

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ПО МОДЕЛЯМ ВЛАСОВА И СЛИВКЕРА

С.Ф. ДЬЯКОВ, аспирант

Санкт-Петербургский Государственный Политехнический Университет;
195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая 29, ПГК, а. 105.
stass.f.dyakov@gmail.com

При проектировании строительных и мостовых конструкций в виде сложных многоэлементных систем, имеющих в своем составе тонкостенные стержни с открытым профилем поперечного сечения, возникают проблемы, связанные с учетом стесненного сечения. В статье приводится решение дифференциального уравнения закручивания стержня с учетом деформаций сдвига, а так же сравнение полученных результатов с классической теорией В.З. Власова

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тонкостенный стержень, полусдвиговая теория, дифференциальное уравнение закручивания.

1. Введение

В теории тонкостенных стержней открытого профиля Власова В. З. в качестве основополагающего постулата выступает тезис об отсутствии сдвигов в срединной поверхности тонкостенного стержня. В. И. Сливкер в своей монографии [1] предлагает теорию, которая позволяет частично учесть деформацию сдвига. Главная его мысль заключается в том, что он предлагает представить касательные напряжения как сумму двух слагаемых: *касательных напряжений изгиба*, порожденных поперечными силами Q_x и Q_y и *касательных напряжений кручения*, вызываемых моментом стесненного кручения M_ω . Далее предлагается пренебречь касательными напряжениями изгиба, отнеся их в разряд второстепенных, в тоже время сохранив касательные напряжения кручения. Теория с таким разделением называется *полусдвиговой теорией тонкостенных стержней*. Главным ее плюсом по сравнению со сдвиговой теорией является то, что она оказывается существенно проще. Рассмотрим тонкостенный стержень, работающий на кручение. В рамках полусдвиговой теории, когда угол закручивания $\theta(x)$ и мера депланации $\beta(x)$ являются независимыми функциями, уравнения равновесия для стержня имеют вид:

$$\begin{cases} -GI_x \theta'' - \frac{r^2 GA}{\mu_{\omega\omega}} \cdot (\theta'' - \beta') = m_x \\ EI_\omega \beta'' + \frac{r^2 GA}{\mu_{\omega\omega}} \cdot (\theta' - \beta) = m_b \end{cases}, \quad (1)$$

где

E – модуль Юнга; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$, ν – коэффициент Пуассона; β – функция меры деформации; θ – угол закручивания; I_ω – секториальный момент инерции; I_x – крутильный момент инерции; A – площадь поперечного сечения; m_x – распределенный крутящий момент по длине стержня; m_b – распределенный би-момент по длине стержня; r – полярный радиус инерции.

Задачу кручения, описываемую дифференциальными уравнениями (1) легко свести к одному уравнению третьего порядка относительно функции $\beta(x)$. В результате дифференциальное уравнение для задачи кручения в полусдвиговой теории тонкостенных стержней открытого профиля запишется в виде:

$$\psi EI_\omega \beta''' - GI_x \beta' = m_x - \psi m_b', \quad \text{где} \quad (2)$$

$\psi = 1 + \frac{\mu_{\omega\omega} I_x}{I_r}$ – безразмерный геометрический параметр; I_r – полярный момент инерции; $\mu_{\omega\omega}$ – коэффициент формы сечения.

Если деформация сдвига не учитывается, выражения в круглых скобках в (1) следует приравнять нулю, откуда следует, что:

$$\beta = \theta' \quad (3)$$

тогда, проинтегрировав второе выражение в (1) по x , суммируя с первым уравнением в (1) и подставляя выражение из (3) получим классическое дифференциальное уравнение В.З. Власова [2]. Для сравнения справа приведено уравнение из (2):

Дифф. уравнение Власова В.З.

