerical implementation of the algorithm and its testing and verification of stability.

Objects of research: problems of numerical determination of point sources (right-hand side of a special type) in inverse problems of heat and mass transfer. The sources are specified as a sum of Dirac delta functions with coefficients that depend on time and characterize the power of the corresponding source. They are unknown and are to be determined together with a solution of the equation. The values of the solution at a certain set of points lying inside the domain serve as the overdetermination data.

Methods of research: the algorithm is based on the finite element method for spatial variables and the finite difference method for time. The unknown right-hand side is determined at each time layer using the overdetermination condition.

Main results of research: description of the algorithm for solving the problem, its properties, results of numerical experiments. In particular, the conditions are described when the algebraic system to which the problem is reduced has a unique solution. The data obtained as a result of the calculations are compared with test examples. The calculations are also carried out with the addition of random noise of various levels to the measurement data. The results show that the solution is stable under random perturbations of the data.

**Keywords:** parabolic equation, inverse problem, heat and mass transfer, numerical solution, finite element method.

## ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем обратные задачи об определении правой части в уравнении

$$Mu = u_t - Lu = f_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)\delta(x - d_i)$$



$$a(t, x) = (a_1(t, x), \dots, a_n(x, t))^T, \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T, n = 2, 3, (1)$$

где  $Lu = \text{div}(c(x, t)\nabla u) - a(x, t)\nabla u - a_0(x, t)u$ ,  $(x, t) \in Q = (0, T) \times G$ ,  $G$  – область в  $\mathbb{R}^n (n=2,3)$  с границей  $\Gamma$ ,  $c(t, x)$  – диагональная матрица с элементами  $c_i$  на главной диагонали,  $\delta(x-d_i)$  – дельта-функция Дирака. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями:

$$Bu|_S = g, u|_{t=0} = u_0(x), S = (0, T) \times \Gamma, (2)$$

где  $Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u$  – производная по конормали или  $Bu = u$  и условиями переопределения

$$u(t, y_j) = \psi_j(t), j = 1, 2, \dots, r. (3)$$

В теории тепломассопереноса функция  $u$  – концентрация переносимого вещества, а правая часть характеризует источники (стоки) [1]. В самой общей постановке задачи (1)–(3) определению подлежат как сами мощности точечных источников  $N_i(t)$ , так и их местоположение  $x_i$  и их число  $m$ . Описание моделей такого сорта можно найти, например, в [1]. Обратным задачам такого вида посвящено очень большое количество работ, однако основные результаты связаны с методами численного решения подобных задач, причем многие из них далеко не всегда обоснованы. Можно строить примеры, когда постановки оказываются некорректными в том смысле, что имеет место несуществование решений или их неединственность. Как правило, численные методы основаны на сведении задачи к задаче оптимального управления и минимизации соответствующего функционала, что требует больших вычислительных возможностей и не всегда приводит к желаемому результату [2,4,5,6,7]. Некоторые теоретические результаты по исследованию задачи (1)–(3) имеются в работах [8–12]. В работе [11] рассматривается стационарный случай, а в работе [10] – и нестационарный, и граничные условия переопределения (данные Коши), что позволяет, используя наборы тестовых функций и алгоритмы типа Прони, полностью решить задачу определения числа источников, их местоположения и интенсивности. В работе [12] рассматривается модельная задача (1)–(3); с помощью явного представления решений прямой задачи и использования вспомогательной вариационной задачи авторы смогли определить величины  $\sum_i N_i r_{ij}^l$  (здесь  $N_i(t) = \text{const}$  для всех  $i$  и  $r_{ij} = |x_i - y_j|$ ), что позволило решить задачу при помощи алгоритма из работы [11] (см. теорему 2). Однако, как оказалось, можно решить задачу и при помощи асимптотических представлений решений

стационарных задач [14]. В одномерном случае некоторые подобные результаты на эту тему приведены в [13] (асимптотическая формула определения источника и численный алгоритм). Каких-либо общих теорем существования решений задачи (1)–(3), в отличие от распределенного источника (см. [15]), фактически в литературе не имеется (см. одномерный случай в [13]). В настоящей работе мы опишем некоторые условия, гарантирующие существование и единственность решений задачи, и численный алгоритм, в какой-то степени основанный на теоретических рассуждениях. Мы будем рассматривать случай, когда неизвестными являются только мощности источников, а координаты предполагаемых источников считаются известными. Алгоритм основан на методе конечных элементов по пространственным переменным и методе конечных разностей по времени. В конце работы приведены результаты численных экспериментов, которые показали, что решение устойчиво при случайных возмущениях данных задачи.

#### Определения и вспомогательные утверждения

Пусть  $G$  – область в  $\mathbb{R}^n$ . Через  $L_p(G)$  и  $W_p^s(G) (1 \leq p \leq \infty)$  обозначим Лебега и Соболева пространства соответственно [18]. Пусть  $E$  – банахово пространство. Через  $L_p(G; E)$  ( $G$  – область в  $\mathbb{R}^n$ ) обозначим пространство сильно измеримых функций, определенных на  $G$ , со значениями в  $E$  и конечной нормой  $\| \|u(x)\| \|_{L_p(G; E)}$  [18]. Мы также используем пространство  $C^k(G; E)$ , состоящие из функций со значениями в  $E$ , имеющих в  $G$  все производные до порядка  $k$  включительно, непрерывные в  $G$  и допускающие непрерывное продолжение на замыкание  $\bar{G}$ . Определение пространств Соболева  $W_p^s(G; E)$  также стандартное (см. [18, 19]). Для данного интервала  $J = (0, T)$  и цилиндра  $Q = G \times J$  и  $S = \Gamma \times J$  положим  $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$ ,  $W_p^{r,s}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$ . Если  $\Gamma, S$  – некоторые множества, то символ  $\rho(\Gamma, S)$  обозначает далее расстояние между этими множествами. Обозначим через  $D(L)$  область определения оператора  $L$ . Символ  $B_r(x_0)$  обозначает шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x_0$ .

