

УДК 336.762.1

DOI: 10.17323/1813-8691-2025-29-1-103-131

## Гибридные подходы к прогнозированию реализованной волатильности ETF: глубокое обучение и теорема восстановления

Патласов Д.А.

В данной статье исследуется задача многошагового прогнозирования реализованной волатильности. В работе вводится модификация функции потерь вида квантильный лог-гиперболический косинус (quantile log-cosh), также в качестве экзогенных факторов используется информация, извлекаемая из опционов с помощью теоремы восстановления [Ross, 2015] в контексте задачи прогнозирования реализованной волатильности торгуемых биржевых фондов (Exchange-Traded Fund, ETF) SPY (SPDR S&P 500 ETF Trust) и QQQ (Invesco QQQ Trust). Ставятся две гипотезы: первая предполагает, что quantile log-cosh в нейронных сетях повысит точность предиктивной модели на тестовом наборе данных по сравнению с теми же моделями, обучаемыми на других целевых функциях. Вторая гипотеза заключается в использовании информации, извлекаемой из теоремы восстановления. Данная теорема позволяет аппроксимировать истинную плотность распределения состояний SPY и QQQ в терминах марковских цепей и избавиться от предпосылок риск-нейтральной меры в финансовых моделях. Тогда по второй гипотезе ожидается, что модель с факторами, извлеченными с помощью теоремы восстановления, будет показывать более точные прогнозы на тестовой выборке по сравнению с классической моделью гетерогенной авторегрессии (Heterogeneous Autoregressive Model for Realized Volatility, HAR-RV). Для проверки гипотез используются следующие модели машинного обучения: LSTM, GRU, BiLSTM, BiGRU, FCNN и N-BEATS. Результаты показывают, что модификация quantile log-cosh позволяет улучшить точность предсказаний моделей на тестовом наборе данных. Также включение в модели прогнозирования реализованной волатильности экзогенных факторов из теоремы восстановления позволяет значительно превзойти модель HAR-RV, особенно на долгосрочном горизонте.

---

**Патласов Дмитрий Александрович** – аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет. E-mail: dmitriypatlasov@gmail.com

Статья поступила: 24.07.2024/Статья принята: 06.02.2025.

**Ключевые слова:** прогнозирование; нейронные сети; реализованная волатильность; теорема восстановления.

**Для цитирования:** Патласов Д.А. Гибридные подходы к прогнозированию реализованной волатильности ETF: глубокое обучение и теорема восстановления. *Экономический журнал ВШЭ*. 2025; 29(1): 103–131.

**For citation:** Patlasov D.A. Hybrid Approaches to Predicting Realized ETF Volatility: Deep Learning and the Recovery Theorem. *HSE Economic Journal*. 2025; 29(1): 103–131. (In Russ.)

## 1. Введение

Фондовый рынок является одним из центральных элементов мировой экономики, оказывая значительное влияние на финансовую стабильность и экономическое развитие стран. В современном мире, характеризующемся высокой степенью неопределенности, предсказание волатильности рынка становится важнейшим аспектом для агентов финансовых рынков. В данной статье рассматривается задача прогнозирования волатильности для ETF SPY и QQQ.

Следует отметить, что ETF обладают рядом уникальных характеристик, отличающих их от традиционных активов, таких как акции или фьючерсы. Основные особенности ETF, влияющие на волатильность:

- ETF торгуются как акции, но их стоимость привязана к стоимости базовых активов через механизм создания и погашения паев (creation and redemption). Это снижает отклонение цены ETF от справедливой стоимости, но может приводить к повышенной краткосрочной волатильности в периоды рыночного стресса;
- ликвидность ETF определяется не только объемом торгов, но и ликвидностью базовых активов. В случае резких рыночных движений повышенная торговая активность может усилить волатильность ETF;
- трейдеры и маркет-мейкеры активно используют ETF, что делает их подверженными моментальным скачкам волатильности.

Наиболее распространенными подходами к моделированию волатильности в XX в. считаются модели на базе условной гетероскедастичности для ненаблюдаемой волатильности финансовых активов, а также модель стохастической волатильности для подразумеваемой волатильности опционов. Однако эти модели сильно зависят от спецификации базового процесса волатильности и требуют жестких ограничений на оцениваемые параметры. В то время считалось, что волатильность ненаблюдаема. В дальнейших работах внимание исследований по измерению волатильности переключилось на данные высокой частоты. Впервые Мертон [Merton, 1980] показал, что волатильность может быть определена как сумма квадратов доходностей на уровне высокой частоты. Авторы работ [Andersen, Bollerslev, Diebold, Ebens, 2001], а также [Andersen, Bollerslev, Diebold, Labys, 2003] указали, что суммирование квадратов внутридневных доходностей дает наблюдаемую меру дневной волатильности, названную реализованной дисперсией (Realized Variance, RV). Тогда можно сказать, что волатильность, за исключением ошибок измерения и скачков, становится «наблюдаемой».

RV измеряет внутридневную волатильность, где частота выборки может быть даже на уровне тиков. По мере уменьшения интервалов RV приближается к непрерывной волатильности. Андерсен и Боллерслев [Andersen, Bollerslev, 1998] определяют RV следующим образом:

$$(1) \quad RV_{t+1} = \sum_{j=1, \dots, m} r_{m, t + \frac{j}{m}}^2,$$

где  $m$  – количество интервалов, а непрерывно накопленные доходности определяются равенством

$$(2) \quad r_{m,t} \equiv p_{t,m} - p_{t-1,m}, \forall m = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где  $p_t$  и  $p_{t-1}$  – логарифмы цен финансовых активов.

RV может быть применена к ценам, следующим винеровскому процессу. Математическое определение винеровского процесса  $W_t$  следующее:

1.  $W_0 = 0$  с вероятностью 1.
2.  $W_t$  – процесс с независимыми приращениями.
3.  $W_t - W_s \sim N(0, \sigma_{t-s}^2), \forall 0 \leq s < t < +\infty$ .
4. Траектории  $W_t$  непрерывны с вероятностью 1.

В контексте финансовых рынков, если  $p_t$  следует винеровскому процессу, это означает, что изменения логарифма цены могут быть описаны в виде

$$(3) \quad dp_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t, t \in \mathbb{Z},$$

где  $\sigma_t$  – мгновенная волатильность процесса или стандартное отклонение, строго положительная и суммируемая с квадратом функция  $\left( \int_0^t \sigma_s^2 ds < \infty \right)$ ;  $\mu_t$  – дрейфовая составляющая;  $dW_t$  – дифференциал винеровского процесса.

Далее рассмотрим непрерывно начисленную доходность между  $t-h$  и  $t$ , при этом  $0 < h \leq t$ :

$$(4) \quad r_t = p_t - p_{t-h} = \int_{t-h}^t \mu_s ds + \int_{t-h}^t \sigma_s dW_s.$$

Квадратичная дисперсия (Quadratic Variance, QV) доходности – естественная мера изменчивости диффузионного процесса мартингала, согласно теореме о стохастическом интегрировании, определяется равенством

$$(5) \quad p_t = QV_t = \int_{t-h}^t \sigma_s^2 ds,$$

где  $QV_t$  – квадратичная дисперсия.

Равенство (5) показывает, что инновации дрейфа не влияют на дисперсию диффузионного процесса доходностей. В этом контексте квадратичная дисперсия полностью определяется инновациями локального мартингала, она совпадает с интегрированной дисперсией (Integrated Variance, IV), тогда накопленная волатильность доходности определяется равенством

$$(6) \quad IV_t = \int_{t-h}^t \sigma_s^2 ds = QV_t,$$

где  $IV_t$  – интегрированная дисперсия.

Авторы работ [Andersen, Bollerslev, Diebold, Labys, 2001; Barndorff-Nielsen, Shephard, 2002] из свойств квадратичной дисперсии отмечают, что при отсутствии неэффективности микроструктуры на рынке QV доходностей может выражена:

$$(7) \quad p_t = p \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n [p_{s_j} - p_{s_{j-1}}]^2,$$

для каждой последовательности разбиения  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$  при  $|s_j - s_{j-1}| \rightarrow 0$ , когда число разбиений  $n \rightarrow \infty$ .

Равенство (2) можно представить в виде:

$$(8) \quad r_t = \sum_{m=1}^n r_{t,m}.$$

Тогда реализованная дисперсия сходится по вероятности к квадратичной дисперсии и к интегрированной дисперсии дня  $t$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть реализованная дисперсия будет

$$(9) \quad RV_t = \sum_{m=1}^n r_{t,m}^2.$$

Отсюда следует, что

$$(10) \quad RV_t \xrightarrow{p} [r, r]_t - [r, r]_{t-h} \equiv QV_t,$$

$$(11) \quad RV_t \xrightarrow{p} IV_t.$$

Реализованная волатильность – это последовательная оценка условной волатильности, такая, что

$$(12) \quad RV_t \xrightarrow{p} v_{t,h}^2,$$

где  $v_{t,h}^2$  – условная дисперсия доходностей на интервале  $[t-h, t]$ , которая может быть оценена, например, семейством моделей GARCH.

Это подразумевает, что ожидаемая реализованная волатильность является последовательной оценкой ожидаемой условной волатильности:

$$(13) \quad E[RV_t | \Omega_{t-h}] \xrightarrow{p} E[v_{t,h}^2 | \Omega_{t,h}],$$

где  $\Omega_{t-h}$  – доступное информационное множество, доступное на момент времени  $t-h$ .

Если процесс доходности определен функцией, суммируемой с квадратом и  $\mu_t \equiv 0$ , то реализованная волатильность является несмещенной оценкой условной дисперсии доходности:

$$(14) \quad E[RV_t | \Omega_{t-h}] = E[QV_t | \Omega_{t,h}] = \text{var}[r_{t,h} | \Omega_{t,h}].$$

Этот эквивалент объединяет реализованную волатильность и условную дисперсию из моделей GARCH.

Из существующих стилизованных фактов волатильности отмечается, что, как правило, включение экзогенных признаков в модели прогнозирования волатильности не способно существенно повысить точность (например: [Engle, 1982; Christoffersen, Diebold, 2000; Andersen, Bollerslev, Diebold, 2003; Welch, Goyal, 2008; Bollerslev, Tauchen, Zhou, 2009; Hansen, Lunde, 2005]).