Дифф. уравнение Сливкера В.И.

$$\theta^{IV} - k_1^2 \theta'' = \frac{m_x - m_b'}{EI_\omega}, \quad \text{где } k_1 = \sqrt{\frac{GI_x}{EI_\omega}} \quad \beta''' - k^2 \beta' = \frac{m_x - \psi m_b'}{\psi EI_\omega}, \quad \text{где } k = \sqrt{\frac{GI_x}{\psi EI_\omega}}$$

В статье [3] приводится построение матрицы жесткости и последующее определение обобщенных перемещений стержня с помощью метода конечных элементов. Целью данной статьи является получить точное уравнение углов закручивания и меры деформации стержня при различных способах его закрепления.

2. Решение дифференциального уравнения относительно функции меры деформации

Требуется найти решение линейного неоднородного уравнения:

$$\beta''' - k^2 \beta' = f(x), \quad \text{где} \quad (4)$$

$f(x) = \frac{m_x + \psi m_b'}{\psi EI_\omega}$ – непрерывная на участке (x_0, x) функция, удовлетворяющая начальным условиям.

Найдем фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$\beta''' - k^2 \beta' = 0, \quad (5)$$

соответствующего уравнению (4). Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$\beta = A + B \operatorname{ch}(kx) + C \operatorname{sh}(kx), \quad \text{где} \quad (6)$$

A, B, C – произвольные постоянные, а функции $\beta_1 = 1$; $\beta_2 = \operatorname{ch}(kx)$; $\beta_3 = \operatorname{sh}(kx)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (5).

Общее решение неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольных постоянных в виде:

$$\beta = A(x) + B(x) \operatorname{ch}(kx) + C(x) \operatorname{sh}(kx), \text{ где} \quad (7)$$

функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} A'(x) + B'(x) \operatorname{ch}(kx) + C'(x) \operatorname{sh}(kx) = 0 \\ B'(x)k \operatorname{sh}(kx) + C'(x)k \operatorname{ch}(kx) = 0 \\ B'(x)k^2 \operatorname{ch}(kx) + C'(x)k^2 \operatorname{sh}(kx) = f(x) \end{cases}, \text{ где} \quad (8)$$

Из (8) находим:

$$A'(x) = -\frac{f(x)}{k^2}, \quad B'(x) = \frac{f(x) \cdot \operatorname{ch}(kx)}{k^2}, \quad C'(x) = -\frac{f(x) \cdot \operatorname{sh}(kx)}{k^2}, \quad (9)$$

откуда

$$\begin{aligned} A(x) &= -\int_{x_0}^x \frac{f(s)}{k^2} ds + \alpha_1; & B(x) &= \int_{x_0}^x \frac{f(s) \cdot \operatorname{ch}(ks)}{k^2} ds + \alpha_2; \\ C(x) &= -\int_{x_0}^x \frac{f(s) \cdot \operatorname{sh}(ks)}{k^2} ds + \alpha_3, \text{ где} \end{aligned} \quad (10)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – произвольные постоянные.

Подставив (10) в (7), получим общее решение уравнения (4):

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 \operatorname{ch}(kx) + \alpha_3 \operatorname{sh}(kx) + \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{k^2} \cdot (\operatorname{ch}(ks - kx) - 1) ds \quad (11)$$

Получив общее решение для функции меры деформации $\beta(x)$ нужно найти общее выражение для угла закручивания $\theta(x)$. Для этого воспользуемся вторым уравнением в (1), из которого выразим $\theta'(x)$, и, проинтегрировав его один раз по x , получим выражение для угла закручивания:

$$\theta(x) = \int_{x_0}^x \left(\frac{m_b (\psi - 1)}{GI_x} + \beta - \frac{(\psi - 1)}{\psi k^2} \beta'' \right) dx + \alpha_4 \quad (12)$$

3. Нахождение частного решения для уравнений закрученного стержня

Для выделения из общего решения, полученного в предыдущем пункте, частного необходимо знать граничные условия — условия закрепления стержня. Рассмотрим несколько различных случаев закрепления и загрузки стержня. Для сравнения в табл. 1 справа приведем частные решения для тех же случаев по теории Власова. Выражения для $\theta(x)$ подробно указаны в [4] (приложение 7), выражения для $\beta(x)$ частично можно посмотреть в [5], частично получить дифференцированием по x .

