

УДК 539.3

О МАКСИМУМЕ ПЕРВОЙ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ

© 2024 г. А. О. Ватульян^{а, *}, В. О. Юров^{б, **}

^а Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^б Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия

*e-mail: aovatulyan@sfedu.ru, **e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.05.2024 г.

После доработки 08.06.2024 г.

Принята к публикации 11.06.2024 г.

В работе рассмотрена неклассическая задача оптимизации, связанная с развитием производства новых функционально-градиентных материалов. Предлагается производить оптимизацию первой собственной частоты колебаний за счет выбора закона изменения модулей упругости, а не формы, как это делается в большинстве работ, посвященных оптимизации. Такая постановка задачи становится практически обоснованной с развитием 3D-печати, производства ФГМ-керамики с заданными свойствами. В качестве примера рассмотрены задачи о колебаниях ФГМ стержня и ФГМ балки с пружинными граничными условиями на одном из концов.

Ключевые слова: неоднородность, оптимизация, стержень, колебания

DOI: 10.31857/S1026351924040121, EDN: UCJCJK

Введение. Решение задач оптимизации свойств упругих тел направлено на улучшение некоторых характеристик (максимизация первой резонансной частоты или критической силы) за счет выбора формы или переменности упругих модулей. Подробный исторический обзор приводится в монографии [1], где отмечается, что задачи оптимизации упругих конструкций берут свое начало с работы Г. Галилея по оптимизации профиля консольной балки, нагруженной силой на конце. Таким образом, первый тип задач оптимизации связан с нахождением законов изменения геометрических характеристик (в основном толщины для пластин и формы поперечного сечения для колонн и балок), обеспечивающих минимальный вес при заданной нагрузке, или, что эквивалентно, максимальную прочность при заданном весе. Второй тип задач связан с максимизацией критической силы в задачах устойчивости колонн [2, 3], где фундаментальные результаты принадлежат Ж. Лагранжу, Т. Клаузену и Е.Л. Николаи. Третий тип задач — динамические, как и задачи устойчивости, связаны со спектральными задачами [4]. Динамические задачи по оптимизации частот собственных

колебаний струны и балки были впервые рассмотрены в работах М.Г. Крейна [5] и Ф. Ниордсона [6].

Особо отметим работу [6], так как в ней впервые предложен подход к максимизации первой собственной частоты на основе нахождения максимального значения для функционала Релея и позволяющий свести задачу к итерационному решению краевой задачи для нелинейного дифференциального оператора. Там же решена задача о нахождении оптимального распределения толщины балки, которое обеспечивает максимальное увеличение первой собственной частоты изгибных колебаний. Этот подход далее развит и описан для ряда задач в работе [7].

С ростом применения на практике армированных композитов возникли задачи по оптимизации внутренней структуры упругих тел, которые в большинстве случаев решались на основе моделей кусочно-однородных и анизотропных тел. Однако в работах [8, 9] решены задачи об оптимизации первой собственной частоты для продольно неоднородной балки. В обеих работах получены оптимальные законы изменения безразмерного модуля Юнга, причем в [8] учтены предварительные напряжения, а в [9] приведены результаты для всех основных типов граничных условий (консоль, шарнирное опирание, закрепленные торцы).

В настоящее время с развитием технологий производства материалов и конструкций из функционально-градиентных материалов (ФГМ) стала актуальной задача по отысканию непрерывных оптимальных распределений плотности, пористости, упругих модулей, позволяющих увеличить резонансную частоту. Так, например, в работе [10] при помощи использования генетического алгоритма решена задача об определении переменного модуля упругости для увеличения критической силы. В работе [11] рассмотрена задача увеличения критической силы для колонны, где в качестве управляющих функций фигурируют как модуль Юнга, так и форма поперечного сечения.

Большинство работ по максимизации первой резонансной частоты выполнено в рамках вариации геометрических характеристик. В работе [12] изучается задача о максимизации основной резонансной частоты башни за счет оптимизации формы ее поперечного сечения. Оптимальное решение для диаметра и толщины секций разыскивается в классе кусочно-линейных функций. Предложено использование МКЭ с кубической аппроксимацией прогиба и реализован алгоритм по отысканию оптимального решения. В работе [13] изучена задача об оптимизации первой собственной частоты для круглой анизотропной пластинки. Управляющей функцией является переменная толщина пластинки, а решение задачи строится при помощи метода разложения по малому параметру для определенного типа анизотропии. В работе [14] описан итерационный алгоритм решения оптимизационной задачи, основанный на методе возмущений. Решена задача об оптимизации частоты колебаний при помощи управления площадью поперечного сечения. В работе [15] в рамках градиентного подхода осуществляется максимизация первой резонансной частоты для трехмерного стержня с использованием МКЭ.