Мы рассматриваем случай:  $G$  – область в  $\mathbb{R}^n$  с компактной границей класса  $C^2$ , или область  $G$  совпадает с цилиндрической областью вида  $\Omega \times (0, l)$ , где  $\Omega$  имеет границу класса  $C^2$  или совпадает с прямоугольником  $(0, X) \times (0, Y)$ . В случае неограниченной области  $G$  решение, которое мы ищем, принадлежит

некоторому пространству Лебега, т. е. фактически предполагаем убывание решения при  $|x| \rightarrow \infty$ . Пусть  $a = (a_1, a_2)$  для  $n=2$  и  $a = (a_1, a_2, a_3)$  для  $n=3$ . Скобками  $(\cdot, \cdot)$  обозначим скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ . Мы приведем известный теоретический результат из работы [16] в случае, когда  $c_i = 1$  ( $i=1, 2, 3$  или  $i=1, 2$  в двумерном случае) и коэффициенты не зависят от времени. В этом случае производная по конормали в граничном условии совпадает с производной по нормали  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  к границе. Предположим, что

$$u_0(x) \in W_2^1(G), u_0(x)|_{\Gamma} = g(x, 0) \text{ если } Bu = u. \quad (4)$$

Пусть  $T = \infty$ . Зафиксируем параметр  $\lambda \geq 0$  и предположим, что

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{1/4, 1/2}(S), \text{ если } Bu = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \quad (\sigma \in C^1(\Gamma)), \quad (5)$$

$$e^{-\lambda t} g \in W_2^{3/4, 3/2}(S), \text{ если } Bu = u, f_0 e^{-\lambda t} \in L_2(G). \quad (6)$$

Введем функции

$$\varphi_j(x) = \frac{-1}{2} \int_0^1 \left( \vec{a}(y_j + \tau(x - y_j)), (x - y_j) \right) d\tau$$

и предположим, что

$$a_i \in W_\infty^2(G) (i=1, \dots, n), \nabla \varphi_j, \Delta \varphi_j (j=1, \dots, s), a_0 \in L_\infty(G), \sigma \in C^1(\Gamma). \quad (7)$$

Решая вспомогательную задачу

$$w_t - Lw = f_0(t, x), Bw|_S = g, w|_{t=0} = u_0(x), \quad (8)$$

можем найти ее решение, и такое, что  $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$  при достаточно большом параметре  $\lambda_0$  и  $\lambda \geq \lambda_0$ . Заметим, что в случае цилиндрической области или параллелепипеда могут потребоваться дополнительные интегральные условия согласования данных, их можно найти, например, в работе [16]. Рассмотрим обратную задачу (1)–(3). После замены переменных  $w = u - w_0$  мы придем к более простой задаче

$$w_t + Lw = \sum_{i=1}^m N_i(t) \delta(x - x_i)$$

$$Bw|_S = 0, w|_{t=0} = 0$$

$$w(y_j, t) = \psi_j(t) - w_0(t, y_j) = \tilde{\psi}_j(t), j = 1, 2, \dots, s.$$

Мы предполагаем, что справедливо представление

$$\tilde{\psi}_j(t) = \int_0^t V_{\delta_j}(t - \tau) \psi_{0j}(\tau) d\tau, \psi_{0j} e^{-\lambda t} \in L_2(0, T), \quad (9)$$

где  $V_\gamma(t)$  определяется своим преобразованием Лапласа:

$$\hat{V}_\gamma(\lambda) = e^{-\sqrt{\lambda} \gamma}, n = 3; \hat{V}_\gamma(\lambda) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda} \gamma), n = 2.$$

Здесь  $H_0^{(1)}$  – это функция Ханкеля и  $\sqrt{\lambda} = |\lambda|^{1/2} e^{i \arg \lambda / 2}$  – ветвь корня аналитическая в плоскости с разрезом  $\arg \lambda = \pi$ . Не так трудно установить, что  $V_\gamma(t) = \frac{e^{-\gamma^2/4t}}{4\pi t}$  при  $n=2$  и при  $n=3, V_\gamma = \frac{\gamma e^{-\gamma^2/4t}}{2\sqrt{\pi^3/2}}$ .

Введем множества  $K = \{y \in G: \rho(y, U_{i=1}^m d_i) \leq \rho(y, \Gamma)\}$ ,  $Q_\varepsilon = \{(t, x) \in Q: |x - d_i| > \varepsilon \forall i=1, 2, \dots, r\}$ . Пусть  $\delta_j = \min_{i=1, \dots, r} r_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ , где  $r_{ij} = |d_i - y_j|$ . Введем матрицу  $A_0$  с элементами  $a_{ji} = e^{\varphi_j(d_i)}$ , если  $|d_i - y_j| = \delta_j$ , и  $a_{ji} = 0$  – в противном случае. Условие корректности записывается в виде

$$\det A_0 \neq 0. \quad (10)$$

Опишем способ построения матрицы  $A_0$ . Матрица есть нормированная главная часть асимптотики по параметру  $\lambda$  (см. [16]) матрицы  $\{v_i(y_j)\}$ , где  $v_i$  есть решение задачи

$$\lambda v_i - L v_i = \delta(x - d_i), B v_i|_r = 0.$$

Фиксируем  $p \in (1, n/(n-1))$ . Тогда справедлива теорема [16].

