Научная статья
УДК 621.372.632
DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-6-25-33

Границы оценивания параметров сигналов с прямым расширением спектра

Ефим Александрович Брусин, brusin.ea@sut.ru

АО «Российский институт радионавигации и времени»,
Санкт-Петербург, 192012, Российская Федерация
Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича,
Санкт-Петербург, 193232, Российская Федерация

Аннотация: *В статье обсуждается проблемы оценивания параметров сигналов с прямым расширением спектра и анализа эффективности получаемых оценок. Достигаемая дисперсия оценок, как правило, сопоставляется с соответствующей границей Крамера – Рао. Предложенный подход позволяет определить границы Крамера – Рао для сигналов различных видов модуляции и спектральных характеристик. Представлены зависимости границ оценивания от отношения сигнал/шум, длины расширяющей последовательности и длительности интервала наблюдения.*

Ключевые слова: *прямое расширение спектра, оценивание параметров сигнала, граница Крамера – Рао*

Ссылка для цитирования: Брусин Е.А. Границы оценивания параметров сигналов с прямым расширением спектра // Труды учебных заведений связи. 2023. Т. 9. № 6. С. 25–33. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-6-25-33

Direct Sequence Spread Spectrum Signal's Parameters Estimation Bounds

Efim Brusin, brusin.ea@sut.ru

Russian Institute of Radionavigation and Time,
St. Petersburg, 192012, Russian Federation
The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications,
St. Petersburg, 193232, Russian Federation

Abstract: *The article discusses the problems of direct spread spectrum signal's parameters estimation and estimation performance analyzing. The achieved estimation variances compared with the corresponding Cramer – Rao bounds as a rule. The proposed approach makes it possible to determine the bounds for signals of various types of modulation and spectral characteristics. The dependences of the Cramer – Rao bounds on the signal-to-noise ratio, the spread spectrum sequence length and the duration of the observation interval are presented.*

Keywords: *direct sequence spread spectrum, signal's parameters estimation, Cramer – Rao bound*

For citation: Brusin E. Direct Sequence Spread Spectrum Signal's Parameters Estimation Bounds. *Proceedings of Telecommun. Univ.* 2023;9(6):25–33. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-6-25-33

Постановка задачи

Фактически саму демодуляцию можно трактовать как процедуру совместного оценивания параметров принимаемого сигнала. Но, как правило, начальная неопределенность по частоте несущего колебания и задержке таковы, что реализации собственно демодуляции невозможна без предварительного оценивания указанных параметров. В этом смысле оценивание условно разделяется на оценивание параметров до демодуляции, определяемое, как начальная синхронизация, и оценивание в процессе демодуляции.

Проблемы реализации начальной синхронизации, в частности, подробно обсуждались в работах [1–3]. В этих работах основной акцент делается на оценивании несущей частоты, а оценивание задержки фактически сводится к «грубому» определению положения корреляционного пика в одном из частотных каналов. Границы Крамера – Рао для оценивания несущей частоты и задержки приведены, например, в работе [4]. В работе показано, что границы зависят от среднеквадратичной полосы и среднеквадратичной длительности сигнала, но не раскрывается смысл этих параметров. Количественно не определена связь границ оценивания со спектральными характеристиками принимаемых сигналов.

Как правило, оценивание параметров сигналов с прямым расширением спектра сопряжено с анализом приема сигналов с существенным доплеровским смещением несущей частоты. Например, в таких системах, как системы спутниковой навигации. Однако сигналы с прямым расширением спектра используются также в системах, построенных на основе геостационарных спутников [5, 6]. В таких системах особое значение играет оценивание несущей частоты и фазы несущего колебания, так как точность оценивания последнего параметра определяет, например, качество фазовых измерений псевдодальности.

В то же время в работах по демодуляции сигналов с прямым расширением спектра практически не обсуждаются границы оценивания фазы несущего колебания. В свою очередь, несмотря на наличие большого количества работ по проблемам приема сигналов с прямым расширением спектра, в известных работах не приводится значения границ оценивания, учитывающих в полной мере специфику используемых сигналов. Поэтому проблема определения указанных границ представляется весьма актуальной.

В этой связи основной задачей представляемой статьи является получение границ оценивания параметров сигналов с прямым расширением спектра для различных видов модуляции и спектральных характеристик принимаемых сигналов.

Границы оценивания

В системах, использующих сигналы с прямым расширением спектра, как правило, применяются фазовые методы модуляции. Передаваемый сигнал формируется путем умножения на расширяющую спектр последовательность $s_k(t)$ (сигнатуру):

$$s_k(t; b_k) = s_k(t) \cdot B_k(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t),$$

где $B_k(t) = d_k = \pm 1$ – информационные символы, передаваемые на интервалах T_b; T_b – длительность информационного символа (бита); f_0 – номинальное значение частоты несущего колебания.

Длительность бита:

$$T_b = N_I T_S,$$

где T_S и N_I – длительность чипа и выраженная в количестве чипов длина расширяющей последовательности, соответственно.

Упрощенная схема формирования сигнала с прямым расширением спектра представлена на рисунке 1 [2].