Таблица 1. Решение задачи по двум теориям


	Полусдвиговая теория Сливкера	Бессдвиговая теория Власова	
1	$\theta(0) = 0$ $\beta(0) = 0$		$\theta(L) = 0$ $\beta(L) = 0$

Таблица 1. Продолжение

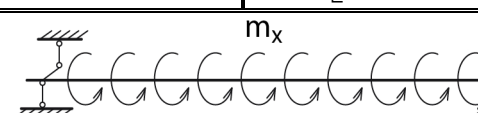
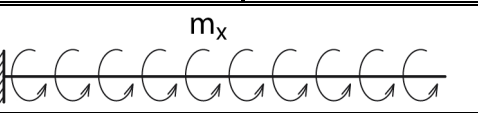
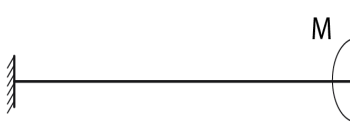
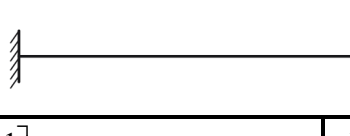
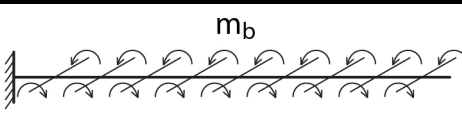
1	θ	$\frac{m_x}{2GI_x k \psi} \cdot \left[kx \psi (L-x) - \frac{2L \operatorname{sh} \left(\frac{kL}{2} - kx \right) \operatorname{sh} \left(\frac{kx}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{kL}{2} \right)} \right]$	$\frac{m_x}{2GI_x k_1} \cdot \left[k_1 x (L-x) - \frac{2L \operatorname{sh} \left(\frac{k_1 L}{2} - k_1 x \right) \operatorname{sh} \left(\frac{k_1 x}{2} \right)}{\operatorname{sh} \left(\frac{k_1 L}{2} \right)} \right]$
	β	$\frac{m_x}{GI_x} \cdot \left[\frac{L}{2} - x + \frac{L \operatorname{sh} \left(kx - \frac{kL}{2} \right)}{2 \operatorname{sh} \frac{kL}{2}} \right]$	$\frac{m_x}{GI_x} \cdot \left[\frac{L}{2} - x + \frac{L \operatorname{sh} \left(k_1 x - \frac{k_1 L}{2} \right)}{2 \operatorname{sh} \frac{k_1 L}{2}} \right]$
2	$\theta(0) = 0$  $\theta(L) = 0$ $\beta'(0) = 0$ $\beta'(L) = 0$		
	θ	$\frac{m_x}{GI_x k^2 \psi} \cdot \left[\frac{k^2 x \psi (L-x)}{2} - 1 + \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{kL}{2} - kx \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{kL}{2} \right)} \right]$	$\frac{m_x}{GI_x k_1^2} \cdot \left[\frac{k_1^2 x (L-x)}{2} - 1 + \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{k_1 L}{2} - k_1 x \right)}{\operatorname{ch} \left(\frac{k_1 L}{2} \right)} \right]$
	β	$\frac{m_x}{kGI_x} \cdot \left[k \left(\frac{L}{2} - x \right) + \frac{\operatorname{sh} \left(kx - \frac{kL}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{kL}{2}} \right]$	$\frac{m_x}{k_1 GI_x} \cdot \left[k_1 \left(\frac{L}{2} - x \right) + \frac{\operatorname{sh} \left(k_1 x - \frac{k_1 L}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{k_1 L}{2}} \right]$
3	$\theta(0) = 0$  $\psi \theta'(L) - \beta(L) = 0$ $\beta(0) = 0$ $\beta'(L) = 0$		
	θ	$\frac{m_x}{GI_x k^2 \psi \operatorname{ch}(kL)} \cdot \left[+ \operatorname{ch}(kx) - 1 + k^2 x \psi \left(L - \frac{x}{2} \right) \operatorname{ch}(kL) - kL \operatorname{sh}(kL) + kL \operatorname{sh}(kL - kx) \right]$	$\frac{m_x}{GI_x k_1^2 \operatorname{ch}(kL)} \cdot \left[k_1^2 x \left(L - \frac{x}{2} \right) \operatorname{ch}(k_1 L) + \operatorname{ch}(k_1 x) - 1 - k_1 L \operatorname{sh}(k_1 L) + k_1 L \operatorname{sh}(k_1 L - k_1 x) \right]$
	β	$\frac{m_x}{GI_x k \operatorname{ch}(kL)} \cdot \left[k(L-x) \operatorname{ch}(kL) + \operatorname{sh}(kx) - kL \operatorname{ch}(kL - kx) \right]$	$\frac{m_x}{GI_x k_1 \operatorname{ch}(k_1 L)} \cdot \left[k_1(L-x) \operatorname{ch}(k_1 L) + \operatorname{sh}(k_1 x) - k_1 L \operatorname{ch}(k_1 L - k_1 x) \right]$