В настоящей работе получены условия оптимальности для полей деформации при исследовании задачи о максимизации первой резонансной

частоты упругого тела за счет вариации модуля (модулей) упругости, приведены примеры.

1. Общие условия оптимальности. Рассмотрим установившиеся колебания неоднородного тела, занимающего объем V и ограниченного гладкой поверхностью S . Уравнения колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

определяющие соотношения запишем в виде закона Гука для анизотропной среды:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, \quad (1.2)$$

где c_{ijkl} — компоненты тензора упругих модулей, обладающие обычными свойствами симметрии и положительной определенности.

Будем считать, что граница S состоит из двух частей S_u , S_σ , на которых заданы однородные граничные условия:

$$u_i \Big|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j \Big|_{S_\sigma} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь n_j — компоненты вектора внешней нормали к поверхности S .

Умножим (1) на u_i и проинтегрируем по объему V . Получим:

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \omega^2 \int_V \rho u_i u_i dV = 0.$$

Используя теорему Гаусса—Остроградского и граничные условия (1.3), получим:

$$J = \omega^2 = \frac{\int_V c_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} dV}{\int_V \rho u_i u_i dV} = \frac{P}{K}. \quad (1.4)$$

Поставим задачу максимизации первой резонансной частоты за счет выбора условного модуля упругости $E(x)$. Введем новый тензор (с безразмерными компонентами) R_{ijkl} следующим образом: $c_{ijkl} = E(x) R_{ijkl}$, где компоненты R_{ijkl} не зависят от координат; в случае изотропного тела эти компоненты зависят только от коэффициента Пуассона.

Будем считать, что среднее по объему значение модуля фиксировано:

$$\frac{1}{V} \int_V E(x) dV = m_0, \quad (1.5)$$

и введем функционал

$$J_1 = \frac{1}{V} \int_V E(x) dV - m_0. \quad (1.6)$$

Затем сформируем функционал:

$$J_*[E] = J + \Lambda J_1, \quad (1.7)$$

где Λ — множитель Лагранжа.

Проварьируем функционал (1.7) и найдем его первую вариацию:

$$\begin{aligned} \delta J_* &= \frac{\partial}{\partial t} J_*[E + t\delta E] \Big|_{t=0} = \\ &= \frac{\int_V (\delta E R_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} + 2ER_{ijkl} \delta u_{i,j} u_{k,l}) dV}{\int_V \rho u_i u_i dV} - 2\omega^2 \frac{\int_V (\rho \delta u_i u_i) dV}{\int_V \rho u_i u_i dV} + \frac{\Lambda}{V} \int_V \delta E dV. \end{aligned}$$

Условие стационарности функционала J_* дает

$$\delta J_* = \int_V [\Phi \delta E + \Phi_i \delta u_i] dV = 0, \quad (1.8)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi &= R_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} + 2\Lambda K_0 V^{-1}, \\ \Phi_i &= 2 \left[\left(ER_{ijkl} u_{k,l} \right)_{,j} + \rho \omega^2 u_i \right], \\ K_0 &= \frac{1}{2} \int_V \rho u_i u_i dV. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Учитывая независимость вариаций $\delta E, \delta u_i$, получим следующее условие оптимальности:

$$2\Pi = R_{ijkl} u_{i,j} u_{k,l} = \Lambda_*, \quad \Lambda_* = -2\Lambda K_0 V^{-1}. \quad (1.10)$$

Дополняя (1.10) уравнениями движения и условием нормировки (1.5), получаем полную систему:

$$\left(ER_{ijkl} u_{k,l} \right)_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \frac{1}{V} \int_V E(x) dV = m_0.$$

Таким образом, задача об оптимальном законе изменения модуля $E(x)$ сводится к нелинейной краевой задаче относительно E, u_i , которая может быть решена только численно, например итерационным способом, подобно изложенному в работе [6].