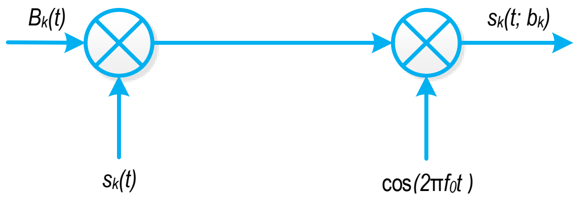

Рис. 1. Формирование сигнала с прямым расширением спектра

Fig. 1. Direct Spread Spectrum Signal Generation

Принимаемый сигнал может быть представлен в виде:

$$\tilde{s}_k(t; b_k) = s_k(t - \hat{\tau}) \cdot B_k(t - \hat{\tau}) \times$$
$$\times \cos(2\pi(f_0 + f)t + \varphi) + n_\tau(t),$$

где $\hat{\tau}$ – задержка в канале; f – смещение частоты несущего колебания относительно заданного номинального значения; φ – фаза несущей частоты; $n_\tau(t)$ – отсчеты шума.

Граница Крамера – Рао дисперсии оценки задержки определяется следующим образом [4]:

$$D\{\hat{\tau}\} \approx \frac{1}{4\pi^2 W_{RMS}^2 q^2}, q \gg 1, \quad (1)$$

где q^2 – отношение сигнал-шум; W_{RMS} – среднеквадратичная полоса сигнала.

Квадрат среднеквадратичной полосы сигнала определяется выражением [7]:

$$W_{RMS}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |G(f)|^2 df \bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df, \quad (2)$$

где $|G(f)|^2$ – энергетический спектр низкочастотного модулирующего колебания, формирующего передаваемый сигнал.

Для сигнала фазовой модуляции энергетический спектр низкочастотного модулирующего колебания выражается следующим образом [8]:

$$|G(f)|^2 \sim \left(\frac{\sin(2\pi f T_S)}{2\pi f T_S}\right)^2, \tag{3}$$

где T_S – длительность чипа передаваемого сигнала.

Фазовая модуляция наиболее распространена в системах связи и навигации, использующих сигналы с прямым расширением спектра. В главном «лепестке» спектра (3) содержится более 90 % мощности сигнала [8]. При вычислении выражения (2) для фазомодулированного сигнала будем полагать, что сигнал ограничен полосой $\left[-\frac{1}{2T_S}; \frac{1}{2T_S}\right]$.

Для такого ограничения (2) перепишется в виде:

$$W_{PM}^2 = \int_{-T_S/2}^{T_S/2} f^2 \left(\frac{\sin(2\pi f T_S)}{2\pi f T_S}\right)^2 df \Bigg/ \int_{-T_S/2}^{T_S/2} \left(\frac{\sin(2\pi f T_S)}{2\pi f T_S}\right)^2 df,$$

где W_{PM} – среднеквадратичная полоса сигнала фазовой модуляции для сигнала со спектром, определенным (3).

В итоге для W_{PM}^2 получим:

$$W_{PM}^2 = \frac{1}{4\pi T_S^2} \Bigg/ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx. \tag{4}$$

Отношение сигнал/шум в (1) выражается следующим образом:

$$q^2 = 2N_I\, E_S/N_0,$$

где E_S/N_0 – отношение сигнал/шум на чип.

С учетом (4) получим выражение для минимальной дисперсии оценивания задержки:

$$D_{PM}\{\hat{\tau}\} \approx \frac{T_S^2}{2\pi\, N_I E_S/N_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

Как правило, в работах по теории оценивания параметров сигналов оперируют с нормированной границей Крамера – Рао [9].

В рассматриваемом случае для фазовой модуляции нормированная к длительности чипа граница выражается следующим образом:

$$CRB_{PM}(\hat{\tau}) = D_{PM}\{\hat{\tau}\}/T_S^2 \approx$$
$$\approx \frac{1}{2\pi\, N_I E_S/N_0} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx. \tag{5}$$

Кроме собственно фазовой модуляции, в системах широко используются модуляция минимального сдвига (ММС) и сигналы, сформированные с использованием фильтра Найквиста.

Энергетический спектр низкочастотного модулирующего колебания для ММС определяется выражением [8]:

$$|G(f)|^2 \sim \frac{1+\cos(4\pi f T_S)}{(1-16 f^2 T_S^2)^2}. \tag{6}$$

И, наконец, если импульсная характеристика фильтра, формирующего сигнал, соответствует импульсной характеристике фильтра Найквиста, энергетический спектр соответствующего низкочастотного колебания определяется амплитудно-частотной характеристикой фильтра, которая выражается в виде (7), где α – коэффициент скругления фильтра Найквиста, формирующего сигнал на передачу.

На рисунке 2 представлены нормированные спектры для сигналов фазовой модуляции и сигналов модуляции минимального сдвига. На рисунке 3 – спектры Найквиста для двух коэффициентов скругления. В главном «лепестке» спектра сигнала ММС содержится 97 % мощности сигнала [8]. Соответственно, также как и для ФМ-сигнала, будем рассматривать полосу главного «лепестка» $\left[-\frac{3}{4T_S}; \frac{3}{4T_S}\right]$.