**Теорема 1.** Пусть  $T = \infty$  и выполнены условия (4), (7), (10) и  $y_i \in K$  для всех  $i=1, 2, \dots, r$ . Тогда найдется  $\lambda_0 \geq 0$  такое, что при  $\lambda \geq \lambda_0$  и выполнении условий (5), (6), (9) существует единственное решение задачи (1)–(3) такое, что  $u = w_0 + w$ ,  $w_0$  есть решение вспомогательной задачи (8),  $e^{-\lambda t} w_0 \in W_2^{1,2}(Q)$ ,  $e^{-\lambda t} \vec{N} \in L_2(0, \infty)$ ,  $e^{-\lambda t} w \in L_2(0, \infty; W_p^1(G))$ ,  $e^{-\lambda t} w_i \in L_2(0, \infty; W_{p,B}^{-1}(G))$ ,  $e^{-\lambda t} w \in W_2^{1,2}(Q_\varepsilon)$  для всех  $\varepsilon > 0$ .

Здесь пространство  $W_{p,B}^{-1}(G)$  есть двойственное пространство к  $W_2^1(G)$  в случае условия Дирихле и к  $W_2^1(G)$  в случае условия Неймана или Робина.

Теорема останется справедливой и в случае конечного интервала  $(0, T)$  (см. [16]). Несмотря на то, что мы рассматриваем случай не зависящих от  $t$  коэффициентов, расчеты показывают, что на нее можно опираться при рассмотрении вопросов единственности решений. В общем случае, в зависимости от расположения точек замеров  $\{b_j\}$ , может иметь место неединственность решений, и примеры легко строятся.

#### Описание алгоритма решения задачи

Опишем численный алгоритм. Считаем, что пространственная область имеет вид  $G = \Omega \times (0, Z)$  в случае  $n=3$  и  $G$  – прямоугольник в случае  $n=2$ . Положим  $\Gamma = \partial G, S = (0, T) \times \Gamma$ . Опишем метод и результаты численных экспериментов в случае  $n=2, G$  – круг радиуса 2 с

центром в 0. Естественным образом считаем, что функция  $c_i$  строго положительна. Начально-краевые условия имеют вид:

$$u|_{t=0} = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = 0,$$

где производная есть производная по нормали. Для численного решения используем метод конечных элементов. Определению подлежат решение  $u$  и неизвестные функции  $\alpha_i$  в правой части уравнения (1). Опишем метод решения прямой задачи. Задана триангуляция области  $G$  и соответствующий базис метода конечных элементов  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N (\varphi_i|_{\Gamma} = 0)$ . Узлы сетки обозначим через  $\{b_i\}$ . Без ограничения общности считаем, что точки  $b_j (j=1, 2, \dots, r)$  совпадают с точками источников, а точки  $\{y_i = (y_i^1, y_i^2)\}$  – с точками  $b_{N-r+1}, b_{N-r+2}, \dots, b_N$ . Пусть  $b_i = (x_i^1, x_i^2)$ .

Прежде чем приводить метод решения, приведем дополнительную замену

$$v = u - \Phi, \Phi = \sum_{i=N-r+1}^N \psi_i(t) \frac{(x_1^2 + x_2^2 - 4)^2 \prod_{j \neq i} |x - b_j|^2}{((x_1^1)^2 + (x_2^1)^2 - 4)^2 (x_1^1 - X)^2 \prod_{j \neq i} |b_i - b_j|^2}.$$

Функция  $v$  есть решение задачи

$$Mv = f - M(\Phi) = f_0$$

$$v(y_i, t) = 0, i = 1, 2, \dots, r, y_i \in G$$

$$v|_{t=0} = u_0(x) - \Phi(0, x) = v_0(x), \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = 0$$

Ищем приближенное решение в виде  $v = \sum_{i=1}^N C_i(t) \varphi_i$ .

Для удобства далее считаем, что точки  $y_i$  совпадают с узлами сетки  $b_{N-r+1}, \dots, b_N$ . Функции  $C_i$  определяем из системы

$$R_0 \vec{C}_i + R_1(t) \vec{C} = \vec{F} + \vec{f}_0, \vec{C} = (C_1, C_2, \dots, C_N)^T, \quad (11)$$

где  $\vec{F}$  имеет координаты  $F_j = \alpha_j(t)$  для  $j \leq r$  и  $F_j = 0$  при  $j > r$ , и координаты  $\vec{f}_0$  имеют вид

$$f_j = (f_0(t, x), \varphi_j) = \int_G f_0(t, x) \varphi_j dx,$$

$R_0$  – матрица с элементами  $r_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j) = \int_G \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$ ,  $R_1$  – матрица с элементами

$$R_{jk} = (c_1(t, x) \varphi_{kx_1}, \varphi_{jx_1}) + (c_2(t, x) \varphi_{kx_2}, \varphi_{jx_2}) + (b(t, x) \nabla \varphi_k, \varphi_j) + (a(t, x) \varphi_k, \varphi_j) \quad (12)$$

Имеем, что  $\vec{C}(0) = (v_0(b_1), v_0(b_2), \dots, v_0(b_N))^T$ . Решение системы ищем методом конечных разностей. Пусть  $\tau = T/M$  – шаг по времени. Заменяем уравнение (11) системой

$$R_0 \frac{\vec{C}_{i+1} - \vec{C}_i}{\tau} + A_{i+1} \vec{C}_{i+1} = \vec{F}_{i+1} + \vec{f}_{i+1}, \vec{C}_i = (C_i^1, \dots, C_i^N)^T, i = 0, 1, 2, \dots, M-1,$$

где  $C_i^k \approx C_k(\tau i)$ ,  $\vec{F}_i \approx \vec{F}(\tau i)$ ,  $\vec{f}_i = \vec{f}_0(\tau i)$ ,  $A_i = R_1(\tau i)$ . Систему (12) можно записать в виде

$$R_{i+1} \vec{C}_{i+1} = \tau \vec{F}_{i+1} + \tau \vec{f}_{i+1} + R_0 \vec{C}_i, C_i^k = C_k(\tau i), \vec{C}_i = (C_i^1, \dots, C_i^N)^T, i = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (13),$$

где  $R_{i+1} = R_0 + \tau A_{i+1}$ . Опишем алгоритм решения обратной задачи.

Пусть  $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t) \dots \alpha_r(t))^T$ ,  $\vec{\alpha}_i = (\alpha_i^1 \dots \alpha_i^r) \approx \vec{\alpha}(\tau i)$ .