Автор настоящего исследования видит ключевую ценность в контексте задачи прогнозирования волатильности в информации, извлекаемой из применения теоремы восстановления (the recovery theorem) [Ross, 2015] к рыночным данным опционов, преобразовании этих результатов в вид временных рядов и использовании в качестве признаков в модели прогнозирования реализованной волатильности активов.

Теорема восстановления позволяет произвести переход от риск-нейтральной меры к истинной (физической) мере. Помимо смены вероятностной меры, теорема восстановления позволяет получить плотность распределения базового актива опциона в истинной мере. Следует отметить, что, несмотря на дискуссии среди авторов теоретических исследований о применении теоремы восстановления для повышения точности прогнозов различных финансовых показателей, а также улучшения торговых стратегий и управления рисками, эмпирические работы свидетельствуют о том, что даже при частичном выполнении условий применимости результаты прогнозных моделей улучшаются. Об этом говорят, например, исследования [Audrino, Huitema, Ludwig, 2021; Gagnon, Power, Toupin, 2022]. Среди теоретических работ, критикующих теорему восстановления, можно отметить исследования [Amir, 2019; Borovička, Hansen, Scheinkman, 2016].

Также в настоящем исследовании вводится модификация функции потерь quantile log-cosh. Модификация заключается в корректировке штрафа функции потерь. Предлагается увеличивать штраф за ложные прогнозы модели на данных выше 0,75-го квантиля. Так как мера волатильности является показателем, который отражает состояние нестабильности финансового рынка, то ошибки модели в наиболее высоких значениях волатильности могут быть критическими с практической точки зрения. Тогда появляются основания для улучшения качества прогнозов модели в области больших значений.

## 2. Данные

Для расчетов факторов из теоремы восстановления используются данные о наблюдаемой подразумеваемой волатильности колл-опционов, страйках и сроках до погашения на два ETF-инструмента: SPY – наиболее ликвидный ETF, отслеживающий индекс S&P 500, является репрезентативным для широкого фондового рынка США; QQQ – фокусируется на технологическом секторе (NASDAQ-100), что делает его более чувствительным к изменениям волатильности в периоды технологических пузырей или кризисов. Данные получены из цепочек опционов (SPX Option Chains). Следует отметить, что S&P 500 является наилучшей аппроксимацией на движение всего фондового рынка США, а NASDAQ 100 приближением на движения технологических компаний. Исходные данные являются функцией, которая позволяет оценивать уровень подразумеваемой волатильности для любой пары страйк и срок до погашения, что представляет из себя поверхность подразумеваемой волатильности (implied volatility surface). Поставщик данных: optionsDX, URL: <https://www.optionsdx.com/>. Расчет по методологии исследования производится на каждый торговый день с 01.01.2010 г. по 31.12.2023 г. для SPY и с 01.01.2012 г. по 31.12.2023 г. для QQQ.

В качестве безрисковой ставки рынка США используется доходность по 10-летним казначейским облигациям США. Тикер инструмента: «^TNX», поставщик информации: Yahoo Finance.

Тогда, на первом этапе были подготовлены данные по цепочкам опционов на инструменты SPY и QQQ, а далее определены матрицы поверхности подразумеваемой волатильности для обоих инструментов на конец каждой торговой сессии. Каждый элемент матрицы – это наблюдаемый на срочном рынке колл-опцион, базовыми активами которых являются SPY и QQQ со своими значениями страйка и срока до погашения. Среднее количество колл-опционов для воспроизведения поверхности подразумеваемой волатильности составило 351 для инструмента SPY и 322 для инструмента QQQ. После чего к исходным данным по опционам были применены все итерации, определенные в теореме восстановления.

Для расчета реализованной волатильности применяются исторические котировки торгуемых биржевых фондов SPY и QQQ. Частота наблюдений равна одному дню. Данные по котировкам получены с Yahoo Finance.

## 3. Методы

### 3.1. Постановка задачи

В статье рассматривается проблема прогнозирования реализованной волатильности торгуемых биржевых фондов SPY и QQQ на основе показателей из теоремы восстановления Росса. Реализованная волатильность представляет собой измеренную волатильность на основе фактических цен закрытия для акций, фьючерсов, индексов и т.д. [Corsi, 2008]).

Цель работы состоит в том, чтобы разработать архитектуру и обучить модель машинного обучения, которая наилучшим образом способна прогнозировать реализованную волатильность на несколько шагов вперед, на базе предпосылок модели HAR-RV, фак-

торов, извлеченных после оценки теоремы восстановления и оценки модели с помощью нейронных сетей.

В HAR-модели будущая реализованная волатильность является функцией запаздывающей дневной, недельной и месячной реализованной волатильности:

$$(15) \quad RV_{t+k} = \alpha^d + \beta^d RV_t^d + \beta^w RV_t^w + \beta^m RV_t^m + \varepsilon_{t+k}^d,$$

где  $d$  – дневная частота;  $w$  – недельная частота (5 торговых дней);  $m$  – месячная частота (21 торговый день);  $k$  – шаг прогнозирования, дни (модели будут оцениваться для  $k \in [5, 10, 15, 20]$ ).

Формула для расчета реализованной волатильности:

$$(16) \quad RV_t = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[ \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \right]^2},$$

где  $RV_t$  – реализованная волатильность;  $n$  – количество наблюдений (диапазон скользящего окна);  $S_t$  – цена SPY или QQQ.

Относительно простая структура и возможность оценить модель с помощью метода наименьших квадратов (МНК) способствовали широкому использованию этой спецификации. Корси [Corsi, 2008] показал, что эта модель генерирует более точные прогнозы на тестовой выборке (out-of-sample) по сравнению с моделями краткосрочной памяти.

В рамках статьи ставится задача включения в перечень экзогенных переменных модели HAR-RV дополнительных параметров, которые способны усилить точность модели на тестовой выборке. Назовем такую модель гибридной и присвоим расширение до аббревиатуры HARx-RV. Список исследуемых зависимых переменных и признаков приведены в табл. 1.

Таблица 1.

**Определение переменных, используемых в моделях прогнозирования реализованной волатильности инструментов SPY и QQQ**

| Обозначение переменной                           | Название                                                 | Описание                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Зависимые переменные (эндогенные факторы)        |                                                          |                                                                                                                                   |
| $RV_{t+5}; RV_{t+10};$<br>$RV_{t+15}; RV_{t+20}$ | Реализованная волатильность на 5, 10, 15, 20 дней вперед | Реализованная волатильность, рассчитанная на данных SPY и QQQ:<br>Частота данных – 1 день;<br>Диапазон скользящего окна – 21 день |
| Регрессоры (экзогенные факторы)                  |                                                          |                                                                                                                                   |
| $RV_t^d; RV_t^w;$<br>$RV_t^m$                    | Реализованная волатильность                              | –                                                                                                                                 |

Окончание табл. 1.

| Обозначение переменной     | Название                                                            | Описание                                                                                                                                         |
|----------------------------|---------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Psi_{1,t}; \Psi_{1,t-5}$ | Восстановленная ожидаемая доходность                                | Аппроксимация среднего из истинного распределения вероятностей (физической меры по теореме восстановления)                                       |
| $\Psi_{2,t}; \Psi_{2,t-5}$ | Восстановленная ожидаемая волатильность                             | Аппроксимация стандартного отклонения из истинного распределения вероятностей (физической меры по теореме восстановления)                        |
| $\Psi_{3,t}; \Psi_{3,t-5}$ | Восстановленный эксцесс                                             | Аппроксимация эксцесса из истинного распределения вероятностей (физической меры по теореме восстановления)                                       |
| $\Psi_{4,t}; \Psi_{4,t-5}$ | Восстановленная асимметрия                                          | Аппроксимация асимметрии из истинного распределения вероятностей (физической меры по теореме восстановления)                                     |
| $\Psi_{5,t}; \Psi_{5,t-5}$ | Склонность к риску (предпочтение риска)                             | Разница восстановленной ожидаемой волатильности и риск-нейтральной (в риск-нейтральной мере)                                                     |
| $\Psi_{6,t}; \Psi_{6,t-5}$ | Ожидаемая вероятность падения инструмента на 20% в следующем месяце | Вероятность, соответствующая 20-процентному снижению базового актива из эмпирической функции плотности распределения (из теоремы восстановления) |

Тогда модель HARx-RV примет вид (для каждого  $k$ ):

$$\begin{aligned}
 (17) \quad RV_{t+k} = & \alpha^d + \beta^d RV_t^d + \beta^w RV_t^w + \beta^m RV_t^m + \\
 & + \gamma_1 \Psi_{1,t} + \gamma_2 \Psi_{2,t} + \gamma_3 \Psi_{3,t} + \gamma_4 \Psi_{4,t} + \gamma_5 \Psi_{5,t} + \gamma_6 \Psi_{6,t} + \\
 & + \delta_1 \Psi_{1,t-5} + \delta_2 \Psi_{2,t-5} + \delta_3 \Psi_{3,t-5} + \delta_4 \Psi_{4,t-5} + \delta_5 \Psi_{5,t-5} + \delta_6 \Psi_{6,t-5} + \varepsilon_{t+k}^d.
 \end{aligned}$$

В дальнейшем оценка модели HARx-RV будет произведена при помощи МНК с коррекцией Ньюи – Уэста [Костырка, Малахов, 2021], а также алгоритмами глубокого обучения.

Следует заметить, что выборка разделена на обучающую (с 01.01.2010 г. (для SPY) с 01.01.2012 г. (для QQQ) до 31.12.2018 г.), валидационную (с 01.01.2019 г. по 31.06.2020 г.) и тестовую (с 01.07.2020 г. по 31.12.2023 г.).

Далее формально опишем процесс извлечения из данных по опционам информации, получаемой после применения теоремы восстановления.

Теорема восстановления предоставляет метод для извлечения истинных вероятностей и ядра ценообразования (pricing kernel) из наблюдаемых рыночных данных по опционам, при условии, что известны переходные вероятности в риск-нейтральной мере. Основная идея теоремы заключается в следующем:

- 1) риск-нейтральная плотность распределения  $\pi^*$  и истинная плотность распределения  $f$  связаны через отношение маржинальных полезностей потребления;
- 2) риск-нейтральные вероятности используются для ценообразования финансовых инструментов в модели отсутствия арбитража;
- 3) истинные вероятности отражают реальное распределение вероятностей исходов в будущем с учетом субъективных предпочтений инвесторов.

