

УДК 531.36

РЕЗОНАНСНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА С ШАРОВЫМ ДЕМПФЕРОМ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

© 2024 г. Н. И. Амелькин^{а, *}

^аМосковский физико-технический институт, Москва, Россия

*e-mail: namelkin@mail.ru

Поступила в редакцию 23.11.2023 г.

После доработки 16.12.2023 г.

Принята к публикации 18.12.2023 г.

Для спутника с шаровым демпфером изучается влияние внутренней диссипации на вращательное движение в центральном гравитационном поле. Получены уравнения вращательного движения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите. Для случая круговой орбиты с использованием метода осреднения исследованы пространственные резонансные вращения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером.

Ключевые слова: гравитационное поле, спутник с шаровым демпфером, метод осреднения, эволюционные уравнения, пространственные резонансные вращения на круговой орбите

DOI: 10.31857/S1026351924030082, EDN: UHYFQF

1. Введение. Данная работа является продолжением работ автора [1–8] по исследованию влияния внутренней диссипации на вращательное движение спутника в центральном гравитационном поле. В указанных работах для случая круговой орбиты подробно исследованы стационарные вращения спутника с демпфером и построены осредненные уравнения второго приближения, описывающие эволюцию вращательного движения спутника, в том числе и для случая, когда спутник (планета Земля) движется в поле двух притягивающих центров (Солнца и Луны) [7]. В работе [8] исследованы плоские резонансные и нерезонансные вращения спутника с демпфером на эллиптической орбите.

В данной работе исследуются резонансные эффекты в пространственных вращениях спутника с демпфером в гравитационном поле. Наличие таких эффектов обнаружено по результатам численного интегрирования уравнений движения спутника как на круговой, так и на эллиптической орбите. Эти резонансные эффекты обусловлены синхронизацией между вращательным движением спутника и движением его центра масс, причем проявляются они своеобразно: каждое резонансное вращение спутника с демпфером в гравитационном поле представляет собой

эволюционирующий процесс, в котором величина угловой скорости спутника на протяжении всего процесса остается практически неизменной, кратной угловой скорости орбитального базиса, а ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты.

Следует отметить, что анализ пространственных резонансных вращений спутника с демпфером представляет собой существенно более сложную задачу, чем анализ нерезонансных вращений. Здесь для аналитического обоснования существования и устойчивости резонансных вращений приходится использовать переменные, в которых уравнения движения спутника гораздо сложнее, чем те уравнения, с помощью которых исследовались нерезонансные вращение.

2. Уравнения вращательного движения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите в проекциях на оси базиса Кенига. Рассматривается спутник (планета, как спутник Солнца), состоящий из несущего твердого тела (оболочки) и внутреннего ядра, представляющего собой однородный шар, при относительных перемещениях которого возникает демпфирующий момент сил. Пусть $Oe_1e_2e_3$ – связанный с оболочкой базис главных центральных осей инерции всего спутника. Обозначим через $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ главный центральный тензор инерции всего спутника, а через I – момент инерции демпфера относительно его центральной оси.

Действующий на спутник гравитационный момент определяется формулой [9]:

$$\mathbf{M}_g = 3k \mathbf{R} \times \mathbf{J} \mathbf{R} / R^5, \quad (2.1)$$

где $k = \gamma M$ – постоянная тяготения, γ – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела (Солнца), \mathbf{R} – радиус-вектор, соединяющий центр притяжения с центром масс спутника.

Обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ вектор абсолютной угловой скорости оболочки, а через $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости демпфера. Полагаем, что действующий на демпфер диссипативный момент сил пропорционален относительной угловой скорости демпфера и определяется формулой:

$$\mathbf{M}_d = -\tilde{\mu} I (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}), \quad (2.2)$$

где $\tilde{\mu}$ – коэффициент вязкого трения между оболочкой и демпфером.

Пусть центр масс спутника движется по эллиптической орбите. Оси базиса Кенига $Oi_1i_2i_3$ выберем так, чтобы ось i_3 совпадала с нормалью к плоскости орбиты, а ось i_1 – с направлением на перицентр орбиты. Обозначим через $\mathbf{r} = \mathbf{R}/R$ единичный вектор, сонаправленный с радиус-вектором центра масс спутника, а через ν – истинную аномалию – угол между векторами \mathbf{r} и i_1 (рис. 1). Тогда будем иметь $\mathbf{r} = i_1 \cos \nu + i_2 \sin \nu$.

В качестве безразмерного времени будем использовать среднюю аномалию $\tau = \omega_0 t$, где ω_0 – средняя угловая скорость орбитального базиса, определяемая формулой:

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{a^3} \right)^{1/2} = \left(\frac{k(1-e^2)^3}{p^3} \right)^{1/2}, \quad (2.3)$$

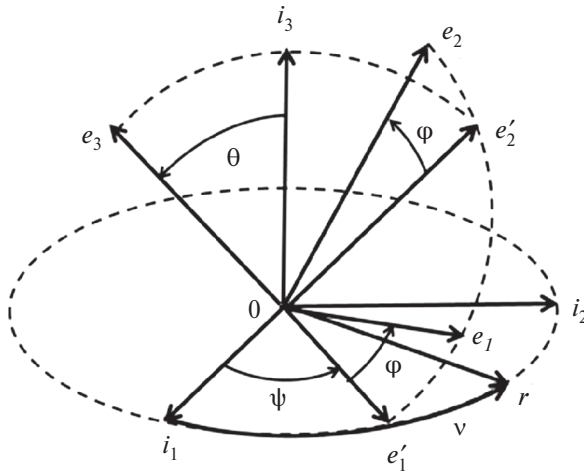


Рис. 1. Углы Эйлера.