2. Условие оптимальности в изотропном случае для параметров Ламе. В рамках такого же подхода можно получить условие оптимальности в изотропном случае для двух функций — параметров Ламе $\lambda(x)$ и $\mu(x)$, характеризующих упругие свойства неоднородного материала. Для этого можно использовать полученный выше функционал (1.4), причем для изотропного случая:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \left(\lambda (u_{k,k})^2 + \mu (u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) \right) dV,$$

а условие оптимальности будем отыскивать при дополнительных условиях:

$$J_1 = \frac{1}{V} \int_V \lambda dV - \lambda_0 = 0, \quad J_2 = \frac{1}{V} \int_V \mu dV - \mu_0 = 0.$$

В этом случае сформируем функционал:

$$J_* = J + \Lambda_1 J_1 + \Lambda_2 J_2,$$

где Λ_1, Λ_2 — множители Лагранжа, и из условия $\delta J_* = 0$, приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях, находим следующие условия оптимальности:

$$(u_{k,k})^2 + \Lambda_1 (2K_0 V)^{-1} = 0, \quad (2.1)$$

$$(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) + \Lambda_2 (2K_0 V)^{-1} = 0,$$

$$(\lambda u_{k,k})_{,j} + (\mu (u_{i,j} + u_{j,i}))_{,j} + \rho \omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

Таким образом, имеем:

$$(u_{k,k})^2 = \lambda_1^2 = \text{const}, \quad (2.3)$$

$$(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i}) = \lambda_2^2 = \text{const}.$$

Эти условия характеризуют постоянство некоторых инвариантов тензора деформаций.

Из них можно определить $u_{i,j}$ (один из простейших вариантов $u_i = a_{ij} x_j + b_i$, a_{ij}, b_i — постоянные), а затем из соотношений (2.2) получить систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для нахождения функций λ, μ :

$$(\lambda a_{kk})_{,i} + (\mu (a_{ik} + a_{ki}))_{,k} + \rho \omega^2 (a_{ik} x_k + b_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

Возвращаясь к условию (1.10), отметим, что оно содержит выражение для условной потенциальной энергии деформаций. Для одномерных задач (изгиб, растяжение, кручение стержня) это выражение может быть упрощено, откуда сразу получается условие на соответствующую деформационную характеристику, позволяющее достаточно просто получить аналитическое решение задачи. Так, например, для стержня $V = S \times [0, l]$ (S — поперечное сечение) в случае продольных колебаний (заложены гипотезы $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 = u(x)$, $x = x_3$) имеем $2\Pi = F(u')^2$, где u — характеризует продольное смещение, F — площадь поперечного сечения. Далее, находя u из условия $(u')^2 = \lambda_1^2$, получаем уравнение первого порядка относительно $E(x)$. Наряду с гладким решением $u(x) = x$ существует негладкое решение с изломом $u(x) = \{x, x < x_0, 2x_0 - x, x \geq x_0\}$.

Как показали расчеты для случая жесткой заделки на левом конце первое (гладкое) решение отвечает первой собственной частоте, а второе (негладкое) решение отвечает второй собственной частоте.

В случае изгибных колебаний (заложены гипотезы модели Эйлера–Бернулли) $u_1 = -x_2 w'(x)$, $u_2 = 0$, $u_3 = w(x)$, $x = x_3$ имеем $2\Pi = J(w'')^2$, где J – момент инерции, w – прогиб нейтральной оси стержня, и условие оптимальности $(w'')^2 = \lambda_2^2$ позволяет сразу определить прогиб и получить дифференциальное уравнение второго порядка для $E(x)$.

В качестве частных случаев рассмотрим задачи о продольных и изгибных колебаниях стержня, с различными типами граничных условий. Будем считать для простоты, что плотность постоянна $\rho = \rho_0$.

3. Продольные колебания. Пример 1. Обезразмерив задачу о продольных колебаниях неоднородного стержня, получим:

$$(gu')' + \kappa u = 0, \quad u(0) = 0, \quad g(1)u'(1) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (3.1)$$

где g – безразмерный модуль Юнга, κ – безразмерный спектральный параметр, пропорциональный квадрату частоты колебаний, $u = u(x)$ – в данном случае безразмерная функция, описывающая продольные смещения. Будем искать такую функцию $g = g(x)$, которая удовлетворяет условию

$$\int_0^1 g(x) dx = 1 \quad (3.2)$$

и для которой первое собственное значение κ примет максимальное значение. Используя условие оптимальности, которое имеет вид $(u')^2 = \text{const}$, с точностью до амплитудного множителя получаем $u(x) = x$. Решая дифференциальное уравнение (3.1), получаем:

$$g = \frac{3}{2}(1 - x^2).$$

На основе соотношения Релея или на основе численных расчетов получаем $\kappa = 3$. Заметим, что первое собственное значение для однородной балки $\kappa = 0.25\pi^2 \approx 2.467$ и выигрыш составляет порядка 20%.