Пусть  $\pi^*(\theta_i, \theta_j)$  – риск-нейтральная вероятность перехода из состояния  $\theta_i$  в состояние  $\theta_j$ , а  $f(\theta_i, \theta_j)$  – истинная вероятность этого перехода. Тогда эти вероятности связаны следующим образом [Ross, 2015]:

$$(18) \quad \pi^*(\theta_i, \theta_j) = e^{r(\theta_i)} \frac{U'(c(\theta_j))}{U'(c(\theta_i))} f(\theta_i, \theta_j),$$

где  $r(\theta_i)$  – безрисковая ставка;  $U'(c(\cdot))$  – маржинальная полезность потребления;  $c(\theta)$  – потребление в состоянии  $\theta$ .

Для получения истинной и риск-нейтральной плотностей распределения используется следующая процедура:

- 1) определение риск-нейтральной плотности: плотность определяется через рыночные цены опционов, используя модель ценообразования опционов Блэка – Шоулза, а также процедуру извлечения цен Эрроу – Дебре;
- 2) восстановление истинной плотности: истинная плотность восстанавливается из  $\pi^*$  с использованием отношения маржинальных полезностей и безрисковой ставки, как указано в уравнении выше. Математически это реализуется через спектральное разложение матрицы переходных вероятностей в риск-нейтральной мере;
- 3) переходные вероятности и марковские цепи: восстановление вероятностей переходов рынка из одного состояния в другое осуществляется с использованием марковских цепей.

Из получаемой марковской цепи можно извлечь плотность распределения рынка на каждый торговый день, из которой в свою очередь считаются моменты распределения. Более подробно о полной процедуре применения и доказательстве существования теоремы восстановления можно узнать в работе Стивена Росса [Ross, 2015], а также в работах [Bakshi, Chabi-Yo, Gao, 2018; Carr, Yu, 2012; Jackwerth, Menner, 2020]. При подтверждении гипотезы о том, что прогнозная модель будет обладать достаточным уровнем обобщенности и способна объяснять динамику реализованной волатильности, предполагается проверка этой модели на устойчивость (робастность). Для проверки робастности будет произведено сравнение с базовой моделью HAR-RV с помощью теста Дибольда – Мариано.

Для достижения поставленной цели предполагается решение следующих задач:

- загрузка, предобработка исходных данных;
- отбор и обучение моделей машинного обучения;
- оценка качества обученных моделей на тестовой выборке при помощи следующих метрик качества: MSE, MAE,  $R^2$ , MAPE, QLIKE (Quasi-Likelihood), тест Дибольда – Мариано.

### 3.2. Модифицированная функция потерь квантильный лог-гиперболический косинус

В качестве элемента предварительного анализа данных посмотрим на режимы «низкой» и «высокой» волатильности по обоим инструментам с помощью модели скрытых марковских процессов (НММ).

На рис. 1, 2 представим разделение режимов реализованной волатильности SPY и QQQ на обучающей выборке. В рамках предварительного анализа не будем рассматривать реализованную волатильность на валидационной и тестовой выборках, чтобы не было априорного представления о динамике и распределении реализованной волатильности в данные периоды времени.

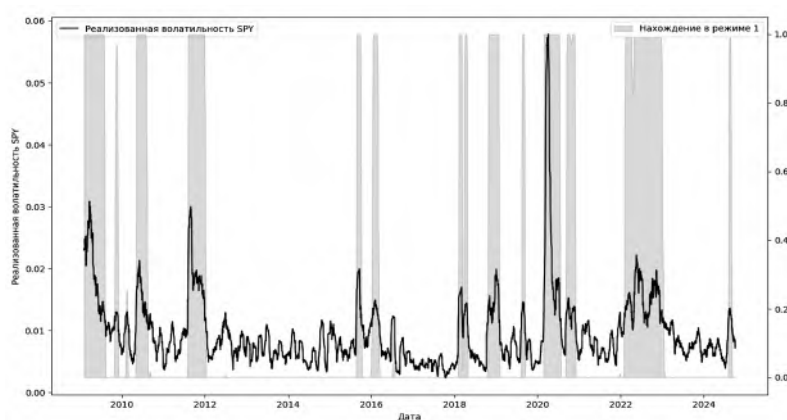


Рис. 1. НММ-модель реализованной волатильности SPY с вероятностями переходов между режимами на обучающей выборке (01.01.2010 г.–31.12.2018 г.)

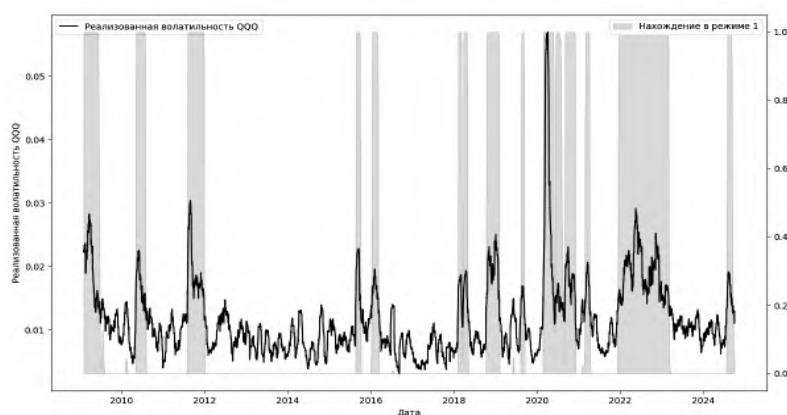


Рис. 2. НММ-модель реализованной волатильности QQQ с вероятностями переходов между режимами на обучающей выборке (01.01.2012 г.–31.12.2018 г.)

Несмотря на то, что модель НММ не будет непосредственно использоваться в задаче прогнозирования, она играет важную роль в общей постановке задачи. Рассмотрение НММ в контексте прогнозирования реализованной волатильности является основанием для формирования контекста для других моделей. Теперь допустимо сказать, что смена режима волатильности сопровождается ее резким скачком (прыжком), когда значения  $RV$  переходят в диапазон высоких квантилей. Отсюда возникает необходимость разработки метода, который бы адаптировался под более точное обучение модели на данных высоких квантилей. Для решения такой проблемы в настоящем исследовании вводится модификация целевой функции нейронных сетей лог-гиперболического косинуса ( $\log\text{-cosh}$ ). Модификацию будем называть квантильный лог-гиперболический косинус ( $\text{quantile log-cosh}$ ).

Функция потерь  $\log\text{-cosh}$  является одним из распространенных выборов для задач регрессии, особенно в контексте временных рядов и данных с сильными флуктуациями. Ее преимущества можно объяснить следующим образом.

1. Робастность:  $\log\text{-cosh}$  предлагает робастный подход к оценке ошибки, так как лучше учитывает большие ошибки по сравнению с квадратичной функцией потерь MSE и средней абсолютной ошибкой MAE. Следует также отметить, что функция потерь  $\log\text{-cosh}$  хорошо адаптируется к особенностям данных, так как она позволяет модели оценивать как большие, так и маленькие ошибки с одинаковым весом [Barron, 2019]. В эмпирических тестах модель с  $\log\text{-cosh}$  демонстрирует значительное улучшение точности прогнозирования по сравнению с MSE и MAE, особенно в условиях высокой волатильности [Barron, 2019].

2. Совместимость с оптимизационными методами:  $\log\text{-cosh}$  в качестве функции потерь хорошо работает с различными оптимизационными алгоритмами, которые применяются при обучении нейронных сетей.

3. Возможности для модификации: введение штрафа за ошибки в верхнем квантиле данных (75-й квантиль) позволяет более точно прогнозировать экстремальные значения волатильности, что критически важно для управления рисками.

Далее представим предлагаемую модификацию. Дополнение заключается в добавлении штрафа  $\lambda$  при расчете ошибок на данных больших значений, а именно выше  $\eta$ -го квантиля. Тогда новая лосс-функция  $\text{quantile log-cosh}$  примет вид:

$$(19) \quad \ell(RV, \widehat{RV}) = \sum_{i=1}^n \ln \left[ \cosh(RV_i, \widehat{RV}_i) \cdot \left( 1 + 1_{\{RV_i > q_\eta\}} \cdot \lambda \cdot (RV_i - q_\eta) \right) \right],$$

где  $\ell(RV, \widehat{RV})$  – функция потерь ( $\text{quantile log-cosh}$ );  $q_\eta$  – значение  $\eta$ -го квантиля от выборки истинных значений зависимой переменной на обучающем наборе данных;  $1_{\{RV_i > q_\eta\}}$  – индикаторная функция, которая принимает значение 1, когда  $RV_i$  больше  $q_\eta$  и 0 в ином случае;  $\lambda$  – множитель штрафа к функции потерь выше  $\eta$ -го квантиля.

### 3.3. Описание исходных данных

Представим в табл. 2 описательные статистики исходных данных.