здесь a – большая полуось орбиты спутника, p – параметр, e – эксцентриситет. Введем переменные \mathbf{U} , \mathbf{W} , \mathbf{L} и \mathbf{K} согласно формулам:

$$\mathbf{U} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega_0}, \quad \mathbf{W} = \frac{\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}}{\omega_0}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{J}\mathbf{U}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{I}\mathbf{W}, \tag{2.4}$$

где \mathbf{U} – безразмерная угловая скорость оболочки, \mathbf{W} – безразмерная относительная угловая скорость демпфера, \mathbf{L} – приведенный кинетический момент переносного движения спутника, \mathbf{K} – приведенный кинетический момент относительного движения демпфера. Обозначим штрихом производную по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$. Используя теорему об изменении кинетического момента для всего спутника и для демпфера, получим динамические уравнения вращательного движения спутника в следующем виде:

$$\mathbf{L}' + \mathbf{I}\mathbf{W}' = \mathbf{m}_g, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{W}' + \mathbf{U}' = -\mu\mathbf{W}, \quad \mu = \tilde{\mu}/\omega_0, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{m}_g = \mathbf{M}_g/\omega_0^2$ – приведенный гравитационный момент, а μ – безразмерный коэффициент вязкого трения.

Закон изменения истинной аномалии описывается уравнением:

$$v' = \frac{(1 + e \cos v)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}. \tag{2.7}$$

Ниже будем рассматривать случай динамически симметричного спутника, “сплюснутого” вдоль оси симметрии: $A = B < C$. Пусть $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ – единичный вектор оси симметрии. В этом случае гравитационный момент \mathbf{m}_g записывается в виде:

$$\mathbf{m}_g = 3(C - A)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})\mathbf{r} \times \mathbf{e} \left(\frac{1 + e \cos v}{1 - e^2} \right)^3, \tag{2.8}$$

а связь между векторами \mathbf{U} и \mathbf{L} выражается формулой:

$$\mathbf{L} = A\mathbf{U} + (C - A)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \Rightarrow (\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}) = C(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}). \quad (2.9)$$

На основании этой формулы, учитывая уравнение движения оси симметрии

$$\mathbf{e}' = \mathbf{U} \times \mathbf{e}, \quad (2.10)$$

получим

$$\mathbf{L}' = A\mathbf{U}' + (C - A)[(\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} + (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e}] \Rightarrow (\mathbf{L}' \cdot \mathbf{e}) = C(\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e}). \quad (2.11)$$

Из уравнений (2.5), (2.6) вследствие взаимной ортогональности векторов \mathbf{m}_g (2.8) и \mathbf{e} следует

$$\mathbf{L}' - I\mathbf{U}' = \mathbf{m}_g + \mu I\mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{L}' \cdot \mathbf{e} - I\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e} = \mu I\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}. \quad (2.12)$$

Отсюда на основании формул (2.11) получаем:

$$(C - I)\mathbf{U}' \cdot \mathbf{e} = \mu I\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}, \quad (2.13)$$

а уравнения (2.5), (2.6) приводятся к следующему виду:

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{A - I} \left(\mathbf{m}_g + (A - C)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu I \frac{(A - C)(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})}{C - I} \mathbf{e} + \mu I\mathbf{W} \right), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{W}' = -\frac{1}{A - I} \left(\mathbf{m}_g + (A - C)(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu I \frac{(A - C)(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})}{C - I} \mathbf{e} + \mu A\mathbf{W} \right). \quad (2.15)$$

Определив безразмерные параметры ε и γ , характеризующие геометрию масс спутника, формулами

$$\varepsilon = \frac{C - A}{A - I}, \quad \gamma = \frac{I}{A - I} \quad (2.16)$$

получим из (2.14), (2.15) следующую систему уравнений:

$$\mathbf{U}' = \mathbf{m} - \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu\gamma\mathbf{W} - \varepsilon\mu\gamma \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}}{1 + \varepsilon} = \mathbf{M}, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{W}' = -\mathbf{m} + \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} - \mu(1 + \gamma)\mathbf{W} + \varepsilon\mu\gamma \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}}{1 + \varepsilon} = -\mathbf{M} - \mu\mathbf{W}, \quad (2.18)$$

где \mathbf{m} – безразмерный гравитационный момент, определяемый формулой:

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{m}_g}{A - I} = 3\varepsilon(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e})\mathbf{r} \times \mathbf{e} \left(\frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3. \quad (2.19)$$

Уравнения (2.17), (2.18), (2.10) и (2.7) записаны в проекциях на оси базиса Кенига. Они образуют замкнутую систему относительно переменных \mathbf{U} , \mathbf{W} , \mathbf{e} и ν . При этом вектор \mathbf{U} задает направление оси вращения оболочки спутника и величину ее безразмерной угловой скорости.

В проекциях на оси базиса Резаля $O\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$, задаваемого углами Эйлера ψ и θ (рис. 1), уравнения (2.17), (2.18) и (2.10) записываются в виде следующей системы [4]:

$$\begin{aligned}
w'_1 &= \varepsilon u_2 u_3 + u_2 w_2 \operatorname{ctg} \theta - u_2 w_3 - \mu(1 + \gamma) w_1 - \\
&\quad - f \sin \theta \sin \psi \sin \theta \quad v - \psi - \\
w'_2 &= -\varepsilon u_1 u_3 + u_1 w_3 - u_2 w_1 \sin \theta \sin \psi + \gamma w_2 - f v F \quad v - \psi \\
u'_1 &= -(1 + \varepsilon) u_3 u_2 + u_2^2 \operatorname{ctg} \theta + \mu \gamma w_1 + f(v) F \cos \theta [\cos 2(v - \psi) - 1], \\
u'_2 &= (1 + \varepsilon) u_3 u_1 - u_2 u_1 \operatorname{ctg} \theta + \mu \gamma w_2 + f(v) F \sin 2(v - \psi), \\
w'_3 &= u_2 w_1 - u_1 w_2 - \mu(1 + \gamma + \varepsilon) w_3 / (1 + \varepsilon), \\
u'_3 &= \mu \gamma w_3 / (1 + \varepsilon), \quad \dot{\theta} = u_1, \quad \dot{\psi} \sin \theta = u_2,
\end{aligned} \tag{2.20}$$