В соответствии с рассматриваемым условием квадрат среднеквадратичной полосы для сигнала ММС определяется формулой (8). Упростив (8), получим окончательное выражение (9) для W_{MSK}^2.

$$|H(f,\alpha)|^2 = \begin{cases} T_S, |f| < \dfrac{1-\alpha}{2T_S} \\ T_S\cos^2\left[\dfrac{\pi}{4\alpha}(|2fT_S| - 1 + \alpha)\right], \dfrac{1-\alpha}{2T_S} \le |f| \le \dfrac{1+\alpha}{2T_S} \\ 0, |f| > \dfrac{1+\alpha}{2T_S} \end{cases}. \tag{7}$$

$$W_{MSK}^2 = \int_{-\frac{3}{4}/T_S}^{\frac{3}{4}/T_S} f^2 \frac{1+\cos(4\pi f T_S)}{(1-16 f^2 T_S^2)^2} df \Bigg/ \int_{-\frac{3}{4}/T_S}^{\frac{3}{4}/T_S} \frac{1+\cos(4\pi f T_S)}{(1-16 f^2 T_S^2)^2} df. \tag{8}$$

$$W_{MSK}^2 = \frac{1}{16\pi^2 T_S^2} \int_{-3\pi}^{3\pi} x^2 \frac{1+\cos x}{(1-(x/\pi)^2)^2} dx \Bigg/ \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{1+\cos x}{(1-(x/\pi)^2)^2} dx. \tag{9}$$

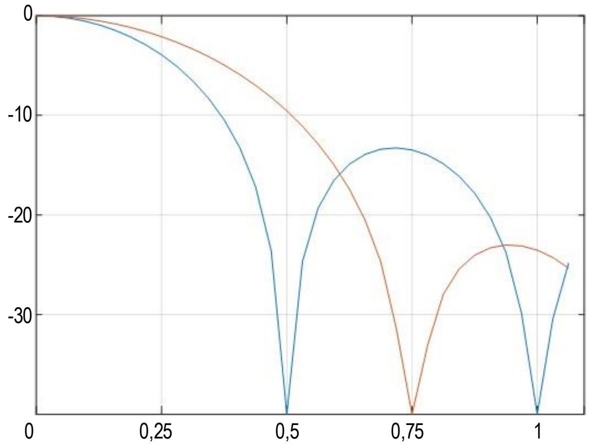

Рис. 2. ФМ и ММС: нормированные энергетические спектры

Fig. 2. PSK and MSK: Normalized Signal Spectrums

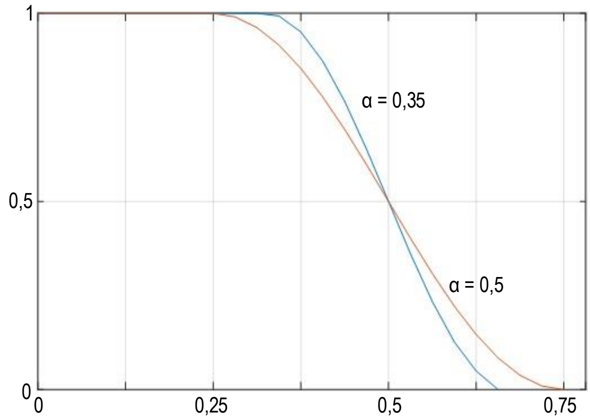

Рис. 3. Спектры Найквиста

Fig. 3. Nyquist Spectrums

Введем обозначение:

$$\xi_{MSK} = \int_{-3\pi}^{3\pi} x^2 \frac{1+\cos x}{(1-(x/\pi)^2)^2} dx \Big/ \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{1+\cos x}{(1-(x/\pi)^2)^2} dx.$$

С учетом (9) граница (1) для ММС перепишется в виде:

$$D_{MSK}\{\hat{\tau}\} \approx \frac{2T_S^2}{\xi_{MSK} N_I E_S/N_0}.$$

В итоге для модуляции минимального сдвига нормированная граница Крамера – Рао оценки задержки определяется выражением:

$$CRB_{MSK}(\hat{\tau}) = D_{MSK}\{\hat{\tau}\}/T_S^2 \approx \frac{2}{\xi_{MSK} N_I E_S/N_0}. \quad (10)$$

И, наконец, квадрат среднеквадратичной полосы сигнала, сформированного спектром Найквиста W_α^2, определяется выражением [9]:

$$W_\alpha^2 = \frac{1}{T_S^2}\left(\frac{1}{12} + \alpha^2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\right)\right). \quad (11)$$

С учетом (11) граница Крамера – Рао оценки задержки для сигнала, сформированного фильтром Найквиста, определяется выражением:

$$D_\alpha\{\hat{\tau}_k\} \approx \frac{T_S^2}{8\pi^2 N_I E_S/N_0\left(\frac{1}{12} + \alpha^2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\right)\right)}.$$

Соответственно, запишем нормированную границу Крамера – Рао оценки задержки для сигнала с «найквистовским» спектром:

$$CRB_\alpha(\hat{\tau}_k) = D_\alpha\{\hat{\tau}_k\}/T_S^2 \approx \frac{1}{8\pi^2 N_I E_S/N_0\left(\frac{1}{12} + \alpha^2\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\right)\right)}. \quad (12)$$

На рисунке 4 представлены зависимости границ (5, 10 и 11) от отношения сигнал/шум на чип для длины расширяющей последовательности, равной 80000.