**Таблица 2.**

#### Описательные статистики временных рядов признаков на обучающей выборке

| Фактор                                                                | Среднее | Стандартное отклонение | Минимум | Медиана | Максимум | Асимметрия | Эксцесс |
|-----------------------------------------------------------------------|---------|------------------------|---------|---------|----------|------------|---------|
| Описательные статистики обучающей выборки SPY (2010-01-04–2018-12-31) |         |                        |         |         |          |            |         |
| $\psi_1$                                                              | –0,00   | 0,01                   | –0,15   | –0,00   | 0,10     | –0,51      | 20,23   |
| $\psi_2$                                                              | 0,08    | 0,04                   | 0,03    | 0,07    | 0,31     | 1,77       | 3,63    |
| $\psi_3$                                                              | –0,67   | 1,24                   | –2,60   | –0,98   | 4,73     | 1,15       | 1,10    |
| $\psi_4$                                                              | –0,51   | 0,41                   | –1,82   | –0,46   | 0,86     | –0,41      | –0,04   |
| $\psi_5$                                                              | 0,03    | 0,03                   | 0,01    | 0,02    | 0,22     | 2,11       | 5,58    |
| $\psi_6$                                                              | 0,03    | 0,05                   | 0,00    | 0,01    | 0,31     | 2,64       | 7,87    |
| $RV$                                                                  | 0,01    | 0,00                   | 0,00    | 0,01    | 0,03     | 1,64       | 3,68    |
| Описательные статистики обучающей выборки QQQ (2012-01-03–2018-12-31) |         |                        |         |         |          |            |         |
| $\psi_1$                                                              | –0,01   | 0,06                   | –0,60   | 0,00    | 0,15     | –5,14      | 32,14   |
| $\psi_2$                                                              | 0,16    | 0,12                   | 0,04    | 0,13    | 2,04     | 5,24       | 49,86   |
| $\psi_3$                                                              | –1,44   | 0,83                   | –2,90   | –1,52   | 2,21     | 0,86       | 0,90    |
| $\psi_4$                                                              | –0,20   | 0,34                   | –1,44   | –0,19   | 0,87     | 0,11       | 1,17    |
| $\psi_5$                                                              | 0,11    | 0,12                   | 0,01    | 0,08    | 1,94     | 5,35       | 52,49   |
| $\psi_6$                                                              | 0,11    | 0,21                   | 0,00    | 0,07    | 2,19     | 6,32       | 47,66   |
| $RV$                                                                  | 0,01    | 0,00                   | 0,00    | 0,01    | 0,02     | 1,46       | 2,31    |

Далее проведем тесты на коинтеграцию между признаками моделей и реализованной волатильностью на 5, 10, 15 и 20 дней вперед. Для этого оценим статистики Энгла – Грейнджера (EG-тест) и Йохансена [Dwyer, 2015].

Тест Энгла – Грейнджера проверяет наличие коинтеграционных связей между временными рядами на двухэтапной основе. Нулевая гипотеза теста: остатки нестационарны. Если нулевая гипотеза отвергается, значит, остатки стационарны, что свидетельствует о наличии коинтеграции.

Тест Йохансена – более мощный метод, который позволяет выявлять наличие коинтеграции между несколькими временными рядами. Он основан на модели векторной авторегрессии (VAR), преобразованной в модель векторной коррекции ошибок. Нулевая гипотеза теста Йохансена: количество коинтеграционных векторов меньше или равно заданному значению. Представим результаты данных тестов в табл. 3.

**Таблица 3.**  
**Тесты на коинтеграцию для реализованной волатильности SPY**  
**и QQQ (критическое значение теста Йохансена (5%) равно 15,49)**

| Фактор                           | SPY                                 |                               | QQQ                                 |                               |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
|                                  | р-value теста<br>Энгла – Грейнджера | статистика теста<br>Йохансена | р-value теста<br>Энгла – Грейнджера | статистика теста<br>Йохансена |
| Целевая переменная – $RV_{t+5}$  |                                     |                               |                                     |                               |
| $\Psi_1$                         | 0,01                                | 524,64                        | 0,31                                | 446,56                        |
| $\Psi_2$                         | 0,00                                | 164,95                        | 0,34                                | 277,58                        |
| $\Psi_3$                         | 0,00                                | 378,89                        | 0,32                                | 113,56                        |
| $\Psi_4$                         | 0,02                                | 506,77                        | 0,33                                | 141,93                        |
| $\Psi_5$                         | 0,00                                | 167,58                        | 0,20                                | 265,07                        |
| $\Psi_6$                         | 0,00                                | 276,29                        | 0,21                                | 423,18                        |
| $RV_t$                           | 0,00                                | 1055,52                       | 0,00                                | 544,07                        |
| $RV_{t-5}$                       | 0,00                                | 551,55                        | 0,00                                | 277,71                        |
| $RV_{t-21}$                      | 0,00                                | 59,52                         | 0,01                                | 44,81                         |
| Целевая переменная – $RV_{t+10}$ |                                     |                               |                                     |                               |
| $\Psi_1$                         | 0,00                                | 508,80                        | 0,20                                | 442,60                        |
| $\Psi_2$                         | 0,00                                | 169,18                        | 0,14                                | 274,35                        |
| $\Psi_3$                         | 0,00                                | 375,82                        | 0,10                                | 115,02                        |
| $\Psi_4$                         | 0,01                                | 506,25                        | 0,21                                | 141,42                        |
| $\Psi_5$                         | 0,00                                | 167,74                        | 0,26                                | 262,04                        |
| $\Psi_6$                         | 0,00                                | 274,92                        | 0,16                                | 421,06                        |
| $RV_t$                           | 0,00                                | 556,14                        | 0,00                                | 280,86                        |
| $RV_{t-5}$                       | 0,00                                | 356,06                        | 0,00                                | 192,51                        |
| $RV_{t-21}$                      | 0,00                                | 41,36                         | 0,01                                | 38,65                         |

Окончание табл. 3.

| Фактор                           | SPY                                 |                               | QQQ                                 |                               |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
|                                  | p-value теста<br>Энгла – Грейнджера | статистика теста<br>Йохансена | p-value теста<br>Энгла – Грейнджера | статистика теста<br>Йохансена |
| Целевая переменная – $RV_{t+15}$ |                                     |                               |                                     |                               |
| $\Psi_1$                         | 0,01                                | 509,81                        | 0,14                                | 443,72                        |
| $\Psi_2$                         | 0,00                                | 171,52                        | 0,11                                | 276,15                        |
| $\Psi_3$                         | 0,00                                | 367,21                        | 0,07                                | 126,75                        |
| $\Psi_4$                         | 0,02                                | 502,83                        | 0,13                                | 144,05                        |
| $\Psi_5$                         | 0,00                                | 165,29                        | 0,14                                | 264,18                        |
| $\Psi_6$                         | 0,00                                | 263,05                        | 0,13                                | 421,15                        |
| $RV_t$                           | 0,00                                | 365,98                        | 0,00                                | 187,01                        |
| $RV_{t-5}$                       | 0,00                                | 0,00                          | 0,00                                | 118,84                        |
| $RV_{t-21}$                      | 0,00                                | 0,00                          | 0,01                                | 38,28                         |
| Целевая переменная – $RV_{t+20}$ |                                     |                               |                                     |                               |
| $\Psi_1$                         | 0,01                                | 495,96                        | 0,01                                | 447,94                        |
| $\Psi_2$                         | 0,00                                | 188,56                        | 0,01                                | 279,46                        |
| $\Psi_3$                         | 0,00                                | 368,20                        | 0,01                                | 138,67                        |
| $\Psi_4$                         | 0,01                                | 506,00                        | 0,02                                | 148,74                        |
| $\Psi_5$                         | 0,00                                | 177,07                        | 0,01                                | 268,13                        |
| $\Psi_6$                         | 0,00                                | 271,15                        | 0,01                                | 421,27                        |
| $RV_t$                           | 0,00                                | 245,00                        | 0,00                                | 128,90                        |
| $RV_{t-5}$                       | 0,00                                | 71,36                         | 0,00                                | 50,88                         |
| $RV_{t-21}$                      | 0,00                                | 43,61                         | 0,00                                | 44,73                         |

Тесты на коинтеграцию показывают, что для SPY существует значительная коинтеграция между признаками и реализованной волатильностью на всех горизонтах прогноза, что указывает на наличие устойчивых долгосрочных взаимосвязей. Для QQQ ко-

интеграция проявляется менее выражено по результатам теста Энгла – Грейнджера, но статистики теста Йохансена подтверждают наличие коинтеграционных связей на всех горизонтах для всех переменных.

### 3.4. Модели оценки

#### 3.4.1. Рекуррентные нейронные сети LSTM и GRU

В ряде исследований, например [Rodikov, Antulov-Fantulin, 2022], было показано, что LSTM и GRU могут улучшить прогнозы реализованной волатильности по сравнению с классическими моделями GARCH и HAR-RV, особенно для краткосрочных прогнозов. Тем не менее в большинстве работ по прогнозированию реализованной волатильности отмечается, что модели машинного обучения не всегда значительно превосходят эконометрические, в том числе линейные модели для прогнозирования реализованной волатильности, особенно в случае более долгосрочных прогнозов. В работе [Branco et al., 2024] говорится о том, что линейные модели на базе гетерогенной авторегрессии часто оказываются более конкурентоспособными, особенно для прогнозов на месячных и недельных интервалах по сравнению с алгоритмами глубокого обучения. Однако в краткосрочных прогнозах (на один день) модели LSTM и GRU могут показать лучшие результаты.

Также важно отметить, что эконометрические модели имеют значительное преимущество в интерпретируемости. Например, модели HAR-RV и GARCH позволяют понимать эффекты каждого из лагов или компонентов волатильности.

В рамках настоящего исследования будет произведено сравнение точности прогнозирования реализованной волатильности на примере моделей LSTM, GRU, BiLSTM и BiGRU с линейной моделью HAR-RV с коррекцией Ньюи – Уэста.

Далее опишем некоторые математические свойства моделей глубокого обучения. На рис. 3 представим рекуррентный модуль LSTM.

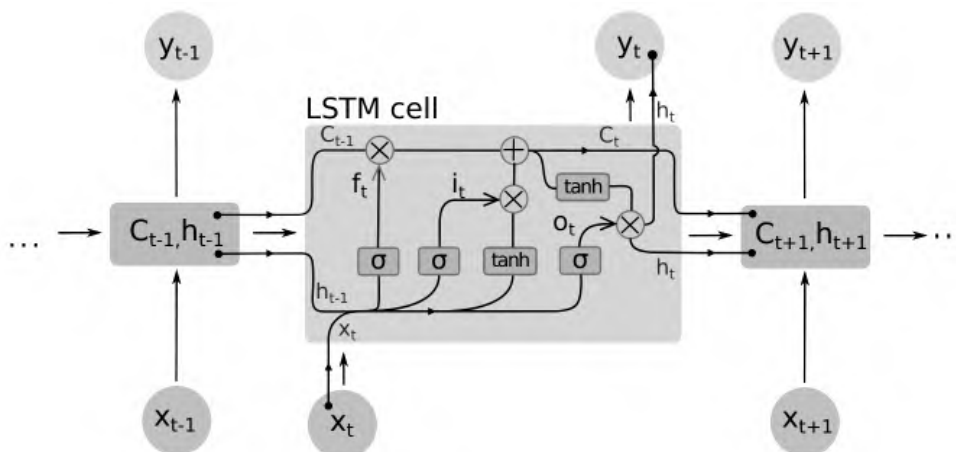


Рис. 3. Рекуррентный модуль LSTM

Вычисления на каждом временном шаге внутри LSTM-сети для одного примера последовательных данных:

$$\begin{aligned}
 f_t &= \sigma(W_f[h_{t-1}, x_t] + b_f), \\
 i_t &= \sigma(W_i[h_{t-1}, x_t] + b_i), \\
 \tilde{C}_t &= \tanh(W_C[h_{t-1}, x_t] + b_C), \\
 C_t &= f_t \cdot C_{t-1} + i_t \cdot \tilde{C}_t, \\
 o_t &= \sigma(W_o[h_{t-1}, x_t] + b_o),
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

где  $f_t, i_t, o_t$  – вентили LSTM для забывания, входа и выхода соответственно;  $\tilde{C}_t$  – новая кандидатская ячейка памяти;  $C_t$  – обновленная ячейка памяти;  $h_t$  – скрытое состояние;  $\sigma, \tanh$  – функции активации сигмоида и гиперболический тангенс, соответственно;  $b$  – смещение модели.