Найдено также негладкое решение задачи:

$$u(x) = \begin{cases} x, & x < 1/3, \\ 2/3 - x, & x \geq 1/3, \end{cases}$$

которому отвечает функция

$$g = 27 \begin{cases} (1 - 9x^2)/18, & x < 1/3, \\ (4x - 3x^2 - 1)/6, & x \geq 1/3 \end{cases}$$

и собственное значение $\kappa = 27$, которое является вторым.

4. Изгибные колебания. Пример 2. Рассмотрим безразмерное уравнение изгибных колебаний неоднородной балки:

$$(g(x)w''(x, \kappa))'' - \kappa w(x, \kappa) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4.1)$$

где $g(x) = E(x)lE_0^{-1}$, $\kappa = \rho_0 Fl^4 \omega^2 E_0^{-1} J^{-1}$, E_0 – характерное значение модуля упругости (например, среднее значение). Будем искать такую функцию $g = g(x)$, которая удовлетворяет условию (3.2) и для которой первое собственное значение κ принимает максимальное значение. При этом можно рассмотреть следующие типы граничных условий:

а) шарнирное опирание

$$w|_{x=0} = w|_{x=1} = (gw'')|_{x=0} = (gw'')|_{x=1} = 0; \quad (4.2)$$

б) консоль

$$w|_{x=0} = w'|_{x=0} = (gw'')|_{x=1} = (gw'')'|_{x=1} = 0; \quad (4.3)$$

в) заделка обоих концов

$$w|_{x=0} = w'|_{x=0} = w|_{x=1} = w'|_{x=1} = 0; \quad (4.4)$$

г) консоль при наличии упругой заделки на конце $x=0$

$$((gw'')' + c_1 w)|_{x=0} = (gw'' - c_2 w')|_{x=0} = (gw'')|_{x=1} = (gw'')'|_{x=1} = 0. \quad (4.5)$$

Здесь c_1, c_2 – положительные параметры, характеризующие характеристики упругости в заделке [16].

Были построены оптимальные решения для граничных условий (4.2)–(4.4), которые совпали с рассмотренными ранее в работе [9]. Заметим, что при условиях (4.2) и (4.3) существуют, соответственно, гладкие решения в виде полиномов 4-го порядка:

$$w(x) = x(1-x), \quad g = 5(x^4 - 2x^3 + x),$$

$$w(x) = x^2, \quad g = 20\varphi(x), \quad \varphi(x) = \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x}{6} + \frac{1}{8} \right), \quad (4.6)$$

а при условиях (4.4) функция $w(x)$ имеет два разрыва второй производной, а $g(x)$ – разрывы первой производной. Эти решения можно представить в виде:

$$w(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0.25, \\ 0.125 - (0.5 - x)^2, & 0.25 \leq x \leq 0.75, \\ (1 - x)^2, & x > 0.75; \end{cases}$$

можно записать с учетом симметрии относительно середины отрезка:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x < 0.5, \\ g_1(1-x), & x \geq 0.5, \end{cases}$$

$$g_1(x) = \frac{15360}{23} \begin{cases} \frac{23}{6144} + \frac{x^4}{24} - \frac{x}{64}, & x < \frac{1}{4}, \\ \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{32} + \frac{x}{96} - \frac{7}{2048}, & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Результаты нахождения спектрального параметра приведены в табл. 1.

Таблица 1. Первое собственное значение для трех вариантов граничных условий

	Однородная балка	Оптимальный закон
Шарнирное опирание (4.2)	$\kappa = \pi^4 \approx 97.41$	$\kappa = 120$
Консоль (4.3)	$\kappa \approx 12.36$	$\kappa = 20$
Заделка обоих концов (4.4)	$\kappa \approx 500.564$	$\kappa \approx 667.826$

Оказалось, что по сравнению с однородным случаем первое собственное значение κ удастся увеличить соответственно на 23, 61 и 33%.