В силу условий переопределения должно быть выполнено, что  $C_k^{N-r+i} = 0$ . Определим начальные данные. Имеем  $C_0^k = v_0(b_k)$  при  $k = 1, \dots, N$ .

Предположим, что мы нашли векторы  $\vec{\alpha}_i, \vec{C}_i$ . Ищем величину  $\vec{C}_{i+1}$  из системы

$$R_{i+1} \vec{C}_{i+1} = \tau \vec{F}_{i+1} + \tau \vec{f}_{i+1} + R_0 \vec{C}_i. \quad (14)$$

Вектор  $\vec{\alpha}_{i+1}$  определяем из системы

$$\tau B_{i+1} \vec{\alpha}_{i+1} = -\tau \Phi_0 R_{i+1}^{-1} \vec{f}_{i+1} - \Phi_0 R_{i+1}^{-1} R_0 \vec{C}_i, \quad (15)$$

где  $r \times r$  матрица имеет вид  $B_{i+1} = \Phi_0 R_{i+1}^{-1} \Phi_1$ , где  $\Phi_0$  – матрица  $r \times N$ , в первых  $N-r$  столбцах которой стоят нули, а в последних  $r$  столбцах стоит единичная матрица размера  $r \times r$ ,  $\Phi_1$  матрица  $N \times r$ , в последних  $N-r$  строках стоят нули, а в первых  $r$  строках стоит единичная матрица размера  $r \times r$ . Матрица  $B_i$  может быть сингулярной (с малыми элементами). Однако для корректности задачи мы считаем, что  $\det B_i \neq 0$  для всех  $i$ . В ряде случаев это действительно так. Вместо системы рассмотрим ее регуляризацию. Матрица  $B_{i+1}$  малой размерности. Регуляризация имеет вид

$$\tau (B_{i+1}^* B_{i+1} + \varepsilon) \vec{\alpha}_{i+1} = -\tau B_{i+1}^* \Phi_0 R_{i+1}^{-1} \vec{f}_{i+1} - B_{i+1}^* \Phi_0 R_{i+1}^{-1} R_0 \vec{C}_i, \quad (16)$$

где  $B_{i+1}^*$  – сопряженная матрица. Определив вектор  $\alpha_{i+1}$ , найдем вектор  $C_{i+1}$  из (13).

Опишем некоторые свойства алгоритма. Как видно, если не использовать регуляризацию, то задача решается единственным образом (уравнение (15) имеет единственное решение), если  $\det B_i \neq 0$ . Предположим, что это условие выполнено. Пусть  $P_0$  – проектор в  $\mathbb{R}^N$ , сопоставляющий вектору  $\vec{v}$  вектору, у которого первые  $N-r$  нулевые, а остальные совпадают с координатами  $\vec{v}$ . Его можно задать в виде матрицы, в которой  $p_{ij}^0 = \delta_{ij}$  при  $i, j = N-r+1, \dots, N$ , а остальные элементы  $p_{ij}^0$  равны нулю. Пусть также  $P_1$  – аналогичный проектор, использующий первые  $r$  координат данного вектора:  $p_{ij}^1 = \delta_{ij}$  при  $i, j = 1, \dots, r$ , а остальные элементы  $p_{ij}^1$  равны нулю. Тогда систему (15) можно записать в виде

$$\tau P_0 R_{i+1}^{-1} P_1 \vec{F}_{i+1} = \tau P_0 R_{i+1}^{-1} \vec{f}_{i+1} + P_0 R_{i+1}^{-1} R_0 \vec{C}_i, B_{i+1} = P_0 R_{i+1}^{-1} P_1.$$

Чтобы не загромождать изложение, мы сохранили то же обозначение для новой матрицы  $B_{i+1}$ , которая здесь уже отлична от определенной в (15). Имеем, что  $\det B_{i+1} = 0$ , но в силу наших предположений  $\ker B_{i+1} = \{\vec{C}: P_i \vec{C} = 0\}$ . В качестве скалярного произведения в  $\mathbb{R}^N$  можно рассматривать обычное скалярное произведение  $(\cdot, \cdot)$ , а можно и скалярное произведение вида  $\langle \vec{C}, \vec{V} \rangle = (R_0 \vec{C}, \vec{V})$ . В первом случае  $B_{i+1}^* = P_i (R_{i+1}^*)^{-1} P_0$ , во втором случае  $B_{i+1}^* = (P_i)^* (R_{i+1}^*)^{-1} (P_0)^*$ . По определению, в первом случае  $P_i = (P_i)^*$  и  $\ker B_{i+1}^* = \{\vec{C}: P_0 \vec{C} = 0\}$  во втором случае и  $\ker B_{i+1}^* = \{\vec{C}: (P_0)^* \vec{C} = 0\}$  во втором. Оператор  $B_{i+1}$  отображает  $H_0 = (\ker B_{i+1})^\perp$  на  $H_1 = (\ker B_{i+1}^*)^\perp$ . Здесь  $\ker B_{i+1} = \{\vec{C}: P_i \vec{C} = 0\}$ , соответственно,  $(\ker B_{i+1})^\perp = \{\vec{v}: P_i^* \vec{v} = \vec{v}\}$ . Действительно,  $\langle \vec{v}, \vec{C} \rangle = \langle P_i^* \vec{v}, \vec{C} \rangle = 0$ . Обратное, если  $\langle \vec{v}, \vec{C} \rangle = 0$  для всех  $\vec{C} \in \ker B$ , то  $\vec{C} = (I - P_i) \vec{g}$  и  $\langle \vec{v}, (I - P_i) \vec{g} \rangle = 0$ . Тогда  $(I - P_i^*) \vec{v} = 0$ . Поскольку матрица  $B_{i+1}$  сингулярная, берем в качестве решения системы (15) (оно находится неоднозначно) вектор

$$\tau \vec{\alpha}_{i+1} = -(B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* (\tau P_0 R_{i+1}^{-1} \vec{f}_{i+1} + P_0 R_{i+1}^{-1} R_0 \vec{C}_i),$$