Представим общее описание GRU-сети. Одну ячейку GRU-модуля отобразим на рис. 4.

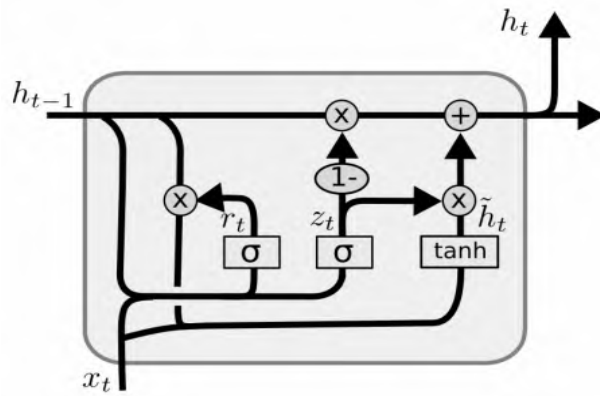


Рис. 4. Рекуррентный модуль GRU

Вычисления на каждом временном шаге внутри GRU-сети для входных последовательностей, представленных в виде тензорных представлений

$$\begin{aligned}
 z_t &= \sigma(W_z[h_{t-1}, x_t]), \\
 r_t &= \sigma(W_r[h_{t-1}, x_t]),
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

где  $z_t$  – вектор обновления;  $r_t$  – вектор сброса;  $W_z, W_r$  – матрицы весов для векторов обновления и сброса, соответственно, которые подбираются в процессе обучения сети и применяются к комбинации предыдущего скрытого состояния  $h_{t-1}$  и текущего входного вектора  $x_t$ :

$$(22) \quad \begin{aligned} \tilde{h}_t &= \tanh(W[r_t \cdot h_{t-1}, x_t]), \\ h_t &= (1 - z) \cdot h_{t-1} + z_t \cdot \tilde{h}_t, \end{aligned}$$

где  $\tilde{h}_t$  – кандидат на новое скрытое состояние;  $h_t$  – новое скрытое состояние;  $W$  – матрица весов для вычисления кандидата на новое скрытое состояние  $\tilde{h}_t$ , также обучаемая в процессе обучения сети.

### 3.4.2. Блочная архитектура N-BEATS

Модель Neural Basis Expansion Analysis for Time Series Forecasting (N-BEATS) была впервые предложена в статье [Oreshkin, Carпов, Chapados, Bengio, 2019]. Расширенная архитектура под названием N-BEATSx (N-BEATS with Exogenous Variables) представляет собой усовершенствованную версию модели N-BEATS, специально разработанную для анализа временных рядов с учетом экзогенных переменных. Модель состоит из набора блоков, каждый из которых обучается выделять специфические особенности временного ряда. В N-BEATSx эти блоки могут обрабатывать как непосредственно временные ряды, так и экзогенные переменные, что значительно увеличивает гибкость и точность модели.

В работе [Souto, Moradi, 2024] исследуется применение модели N-BEATSx для прогнозирования реализованной волатильности. Это первая работа, которая использует данную архитектуру для прогнозирования волатильности, и в исследовании ставилась цель выделить преимущества архитектуры N-BEATSx перед широко используемыми моделями LSTM, TCN, HAR, GARCH и GJR-GARCH. По результатам авторов, N-BEATSx в среднем показывает на 13% более точные прогнозы на тестовой выборке для среднесрочных прогнозов и на 8% лучше для долгосрочных прогнозов по сравнению с другими моделями (TCN, GARCH и т.д.). Однако модель N-BEATSx не показала более точных прогнозов реализованной волатильности, чем LSTM-сеть. Стоит отметить, что модель оказалась на 43–60% более устойчива к изменениям параметров (включая случайность, связанную с начальной инициализацией параметров сети) в краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных прогнозах. В рамках тестов на робастность N-BEATSx показала значительное преимущество по устойчивости к изменению параметров по сравнению с другими нейронными сетями. Это преимущество, по мнению авторов, связано с архитектурой модели, которая позволяет ей эффективно использовать большое количество параметров и избегать переобучения благодаря многослойной структуре. Интересно, как отмечают авторы, что для развивающихся рынков, таких как IBOVESPA и S&P BSE SENSEX, преимущество N-BEATSx не так очевидно, как для развитых рынков (например, S&P 500, NASDAQ).

### 3.4.3. Подбор гиперпараметров

Перед построением моделей необходимо отобрать наилучшую комбинацию гиперпараметров. Подбор комбинации будем производить при помощи механизма поиска по сетке с максимизацией метрики MSE на валидационной выборке.

В табл. 4 отобразим перечень используемых комбинаций гиперпараметров в нейронных сетях.

Таблица 4.

**Перечень значений гиперпараметров,  
использованных для поиска по сетке**

| Гиперпараметр           | LSTM, GRU, BiLSTM, BiGRU                                 | FNN                                  | N-BEATSx |
|-------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------------|----------|
| Предобработка признаков | MinMaxScaler; StandardScaler; Yeo-Johnson transformation |                                      |          |
| Количество:             |                                                          |                                      |          |
| слоев                   | 2; 3; 4                                                  |                                      | –        |
| нейронов                | 16; 32; 64; 128; 256                                     | 16; 32; 64; 128; 256; 512            |          |
| Дропаут                 | 0,0; 0,1; 0,2; 0,3                                       |                                      | –        |
| Рекуррентный дропаут    | 0,0; 0,1; 0,2; 0,3                                       | –                                    |          |
| Размер батча            | 32; 64; 128; 256                                         |                                      |          |
| Функция активации       | Tanh, Soft sign; Sigmoid                                 | ReLU; Leaky ReLU; Linear; Tanh; SeLU |          |
| Скорость обучения       | 0,001; 0,0003; 0,0001                                    |                                      |          |
| Количество блоков       | –                                                        |                                      | 2; 3; 4  |

В представленном перечне гиперпараметров не указано количество эпох обучения нейронных сетей. Одна эпоха обозначает, что нейронная сеть прошла по всей обучающей выборке, либо слева направо, либо справа налево, либо в обе стороны в случае Bidirectional архитектур. Механизм ранней остановки прекращает обучение, когда отслеживаемая ошибка на валидационной выборке растет  $n$  раз подряд. Установим  $n$  равное 5. Другими словами, если отслеживаемая ошибка растет 5 эпох подряд, то обучение прекратится. В данном случае будет отслеживаться метрика RMSE.

После проведения процедуры поиска по сетке с помощью кросс-валидации были отобраны наилучшие комбинации гиперпараметров нейронных сетей для инструментов SPY и QQQ. Данные комбинации обеспечивают наименьшее значение MSE на валидационной выборке. Определим отобранные комбинации (табл. 5, 6).

Таблица 5.

**Используемые гиперпараметры в нейронных сетях  
для прогнозирования реализованной волатильности SPY**

| Гиперпараметр           | LSTM         | GRU | BiLSTM | BiGRU | FNN     | N-BEATSx |
|-------------------------|--------------|-----|--------|-------|---------|----------|
| Предобработка признаков | MinMaxScaler |     |        |       |         |          |
| Количество:             |              |     |        |       |         |          |
| слоев                   | 2            |     |        |       | 2; 3; 4 | –        |
| нейронов                | 64           | 32  |        |       | 16      | 128      |
| Дропаут                 | 0,0          |     |        |       |         | –        |

Окончание табл. 5.

| Гиперпараметр                               | LSTM   | GRU | BiLSTM | BiGRU | FNN   | N-BEATSx |
|---------------------------------------------|--------|-----|--------|-------|-------|----------|
| Рекуррентный дропаут                        | 0,0    |     | 0,1    | 0,2   | –     | –        |
| Размер батча                                | 64     |     |        |       |       |          |
| Функция активации                           | Tanh   |     |        |       | ReLU  |          |
| Скорость обучения                           | 0,0003 |     |        |       | 0,001 |          |
| $\lambda$ (гиперпараметр quantile log-cosh) | 5      |     |        |       |       |          |
| $\eta$ (гиперпараметр quantile log-cosh)    | 0,75   |     |        |       |       |          |
| Количество блоков                           | –      |     |        |       |       | 2        |
| Оптимизатор                                 | Adam   |     |        |       |       |          |

Таблица 6.

**Используемые гиперпараметры в нейронных сетях  
для прогнозирования реализованной волатильности QQQ**

| Гиперпараметр                               | LSTM         | GRU | BiLSTM | BiGRU | FNN     | N-BEATSx |
|---------------------------------------------|--------------|-----|--------|-------|---------|----------|
| Предобработка признаков                     | MinMaxScaler |     |        |       |         |          |
| Количество:                                 |              |     |        |       |         |          |
| слоев                                       | 2            |     |        |       | 2; 3; 4 | -        |
| нейронов                                    | 32           |     |        |       |         | 128      |
| Дропаут                                     | 0,0          |     |        |       |         | -        |
| Рекуррентный дропаут                        | 0,1          | 0,0 |        |       | -       |          |
| Размер батча                                | 64           |     |        |       |         |          |
| Функция активации                           | Tanh         |     |        |       | Linear  |          |
| Скорость обучения                           | 0,0003       |     |        |       | 0,001   |          |
| $\lambda$ (гиперпараметр quantile log-cosh) | 10           |     |        |       |         |          |
| $\eta$ (гиперпараметр quantile log-cosh)    | 0,75         |     |        |       |         |          |
| Количество блоков                           | -            |     |        |       |         | 4        |
| Оптимизатор                                 | Adam         |     |        |       |         |          |

#### 4. Результаты исследования и обсуждение

##### 4.1. Оценка качества моделей прогнозирования реализованной волатильности

Далее перейдем к результатам обучения описанных моделей на предобработанных временных рядах (табл. 7, 8).