Таблица 1. Окончание

	Полусдвиговая теория Сливкера	Бессдвиговая теория Власова
	$\theta(0) = 0$ $\beta(0) = 0$ 	$\psi\theta'(L) - \beta(L) = \frac{M_x(\psi - 1)}{GI_x}$ $\beta'(L) = 0$
4	θ $\frac{M_x}{GI_x k \psi \operatorname{ch}(kL)} \cdot [kx\psi \operatorname{ch}(kL) - \operatorname{sh}(kL) + \operatorname{sh}(kL - kx)]$	$\frac{M_x}{GI_x k_1 \operatorname{ch}(kL)} \cdot [k_1 x \operatorname{ch}(k_1 L) - \operatorname{sh}(k_1 L) + \operatorname{sh}(k_1 L - k_1 x)]$
	β $\frac{M_x}{GI_x \operatorname{ch}(kL)} \cdot [\operatorname{ch}(kL) - \operatorname{ch}(kL - kx)]$	$\frac{M_x}{GI_x \operatorname{ch}(k_1 L)} \cdot \operatorname{ch}(k_1 L) - \operatorname{ch}(k_1 L - k_1 x)]$
	$\theta(0) = 0$ $\beta(0) = 0$ 	$\psi\theta'(L) - \beta(L) = 0$ $\beta'(L) = \frac{Bk^2\psi}{GI_x}$
5	θ $\frac{B[\operatorname{ch}(kx) - 1]}{GI_x \operatorname{cosh}(kL)}$	$\frac{B[\operatorname{ch}(k_1 x) - 1]}{GI_x \operatorname{cosh}(k_1 L)}$
	β $\frac{Bk\psi \operatorname{sh}(kx)}{GI_x \operatorname{cosh}(kL)}$	$\frac{Bk \operatorname{sh}(k_1 x)}{GI_x \operatorname{cosh}(k_1 L)}$
	$\theta(0) = 0$ $\beta(0) = 0$ 	$\psi\theta'(L) - \beta(L) = 0$ $\beta'(L) = 0$
6	θ $\frac{m_b}{GI_x} \cdot \left(x - \frac{\operatorname{sh}(k_1 L) - \operatorname{sh}(k_1 L - k_1 x)}{k_1 \operatorname{cosh}(k_1 L)} \right)$	$\frac{m_b}{GI_x} \cdot \left(x - \frac{\operatorname{sh}(k_1 L) - \operatorname{sh}(k_1 L - k_1 x)}{k_1 \operatorname{cosh}(k_1 L)} \right)$
	β $\frac{m_b \psi}{GI_x} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(kL - kx)}{\operatorname{cosh}(kL)} \right)$	$\frac{m_b}{GI_x} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{ch}(k_1 L - k_1 x)}{\operatorname{cosh}(k_1 L)} \right)$

Сравнивая выражения в правом и левом столбцах, можно заметить, что они практически идентичны, и отличаются лишь присутствием в некоторых слагаемых множителя ψ . Поскольку учет сдвига в полусдвиговой теории проявляется с помощью коэффициента ψ , то целесообразным является исследовать от чего зависит его величина и в каких интервалах он изменяется.