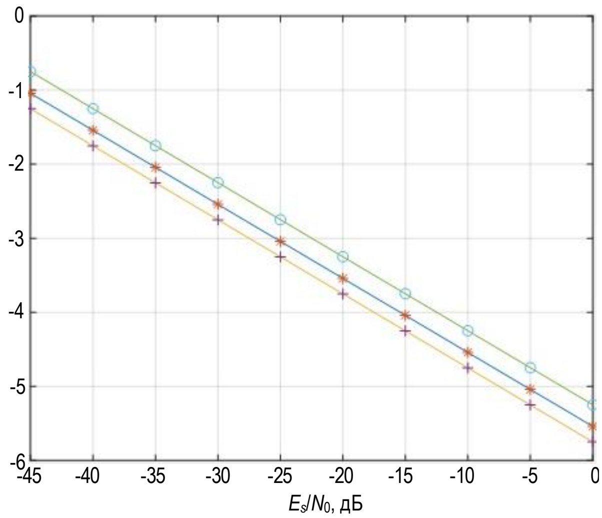

Рис. 4. Границы оценивания задержки (N_I = 80000)

Fig. 4. Delay Estimation Bounds (N_I = 80000)

На рисунке использованы следующие условные обозначения: o – $CRB_{PM}(\hat{\tau})$, * – $CRB_{MSK}(\hat{\tau})$, + – $CRB_\alpha(\hat{\tau})$ для α = 0,35.

Граница Крамера – Рао оценки несущей частоты выражается следующим образом [4]:

$$D\{\hat{f}\} \approx \frac{1}{4\pi^2 T_{RMS}^2 q^2}, q \gg 1. \quad (13)$$

Квадрат среднеквадратичной длительности сигнала T_{RMS} в (13) определяется выражением [7]:

$$T_{RMS}^2 = \int_{-T/2}^{T/2} t^2 |s(t)|^2 dt \Big/ \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt. \quad (14)$$

где $T = KN_I T_S$ – интервал наблюдения (длительность выборки сигнала, накопленного для реализации процедуры оценивания); K – интервал наблюдения, выраженный в количестве информационных символов; $s(t)$ – принимаемый сигнал.

Будем полагать, что интервал наблюдения T много больше длительности интервала информационного символа: $K \gg 1$.

В таком случае по теореме Парсеваля [10] для интеграла в знаменателе выражения (14) можно записать:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df.$$

Перепишем числитель выражения (14):

$$\int_{-T/2}^{T/2} t^2 |s(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} |ts(t)|^2 dt.$$

Если интервал наблюдения $T \gg T_s$, то:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |ts(t)|^2 dt \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial G(f)}{\partial f} \right|^2 df.$$

Тождество, представленное выше, проистекает из правила дифференцирования преобразования Фурье. В итоге для T^2_{RMS} можно записать:

$$T^2_{RMS} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{H(f,\alpha)} \left| \frac{\partial G(f)}{\partial f} \right|^2 df \Bigg/ \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df. \quad (15)$$

Теперь осталось определить среднеквадратичные длительности для спектров (3, 6 и 7). Выражение (15) с учетом введенного выше ограничения ширины полосы для фазовой модуляции:

$$T^2_{PM} = T^2_S \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \right)^2 dx \Bigg/ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

$$\beta_{PM} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \right)^2 dx \Bigg/ \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx.$$

Граница (13) для фазовой модуляции со спектром (3), ограниченной полосой $\left[-\frac{1}{2T_S}; \frac{1}{2T_S}\right]$, определяется выражением:

$$D_{PM}\{\hat{f}\} \approx \frac{1}{4\pi^2 N_I E_S/N_0 T_S^2 \beta_{PM}}.$$

В итоге нормированная граница Крамера – Рао оценки несущей частоты для фазовой модуляции:

$$CRB_{PM}(\hat{f}) = D_{PM}\{\hat{f}\} \cdot T_s^2 \approx$$
$$\approx \frac{1}{4\pi^2 N_I E_S/N_0 \beta_{PM}}. \quad (16)$$

Аналогичным образом можно получить среднеквадратичную длительность сигнала для модуляции минимального сдвига – T_{MSK}. При тех же ограничениях «главного лепестка» T^2_{MSK} определяет выражение (17). Введем обозначение (18) и получим (19). Отсюда нормированная граница Крамера – Рао оценки несущей частоты для ММС со спектром, ограниченным «главным лепестком», определяется по (20).

Среднеквадратичную длительность сигнала, сформированного фильтром Найквиста – T_α можно определить, исходя из выражения (21).

Исходя из (7), можно определить T^2_α и найти соответствующую границу:

$$D_\alpha\{\hat{f}\} \approx \frac{4\alpha}{\pi^3 N_I E_S/N_0 \, T_S^2}.$$

Введем обозначение:

$$T^2_{MSK} = \frac{2T_S^2}{\pi} \int_{-3/2}^{3/2} \left(\frac{16 \cdot x\cos(\pi x) - 2\pi(1-4x^2)\sin(\pi x)}{(1-4x^2)^2} \right)^2 dx \Bigg/ \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{1+\cos x}{(1-(x/\pi)^2)^2} dx. \quad (17)$$

$$\beta_{MSK} = \frac{2}{\pi} \int_{-3/2}^{3/2} \left(\frac{16 \cdot x\cos(\pi x) - 2\pi(1-4x^2)\sin(\pi x)}{(1-4x^2)^2} \right)^2 dx \Bigg/ \int_{-3\pi}^{3\pi} \frac{1+\cos x}{(1-(x/\pi)^2)^2} dx. \quad (18)$$

$$D_{MSK}\{\hat{f}\} \approx \frac{1}{4\pi^2 N_I E_S/N_0 \beta_{MSK} T_S^2}. \quad (19)$$

$$CRB_{MSK}(\hat{f}) = D_{MSK}\{\hat{f}\} \cdot T_s^2 \approx \frac{1}{4\pi^2 N_I E_S/N_0 T_S^2 \beta_{PM}}. \quad (20)$$

$$T^2_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_S(1+\alpha)/2}^{T_S(1+\alpha)/2} \left| \frac{dH(f,\alpha)}{df} \right|^2 df \Bigg/ \int_{-T_S(1+\alpha)/2}^{T_S(1+\alpha)/2} |H(f,\alpha)|^2 df. \quad (21)$$