Таблица 7.

**Метрики качества моделей прогнозирования реализованной волатильности SPY на тестовой выборке**

| Модель   | Целевая переменная |          |             |                    |           |             |                    |           |             |                    |           |             |
|----------|--------------------|----------|-------------|--------------------|-----------|-------------|--------------------|-----------|-------------|--------------------|-----------|-------------|
|          | $RV_{t+5}$         |          |             | $RV_{t+10}$        |           |             | $RV_{t+15}$        |           |             | $RV_{t+20}$        |           |             |
|          | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %  | QLIKE       | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %   | QLIKE       | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %   | QLIKE       | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %   | QLIKE       |
| LSTM     | <b>88</b>          | <b>9</b> | <b>0,17</b> | <b>78</b>          | <b>14</b> | <b>0,32</b> | <b>66</b>          | 18        | <b>0,47</b> | <b>30</b>          | 67        | <b>0,20</b> |
| GRU      | 86                 | 12       | 0,20        | 77                 | 15        | 0,34        | <b>66</b>          | 18        | 0,48        | 22                 | 67        | 0,22        |
| BiLSTM   | 85                 | 13       | 0,22        | 77                 | 15        | 0,34        | 62                 | <b>17</b> | 0,49        | 22                 | <b>65</b> | 0,22        |
| BiGRU    | 68                 | 19       | 0,42        | 64                 | 21        | 0,52        | 60                 | 20        | 0,65        | 23                 | 96        | 0,23        |
| FNN      | 40                 | 28       | 0,91        | 23                 | 44        | 1,76        | 28                 | 28        | 1,07        | 12                 | 129       | 0,32        |
| N-BEATSx | 37                 | 25       | 0,26        | 36                 | 28        | 1,03        | 27                 | 35        | 1,19        | 12                 | 290       | 0,62        |
| HARx-RV  | <b>88</b>          | 10       | <b>0,17</b> | 77                 | 15        | 0,33        | <b>66</b>          | 18        | 0,47        | 22                 | 67        | 0,22        |
| HAR-RV   | 87                 | 11       | 0,20        | 72                 | 16        | 0,41        | 57                 | 20        | 0,59        | 23                 | 80        | 0,23        |

Таблица 8.

**Метрики качества моделей прогнозирования реализованной волатильности QQQ на тестовой выборке**

| Модель   | Целевая переменная |           |             |                    |           |             |                    |           |             |                    |           |             |
|----------|--------------------|-----------|-------------|--------------------|-----------|-------------|--------------------|-----------|-------------|--------------------|-----------|-------------|
|          | $RV_{t+5}$         |           |             | $RV_{t+10}$        |           |             | $RV_{t+15}$        |           |             | $RV_{t+20}$        |           |             |
|          | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %   | QLIKE       | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %   | QLIKE       | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %   | QLIKE       | R <sup>2</sup> , % | MAPE, %   | QLIKE       |
| LSTM     | 88                 | <b>9</b>  | <b>0,14</b> | 77                 | <b>13</b> | <b>0,29</b> | 65                 | <b>17</b> | 0,45        | 46                 | <b>20</b> | 0,68        |
| GRU      | 88                 | 10        | 0,17        | 71                 | 14        | 0,36        | 51                 | 18        | 0,68        | 33                 | 21        | 0,79        |
| BiLSTM   | <b>89</b>          | <b>09</b> | <b>0,14</b> | <b>78</b>          | <b>13</b> | <b>0,29</b> | 64                 | 16        | 0,47        | 42                 | 21        | 0,72        |
| BiGRU    | 78                 | 13        | 0,24        | 71                 | 18        | 0,44        | 54                 | 22        | 0,60        | 44                 | 23        | 0,95        |
| FNN      | 73                 | 16        | 0,64        | 58                 | 20        | 0,80        | 28                 | 26        | 1,13        | 24                 | 26        | 1,26        |
| N-BEATSx | 69                 | 15        | 0,40        | 22                 | 25        | 1,13        | 21                 | 31        | 1,13        | 20                 | 24        | 1,03        |
| HARx-RV  | <b>89</b>          | 10        | 0,16        | <b>78</b>          | 16        | 0,32        | <b>68</b>          | 18        | <b>0,44</b> | <b>53</b>          | 21        | <b>0,61</b> |
| HAR-RV   | 88                 | <b>09</b> | 0,15        | 71                 | 14        | 0,35        | 52                 | 18        | 0,57        | 26                 | 22        | 0,87        |

Результаты расчета статистик и p-value теста Дибольда – Мариано представлены в табл. 9.

Таблица 9.

**Результаты теста Дибольда – Мариано  
на точность прогнозов реализованной волатильности SPY и QQQ**

| Модель                           | SPY                                 |             |                         | QQQ                                 |             |                         |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------|-------------------------|
|                                  | статистика<br>Дибольда –<br>Мариано | p-<br>value | принимаемая<br>гипотеза | статистика<br>Дибольда –<br>Мариано | p-<br>value | принимаемая<br>гипотеза |
| Целевая переменная – $RV_{t+5}$  |                                     |             |                         |                                     |             |                         |
| LSTM                             | 1,39                                | 0,17        | H0                      | 0,25                                | 0,80        | H0                      |
| GRU                              | -1,31                               | 0,19        | H0                      | -0,82                               | 0,41        | H0                      |
| BiLSTM                           | -1,97                               | 0,05        | H0                      | 0,70                                | 0,48        | H0                      |
| BiGRU                            | -4,42                               | 0,00        | H1                      | -2,85                               | 0,00        | H1                      |
| FNN                              | -6,61                               | 0,00        | H1                      | -4,06                               | 0,00        | H1                      |
| N-BEATSx                         | -6,95                               | 0,00        | H1                      | -4,20                               | 0,00        | H1                      |
| HARx-RV                          | 0,70                                | 0,49        | H0                      | -0,16                               | 0,88        | H0                      |
| HAR-RV                           | –                                   | –           | –                       | –                                   | –           | –                       |
| Целевая переменная – $RV_{t+10}$ |                                     |             |                         |                                     |             |                         |
| LSTM                             | <b>2,47</b>                         | <b>0,01</b> | <b>H1</b>               | <b>2,33</b>                         | <b>0,02</b> | <b>H1</b>               |
| GRU                              | 1,20                                | 0,23        | H0                      | 0,13                                | 0,90        | H0                      |
| BiLSTM                           | <b>2,36</b>                         | <b>0,02</b> | <b>H1</b>               | 1,82                                | 0,07        | H0                      |
| BiGRU                            | -1,87                               | 0,06        | H0                      | -0,99                               | 0,32        | H0                      |
| FNN                              | -5,79                               | 0,00        | H1                      | -2,50                               | 0,01        | H1                      |
| N-BEATSx                         | -6,17                               | 0,00        | H1                      | -5,22                               | 0,00        | H1                      |
| HARx-RV                          | 1,98                                | 0,05        | H0                      | 0,59                                | 0,56        | H0                      |
| HAR-RV                           | –                                   | –           | –                       | –                                   | –           | –                       |
| Целевая переменная – $RV_{t+15}$ |                                     |             |                         |                                     |             |                         |
| LSTM                             | <b>3,18</b>                         | <b>0,00</b> | <b>H1</b>               | <b>2,52</b>                         | <b>0,01</b> | <b>H1</b>               |
| GRU                              | <b>2,72</b>                         | <b>0,01</b> | <b>H1</b>               | -1,00                               | 0,32        | H0                      |
| BiLSTM                           | <b>2,73</b>                         | <b>0,01</b> | <b>H1</b>               | <b>2,69</b>                         | <b>0,01</b> | <b>H1</b>               |
| BiGRU                            | 0,23                                | 0,82        | H0                      | -0,55                               | 0,58        | H0                      |
| FNN                              | -3,64                               | 0,00        | H1                      | -3,20                               | 0,00        | H1                      |
| N-BEATSx                         | -7,98                               | 0,00        | H1                      | -3,08                               | 0,00        | H1                      |
| HARx-RV                          | <b>2,84</b>                         | <b>0,00</b> | <b>H1</b>               | 1,79                                | 0,07        | H0                      |
| HAR-RV                           | –                                   | –           | –                       | –                                   | –           | –                       |

Окончание табл. 9.

| Модель                           | SPY                                 |             |                         | QQQ                                 |             |                         |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------------|-------------------------|-------------------------------------|-------------|-------------------------|
|                                  | статистика<br>Дибольда –<br>Мариано | p-<br>value | принимаемая<br>гипотеза | статистика<br>Дибольда –<br>Мариано | p-<br>value | принимаемая<br>гипотеза |
| Целевая переменная – $RV_{t+20}$ |                                     |             |                         |                                     |             |                         |
| LSTM                             | <b>2,92</b>                         | <b>0,00</b> | <b>H1</b>               | <b>3,4</b>                          | <b>0,00</b> | <b>H1</b>               |
| GRU                              | <b>2,63</b>                         | <b>0,01</b> | <b>H1</b>               | <b>2,34</b>                         | <b>0,02</b> | <b>H1</b>               |
| BiLSTM                           | <b>3,09</b>                         | <b>0,00</b> | <b>H1</b>               | <b>3,29</b>                         | <b>0,00</b> | <b>H1</b>               |
| BiGRU                            | –0,89                               | 0,37        | H0                      | 0,77                                | 0,44        | H0                      |
| FNN                              | –2,36                               | 0,02        | H1                      | –0,97                               | 0,33        | H0                      |
| N-BEATSx                         | –3,1                                | 0,00        | H1                      | –1,86                               | 0,06        | H0                      |
| HARx-RV                          | <b>2,73</b>                         | <b>0,01</b> | <b>H1</b>               | <b>3,01</b>                         | <b>0,00</b> | <b>H1</b>               |
| HAR-RV                           | –                                   | –           | –                       | –                                   | –           | –                       |

По результатам оценок наиболее эффективной моделью из исследуемых для прогнозирования реализованной волатильности SPY и QQQ признаем LSTM-сеть, включающую в себя экзогенные факторы из теоремы восстановления и обученную на функции потерь quantile log-cosh. Поэтому далее проведем доказательный эксперимент эффективности quantile log-cosh на примере LSTM-сети.