Обратимся теперь к задаче с граничными условиями (4.5). Получим соотношение Релея. Для этого умножим уравнение (4.1) на w и проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$:

$$\int_0^1 ((gw'')'' w - \kappa w^2) dx = 0.$$

Выражая спектральный параметр и интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\int_0^1 (gw'')'' w dx}{\int_0^1 w^2 dx} = \frac{(gw'')' w \Big|_0^1 - (gw'') w' \Big|_0^1 + \int_0^1 g(w'')^2 dx}{\int_0^1 w^2 dx} = \\ &= \frac{c_1 w^2(0) + c_2 (w')^2(0) + \int_0^1 g(w'')^2 dx}{\int_0^1 w^2 dx}. \end{aligned}$$

Условие оптимальности принимает тот же вид $(w'')^2 = \text{const}$. Решение с точностью до амплитудного множителя будем искать в виде $w(x) = x^2 + kx + b$. Заметим, что в зависимости от граничных условий решение задачи может иметь или не иметь разрывов второй производной, что демонстрируют случаи (4.6) и (4.7). Следовательно, не для всех значений параметров c_1, c_2 гладкое решение вида $w(x) = x^2 + kx + b$ существует.

Решая (4.1) относительно $g(x)$, находим:

$$g = \frac{\kappa}{2} \left(\frac{x^4}{12} + k \frac{x^3}{6} + b \frac{x^2}{2} \right) + mx + p, \quad (4.8)$$

где $k = \kappa(3c_1 - \kappa)/\Delta$, $b = \kappa(\kappa + 24c_2)/(6\Delta)$, $m = -c_1b/2$, $p = c_2k/2$,
 $\Delta = \kappa^2 - 4\kappa c_1 - 12\kappa c_2 + 12c_2c_1$.

В результате решение запишется в виде:

$$w(x) = x^2 + \kappa x \frac{(3c_1 - \kappa)}{\Delta_1 \Delta_2 - 3\kappa^2} + \kappa \frac{1}{6} \frac{(24c_2 + \kappa)}{\Delta_1 \Delta_2 - 3\kappa^2},$$

$$g = \kappa \left(\frac{x^4}{24} + \frac{(3c_1 - \kappa)}{2\Delta} \left(\kappa \frac{x^3}{6} + c_2 \right) + \frac{(\kappa + 24c_2)}{12\Delta} \left(\kappa \frac{x^2}{2} - c_1 x \right) \right).$$

Параметр κ определяется из условия (3.2). Возникающее кубическое уравнение

$$\frac{\kappa}{720} \frac{(\kappa^2 - 9\kappa c_1 - 192\kappa c_2 + 432c_1c_2)}{(\kappa^2 - 4\kappa c_1 - 12\kappa c_2 + 12c_1c_2)} = 1$$

решается численно. Для анализа полученного результата рассмотрим 2 частных случая:

Случай 1 ($c_2 \rightarrow \infty$): $((gw'')' + c_1 w)|_{x=0} = 0$, $w'(0) = 0$.

Параметры в (4.8) принимают вид $k = 0$, $b = \kappa/3\Delta_1$, $m = -c_1\kappa/6\Delta_1$, $p = \kappa(3c_1 - \kappa)/24\Delta_1$, $\Delta_1 = c_1 - \kappa$, что позволяет записать решение оптимизационной задачи в виде:

$$w(x) = x^2 + \kappa/(3c_1 - 3\kappa),$$

$$g = \kappa \left(\frac{x^4}{24} + \frac{\kappa x^2}{12\Delta_1} - \frac{c_1 x}{6\Delta_1} + \frac{(3c_1 - \kappa)}{24\Delta_1} \right). \quad (4.9)$$

Параметр κ определим из условия (3.2), которое сводится теперь к квадратному уравнению, имеющему решение следующего вида:

$$\kappa = \frac{9}{8}c_1 + \frac{45}{2} - \frac{3}{8}\sqrt{9c_1^2 + 40c_1 + 3600}. \quad (4.10)$$

Случай 2 ($c_2 \rightarrow \infty$): $w(0) = 0$, $(gw'' - c_2 w')|_{x=0} = 0$.