В итоге для соответствующей нормированной границы справедливо:

$$CRB_\alpha(\hat{f}) = D_\alpha\{\hat{f}\} \cdot T_s^2 \approx \frac{4\alpha}{\pi^3 N_I E_S/N_0}. \quad (22)$$

На рисунке 5 представлены зависимости рассматриваемых границ оценивания несущей частоты (16, 20 и 22) от отношения сигнал/шум на чип для длины расширяющей последовательности, равной 80000.

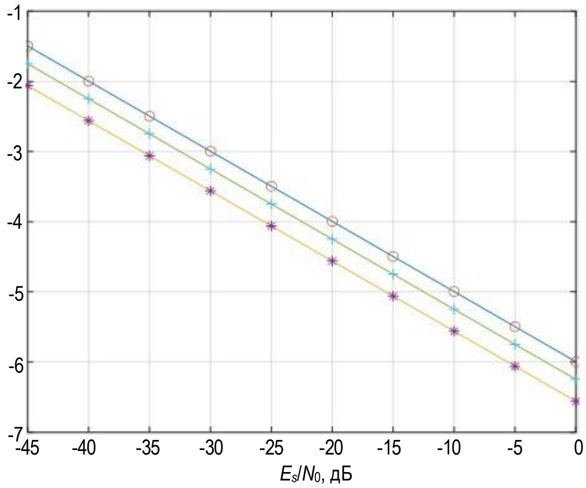

Рис. 5. Границы оценивания несущей частоты (N_I = 80000)

Fig. 5. Carrier Frequency Estimation Bounds (N_I = 80000)

На рисунке использованы следующие условные обозначения: o – $CRB_{PM}(f)$, * – $CRB_{MSK}(f)$, + – $CRB_{\alpha}(f)$ для α = 0,35.

В работе [3] был предложен алгоритм оценивания несущей частоты демодулятора сигналов с прямым расширением спектра. Фактически оценивание сводится к вычислению функции правдоподобия принимаемого сигнала на основе быстрого преобразования Фурье и нахождению максимума указанной функции в плоскостях несущей частоты и задержки. Реализацию предложенного алгоритма оценивания для сигнала ММС иллюстрируют зависимости, представленные на рисунке 6.

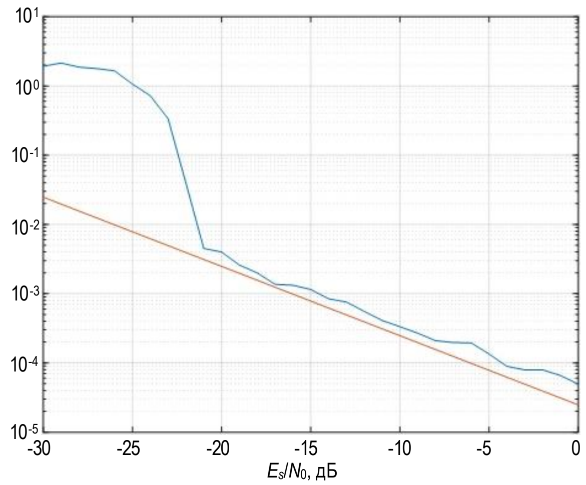

Рис. 6. ММС: дисперсия оценки несущей частоты (N_I = 2048)

Fig. 6. MSK: Carrier Frequency Variance (N_I = 2048)

Результаты получены для интервала наблюдения K, равного 8 информационным символам. На рисунке также представлена соответствующая граница оценивания. Следует отметить, что полученная дисперсия весьма близка к границе.

Представляется, что алгоритмы оценивания, основанные на нахождении максимума функции неопределенности, фактически реализуют совместную оценку максимального правдоподобия (МП-оценивание) параметров $\{f, \tau\}$ при условии отсутствия информации о фазе несущей частоты принимаемой информации.

Однако подход к оцениванию, основанный на вычислении функции неопределенности, не реализует оценивание фазы несущего колебания и соответственно не дает определения соответствующей нижней границы. В рассматриваемом случае решение задачи оценивания сводится к оцениванию параметров $\{f, \tau, \varphi\}$ в условиях, когда неизвестна передаваемая информация, начало сигнатуры и фаза несущей частоты. Необходимо определить нижние границы дисперсий оценок каждого из элементов вектора $\boldsymbol{\alpha} = \{f, \tau, \varphi\}$.

Границы оценивания параметров сигнала, полученные с использованием анализа его дискретных отсчетов на интервале наблюдения, обсуждались в работе [11]. На основе построения информационной матрицы Фишера были получены минимальные граничные дисперсии оценок параметров отрезка гармонического колебания. Предлагаемый подход состоит в следующем: если сигнал характеризуется набором параметров $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\}$, а $\widehat{\alpha}_k$ – несмещенная оценка некоторого параметра β_k, то нижняя граница дисперсии оценки α_k определяется элементами матрицы, обратной информационной матрице Фишера [11]:

$$\sigma_k^2 = \mathrm{var}(\widehat{\alpha}_k - \alpha_k) \geq \boldsymbol{J_{kk}},$$

где $\boldsymbol{J_{kk}}$ – элементы матрицы $\boldsymbol{J}^{-1}$.