#### 4.2. Оценка эффективности quantile log-cosh в качестве функции потерь на примере нейронной сети LSTM

Определим методику сравнения производительности LSTM-сети с различными функциями потерь. Сравнение с другими популярными функциями потерь (MSE, MAE, log-cosh и Huber) будет производиться по средним квантильным ошибкам (quantile error, QE):

$$(23) \quad QE_{t+k}(q) = q \cdot \max(RV_{t+k} - \widehat{RV}_{t+k}, 0) + (1 - q) \cdot \max(\widehat{RV}_{t+k} - RV_{t+k}, 0),$$

где  $k$  – горизонт прогнозирования: 5, 10, 15, 20 дней;  $q$  – квантиль (0, 0,1, ..., 1).

Среднее значение квантильной ошибки (mean quantile error, MQE):

$$(24) \quad MQE_{t+k} = \frac{1}{N} \sum_q QE_{t+k}(q),$$

где  $N$  – количество квантилей.

Обратим внимание на тот факт, что  $MQE_{t+k}$  является метрикой MAE, которая была разложена по различным квантилям исходных данных.

Существенной мотивацией введения новой функции потерь, а именно квантильно-го лог-гиперболического косинуса, было то, что процесс волатильности имеет склонность к резким скачкам, которые при разложении ряда попадают в диапазон высоких квантилей. Поэтому метрики  $MQE_{t+k}$  будут посчитаны для всей тестовой выборки и отдельно для данных, находящихся выше 75-го квантиля, чтобы оценить, насколько модификация вида quantile log-cosh повлияла на качество прогнозов модели в пиковых значениях волатильности.

Далее перейдем к сравнению полученных результатов оценки производительности LSTM-сети с различными функциями потерь для задачи прогнозирования реализованной волатильности SPY и QQQ (табл. 10, 11).

Таблица 10.

**Средние значения квантильных ошибок для различных метрик и горизонтов прогнозирования реализованной волатильности инструмента SPY**

| LSTM<br>с разными функциями<br>потерь ( $\ell$ )                              | $MQE_{t+5}$ | $MQE_{t+10}$ | $MQE_{t+15}$ | $MQE_{t+20}$ | Среднее<br>$MQE_{t+k} \times 10^2$ |
|-------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|------------------------------------|
| Квантили с 0 до 1                                                             |             |              |              |              |                                    |
| $\ell$ – квантильный лог-гиперболический косинус ( $\lambda = 10, q = 0,75$ ) | 0,1108      | 0,1423       | 0,1796       | 0,2157       | 0,1621                             |
| $\ell$ – лог-гиперболический косинус                                          | 0,1009      | 0,1508       | 0,1759       | 0,2211       | 0,1622                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 1$ )                                               | 0,1000      | 0,1522       | 0,1765       | 0,2194       | 0,1620                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 0,5$ )                                             | 0,0978      | 0,1396       | 0,1762       | 0,2180       | 0,1579                             |
| $\ell$ – MSE                                                                  | 0,0992      | 0,1419       | 0,1782       | 0,2174       | 0,1592                             |
| $\ell$ – MAE                                                                  | 0,0988      | 0,1435       | 0,2070       | 0,3064       | 0,1889                             |
| Квантили с 0,75 по 1                                                          |             |              |              |              |                                    |
| $\ell$ – квантильный лог-гиперболический косинус ( $\lambda = 10, q = 0,75$ ) | 0,2438      | 0,2724       | 0,3563       | 0,4241       | 0,3241                             |
| $\ell$ – лог-гиперболический косинус                                          | 0,1393      | 0,2088       | 0,3186       | 0,4725       | 0,2848                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 1$ )                                               | 0,1602      | 0,2009       | 0,3310       | 0,3900       | 0,2705                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 0,5$ )                                             | 0,1948      | 0,2488       | 0,3214       | 0,4330       | 0,2995                             |
| $\ell$ – MSE                                                                  | 0,1490      | 0,2833       | 0,3482       | 0,3864       | 0,2917                             |
| $\ell$ – MAE                                                                  | 0,1558      | 0,2957       | 0,4540       | 0,6658       | 0,3928                             |

**Таблица 11.**

**Средние значения квантильных ошибок для различных метрик  
и горизонтов прогнозирования реализованной волатильности инструмента QQQ**

| LSTM<br>с разными функциями<br>потерь ( $\ell$ )                                      | $MQE_{t+5}$ | $MQE_{t+10}$ | $MQE_{t+15}$ | $MQE_{t+20}$ | Среднее<br>$MQE_{t+k} \times 10^2$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|------------------------------------|
| Квантили с 0 до 1                                                                     |             |              |              |              |                                    |
| $\ell$ – квантильный лог-<br>гиперболический коси-<br>нус ( $\lambda = 5, q = 0,75$ ) | 0,1332      | 0,1939       | 0,2415       | 0,2898       | 0,2146                             |
| $\ell$ – лог-гиперболический<br>косинус                                               | 0,1333      | 0,1863       | 0,2400       | 0,2946       | 0,2136                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 1$ )                                                       | 0,1311      | 0,1915       | 0,2380       | 0,3016       | 0,2155                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 0,5$ )                                                     | 0,1353      | 0,1908       | 0,2445       | 0,3025       | 0,2183                             |
| $\ell$ – MSE                                                                          | 0,1295      | 0,1881       | 0,2386       | 0,3068       | 0,2158                             |
| $\ell$ – MAE                                                                          | 0,1487      | 0,1960       | 0,2555       | 0,3494       | 0,2374                             |
| Квантили с 0,75 по 1                                                                  |             |              |              |              |                                    |
| $\ell$ – квантильный лог-<br>гиперболический коси-<br>нус ( $\lambda = 5, q = 0,75$ ) | 0,1914      | 0,2939       | 0,4274       | 0,5608       | 0,3684                             |
| $\ell$ – лог-гиперболический<br>косинус                                               | 0,1983      | 0,3354       | 0,4558       | 0,6138       | 0,4008                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 1$ )                                                       | 0,1885      | 0,3238       | 0,4599       | 0,6673       | 0,4099                             |
| $\ell$ – Huber ( $\delta = 0,5$ )                                                     | 0,1903      | 0,3103       | 0,4896       | 0,6537       | 0,4110                             |
| $\ell$ – MSE                                                                          | 0,1964      | 0,3558       | 0,4697       | 0,6813       | 0,4258                             |
| $\ell$ – MAE                                                                          | 0,2119      | 0,4073       | 0,5701       | 0,8039       | 0,4983                             |

Резюмируя вышесказанное, можно говорить о некоторой состоятельности использования функции потерь вида quantile log-cosh при работе на временных рядах реализованной волатильности. На квантилях выше 0,75 тестовой выборки реализованной волатильности инструмента QQQ LSTM-сеть с лосс-функцией квантильный лог-гиперболический косинус продемонстрировала наименьшее абсолютное значение отклонений от исходных данных при реализации прогнозов на 5, 10, 15 и 20 дней вперед. Функция потерь quantile log-cosh показывает потенциал для улучшения качества прогнозов в пиковых значениях волатильности, однако требует дополнительной проверки на других наборах данных.

## 5. Заключение

Таким образом, в данной работе была рассмотрена проблема прогнозирования реализованной волатильности ETF на основе экзогенных факторов, извлекаемых из теоремы восстановления, а также предложена модификация функции потерь quantile log-cosh для улучшения качества прогнозов в периоды высокой волатильности.

Основные выводы исследования.

1. Специфические свойства ETF предопределяют методы прогнозирования. ETF, в отличие от отдельных акций, обладают уникальными характеристиками, такими как механизм арбитража, высокая ликвидность и влияние маркет-мейкеров, что делает их волатильность отличной от традиционных активов. Эти особенности обосновывают применение сложных методов прогнозирования, включая нейросетевые модели и учет опционной информации.

2. Использование факторов, извлекаемых из теоремы восстановления, значительно повышает точность прогнозов. Теорема восстановления позволяет реконструировать плотность распределения базового актива в истинной мере, что дает дополнительные информативные признаки для прогнозирования волатильности. Эксперименты показали, что включение этих факторов в модели HAR-RV и нейросетевые архитектуры позволяет достичь существенного прироста точности.

3. Модифицированная функция потерь quantile log-cosh улучшает прогнозы в периоды высокой волатильности. Введение штрафа за ошибки в верхних квантилях распределения волатильности позволяет более точно моделировать экстремальные рыночные движения. Тестирование на ETF SPY и QQQ показало, что модели, обученные с использованием quantile log-cosh, превосходят аналоги с MSE, MAE и стандартным log-cosh, особенно на горизонтах прогнозирования 10–20 дней.

4. LSTM-сеть с quantile log-cosh и экзогенными факторами из теоремы восстановления оказалась наиболее эффективной. В сравнении с HAR-RV, стандартными рекуррентными сетями (GRU, BiLSTM) и классическими методами прогнозирования, модель LSTM с предложенной модификацией функции потерь и факторным анализом на базе теоремы восстановления продемонстрировала наивысшую точность прогнозов на тестовой выборке.

**Доступность данных.** Код в Python и данные, используемые для анализа, предоставляются по запросу.

\* \*  
\*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Костырка А.В., Малахов Д.И. А был ли сдвиг: эмпирический анализ тестов на структурные сдвиги в волатильности доходностей // Прикладная эконометрика. 2021. № 1. С. 110–139.