здесь u_k и w_k – проекции векторов \mathbf{U} и \mathbf{W} на оси базис $\mathbf{Oe}'_1 \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3$ а , а функции F и f выражаются формулами:

$$F = \frac{3\varepsilon \sin \theta}{2}, \quad f(v) = \left(\frac{1 + e \cos v}{1 - e^2} \right)^3. \tag{2.21}$$

Ниже будем рассматривать динамически симметричный спутник, близкий к сферически симметричному, т.е. положим

$$0 < \varepsilon \ll 1. \tag{2.22}$$

Для случая круговой орбиты ($v = \tau, f = 1$) в работе [4] на основе уравнений (2.20) были получены следующие осредненные уравнения второго приближения:

$$\dot{\theta}' = \frac{9\varepsilon^2 \mu \gamma \sin \theta}{8(1 + \gamma)U} \left(\frac{U(\cos^2 \theta - 3)\cos \theta - 4}{(4 + \mu^2(1 + \gamma)^2)(4 - U^2)} - \frac{2\cos^3 \theta}{\mu^2(1 + \gamma)^2 U} \right), \tag{2.23}$$

$$\dot{U}' = \frac{9\varepsilon^2 \mu \gamma \sin^2 \theta}{8(1 + \gamma)} \left(\frac{U(1 + \cos^2 \theta) + 4\cos \theta}{(4 + \mu^2(1 + \gamma)^2)(4 - U^2)} - \frac{2\cos^2 \theta}{\mu^2(1 + \gamma)^2 U} \right), \tag{2.24}$$

здесь U и θ – эволюционные составляющие в поведении переменных u_3 и θ .

Эволюционные уравнения (2.23), (2.24), как показано в работе [4], адекватно и с высокой точностью описывают нерезонансные вращения спутника с демпфером, т.е. те вращения, для которых значения U лежат вне малых окрестностей значений $U^* = 2$ и $U^* = 0$. Было установлено также, что в режиме нерезонансного вращения переменные u_1, u_2, w_1, w_2, w_3 являются ограниченными функциями малого параметра ε , вследствие чего и угол между осью симметрии спутника и вектором угловой скорости оболочки остается малой величиной порядка ε . При этом эволюция по углу прецессии описывается уравнением [4]

$$\dot{\psi} = -\frac{3\varepsilon \cos \theta}{2(1 + \gamma)U} + O(\varepsilon^2). \tag{2.25}$$

Здесь и всюду далее $O(\varepsilon)$ – ограниченные функции малого параметра ε .

В работе [4] по результатам численного интегрирования точных уравнений (2.20) для динамически симметричного спутника были обнаружены на круговой орбите асимптотически устойчивые пространственные резонансные режимы вращательного движения 2:1. Характерной особенностью этих резонансных вращений является то, что для них величина угловой скорости спутника остается с точностью до $O(\varepsilon)$ неизменной, равной удвоенной угловой скорости орбитального базиса, а ось вращения спутника монотонно эволюционирует в сторону нормали к плоскости орбиты. Как будет показано ниже, для симметричного спутника на круговой орбите существуют и асимптотически устойчивые пространственные резонансные вращения 1:1, для которых величина угловой скорости спутника с точностью до $O(\varepsilon)$ равна угловой скорости орбитального базиса.

Ниже проводится аналитическое исследование условий существования и устойчивости указанных резонансных вращений спутника, а также анализ поведения спутника в режимах резонансного вращения.

3. Уравнения вращательного движения спутника с демпфером в переменных Белецкого—Чернуосько. Для анализа резонансных вращений спутника будем использовать уравнения (2.17), (2.18), (2.10), в которых состояние оболочки спутника будем описывать переменными Белецкого—Чернуосько [9]. В этих переменных положение вектора \mathbf{U} относительно базиса Кенига $O\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\mathbf{i}_3$ задается согласно рис. 2, а величиной U , углом нутации ρ и углом прецессии σ , а положение оси симметрии спутника e относительно определяемого вектором \mathbf{U} базиса $O\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$ задается углами Эйлера θ и ψ (рис. 2, б). В качестве остальных переменных для рассматриваемой системы будем использовать проекции W_1, W_2, W_3 вектора \mathbf{W} на оси базиса $O\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3$.

Очевидно, что все возможные состояния системы можно описать, рассматривая значения переменных U и ρ в диапазонах

$$U \geq 0, \quad 0 \leq \rho \leq \pi. \quad (3.1)$$

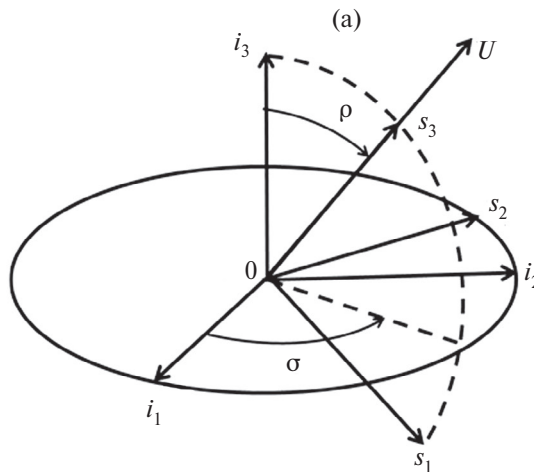


Рис. 2 (начало). Переменные Белецкого—Чернуосько.

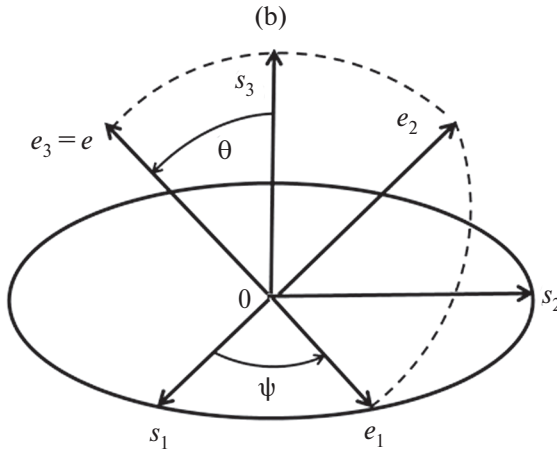


Рис. 2 (окончание). Переменные Белешко–Черноушко.