который выбирается исходя из включения  $\vec{\alpha}_{i+1} \in H_0$ , т. е.  $P_i \vec{\alpha}_{i+1} = \vec{\alpha}_{i+1}$ . Подставляя это решение в систему (14), получим

$$\vec{C}_{i+1} = \tau (R_{i+1}^{-1} \vec{f}_{i+1} - R_{i+1}^{-1} (B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* P_0 R_{i+1}^{-1} \vec{f}_{i+1}) + R_{i+1}^{-1} R_0 \vec{C}_i - R_{i+1}^{-1} (B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* P_0 R_{i+1}^{-1} R_0 \vec{C}_i$$

Пусть  $P = R_{i+1}^{-1} (B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* P_0$ . Тогда последнее равенство можно записать в виде

$$\vec{C}_{i+1} = \tau (I - P) R_{i+1}^{-1} \vec{f}_{i+1} + (I - P) R_{i+1}^{-1} R_0 \vec{C}_i. \quad (17)$$

Отметим, что оператор  $I - P$  есть проектор, т. е.  $P^2 = P$ . Более того, имеет место равенство  $P_0 (I - P) = 0$ , т. е.  $R(I - P) \subset \ker P_0$ . Действительно,

$$P^2 = R_{i+1}^{-1} (B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* P_0 R_{i+1}^{-1} (B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* P_0 = R_{i+1}^{-1} (B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* B_{i+1} (B_{i+1}^* B_{i+1})^{-1} B_{i+1}^* P_0 = P.$$

Приведенные выше рассуждения показывают (см. равенство (17)) Лемма 1. Оператор перехода с одного временного слоя на другой, определенный равенством (17), отличается от стандартного для прямой задачи  $P$ , размерность которого не увеличивается с уменьшением параметров сетки и параметра  $\tau$ .

Опишем условия невырожденности матрицы  $B_i$ . Пусть функция  $v_i$  – решение эллиптической задачи с параметром

$$M v_i = \frac{1}{\tau} - L(t, x) v_i = \delta(x - d_i), v_i|_\Gamma = 0.$$

При решении этой задачи методом конечных элементов ищем решение в виде  $\vec{v}_i = \sum^N C_j^i(t) \varphi_{ij}$ , где векторы  $\vec{C}_i$  определяются как  $\vec{C}_i = \tau R^{-1} F_i$ , где  $F_i$  совпадает с базисным вектором  $i$ , координата которого совпадает с 1, а остальные координаты – нули. Матрица  $R$  зависит от  $t$  как от параметра и совпадает в точках  $t_k = \tau k$  с матрицей  $R_k$ , определенной выше. В случае регулярного семейства конечных элементов можно показать, что будет иметь место сходимость элементов  $\{\vec{v}_i(t, y_j)\} = C_j^i(j = N - r + 1, \dots, N, i = 1, 2, \dots, r)$  к элементам матрицы  $\{v_i(t, y_j)\}$  при каждом  $t$ , в том числе и в точках  $t = t_k$  (см. теоремы 3.1.5, 3.1.6 в [19]). В случае  $L = \Delta$ , построив матрицу  $A_0$ , которая в данном случае будет зависеть от  $t$ , а роль параметра  $\lambda$  будет играть роль параметр  $1/\tau$ , мы приходим к условию:

при всех  $\tau \leq \tau_0$  с некоторым  $\tau_0 > 0$  и всех  $t \in [0, T], \det A_0 \neq 0$ .

В общем случае возникает условие: при каждом  $t \in [0, T]$  и всех  $\tau \leq \tau_0$  с некоторым  $\tau_0 > 0$

$$\det \tilde{A}_0 \neq 0, \tilde{A}_0 = \{v_i(y_j)\}, (j = N - r + 1, \dots, N, i = 1, 2, \dots, r).$$

Это условие есть достаточное условие разрешимости системы (15). Однако даже при выполнении этого условия матрица  $B_i$  все же может быть плохо обусловленной. Поэтому мы используем регуляризацию (см. равенство (16)).

Запись алгоритма в случае граничного условия Неймана или Робина имеет тот же вид.

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В этом разделе проанализируем результаты численных экспериментов, полученных в рамках решения прямой и обратной задачи, в рамках экспериментов на ЭВМ. Характеристики испытуемой ЭВМ: процессор: Intel i5 9500; ОЗУ: 16,00 ГБ; тип системы: Windows 10. Численные эксперименты были проведены в программном комплексе MATLAB 2024a.

Возьмем в качестве области  $G$  круг  $|x| = 2$ , примерная сетка указана на рис. 1. Возьмем  $T = 5$  и рассмотрим однородное условие Дирихле. В качестве коэффициентов  $a_0 = (t+1)(x^2+1)$ ,  $a_1 = 2/(t^2+1)$ ,  $a_2 = (t+1)(x+1)$ ,  $c_1 = (t-1)^2$ ,  $c_2 = 2t+1$ .