Элементы матрицы Фишера определяются следующим образом [11]:

$$J_{ik} = -E_W\left[\frac{\partial^2[ln[p(\tilde{s}_k|\boldsymbol{\alpha})]]}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\right],$$

где E_W – статистическое усреднение по отношению к шуму; $p(\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{k}}|\boldsymbol{\alpha})$ – совместная функция плотности вероятности вектора $\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{k}}$ для заданных параметров $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\}$; $ln[p(\tilde{s}_k|\boldsymbol{\alpha})]$ – логарифм функции правдоподобия.

В работе [12] предложенный подход к определению потенциальных границ оценивания параметров сигналов развит для сигналов с различными видами модуляции. Показано, что компоненты матрицы Фишера могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{F} = E_{\mathbf{d}}\left\{\begin{pmatrix} J_{ff} & J_{f\varphi} & J_{f\tau} \\ J_{\varphi f} & J_{\varphi\varphi} & J_{\varphi\tau_k} \\ J_{\tau f} & J_{\tau\varphi} & J_{\tau\tau} \end{pmatrix}\right\}, \qquad (23)$$

где $E_{\mathbf{d}}\{\cdot\}$ – усреднение элементов матрицы по информационной последовательности.

Заметим, что в матрице (23) номера i, k заменены на индексы, соответствующие параметрам $\{f, \tau, \varphi\}$. В итоге в [12] показано, что матрица Фишера для параметров $\boldsymbol{\alpha} = \{f, \tau, \varphi\}$ принимает следующий вид:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{ff} & F_{f\varphi} & 0 \\ F_{\varphi f} & F_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & F_{\tau\tau} \end{pmatrix}.$$

Отсюда нижняя граница дисперсии оценки несущей частоты определяется следующим образом:

$$\operatorname{var}(\hat{f} - f) = \frac{1}{F_{ff} - F_{f\varphi}^2 / F_{\varphi\varphi}}. \qquad (24)$$

Будем полагать, что сигнал задан на интервале наблюдения в виде отсчетов с периодом следования T_d. С учетом введенного выше ограничения полосы сигнала $T_d < T_s/2$. Пусть N– интервал наблюдения, выраженный в количестве интервалов T_d. Будем полагать, что интервал наблюдения содержит целое количество информационных символов. То есть $N = KN_I$. В таком случае для (24) можно записать [12]:

$$\operatorname{var}(\hat{f} - f) = \frac{3}{2\pi^2 E_S/N_0\, T_S^2 (KN_I - 1)^2 KN_I} \times$$
$$\times \frac{1}{1 + O(N^{-2})},$$

где $O(N^{-2})$ – величина порядка N^{-2}.

Понятно, что при $K \gg 1$ для нормированной границы оценки несущей частоты справедливо:

$$CRLB(\hat{f}) = \operatorname{var}(\hat{f} - f) T_S^2 = \frac{3}{2\pi^2 E_S/N_0\, N_I^3 K^3}. \qquad (25)$$

Выражение (25) определяет нижнюю границу Крамера – Рао оценки несущей частоты (CRLB, *аббр. от* Cramer – Rao Lower Bound). В некоторых работах эту границу называют модифицированной нижней границей Крамера – Рао [9, 13] (MCRLB, *аббр. от* Modified Cramer-Rao Lower Bound).

Для иллюстрации соотношения границ (16 и 25) на рисунке 7 представлены зависимости $CRB_{PM}(\hat{f})$ и $CRLB(\hat{f})$ от отношения сигнал/шум на чип E_S/N_0,. где о – $CRB_{PM}(f)$, * – $CRLB(\hat{f})$.

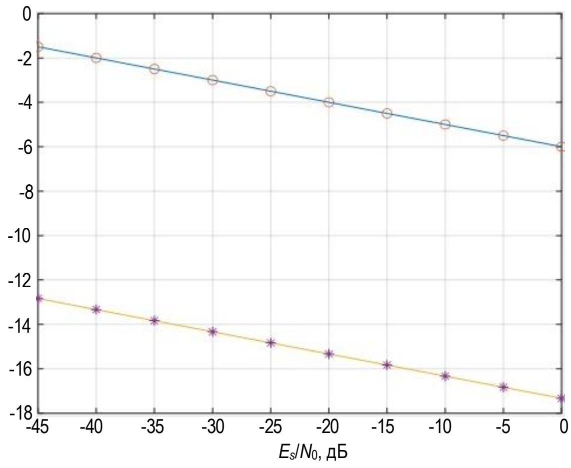

Рис. 7. Границы оценивания несущей частоты ($N_I = 80000$, $K = 4$)

Fig. 7. Carrier Frequency Estimation Bounds ($N_I = 80000$, $K = 4$)

Естественно, граница (16) существенно уступает нижней границе Крамера – Рао. Это объясняется тем, что при получении МП-оценки несущей частоты на основе вычисления функции правдоподобия не использовалась информация о фазе несущего колебания, а нижняя граница Крамера – Рао – это граница, полученная при предположении, что все параметры, кроме несущей частоты, известны.