Базис $Os_1s_2s_3$ вращается относительно базиса Кенига с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_s = \sigma' \mathbf{i}_3 + \rho' \mathbf{s}_2 = -\sigma' \sin \rho \mathbf{s}_1 + \rho' \mathbf{s}_2 + \sigma' \cos \rho \mathbf{s}_3, \quad (3.2)$$

а проекции векторов \mathbf{U} и \mathbf{W} на оси этого базиса выражаются формулами

$$\mathbf{U} = U \mathbf{s}_3, \quad \mathbf{W} = W_1 \mathbf{s}_1 + W_2 \mathbf{s}_2 + W_3 \mathbf{s}_3. \quad (3.3)$$

В проекциях на оси базиса $Os_1s_2s_3$ уравнения (2.17) и (2.18) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma' \sin \rho \\ \rho' \\ \sigma' \cos \rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho' U \\ \sigma' U \sin \rho \\ U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{W}' &= \begin{pmatrix} W_1' \\ W_2' \\ W_3' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sigma' \sin \rho \\ \rho' \\ \sigma' \cos \rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} W_1' + W_3 \rho' - W_2 \sigma' \cos \rho \\ W_2' + W_1 \sigma' \cos \rho + W_3 \sigma' \sin \rho \\ W_3' - W_2 \sigma' \sin \rho - W_1 \rho' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 + \mu \gamma W_1 \\ M_2 + \mu \gamma W_2 \\ M_3 + \mu \gamma W_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

здесь M_k — проекции правых частей уравнений (2.17) на оси базиса $Os_1s_2s_3$. Разрешив эти уравнения относительно производных, получим следующую систему:

$$\rho' = M_1/U, \quad (3.4)$$

$$\sigma' = M_2/(U \sin \rho), \quad (3.5)$$

$$U' = M_3, \quad (3.6)$$

$$W_1' = (-W_3 M_1 + W_2 M_2 \operatorname{ctg} \rho)/U - M_1 - \mu W_1, \quad (3.7)$$

$$W_2' = -(W_1 M_2 \operatorname{ctg} \rho + W_3 M_2)/U - M_2 - \mu W_2, \quad (3.8)$$

$$W_3' = (W_1 M_1 + W_2 M_2)/U - M_3 - \mu W_3. \quad (3.9)$$

Аналогичным образом на основании формулы

$$\mathbf{e} = \psi \mathbf{s}_1 - \theta \mathbf{s}_2 + \psi \mathbf{s}_3$$

проецируя векторное уравнение (2.10) на оси базиса $Os_1s_2s_3$, получим после несложных преобразований следующие уравнения, описывающие поведение углов Эйлера ψ и θ :

$$\theta' = (M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi)/U, \quad (3.10)$$

$$\psi' = U - (\operatorname{ctg} \theta (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) + M_2 \operatorname{ctg} \rho)/U. \quad (3.11)$$

Уравнения (3.4)–(3.11) в сочетании с уравнением (2.7) образуют замкнутую систему относительно переменных ρ , σ , U , ψ , θ , W_1 , W_2 , W_3 и v .

Заметим, что в силу условия (2.22) последнее слагаемое в выражении для вектора \mathbf{M} (2.17) мало по сравнению с предпоследним, т.е.

$$\varepsilon \mu \gamma |(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|/(1 + \varepsilon) \ll \mu \gamma |\mathbf{W}|.$$

Ниже при построении осредненных уравнений первого приближения этим слагаемым можно пренебречь и использовать для вектора \mathbf{M} следующую формулу:

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} - \varepsilon (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu \gamma \mathbf{W}. \quad (3.12)$$

В проекциях на оси базиса $Os_1s_2s_3$ вектор (3.12) запишется в виде:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} - \varepsilon U^2 \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \gamma \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

а проекции вектора \mathbf{m} (2.19) выражаются через силовую функцию

$$\begin{aligned} V = & -\frac{3\varepsilon}{16} f(v) \left(2 \sin 2\theta \sin \rho \left[(1 + \cos \rho) \sin(\psi - 2s) - (1 - \cos \rho) \sin(\psi + 2s) \right] + \right. \\ & + \sin^2 \theta \left[4 - (1 + \cos \rho)^2 \cos 2(\psi - s) - (1 - \cos \rho)^2 \cos 2(\psi + s) \right] + \\ & \left. + 2 \sin^2 \rho \left[(3 \cos^2 \theta - 1)(1 + \cos 2s) + \sin^2 \theta \cos 2\psi \right] + 2 \sin 2\rho \sin 2\theta \sin \psi \right), \quad (3.14) \end{aligned}$$

по формулам [9]

$$m_1 = \operatorname{ctg} \rho \frac{\partial V}{\partial \psi} + \frac{1}{\sin \rho} \frac{\partial V}{\partial s}, \quad m_2 = \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad m_3 = \frac{\partial V}{\partial \psi}. \quad (3.15)$$

Здесь

$$s = v - \sigma. \quad (3.16)$$

Заметим, что проекции (3.15) гравитационного момента на оси базиса $O s_1 s_2 s_3$ могут быть вычислены и непосредственно на основе формулы (2.19).

4. Резонансные вращения спутника на круговой орбите. Резонанс 2:1. Для случая круговой орбиты будем иметь $s = \tau - \sigma$, $f = 1$.