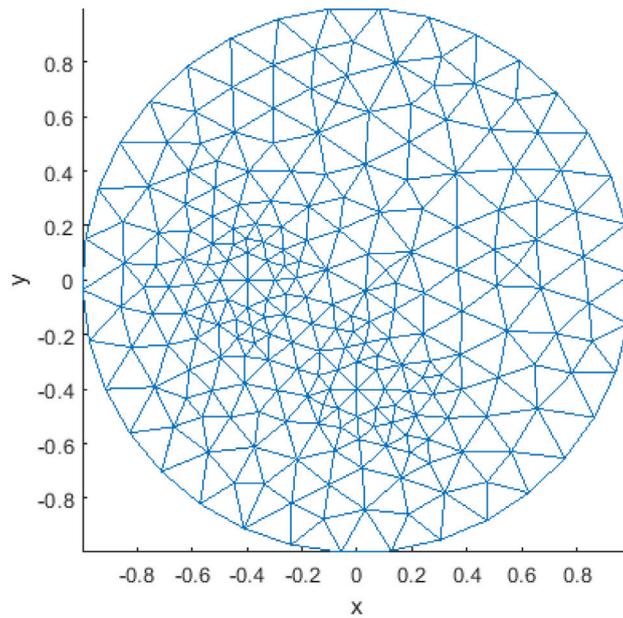


Рисунок 1. Количество узлов сетки 530

### Первая группа вычислений

Для первой группы экспериментов берем  $u = (x^2 + y^2 - 4)^2 (t^2 + t)$ ,  $\alpha_1 = t^3 + t$ ,  $\alpha_2 = \frac{10 + \cos(3t)}{\exp(t)}$ . Точки  $d_i$  имеют координаты:  $(0; -0,4)$  и  $(-0,4; 0)$ .

$$f_0 = t(x^2 + y^2) - 1 - ((x)((t^2 + 2)) - ((y)((t - 2)^3)).$$

Возьмем в качестве параметра  $\varepsilon_a = \max_i (\max_j |\alpha^j(i\tau) - \alpha_i^j|)$  – ошибка вычисления

функции  $\alpha_i$  в граничном условии, где  $\alpha_i^j \approx \alpha^j(\tau_i)$  – результаты вычисления. Процесс вычисления прекращается после того, как  $\varepsilon_a$  становится меньше  $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ .

Результат восстановления искомым функций представлен на рисунке 2. Зеленым обозначены найденные функции, красным – эталонные.

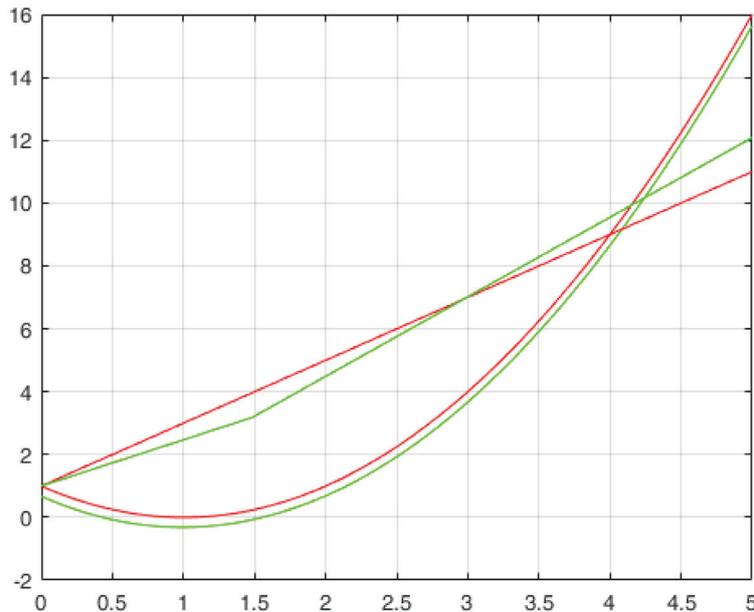


Рисунок 2. Результат вычисления первой группы

Далее были добавлены источники генерации шума – в возмущение значений «данных с датчиков» добавляется случайный шум

$\text{noise} \in (-\delta; \delta)$ , где  $\delta$  – процентное выражение отклонения. Итоговая функция принимает вид  $\psi_i(j\tau) = \psi_i(j\tau)(1 + \text{noise}(j\tau))$ ,  $j = 1, \dots, M$ . Мы

проводим расчеты с различным уровнем шума (добавляемый шум строится при помощи функции random пакета «Матлаб»). Результат

вычислений с шумом 3 % ( $\delta=0.03$ ) представлен на рисунке 3 и с шумом 10 % ( $\delta=0.1$ ) – на рисунке 4.