4. Влияние коэффициента ψ на величину перемещений стержня

Как уже отмечалось выше, коэффициент ψ является безразмерным геометрическим параметром, в выражение для которого входит безразмерный коэффициент формы сечения $\mu_{\omega\omega}$, который может быть найден из формулы [1]:

$$\mu_{\omega\omega} = \frac{I_r}{I_{\omega_s}^2} \int \frac{S_{0\omega}^2}{t} ds, \text{ где} \quad (13)$$

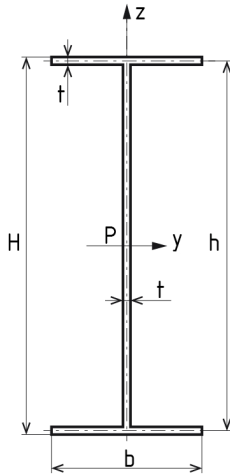
$S_{0\omega}^2$ — секториальный статический момент отсеченной части сечения; t — толщина стенки. Подставив (13) в выражение для коэффициента ψ получим следующее выражение:

$$\psi = 1 + \frac{I_x}{I_{\omega_s}^2} \int \frac{S_{0\omega}^2}{t} ds \quad (14)$$

Для тонкостенных стержней открытого профиля, величины, входящие в (14) могут быть найдены следующим образом [1]:

$$I_x = \frac{1}{3} \int_L t^3 ds \quad I_{\omega} = \int_L t \omega^2 ds \quad S_{0\omega} = \int_L t \omega ds \quad \omega = \int_L R ds \quad (15)$$

Используя формулы (13) – (15), а так же сделав замену: $\chi_1 = b/h$ и $\chi_2 = t/b$, запишем выражения, необходимые для дальнейших вычислений для стержней сечением в виде двутавра и швеллера:

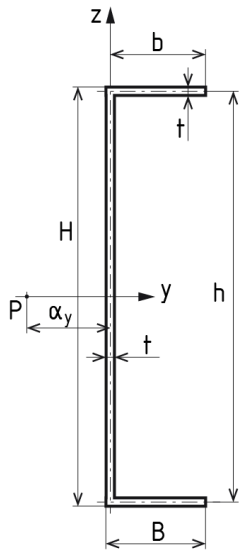


$$I_x = \frac{t^3}{3} (2b + h);$$

$$I_{\omega} = \frac{th^2b^3}{24};$$

$$\int_s \frac{S_{0\omega}^2}{t} ds = \frac{th^2b^5}{640};$$

$$\psi = 1 + \frac{3\chi_1\chi_2^2(2\chi_1 + 1)}{10}$$



$$I_x = \frac{t^3}{3} (2b + h);$$

$$I_{\omega} = \frac{th^2b^3(3b + 2h)}{12(h + 6b)};$$

$$\int_s \frac{S_{0\omega}^2}{t} ds = \frac{tb^4(23h^4b + 31h^3b^2 - 9h^2b^3 + 63h^5 - 9b^4h + 18b^5)}{240(h + 6b)^2};$$

$$\psi = 1 + \frac{\chi_2^2(2\chi_1 + 1)(18\chi_1^5 - 9\chi_1^4 - 9\chi_1^3 + 31\chi_1^2 + 23\chi_1 + 63)}{5(3\chi_1 + 2)^2}$$