Оценим сначала значения компонент вектора \mathbf{W} в режиме медленной эволюции, которая наступает после окончания переходных процессов (при достаточно больших значениях τ). На основании уравнения (2.18) получим для производной по τ от функции W^2 следующее выражение:

$$(W^2)' = -2\mu(1 + \gamma)W^2 - 2(\mathbf{m} \cdot \mathbf{W}) + 2\varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})[(\mathbf{U} \times \mathbf{e}) \cdot \mathbf{W}] + 2\varepsilon\mu\gamma \frac{(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e})^2}{1 + \varepsilon}. \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что если $\mu \gg \varepsilon$, то в режиме медленной эволюции все компоненты вектора \mathbf{W} , а следовательно, и все компоненты вектора \mathbf{M} (3.12), будут ограниченными функциями малого параметра ε :

$$W_k = O(\varepsilon), \quad M_k = O(\varepsilon); \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.2)$$

В свою очередь, из уравнений (3.4)–(3.11) при учете (4.2) следует, что при $U \gg \varepsilon$ в режиме медленной эволюции переменные τ и ψ будут “быстрыми”, а остальные переменные – “медленными” (скорость изменения этих переменных будет ограниченной функцией ε).

Для анализа резонансных вращений спутника будем использовать метод осреднения [10, 11]. В процедуре этого метода сначала ищется зависящее явно от “быстрых” переменных τ и ψ решение системы, получаемой линеаризацией уравнений (3.4)–(3.11). Затем это решение подставляется в нелинейные уравнения и после осреднения получают эволюционные уравнения.

Из уравнений (3.4)–(3.11) и формул (3.14)–(3.16) следует, что в решениях линеаризованной системы будут фигурировать гармонические функции вида:

$$\frac{a_1 \cos(\psi \pm 2s) + b_1 \sin(\psi \pm 2s)}{\psi' \pm 2s'}, \quad \frac{a_2 \cos 2(\psi \pm s) + b_2 \sin 2(\psi \pm s)}{\psi' \pm s'},$$

$$\frac{a_3 \cos 2s + b_3 \sin 2s}{s'}, \quad \frac{a_4 \cos \psi + b_4 \sin \psi}{\psi'}, \quad \frac{a_5 \cos 2\psi + b_5 \sin 2\psi}{\psi'}.$$

Резонансным вращениям спутника будут соответствовать движения, для которых средние по времени τ значения некоторых из знаменателей в записанных выражениях обращаются в нуль. Сначала выясним, для каких из этих знаменателей указанное условие заведомо не выполняется. Средние по времени τ значения переменных будем обозначать угловыми скобками.

Из уравнений (3.5) и (3.11) при учете (4.2) следует, что при $U \gg \varepsilon$ выполняются следующие неравенства:

$$\langle \psi' \rangle = U + O(\varepsilon) > 0, \quad \langle s' \rangle = 1 + O(\varepsilon) > 0,$$

$$\langle \psi' + 2s' \rangle = 2 + O(\varepsilon) > 0, \quad \langle \psi' + s' \rangle = 1 + O(\varepsilon) > 0.$$

Таким образом, в диапазоне значений $U \gg \varepsilon$ резонансные вращения спутника возможны только при выполнении следующих двух резонансных соотношений:

$$\langle \psi' - 2s' \rangle = \langle \psi' + 2\sigma' \rangle - 2 = 0 \Rightarrow U = 2 + O(\varepsilon), \quad (4.3)$$

$$\langle \psi' - s' \rangle = \langle \psi' + \sigma' \rangle - 1 = 0 \Rightarrow U = 1 + O(\varepsilon). \quad (4.4)$$

Исследуем сначала вращения спутника, для которых выполняется резонансное соотношение (4.3). Выше такие вращения были названы резонансами 2:1, поскольку для них угловая скорость спутника близка к удвоенной угловой скорости орбитального базиса.

Введем новую переменную X согласно формуле

$$X = \psi - 2(\tau - \sigma). \quad (4.5)$$

Резонансное соотношение (4.3) будет выполняться для тех движений спутника, где среднее значение переменной X остается неизменным. При этом для резонансных вращений 2:1 будет иметь место такая синхронизация между движением центра масс и вращательным движением спутника, при которой за один оборот центра масс спутника относительно базиса $Os_1s_2s_3$ ось симметрии спутника e совершает ровно два оборота вокруг вектора угловой скорости \mathbf{U} (см. рис. 2, 3).

Согласно (3.5) и (3.11) уравнение, описывающее поведение переменной X , записывается в виде:

$$X' = U - 2 - \text{ctg} \theta (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) / U + M_2 (2 - \cos \rho) / (U \sin \rho). \quad (4.6)$$

Уравнения (3.4)–(3.11), (4.6) заменой $2(\tau - \sigma) = \psi - X$ приводятся к автономной системе в переменных $\rho, U, W_1, W_2, W_3, \theta, X, \psi$. Далее усредним эти уравнения по “быстрой” переменной ψ , а интересующие нас резонансные вращения спутника будем искать среди стационарных по переменным $U, W_1, W_2, W_3, \theta, X$ решений (положений равновесия) осредненной системы при фиксированном значении переменной ρ .

В указанных переменных вычисленные по формулам (3.15) проекции гравитационного момента \mathbf{m} (2.19) на оси базиса $Os_1s_2s_3$ выражаются в виде:

$$\begin{aligned} m_1 = \frac{3\varepsilon}{8} \{ & \sin 2\theta (1 + \cos \rho) (2 - \cos \rho) \cos X - 2 \sin 2\theta \cos^2 \rho \cos \psi + \\ & + \sin^2 \theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin(\psi + X) - 2 \sin \rho (1 - 3 \cos^2 \theta) \sin(\psi - X) + \\ & + \sin 2\rho \sin^2 \theta \sin 2\psi + \sin 2\theta (1 - \cos \rho) (2 + \cos \rho) \cos(2\psi - X) - \\ & - \sin^2 \theta \sin \rho (1 - \cos \rho) \sin(3\psi - X) \}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$m_2 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ \sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta) + \sin 2\theta(1 + \cos\rho)(1 - 2\cos\rho)\sin X - \right. \\ \left. - 2\sin 2\theta \cos 2\rho \sin \psi - \sin^2 \theta \sin \rho(1 + \cos\rho)\cos(\psi + X) + \right. \\ \left. + \sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta)\cos(\psi - X) - \sin^2 \theta \sin 2\rho \cos 2\psi + \right. \\ \left. + (1 - \cos\rho)[\sin 2\theta(1 + 2\cos\rho)\sin(2\psi - X) + \sin^2 \theta \sin \rho \cos(3\psi - X)] \right\}, \quad (4.8)$$

$$m_3 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ -\sin 2\theta \sin \rho(1 + \cos\rho)\cos X - \sin^2 \theta(1 + \cos\rho)^2 \sin(\psi + X) - \right. \\ \left. - \sin 2\rho \sin 2\theta \cos \psi + \sin 2\theta \sin \rho(1 - \cos\rho)\cos(2\psi - X) + \right. \\ \left. + 2\sin^2 \theta \sin^2 \rho \sin 2\psi - \sin^2 \theta(1 - \cos\rho)^2 \sin(3\psi - X) \right\}. \quad (4.9)$$