Нижняя граница оценки задержки определяется следующим образом [12]:

$$\operatorname{var}(\hat{\tau} - \tau) = \frac{1}{F_{\tau\tau}} = \frac{1}{2E_S/N_0 K N_I W_{RMS}^2}.$$

Так, например, для сигнала с фазовой модуляцией с учетом (4), можно записать:

$$CRLB_{PM}(\hat{\tau}) = \frac{2\pi}{E_S/N_0 K N_I} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

Аналогично для ММС:

$$CRLB_{MSK}(\hat{\tau}) = \frac{8\pi^2}{\xi_{MSK}\, E_S/N_0 K N_I}$$

и для сигналов с «найквистовским» спектром:

$$CRLB_{\alpha}(\hat{\tau}) = \frac{1}{2E_S/N_0 K N_I \left(\frac{1}{12} + \alpha^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\right)\right)}.$$

Заметим, что при получении границ оценивания для сигналов с «найквистовским» спектром не ставится ограничение на виды модуляции принимаемого сигнала. Т. е. соответствующие границы справедливы для сигналов различных видов модуляции, сформированных с использованием спектра Найквиста.

И, наконец, нижняя граница оценки фазы несущего колебания определяется как [12]:

$$CRLB(\hat{\varphi}) = \operatorname{var}(\hat{\varphi} - \varphi) = \frac{1}{2E_S/N_0\, K N_I}.$$

Следует отметить, что оценивание фазы на практике реализуется в процессе демодуляции сигнала. Поэтому практическую значимость имеет связь межу нижней границей оценки фазы несущей и полосой соответствующей петли синхронизации демодулятора. Интервал наблюдения связан с полосой указанной петли следующим образом [9]:

$$N = KN_I = \frac{1}{2B_\varphi T_b},$$

где B_φ – односторонняя полоса петли синхронизации демодулятора по фазе несущего колебания.

В результате получим выражение, связывающее полосу петли и нижнюю границу Крамера – Рао оценки фазы:

$$CRLB(\hat{\varphi}) = \frac{B_\varphi T_b}{E_S/N_0}.$$

Выводы

Определены потенциальные границы дисперсии оценок параметров сигнала с прямым расширением спектра. Представлены аналитические выражения для границ Крамера – Рао оценки несущей частоты и задержки для сигналов фазовой модуляции, модуляции минимального сдвига и сигналов, сформированных с использованием спектра Найквиста. Получены выражения для нижней границы Крамера – Рао, определяющие минимальные границы дисперсий оценок несущей частоты, задержки и фазы несущего колебания. В частности, получено выражение, связывающее нижнюю границу Крамера – Рао оценки фазы несущего колебания, как зависимость соответствующей граничной дисперсии и нормированной полосы петли $B_\varphi T_b$.

Практическая значимость полученных результатов состоит в представленных зависимостях границ оценивания параметров сигналов с прямым расширением спектра от отношения сигнал/шум на чип длины расширяющей последовательности и длительности интервала наблюдения.

Результаты позволяют оценить эффективность получаемых оценок для широкого круга задач, связанных с реализацией алгоритмов синхронизации демодуляторов сигналов с прямым расширением спектра.

Предложенный подход позволяет получать границы оценивания параметров широкого круга сигналов с различными видами модуляции и спектральными характеристиками.

Естественно, что при реализации алгоритмов оценивания параметров сигналов с прямым расширением спектра необходимо сопоставлять получаемые дисперсии оценок с границами, определенными в представленной работе. В частности, в настоящей работе показано, что граница (20) практически достигается при реализации совместного МП-оценивания параметров $\{f, \tau\}$ сигнала с прямым расширением спектра, использующего модуляцию минимального сдвига. При этом полученные дисперсии оценок несущей частоты существенно уступают соответствующей нижней границе Крамера – Рао.

Соответствующий алгоритм оценивания предложен в работах [2, 3], но оценка задержки в работах практически не обсуждается. В перспективе представляется целесообразным разработка и исследования алгоритмов эффективного оценивания как несущей частоты, так и задержки. Что касается оценивания фазы несущего колебания, основной акцент следует сделать на разработке собственно алгоритмов демодуляции сигнала.

Естественно, что во всех случаях интерес вызывают алгоритмы оценивания, обеспечивающие дисперсии, близкие к соответствующим нижним границам Крамера – Рао, представленным в настоящей работе.

Подводя итог проведенным исследованиям, можно сделать следующие выводы:

– получены аналитические выражения для границ оценивания параметров сигналов с прямым расширением спектра;

– предложен подход, позволяющий получить границы оценивания параметров сигналов для широкого круга задач;

– полученные результаты позволяют определить границы оценивания в зависимости от видов модуляции, спектральных характеристик принимаемых сигналов, длины расширяющей последовательности и длительности интервалов наблюдения;

– в качестве иллюстрации результатов в работе представлены графики, показывающие соотношения обсуждаемых границ оценивания.