- Amir A., Levy A., Levenstein M., Lubin R. Porat BG. Can We Recover the Cover? // *Algorithmica*. 2019. Vol. 81. № 7. P. 2857–2875.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. Modeling and Forecasting Realized Volatility // *Econometrica*. 2003. Vol. 71. № 2. P. 579–625.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility // *Journal of the American Statistical Association*. 2001. Vol. 96. № 453. P. 42–55.
- Andersen T.G., Bollerslev T. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts // *International Economic Review*. 1998. P. 885–905.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X. Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Untangling Continuous and Jump Components in Measuring, Modeling, and Forecasting Asset Return Volatility // *Modeling, and Forecasting Asset Return Volatility*. 2003. September.
- Audrino F., Huitema R., Ludwig M. An Empirical Implementation of the Ross Recovery Theorem As a Prediction Device // *Journal of Financial Econometrics*. 2021. Vol. 19. № 2. P. 291–312.
- Bakshi G., Chabi-Yo F., Gao X. A Recovery that We Can Trust? Deducing and Testing the Restrictions of the Recovery Theorem // *The Review of Financial Studies*. 2018. Vol. 31. № 2. P. 532–555.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. Estimating Quadratic Variation Using Realized Variance // *Applied Econometrics*. 2002. Vol. 17. № 5. P. 457–477.
- Barron J.T. A General and Adaptive Robust Loss Function // *Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition*. 2019. P. 4331–4339.
- Bollerslev T., Tauchen G., Zhou H. Expected Stock Returns and Variance Risk Premia // *The Review of Financial Studies*. 2009. Vol. 22. № 11. P. 4463–4492.
- Borovička J., Hansen L.P., Scheinkman J.A. Misspecified Recovery // *The Journal of Finance*. 2016. Vol. 71. № 6. P. 2493–2544.
- Branco R.R., Rubesam A., Zevallos M. Forecasting Realized Volatility: Does Anything Beat Linear Models? // *Journal of Empirical Finance*. 2024. P. 101524.
- Carr P., Yu J. Risk, Return, and Ross Recovery // *Journal of Derivatives*. 2012. Vol. 20. № 1. P. 38.
- Christoffersen P.F., Diebold F.X. How Relevant Is Volatility Forecasting for Financial Risk Management? // *Review of Economics and Statistics*. 2000. Vol. 82. № 1. P. 12–22.
- Corsi F. A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility // *Journal of Financial Econometrics*. 2008. Vol. 7. № 2. P. 174–196.
- Dwyer G.P. The Economics of Bitcoin and Similar Private Digital Currencies // *Journal of Financial Stability*. 2015. 17. P. 81–91.
- Engle R.F. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation // *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. 1982. P. 987–1007.
- Gagnon M.H., Power G.J., Toupin D. Forecasting Market Index Volatility Using Ross-Recovered Distributions // *Quantitative Finance*. 2022. Vol. 22. № 2. P. 255–271.
- Hansen P.R., Lunde A. A Realized Variance for the whole Day Based on Intermittent High-Frequency Data // *Journal of Financial Econometrics*. 2005. Vol. 3. № 4. P. 525–554.
- Huber P.J. Robust Estimation of a Location Parameter // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1964. 35(1). P. 73–101.
- Jackwerth J.C., Menner M. Does the Ross Recovery Theorem Work Empirically? // *Journal of Financial Economics*. 2020. Vol. 137. № 3. P. 723–739.
- Merton R.C. On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation // *Journal of Financial Economics*. 1980. Vol. 8. № 4. P. 323–361.
- Oreshkin B.N., Carpov D., Chapados N., Bengio Y. N-BEATS: Neural Basis Expansion Analysis for Interpretable Time Series Forecasting // *Preprint arXiv:1905.10437*. 2019.
- Qin L., Linetsky V., Nie Y. Long Forward Probabilities, Recovery, and the Term Structure of Bond Risk Premiums // *The Review of Financial Studies*. 2018. Vol. 31. № 12. P. 4863–4883.
- Rodikov G., Antulov-Fantulin N. Can LSTM Outperform Volatility-Econometric Models? // *Preprint arXiv:2202.11581*. 2022.

- Ross S. The Recovery Theorem // The Journal of Finance. 2015. Vol. 70. № 2. P. 615–648.
- Souto H.G., Moradi A. Introducing NBEATSV to Realized Volatility Forecasting // Expert Systems with Applications. 2024. Vol. 242. P. 122802.
- Welch I., Goyal A. A Comprehensive Look at the Empirical Performance of Equity Premium Prediction // The Review of Financial Studies. 2008. Vol. 21. № 4. P. 1455–1508.

## Hybrid Approaches to Predicting Realized ETF Volatility: Deep Learning and the Recovery Theorem

**Dmitry Patlasov**

Perm State National Research University,  
15, Bukireva str., Perm, 614068, Russian Federation.  
E-mail: dmitriypatlasov@gmail.com

This article examines the task of multi-step forecasting of realized volatility. The paper introduces a modification of the loss function of the form quantile log-hyperbolic cosine (quantile log-cosh), and information extracted from options using the recovery theorem [Ross, 2015] is also used as exogenous factors in the context of predicting the realized volatility of exchange-Traded funds (ETF) SPY (SPDR S&P 500 ETF Trust) и QQQ (Invesco QQQ Trust). Two hypotheses are put forward: the first one assumes that the quantile log-cosh in neural networks will increase the accuracy of the predictive model on the test dataset compared to the same models trained on other target functions. The second hypothesis is to use information extracted from the recovery theorem. This theorem makes it possible to approximate the true distribution density of SPY and QQQ states in terms of Markov chains and get rid of the assumptions of a risk-neutral measure in financial models. Then, according to the second hypothesis, it is expected that the model with the factors extracted using the recovery theorem will show more accurate predictions on the test sample compared to the classical heterogeneous autoregression (HAR-RV) model. The following machine learning models are used to test hypotheses: LSTM, GRU, BiLSTM, BiGRU, FCNN and N-BEATS. The results show that the modification of the quantile log-cosh makes it possible to improve the accuracy of model predictions on the test dataset. Also, the inclusion of exogenous factors from the recovery theorem in the forecasting models of realized volatility makes it possible to significantly outperform the HAR-RV model, especially over the long-term horizon.

**Key words:** forecasting; neural networks; realized volatility; the recovery theorem.

**JEL Classification:** G17, C45.

\* \*  
\*

## References

- Amir A., Levy A., Levenstein M., Lubin R. Porat BG. (2019) Can We Recover the Cover? *Algorithmica*, 81, 7, pp. 2857–2875.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. (2003) Modeling and Forecasting Realized Volatility. *Econometrica*, 71, 2, pp. 579–625.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Labys P. (2001) The Distribution of Realized Exchange Rate Volatility. *Journal of the American Statistical Association*, 96, 453, pp. 42–55.
- Andersen T.G., Bollerslev T. (1998) Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, pp. 885–905.
- Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X. (2003) Some Like it Smooth, and Some Like it Rough: Untangling Continuous and Jump Components in Measuring, Modeling, and Forecasting Asset Return Volatility. *Modeling, and Forecasting Asset Return Volatility*. September.
- Audrino F., Huitema R., Ludwig M. (2021) An Empirical Implementation of the Ross Recovery Theorem As a Prediction Device. *Journal of Financial Econometrics*, 19, 2, pp. 291–312.
- Bakshi G., Chabi-Yo F., Gao X. (2018) A Recovery that We Can Trust? Deducing and Testing the Restrictions of the Recovery Theorem. *The Review of Financial Studies*, 31, 2, pp. 532–555.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2002) Estimating Quadratic Variation Using Realized Variance. *Applied Econometrics*, 17, 5, pp. 457–477.
- Barron J.T. (2019) A General and Adaptive Robust Loss Function. *Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition*, pp. 4331–4339.
- Bollerslev T., Tauchen G., Zhou H. (2009) Expected Stock Returns and Variance Risk Premia. *The Review of Financial Studies*, 22, 11, pp. 4463–4492.
- Borovička J., Hansen L.P., Scheinkman J.A. (2016) Misspecified Recovery. *The Journal of Finance*, 71, 6, pp. 2493–2544.
- Branco R.R., Rubesam A., Zevallos M. (2024) Forecasting Realized Volatility: Does Anything Beat Linear Models? *Journal of Empirical Finance*, pp. 101524.
- Carr P., Yu J. (2012) Risk, Return, and Ross Recovery. *Journal of Derivatives*, 20, 1, pp. 38.
- Christoffersen P.F., Diebold F.X. (2000) How Relevant Is Volatility Forecasting for Financial Risk Management? *Review of Economics and Statistics*, 82, 1, pp. 12–22.
- Corsi F. (2008) A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7, 2, pp. 174–196.
- Dwyer G.P. (2015) The Economics of Bitcoin and Similar Private Digital Currencies. *Journal of Financial Stability*, 17, pp. 81–91.
- Engle R.F. (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 987–1007.
- Gagnon M.H., Power G.J., Toupin D. (2022) Forecasting Market Index Volatility Using Ross-Recovered Distributions. *Quantitative Finance*, 22, 2, pp. 255–271.
- Hansen P.R., Lunde A. (2005) A Realized Variance for the whole Day Based on Intermittent High-Frequency Data. *Journal of Financial Econometrics*, 3, 4, pp. 525–554.
- Huber P.J. (1964) Robust Estimation of a Location Parameter. *The Annals of Mathematical Statistics*, 35, 1, pp. 73–101.
- Jackwerth J.C., Menner M. (2020) Does the Ross Recovery Theorem Work Empirically? *Journal of Financial Economics*, 137, 3, pp. 723–739.
- Kostyrko A.V., Malakhov D.I. (2021) Was There a Shift: An Empirical Analysis of Tests for Structural Shifts in Yield Volatility. *Applied Econometrics*, 1, pp. 110–139.

- Merton R.C. (1980) On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation. *Journal of Financial Economics*, 8, 4, pp. 323–361.
- Oreshkin B.N., Carpov D., Chapados N., Bengio Y. (2019) *N-BEATS: Neural Basis Expansion Analysis for Interpretable Time Series Forecasting*. Preprint arXiv:1905.10437.
- Qin L., Linetsky V., Nie Y. (2018) Long Forward Probabilities, Recovery, and the Term Structure of Bond Risk Premiums. *The Review of Financial Studies*, 31, 12, pp. 4863–4883.
- Rodikov G., Antulov-Fantulin N. (2022) *Can LSTM Outperform Volatility-Econometric Models?* Preprint arXiv:2202.11581.
- Ross S. (2015) The Recovery Theorem. *The Journal of Finance*, 70, 2, pp. 615–648.
- Souto H.G., Moradi A. (2024) Introducing NBEAT SX to Realized Volatility Forecasting. *Expert Systems with Applications*, 242, pp. 122802.
- Welch I., Goyal A. (2008) A Comprehensive Look at the Empirical Performance of Equity Premium Prediction. *The Review of Financial Studies*, 21, 4, pp. 1455–1508.