Проведем теперь осреднение уравнений (3.4)–(3.11) и (4.6) по быстрой переменной ψ . Обозначив средние по ψ чертой сверху, получим на основании формул (4.7)–(4.9)

$$\bar{m}_1 = 3\varepsilon \cos X \sin 2\theta(1 + \cos\rho)(2 - \cos\rho)/8, \quad (4.10)$$

$$\bar{m}_2 = 3\varepsilon (\sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta) + \sin 2\theta \sin X(1 + \cos\rho)(1 - 2\cos\rho))/8, \quad (4.11)$$

$$\bar{m}_3 = -3\varepsilon \cos X \sin 2\theta \sin \rho(1 + \cos\rho)/8. \quad (4.12)$$

При учете формул (4.2) осредненные по ψ уравнения (3.4)–(3.9) запишутся в виде:

$$\rho' = (\bar{m}_1 + \mu\gamma W_1)/U, \quad \sigma' = (\bar{m}_2 + \mu\gamma W_2)/(U \sin \rho), \quad (4.13)$$

$$W_1' = -\mu(1 + \gamma)W_1 - \bar{m}_1 + O(\varepsilon^2), \quad W_2' = -\mu(1 + \gamma)W_2 - \bar{m}_2 + O(\varepsilon^2), \quad (4.14)$$

$$W_3' = -\mu(1 + \gamma)W_3 - \bar{m}_3 + O(\varepsilon^2), \quad U' = \mu\gamma W_3 + \bar{m}_3 + O(\varepsilon^2). \quad (4.15)$$

В правых частях уравнений (3.10), (3.11) и (4.6) фигурируют функции $M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi$ и $M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi$. Для вычисления их среднего по ψ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ необходимо в поведении вектора \mathbf{M} (3.12) определить осцилляционные составляющие \mathbf{M}_ψ , содержащие гармоники вида:

$$\mathbf{M}_\psi = \mathbf{a}(\rho, \theta) \cos \psi + \mathbf{b}(\rho, \theta) \sin \psi. \quad (4.16)$$

Согласно (3.12) и (3.13) вектор \mathbf{M}_ψ выражается формулой:

$$\mathbf{M}_\psi = \mathbf{m}_\psi - \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} + \mu\gamma \mathbf{W}_\psi; \quad (\mathbf{U} \cdot \mathbf{e})\mathbf{U} \times \mathbf{e} = U^2 \sin \theta \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

где \mathbf{m}_ψ и \mathbf{W}_ψ – слагаемые векторов \mathbf{m} и \mathbf{W} , содержащие гармоники вида (4.16).

Осцилляционные составляющие \mathbf{W}_ψ вектора \mathbf{W} определяются с точностью до $O(\varepsilon^2)$ решениями уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \psi} \psi' = \boldsymbol{\alpha} \cos \psi + \boldsymbol{\beta} \sin \psi - \mu(1 + \gamma) \mathbf{W}, \quad (4.18)$$

которое получается из уравнения (2.18) отбрасыванием в его правой части членов второго порядка малости по ε . Здесь

$$\boldsymbol{\alpha} \cos \psi + \boldsymbol{\beta} \sin \psi = -\mathbf{m}_\psi + \varepsilon(\mathbf{U} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{U} \times \mathbf{e}. \quad (4.19)$$

При учете уравнения (3.11) решение уравнения (4.18) описывается с точностью до $O(\varepsilon^2)$ следующей формулой:

$$\mathbf{W}_\psi = \frac{\mu(1 + \gamma)\boldsymbol{\alpha} - U\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \cos \psi + \frac{U\boldsymbol{\alpha} + \mu(1 + \gamma)\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin \psi. \quad (4.20)$$

Искомый вектор \mathbf{M}_ψ выражается формулой

$$\mathbf{M}_\psi = -\boldsymbol{\alpha} \cos \psi - \boldsymbol{\beta} \sin \psi + \mu\gamma \mathbf{W}_\psi \quad (4.21)$$

и записывается в следующем виде:

$$\mathbf{M}_\psi = -\left(\frac{[U^2 + \mu^2(1 + \gamma)]\boldsymbol{\alpha} + \mu\gamma U\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \cos \psi + \frac{[U^2 + \mu^2(1 + \gamma)]\boldsymbol{\alpha} - \mu\gamma U\boldsymbol{\beta}}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin \psi \right). \quad (4.22)$$

На основании формулы (4.22) получим:

$$\langle M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_2 - \beta_1) + \frac{\mu\gamma U(\alpha_1 + \beta_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right), \quad (4.23)$$

$$\langle M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi \rangle = -\frac{1}{2} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) + \frac{\mu\gamma U(\beta_1 - \alpha_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right). \quad (4.24)$$

Для компонент векторов $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ на основании формул (4.7), (4.8), (4.17) и (4.19) получим следующие выражения:

$$\alpha_1 = 3\varepsilon \left\{ 2 \sin 2\theta (\cos^2 \rho + 2U^2/3) - \sin \rho [2(1 - 3 \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta (1 + \cos \rho)] \sin X \right\} / 8,$$

$$\beta_1 = 3\varepsilon \cos X \sin \rho \left[2(1 - 3 \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta (1 + \cos \rho) \right] / 8,$$

$$\alpha_2 = 3\varepsilon \cos X \sin \rho \left[\sin^2 \theta (1 + \cos \rho) - 2 \cos \rho (1 - 3 \cos^2 \theta) \right] / 8,$$

$$\beta_2 = 3\varepsilon \left\{ 2 \sin 2\theta (\cos 2\rho + 2U^2/3) - \sin \rho [2 \cos \rho (1 - 3 \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta (1 + \cos \rho)] \sin X \right\} / 8.$$