Список источников

1. Брусин Е.А. Начальная синхронизация демодулятора сигнала с прямым расширением спектра с использованием быстрого преобразования Фурье // 11-я Международная научно-техническая и научно-методическая конференция «Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании» (АПИНО-2022, Санкт-Петербург, Россия, 15–16 февраля 2022). СПб.: СПбГУТ, 2022. Т. 2. С. 522–527.
2. Брусин Е.А. Реализация алгоритма начальной синхронизации демодулятора сигналов с прямым расширением спектра на основе быстрого преобразования Фурье. Часть 1. Постановка задачи и подход к решению // Труды учебных заведений связи. 2022. Т. 8. № 4. С. 21–27. DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-4-21-27
3. Брусин Е.А. Реализация алгоритма начальной синхронизации демодулятора сигналов с прямым расширением спектра на основе быстрого преобразования Фурье. Часть 2. Оценивание несущей частоты // Труды учебных заведений связи. 2023. Т. 9. № 1. С. 35–40. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-4-35-40
4. Ipatov V.P. Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications. John Wiley & Sons, 2005.
5. Бердников А.С., Жуков Е.Т., Носов Е.В. Проект модема сличения шкал времени по дуплексному каналу спутниковой связи // Труды института прикладной астрономии РАН. 2016. № 36. С. 21–26.
6. Интерфейсный контрольный документ. Радиосигналы и состав цифровой информации функционального дополнения системы ГЛОНАСС системы дифференциальной коррекции и мониторинга (редакция 1) // Система дифференциальной коррекции и мониторинга. URL: https://sdcm.ru (дата обращения 22.11.2023)
7. Cariolaro G. Unified Signal Theory. Springer Science & Business Media, 2011. 928 p.
8. Банкет В.М., Дорофеев В.М. Цифровые методы в спутниковой связи. М.: Радио и Связь, 1988. 240 с.
9. Mengali U. Synchronization Technique for Digital Receivers. Springer Science & Business Media, 1997. 520 p.

10. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х частях. М.: Мир, 1988. 696 с.
11. Rife D.C., Boorstyn R.R. Single tone parameter estimation from discrete-time observation // IEEE Transactions on Information Theory. 1974. Vol. 20. Iss. 5. PP. 591–598. DOI:10.1109/TIT.1974.1055282
12. Meyer H., Moeneclaye M., Fechtel S.A. Digital Communication Receivers. John Wiley&Sons, Inc., New York, 1998.
13. Gini F., Reggiannini R., Mengali U. The modified Cramer-Rao bound in vector parameter estimation // IEEE Transactions on Communications. 1998. Vol. 46. PP. 52–60. DOI:10.1109/26.655403

References

1. Brusin E.A. Initial Timing of a Direct Spread Demodulator Using Fast Fourier Transform. *Proceedings of the XIth International Conference on Infotelecommunications in Science and Education, 15–16 February 2022, St. Petersburg, Russia, vol.2.* St. Petersburg: The Bonch-Bruevich Saint-Petersburg State University of Telecommunications Publ.; 2022. p.522–527.
2. Brusin E. Direct Sequence Spread Spectrum Signal's Demodulator Acquisition Implementation Based on Fast Fourier Transform. Part 2. Problem Statement and Solution Approach. *Proceedings of Telecommun. Univ*. 2022;8(4):21–27. DOI:10.31854/1813-324X-2022-8-4-21-27
3. Brusin E. Direct Sequence Spread Spectrum Signal's Demodulator Acquisition Implementation Based on Fast Fourier Transform. Part 3. Carrier Frequency Estimation. *Proceedings of Telecommun. Univ*. 2023;9(1):35–40. DOI:10.31854/1813-324X-2023-9-1-35-40
4. Ipatov V.P. *Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications*. John Wiley & Sons; 2005.
5. Berdnikov A.S., Zhukov E.T., Nosov E.V. Project of the modem of time scale comparison on duplex channel of satellite communication. *Transactions of the Institute of Applied Astronomy RAS.* 2016;36:21–26.
6. *System of Differential Correction and Monitoring*. Interface control document. Radio signals and composition of digital information of the functional completion of the GLONASS system of differential correction and monitoring (revision 1). URL: https://sdcm.ru [Accessed 22.11.2023]
7. Cariolaro G. *Unified Signal Theory*. Springer Science & Business Media; 2011. 928 p.
8. Banquet V.M., Dorofeev V.M. *Digital methods in satellite communications*. Moscow: Radio i svyaz Publ.; 1988. 240 p.
9. Mengali U. *Synchronization Technique for Digital Receivers*. Springer Science & Business Media; 1997. 520 p.
10. Sibert W.M. *Circuits, Signals, Systems*: In 2 parts. Moscow: Mir Publ.; 1988. 696 p.
11. Rife D.C., Boorstyn R.R. Single tone parameter estimation from discrete-time observation. *IEEE Transactions on Information Theory*. 1974;20(5):591–598. DOI:10.1109/TIT.1974.1055282
12. Meyer H., Moeneclaye M., Fechtel S.A. *Digital Communication Receivers*. John Wiley&Sons, Inc., New York; 1998.
13. Gini F., Reggiannini R., Mengali U. The modified Cramer-Rao bound in vector parameter estimation. *IEEE Transactions on Communications*. 1998;46:52–60. DOI:10.1109/26.655403

Статья поступила в редакцию 09.11.2023; одобрена после рецензирования 01.12.2023; принята к публикации 04.12.2023.
The article was submitted 09.11.2023; approved after reviewing 01.12.2023; accepted for publication 04.12.2023.

Информация об авторе:

БРУСИН Ефим Александрович

кандидат технических наук, руководитель проектного направления АО «Российский институт радионавигации и времени», доцент кафедры электроники и схемотехники Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича

https://orcid.org/0000-0002-6742-2705