Абсолютно естественно ограничить значение величин χ_1 и χ_2 в следующих пределах: $0 < \chi_1, \chi_2 < 1$. Но, учитывая критерий тонкостенности, неравенство можно сделать еще более жестким:

$$\begin{aligned} 0 < \chi_1 < 1 \\ 0 < \chi_2 < 0,2 \end{aligned} \quad (16)$$

Так как коэффициент ψ представляет собой функцию двух переменных, а именно χ_1 и χ_2 , то удобно построить трехмерный график (рис. 1) зависимости $\psi(\chi_1, \chi_2)$:

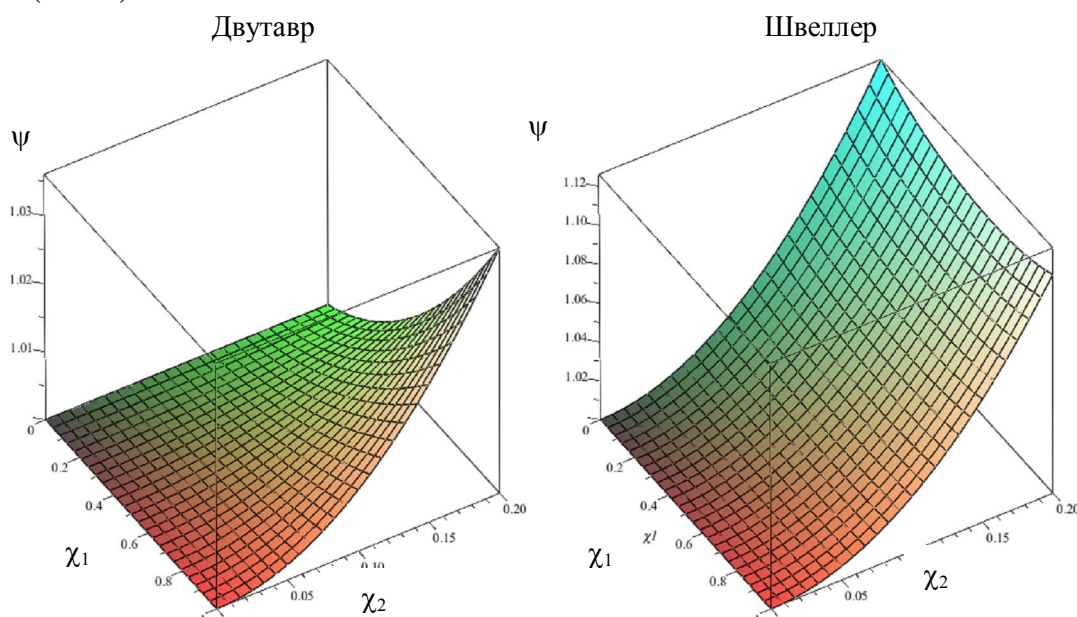
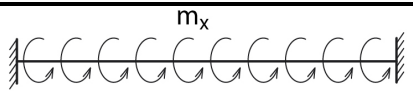
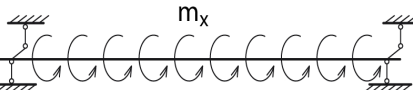
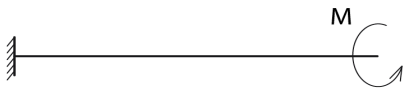
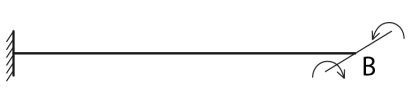
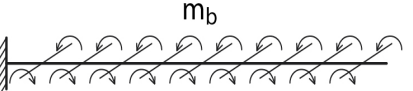


Рис. 1. Зависимость значения коэффициента ψ от безразмерных параметров χ_1 и χ_2 для стержней двутаврового и швеллерного поперечного профилей.