Отсюда находим

$$\alpha_2 - \beta_1 = 3\varepsilon \cos^2 \theta \cos X \sin \rho (1 + \cos \rho) / 2,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 3\varepsilon \left(\sin 2\theta (4U^2/3 + 3\cos^2\rho - 1) + 2\cos 2\theta \sin X \sin \rho (1 + \cos \rho) \right) / 4.$$

После подстановки этих выражений в формулы (4.23) и (4.24) осредненные по ψ уравнения (4.6) и (3.10) запишутся в следующем виде:

$$X' = F_X = U - 2 + (\bar{m}_2 + \mu\gamma W_2)(2 - \cos \rho) / (U \sin \rho) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2U} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) - \frac{\mu\gamma U(\alpha_2 - \beta_1)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (4.25)$$

$$\theta' = F_\theta = -\frac{3\varepsilon}{4U} \frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin \rho (1 + \cos \rho) \cos^2 \theta \cos X - \frac{3\varepsilon}{8} \mu\gamma \frac{\sin 2\theta (4U^2/3 + 3\cos^2\rho - 1) + 2\cos 2\theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin X}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.26)$$

Стационарные решения (положения равновесия) системы (4.14), (4.15), (4.25), (4.26) по переменным $W_1, W_2, W_3, U, \theta, X$ при фиксированном ρ описываются следующей системой уравнений:

$$W_1^* = -\frac{3\varepsilon \sin 2\theta^* \cos X^* (1 + \cos \rho)(2 - \cos \rho)}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\varepsilon^2), \quad (4.27)$$

$$W_2^* = -\frac{3\varepsilon \sin 2\rho(1 - 3\cos^2\theta^*) + \sin 2\theta^* \sin X^* (1 + \cos \rho)(1 - 2\cos \rho)}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\varepsilon^2), \quad (4.28)$$

$$W_3^* = \frac{3\varepsilon \sin 2\theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho)}{8\mu(1 + \gamma)} + O(\varepsilon^2). \quad (4.29)$$

$$\sin 2\theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) = O(\varepsilon), \quad (4.30)$$

$$U^* = 2 + O(\varepsilon), \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} & (4 + \mu^2(1 + \gamma)) \cos^2 \theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) + \\ & + \mu\gamma \left(\sin 2\theta^* (13/3 + 3\cos^2\rho) + 2\cos 2\theta^* \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) \right) = O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Если значения угла нутации ρ удовлетворяют условию

$$\sin \rho (1 + \cos \rho) \gg \varepsilon, \quad (4.33)$$

то с точностью до $O(\varepsilon)$ стационарные решения для X^* и q^* в уравнениях (4.27)–(4.32) описываются формулами:

$$\cos X^* = 0, \quad \operatorname{tg} 2\theta^* = -\frac{2\sin \rho (1 + \cos \rho)}{13/3 + 3\cos^2\rho} \sin X^*. \quad (4.34)$$

Вопрос об устойчивости найденных стационарных решений сводится к исследованию корней характеристического уравнения системы (4.14), (4.15), (4.25), (4.26), линеаризованной в окрестности положений равновесия. Матрица этой системы на решениях (4.27)–(4.32), (4.34) выражается следующей формулой:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mu(1+\gamma) & 0 & 0 & 0 & O(\varepsilon) & 0 \\ 0 & -\mu(1+\gamma) & 0 & 0 & 0 & O(\varepsilon) \\ 0 & 0 & -\mu(1+\gamma) & 0 & \varepsilon f_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\gamma & 0 & -\varepsilon f_3 & 0 \\ 0 & \mu\gamma \frac{2-\cos\rho}{2\sin\rho} & 0 & 1 & \varepsilon f_{xx} & O(\varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 & O(\varepsilon) & O(\varepsilon) & \varepsilon f_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Здесь

$$\varepsilon f_3 = -\frac{\partial \bar{m}_3}{\partial X} = -\frac{3\varepsilon}{8} \sin 2\theta^* \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho), \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon f_{\theta\theta} &= \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \\ &= -\frac{3\varepsilon}{4} \mu\gamma \frac{\cos 2\theta^* (13/3 + 3\cos^2 \rho) - 2\sin 2\theta^* \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho)}{4 + \mu^2 (1 + \gamma)^2}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\varepsilon f_{xx} = \frac{\partial F_X}{\partial X} = \frac{3\varepsilon \mu\gamma \operatorname{ctg} \theta^* \cos^2 \theta^*}{4(4 + \mu^2 (1 + \gamma)^2)} \sin X^* \sin \rho (1 + \cos \rho). \quad (4.38)$$

Характеристический полином матрицы (4.35), в коэффициентах которого учтены только главные члены разложения по ε , записывается в виде:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= (\mu(1+\gamma) + \lambda)^2 (\lambda - \varepsilon f_\theta) \times \\ &\times (\lambda^3 + \lambda^2 \mu(1+\gamma) + \lambda \varepsilon (f_3 - \mu(1+\gamma) f_{xx}) + \mu \varepsilon f_3). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Отсюда на основании формул (4.36), (4.38) и критерия Рауса–Гурвица заключаем, что те из стационарных решений, для которых $f_3 > 0$ и $f_\theta < 0$, асимптотически устойчивы, а решения, для которых $f_3 < 0$ либо $f_\theta > 0$, неустойчивы.

Из условий $f_3 > 0$, $f_\theta < 0$ и формул (4.34), (4.36)–(4.38) следует, что асимптотически устойчивым положениям равновесия осредненной системы отвечают те из решений (4.27)–(4.32), для которых

$$\sin X^* = -1, \quad \operatorname{tg} 2\theta^* = \frac{2\sin\rho(1+\cos\rho)}{13/3+3\cos^2\rho}; \quad \sin 2\theta^* > 0. \quad (4.40)$$

По теореме Н.Н. Боголюбова [10, 11] асимптотически устойчивым положениям равновесия осредненной системы соответствуют асимптотически устойчивые периодические решения исходной (точной) системы.