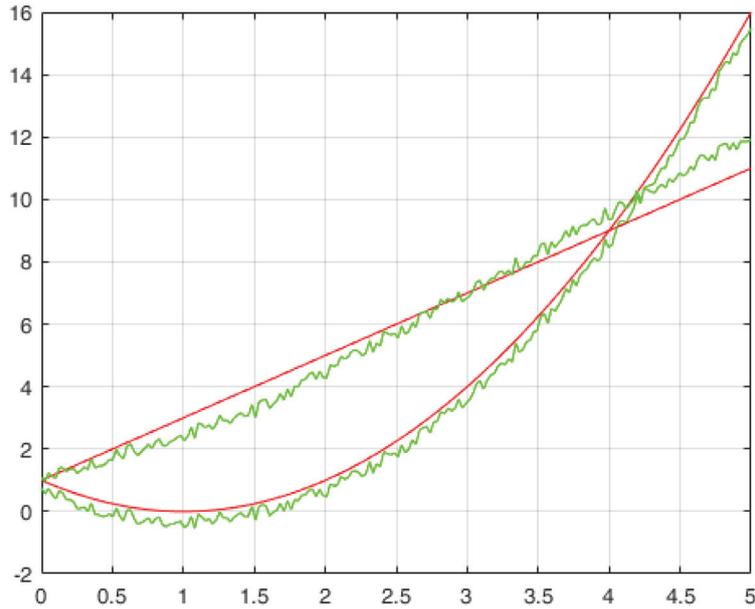


Рисунок 3. Результат вычисления первой группы с добавлением шума 3 %

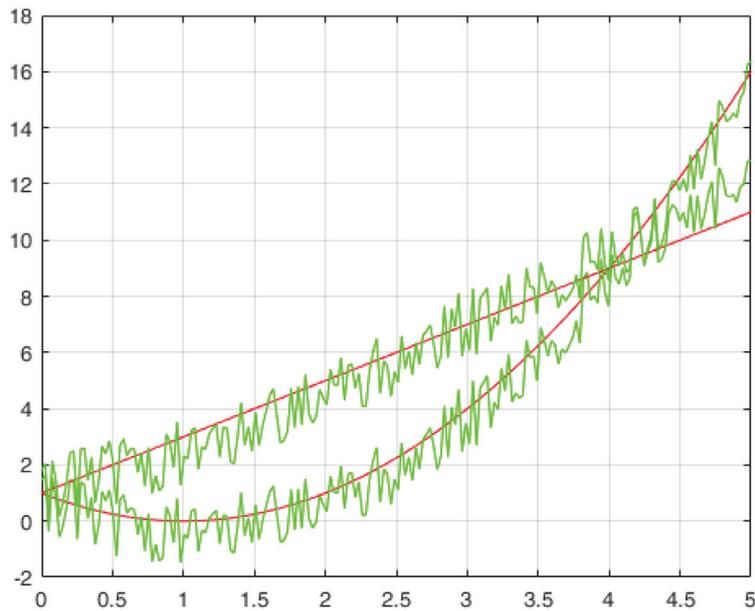
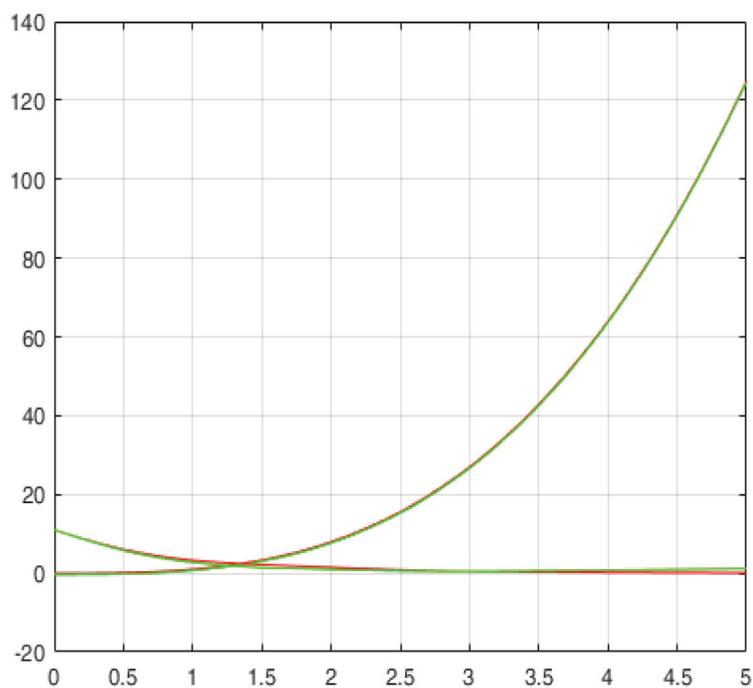


Рисунок 4. Результат вычисления первой группы с добавлением шума 10 %

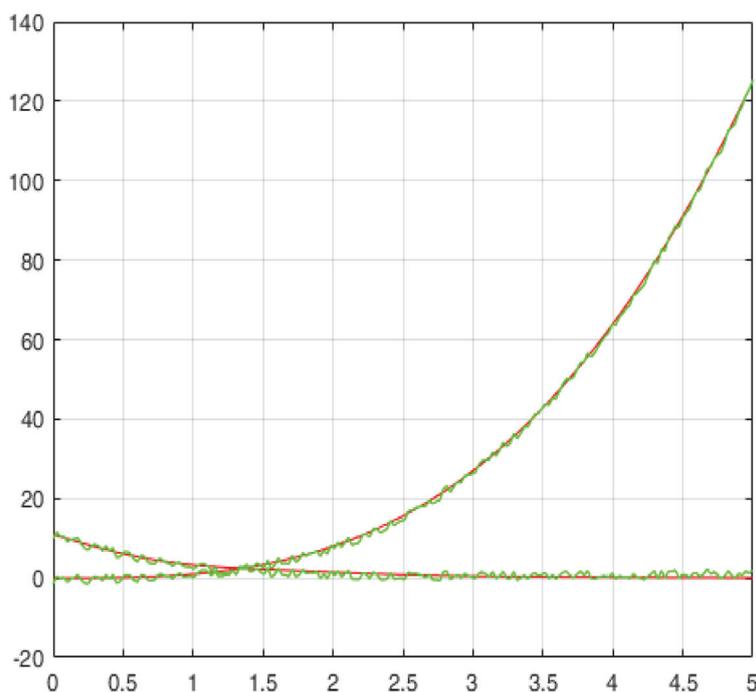
### Вторая группа вычислений

Для второй группы экспериментов  $u = \cos\pi(x^2 + y^2)t$  построение ведется на той же сетке (рисунок 1), возьмем те же самые начальные условия и параметры уравнения, функции  $\alpha_i$  имеют вид:  $\alpha_1 = (t-1)^2$ ,  $\alpha_2 = t^2 + 1$ . Коэффициенты те же самые, что и в первом случае.  $f_0 = (x+1)(y+1)(t+1) - ((x)(t^2+2) - ((y)((t-2)^3))$ .