Аналогично имеем:

$$b = 0, \quad k = 3\kappa/(4\Delta_2), \quad m = -\kappa(24c_2 + \kappa)/(48\Delta_2), \quad p = 3\kappa c_2/(8\Delta_2), \quad \Delta_2 = 3c_2 - \kappa,$$

$$w(x) = x^2 + 3\kappa x/(12c_2 - 4\kappa), \quad g = \kappa \left(\frac{x^4}{24} + \frac{\kappa x^3}{16\Delta_2} - \frac{(24c_2 + \kappa)x}{48\Delta_2} + \frac{3c_2}{8\Delta_2} \right), \quad (4.11)$$

$$\kappa = 160 + 24c_2 - 8\sqrt{9c_2^2 + 105c_2 + 400}. \quad (4.12)$$

Асимптотические представления решений (4.9), (4.11) при больших c_1, c_2 имеют вид:

$$g = \kappa\varphi(x) + \kappa^2 \left(\frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} + \frac{1}{12} \right) \frac{1}{c_1} + o\left(\frac{1}{c_1}\right) \quad (\text{Случай 1}), \quad (4.13)$$

$$g = \kappa\varphi(x) + \kappa^2 \left(\frac{x^3}{48} - \frac{x}{16} + \frac{1}{24} \right) \frac{1}{c_2} + o\left(\frac{1}{c_2}\right) \quad (\text{Случай 2}). \quad (4.14)$$

На основе приведенных асимптотических представлений параметр κ также может быть определен как один из корней квадратного уравнения, возникающего при удовлетворении условию (3.2):

$$\kappa = -\frac{9}{10}c_1 + \frac{3}{10}\sqrt{9c_1^2 + 400c_1}, \quad (4.15)$$

$$\kappa = -\frac{8}{5}c_2 + \frac{8}{5}\sqrt{c_2^2 + 25c_2}. \quad (4.16)$$

Используя асимптотический подход при анализе кубического уравнения в общем случае, удастся получить следующее представление для нужного решения:

$$\kappa = \frac{40}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{15}{3}\right)^2 \frac{1}{c_2} + \left(\frac{20}{3}\right)^2 \frac{1}{c_1}}}. \quad (4.17)$$

5. Результаты численных расчетов. Выполним расчеты первого собственного значения для однородной и оптимальной балок. В случае конечных значений c_1, c_2 будем находить κ численно и при помощи формулы (4.17). В случае, когда $c_2 \rightarrow \infty$, будем сравнивать точное κ , найденное из (4.10), и асимптотическое из (4.15). Аналогично сравним (4.12) и (4.16) для случая $c_2 \rightarrow \infty$.

Замечание 2. У возникающих квадратного и кубического уравнений относительно κ соответственно 2 и 3 корня. В (4.10), (4.12), (4.17) и в табл. 2 указан

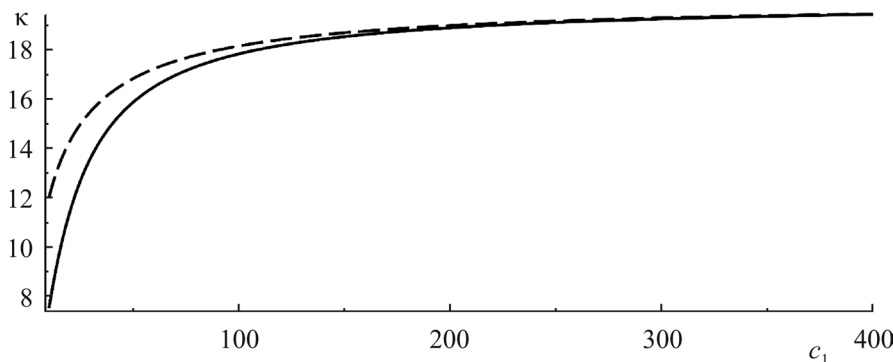


Рис. 1. Собственное значение κ : по (4.10) — сплошная линия, по (4.15) — пунктир.