Из графиков видно, что величина ψ увеличивается с увеличением отношения $\chi_2 = t/b$, т.е. ψ увеличивается с уменьшением «тонкостенности». Видно, что величина ψ не превышает значения 1,03 для двутавра и 1,12 для швеллера. По графику выберем такое поперечное сечение в виде швеллера, чтобы ψ было наиболее близко к максимальному значению. Например, подходит швеллер со следующими размерами: $B = 0,032$ м; $H = 0,05$ м; $t = 0,007$ м, для которого $\psi = 1,1134$. Для выбранного стержня определим максимальные значения перемещения для двух разных теорий и сведем их в таблицу 2. Как видно из таблицы, учет сдвига дает сколько-нибудь стоящее уточнение результата только в том случае, если на стержень действует нагрузка связанная с бимоментом (сосредоточенный или распределенные бимоменты). Это уточнение влияет только на величину функции меры деформации, никак не затрагивая величину угла закручивания.

Несмотря на то, что учет деформации сдвига дает лишь незначительное уточнение результата в довольно ограниченных случаях, и может показаться, что учет деформаций сдвига при решении задач статики носит избыточный характер, однако использование полусдвиговой теории позволяет разработать единый подход к расчету тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей [1].

Таблица 2. Максимальные значения перемещений

	Расчетная схема	Полусдвигающая теория Сливкера	Бессдвигающая теория Власова	%
1		$\theta = 15,11005$ $\beta = 10,94460$	$\theta = 15,05530$ $\beta = 11,02295$	0,36% 0,71%
2		$\theta = 16,07645$ $\beta = 12,44343$	$\theta = 16,07645$ $\beta = 12,46654$	0% 0,19%
3		$\theta = 62,47679$ $\beta = 23,52471$	$\theta = 62,36727$ $\beta = 23,61907$	0,18% 0,40%
4		$\theta = 25,37727$ $\beta = 5,15553$	$\theta = 25,35537$ $\beta = 5,15553$	0,09% 0%
5		$\theta = 0,51555$ $\beta = 6,63832$	$\theta = 0,51555$ $\beta = 6,29402$	0% 5,1%
6		$\theta = 25,33227$ $\beta = 5,73502$	$\theta = 25,35537$ $\beta = 5,15553$	0,09% 10,1%

Л и т е р а т у р а

1. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
2. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.
3. Дьяков С.Ф. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении/ С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин // Вестник Пермского гос. технического ун-та. – 2011. – №2. – С. 130-140.
4. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Стройиздат, 1962. – 476 с.
5. Джанилидзе Г.Ю., Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней. – Л. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 208 с.

References

1. Slivker V.I. Stroitel'naya Mehanika. Variatsionnye osnovi. – M.: Izd-vo ASV. – 2005. – 736 p.
2. Vlasov V.Z. Tonkostennye Uprugie Sterzhni. – M.: Fizmatgiz, 1959. – 568 p.
3. Dyakov S.F., Lalin V.V. Postroenie i analiz konechnih elementov tonkostennogo sterzhnya ot-kritogo profilya s uchotom deformatsiy sdviga pri kruchenii// Vestnik Permskogo gosudarstvennogo tehnikeskogo universiteta, 2011. – №2. – P. 130-140.
4. Bychkov D.V. Stroitel'naya Mehanika Sterzhnevih Tonkostennih Konstruktsiy. – M.: Stroyizdat, 1962. – 476 p.
5. Dzhanilidze G.Yu., Panovko Ya.G. Statika uprugih tonkostennih sterzhney. – L.: GITTL, 1948. – 208 p.

COMPARING THE RESULTS OF THE THIN-WALLED BAR TORSION PROBLEM ACCORDING TO VLASOV AND SLIVKER THEORIES

St.F. Dyakov

Sankt-Peterburgskiy gosudarstvenniy politehnicheskiy universitet, S.-Peterburg

Using complicated multi-element constructions while designing civil structures and bridges consisted of thin-walled bars with open cross-section faces problems connected with the constricted-torsion. Solution for the differential equation of the twisted thin-walled bar with allowance for shearing is obtained and compared to the classical Vlasov's theory.

KEY WORDS: thin-walled bar, semi-shearing theory, differential equation of the twisted thin-walled bar.