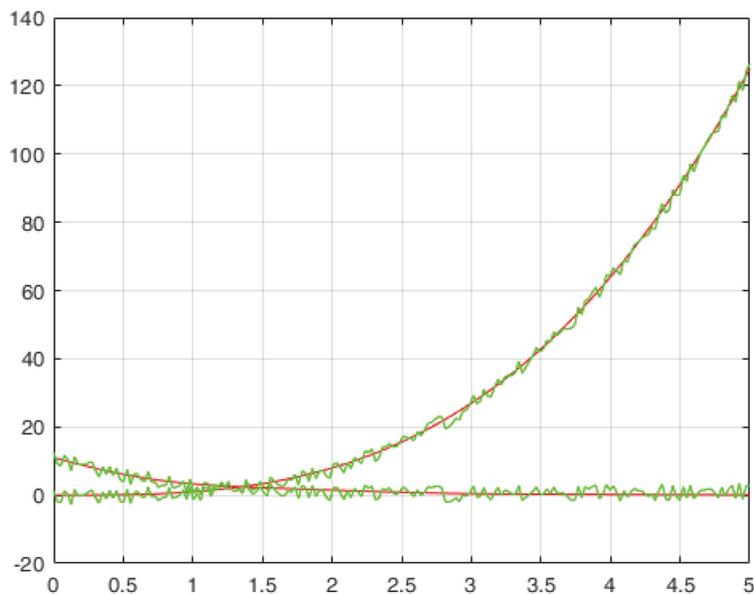
Для повышения точности было решено увеличить точность расчетов и взять значение  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$ . Результат построения представлен на рисунке 5, зеленым обозначены найденные функции, красным – эталонные. Как можно заметить, графики сходятся намного лучше.



**Рисунок 5.** Результат вычисления второй группы



**Рисунок 6.** Результат вычисления второй группы с добавлением шума 3 %



**Рисунок 7.** Результат вычисления второй группы с добавлением шума 10 %

Для данных 2 группы было проведено 15 экспериментов, по результатам которых собрана следующая статистика: средняя ошибка равна 0,0035, среднее время выполнения – 2,2 с; при добавлении шума 3 % показатели такие: средняя ошибка равна 0,0045, среднее время выполнения – 3,5 с; при добавлении шума 10 % средняя ошибка равна 0,0037, время выполнения – 5,1 с.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В работе рассмотрен вопрос о численном определении точечных источников (правой части специального вида) в обратных задачах тепломассопереноса. Описаны некоторые теоретические результаты, численный алгоритм и условия единственности решений. Приведены результаты численных экспериментов, которые показали, что алгоритм сходится и решение определяется устойчиво при случайном возмущении данных задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marchuk, G. I. *Mathematical Models in Environmental Problems* / G. I. Marchuk. – Amsterdam : Elsevier Science Publishers, 1986. – 217 p.
2. Ozisik, M. N. *Inverse Heat Transfer* / M. N. Ozisik, H. R. B. Orlande. – New York : Taylor & Francis, 2000. – 297 p.
3. Алифанов, О. М. Обратные задачи сложного теплообмена / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхов, А. В. Ненарокомов. – Москва : Янус-К, 2009. – 299 с. – Текст : непосредственный.
4. Панасенко, А. Е. Численное решение некоторых обратных задач с различными типами источников атмосферного загрязнения / А. Е. Панасенко, А. В. Старченко. – Текст : непосредственный // Вести Томского государственного университета. Математика и механика. – 2008. – № 2 (3). – С. 47–55.
5. Пененко, В. В. Вариационные методы усвоения данных и обратные задачи для изучения атмосферы, океана и окружающей среды / В. В. Пененко. – Текст : непосредственный // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 341–351.
6. Deng, X. On linear finite elements for simultaneously recovering source location and intensity / X. Deng, Y. Zhao, J. Zou // *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. – 2013. – Vol. 10, № 3. – P. 588–602.
7. Пененко, А. В. Алгоритмы локализации источников загрязнения атмосферного воздуха на основе данных автоматизированной системы экологического мониторинга / А. В. Пененко, С. К. Рахметуллина. – Текст : непосредственный // Сибирские электронные математические известия. – 2013. – Т. 10. – С. 35–54.
8. Badia, A. El. Identification of a point source in a linear advectiondispersionreaction equation: application to a pollution source problem / A. El. Badia, T. Ha-Duong, A. Hamdi // *Inverse Problems*. – 2005. – Vol. 21, № 3. – P. 1121–1136.
9. Badia, A. El. Inverse source problem in an advection-dispersion-reaction system: application to water pollution / A. El. Badia, A. Hamdi // *Inverse Problems*. – 2007. – Vol. 23. – P. 2103–2120.
10. Badia, A. El. Inverse source problem for the heat equation: application to a pollution detection problem / A. El. Badia, T. Ha-Duong // *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. – 2002. – Vol. 10, № 6. – P. 585–599.
11. Badia, A. El. An inverse source problem in potential analysis / El. Badia, T. Ha-Duong // *Inverse Problems*. – 2000. – Vol. 16, Iss. 3. – P. 651–663.

12. Ling, L. Point sources identification problems for heat equations / L. Ling, T. Takeuchi // *Communications in Computational Physics*. – 2009. – Vol. 5, № 5. – P. 897–913.
13. Pyatkov, S. G. Point sources recovering problems for the one-dimensional heat equation / S. G. Pyatkov, E. I. Safonov // *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*. – 2019. – Vol. 11, Iss. 01. – P. 496–510.
14. Pyatkov, S. G. On some asymptotic representations of solutions to elliptic equations and their applications / S. G. Pyatkov, L. V. Neustroeva // *Complex Variables and Elliptic Equations*. – 2021. – Vol. 66, № 6-7. – P. 964–987.
15. Баранчук, В. А. О некоторых классах обратных задач с точечным переопределением для математических моделей теплопереноса / В. А. Баранчук, С. Г. Пятков. – Текст : непосредственный // *Вестник ЮГУ*. – 2020. – № 3. – С. 38–48.
16. Пятков, С. Г. О разрешимости обратных задач об определении точечных источников / С. Г. Пятков, Л. В. Неустроева. – Текст : непосредственный // *Математические заметки СВФУ*. – 2022. – Т. 29, № 2. – С. 43–58.
17. Belonogov, V. A. On solvability of some classes of transmission problems in a cylindrical space domain / V. A. Belonogov, S. G. Pyatkov // *Сибирские электронные математические известия*. – 2021. – Т. 18, № 1. – С. 176–206.
18. Triebel, H. *Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators* / H. Triebel. – Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. – 532 p.
19. Ciarlet, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems* / P. G. Ciarlet. – Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1978. – 554 p.