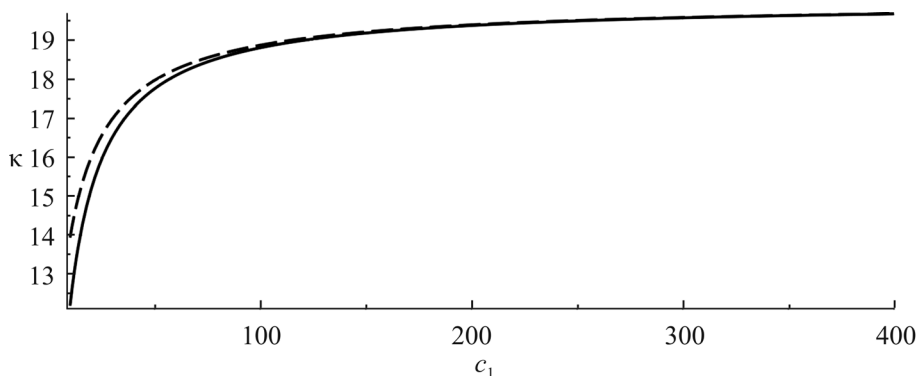


Рис. 2. Собственное значение κ : по (4.12) — сплошная линия, по (4.16) — пунктир.

только один из них, поскольку остальные приводят к знакопеременной функции $g(x)$; соответственно, в (4.15), (4.16) указаны положительные корни, а отрицательные опущены.

Таблица 2. Первое собственное значение для различных параметров закрепления

	κ — однородное (численно)	κ — оптимальное	κ — оптимальное (асимптотики)
$c_1 = c_2 \rightarrow \infty$	12.362	20	20
$c_1 = c_2 = 10\,000$	12.348	19.965 (численно)	19.965 (4.17)
$c_1 = c_2 = 1000$	12.220	19.656 (численно)	19.664 (4.17)
$c_1 = 100, c_2 = 350$	11.331	17.557 (численно)	17.928 (4.17)
$c_1 = 350, c_2 = 100$	11.639	18.248 (численно)	18.404 (4.17)
$c_1 = 1000, c_2 \rightarrow \infty$	12.313	19.876 (4.10)	19.877 (4.15)
$c_1 = 100, c_2 \rightarrow \infty$	11.454	17.846 (4.10)	18.167 (4.15)
$c_1 \rightarrow \infty, c_2 = 1000$	12.269	19.778 (4.12)	19.783 (4.16)
$c_1 \rightarrow \infty, c_2 = 100$	11.886	18.819 (4.12)	18.885 (4.16)

Заключение. Рассмотрена общая задача оптимизации первой собственной частоты колебаний за счет управления законом изменения упругих модулей функционально-градиентного упругого тела. Рассмотрены примеры для изгибных колебаний балки с модифицированными граничными условиями (пружинного типа).

Работа выполнена за счет гранта РНФ № 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> в Южном федеральном университете

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баничук Н.В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
2. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Об оптимальных очертаниях стержней в задачах упругой устойчивости. // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. № 2. С. 21–27.
3. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Об оптимальных стержнях в задачах устойчивости под действием распределенной нагрузки // Строительная механика и расчет сооружений. 1975. № 6. С. 23–27.
4. Братусь А.С., Каргвелишвили В.М. Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих тонкостенных конструкций // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 119–139.
5. Крейн М.Г. О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // ПММ. 1951. Т. 15. Вып. 3. С. 323–348.
6. Niordson F.I. On the optimal design of a vibrating beam // Quart. Appl. Math. 1965. V. 23. № 1. P. 47–53.
7. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 277 с.
8. Rammerstorfer F.G. On the optimal distribution of the young's modulus of a vibrating, prestressed beam // J. Sound Vib. 1974. V. 37. № 1. P. 140–145.
9. Gupta V.K., Murthy P.N. Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // J. Sound Vib. 1978. V. 59. № 4. P. 521–531.
10. Alshabat N.T. Optimal design of functionally graded material columns for buckling problems // J. Mech. Eng. Sci. 2018. V. 12. № 3. P. 3914–3926.
<https://doi.org/10.15282/JMES.12.3.2018.11.0342>
11. Adali S. Optimal shape and non-homogeneity of a non-uniformly compressed column // Int. J. Solids Struct. 1979. V. 15. P. 935–949.
12. Takewaki, I.: Optimal frequency design of tower structures via an approximation concept. // Comput. Struct. 1996. V. 58(3). P. 445–452.
13. Sarkisyan V.S., Gukasyan G.M., Grigoryan A.A. Optimal design of a circular plate with rectilinear anisotropy // J. Math. Sci. 2001. V. 104. P. 1569–1574.
<https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
14. Бушнев А.Ю. Применение метода возмущений и функций чувствительности в задаче оптимизации систем с распределенными параметрами // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. Вып. 6 (42).
<https://doi.org/10.18698/2308-6033-2015-6-1411>
15. Amir E., Amir O. Free form shape optimization of three dimensional beams using cross section analysis // Int. J. Solids Struct. 2023. V. 277–278. P. 112331.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112331>
16. Ватуляян А.О. Коэффициентные обратные задачи механики. М.: Физматлит, 2019. 272 с.

ON THE MAXIMUM OF THE FIRST RESONANCE FREQUENCY
FOR INHOMOGENEOUS ELASTIC BODIESA. O. Vatulyan^{a, *}, V. O. Yurov^b^a*I.I. Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science,
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*^b*Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy
of Sciences, Vladikavkaz, Russia*^{*}*e-mail: aovatulyan@sfedu.ru, **e-mail: vitja.jurov@yandex.ru*

Abstract – The paper considers a non-classical optimization problem associated with the development of the production of new functionally graded materials. It is proposed to optimize the first natural frequency of oscillations by choosing the law of change in elastic moduli, and not the shape, as is done in most works devoted to optimization. This formulation of the problem becomes practically justified with the development of 3D printing and the production of FGM ceramics with specified properties. As an example, the problems of oscillations of a FGM rod and a FGM beam with spring boundary conditions at one of the ends are considered.

Keywords: inhomogeneity, optimization, rod, oscillations

REFERENCES

1. *Banichuk N.V.* Shape Optimization for Elastic Bodies. M.: Nauka, 1980. 255 p. [in Russian]
2. *Grinev V.B., Filippov A.P.* On optimal shapes of bars in stability problems // *Stroit. Mekh. Rasch. Sooruzh.* 1975. № 2. P. 21–27. [in Russian]
3. *Grinev V.B., Filippov A.P.* On optimal bars in stability problems under distributed loadings // *Stroit. Mekh. Rasch. Sooruzh.* 1975. № 6. P. 23–27. [in Russian]
4. *Bratus A.S., Kartvelishvili V.I.* Approximate analytical solutions to optimization problems of stability and vibration frequency of elastic thin-walled structures // *Izv. AN SSSR, Mekh. Tv. Tela.* 1981. V. 6. P. 119–139. [in Russian]
5. *Krein M.G.* On some maximum and minimum problems for characteristic numbers and on Lyapunov stability regions // *Prikl. Mat. Mekh.* 1951. V. 15. № 3. P. 323–348. [in Russian]
6. *Niordson F.I.* On the optimal design of a vibrating beam // *Quart. Appl. Math.* 1965. V. 23, № 1. P. 47–53.
7. *Olkhoff N.* Optimal design of structures. M.: Mir, 1981. 277 p. [in Russian]
8. *Rammerstorfer F.G.* On the optimal distribution of the young's modulus of a vibrating, prestressed beam // *Journal of Sound and Vibration.* 1974. V. 37(1). P. 140–145.
9. *Gupta V.K., Murthy P.N.* Optimal design of uniform non-homogeneous vibrating beams // *Journal of Sound and Vibration*, 1978. V. 59(4). P. 521–531.
10. *Alshabatat N.T.* Optimal design of functionally graded material columns for buckling problems // *Journal of Mechanical Engineering and Sciences.* 2018. V. 12. № 3. P. 3914–3926. <https://doi.org/10.15282/jmes.12.3.2018.11.0342>
11. *Adali S.* Optimal shape and non-homogeneity of a non-uniformly compressed column // *Int. J. Solids Structures.* 1979. V. 15. P. 935–949.
12. *Takewaki I.* Optimal frequency design of tower structures via an approximation concept. // *Comput. Struct.* 1996. V. 58(3). P. 445–452.
13. *Sarkisyan V.S., Gukasyan G.M., Grigoryan A.A.* Optimal Design of a Circular Plate with Rectilinear Anisotropy *Journal of Mathematical Sciences.* 2001. V. 104(5). P. 1569–1574. <https://doi.org/10.1023/A:1011300122949>
14. *Bushuev A.Yu.* Application of the perturbation method and sensitivity functions in the optimization problem of systems with distributed parameters // *Engineering Journal: Science and Innovation.* 2015. Iss. 6. [in Russian]
15. *Amir E., Amir O.* Free form shape optimization of three dimensional beams using cross section analysis // *International Journal of Solids and Structures*, 2023. V. 277–278. 112331. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112331>
16. *Vatulyan A.O.* Coefficient Inverse Problems of Mechanics. M.: Fizmatlit, 2019. 272 p. [in Russian]