Для устойчивых решений полином (4.39) имеет три вещественных корня:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu^2(1 + \gamma), \quad \lambda_3 = \varepsilon f_{\theta\theta} = -\frac{3\varepsilon}{4} \mu \gamma \frac{(13/3 + 3 \cos^2 \rho) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta^*}}{4 + \mu^2(1 + \gamma)^2}, \quad (4.41)$$

а вещественные части остальных корней при $\mu \gg \varepsilon$ выражаются формулами:

$$\operatorname{Re}(\lambda_4) = -\mu(1 + \gamma) + O(\varepsilon), \quad \operatorname{Re}(\lambda_{5,6}) = -3\varepsilon \gamma \frac{\sin \rho(1 + \cos \rho) \sin 2\theta^*}{16\mu(1 + \gamma)^2} + O(\varepsilon^2). \quad (4.42)$$

Из этих формул следует, что при $\mu \gg \varepsilon$ и $\gamma \gg \varepsilon$ вещественные части всех корней характеристического полинома ограничены сверху неравенствами:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) < -a\varepsilon, \quad a \gg \varepsilon; \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (4.43)$$

Обратимся теперь к первому из уравнений (4.13). Из него и формул (4.10), (4.27), (4.40) следует, что в окрестности асимптотически устойчивых стационарных решений системы (4.14), (4.15), (4.25), (4.26) поведение переменной ρ описывается уравнением $\rho' = O(\varepsilon^2)$. Отсюда при учете соотношений (4.43) получаем, что переменная ρ является “медленной” по сравнению с переменными $W_1, W_2, W_3, U, \theta, X$. Следовательно, применима теорема А.Н. Тихонова [12] об условиях редукции в системе дифференциальных уравнений с малым параметром, согласно которой систему дифференциальных уравнений (4.14), (4.15), (4.25), (4.26) можно заменить системой алгебраических уравнений (4.27)–(4.32), (4.40) и решать их совместно с дифференциальным уравнением (4.13).

Стационарные решения, описываемые формулами (4.27)–(4.32), (4.40), являются функциями переменной ρ . После подстановки этих решений в первое из уравнений (4.13) получается дифференциальное уравнение $\rho' = f(\rho)$, описывающее эволюцию переменной ρ , где $f(\rho)$ будет ограниченной функцией ε^2 .

По мере медленного изменения переменной ρ меняются, вообще говоря, и значения переменных $W_1^*(\rho), W_2^*(\rho), W_3^*(\rho), U^*(\rho), \theta^*(\rho), X^*(\rho)$. Поэтому рассматриваемые пространственные резонансные вращения спутника представляют собой эволюционирующий (неустановившийся) процесс. В этом процессе угол θ между осью вращения и осью симметрии спутника согласно второй из формул (4.40) не зависит от значений параметров μ, γ, ε . Он зависит только от величины угла нутации ρ и может достигать значений $\theta_{\max} \approx 0.25$. При этом угловая скорость спутника на резонансном вращении согласно формуле (4.31) будет с точностью до $O(\varepsilon)$ совпадать со значением $U^* = 2$, а значение переменной X (4.5), отвечающей за синхронизацию между вращательным движением спутника и движением его центра масс, согласно первой из формул (4.40) с точностью до $O(\varepsilon)$ будет совпадать со значением $X^* = -\pi/2$.

Согласно формулам (4.27)–(4.29) в режиме резонансного вращения относительная угловая скорость демпфера будет ограниченной функцией малого параметра ε , как и в случае нерезонансного вращения.

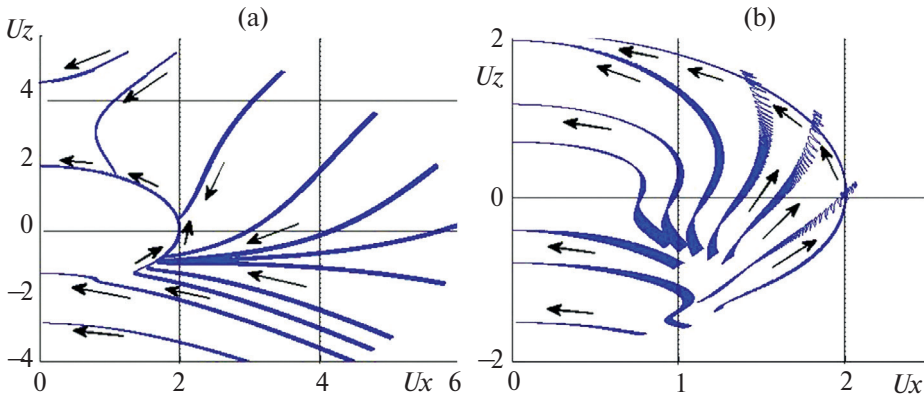


Рис. 3. Фазовые траектории.

Прецессия оси вращения спутника описывается вторым из уравнений (4.13). Для устойчивого резонансного вращения спутника в силу формул (4.11), (4.28) и (4.40) это уравнение принимает следующий вид:

$$\sigma' = -\frac{3\varepsilon}{8} \left(\frac{\cos \rho (1 + 3 \cos 2\theta^*)}{(1 + \gamma)U} + \frac{\sin 2\theta^* (1 + \cos \rho)(1 - 2 \cos \rho)}{(1 + \gamma)U \sin \rho} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (4.44)$$

Для нерезонансного движения спутника прецессия оси вращения описывается в переменных σ , ρ аналогичным (2.25) уравнением:

$$\sigma' = -\frac{3\varepsilon \cos \rho}{2(1 + \gamma)U} + O(\varepsilon^2). \quad (4.45)$$

Из формул (4.44) и (4.45) следует, что для одних и тех же значений угла нутации ρ скорости прецессии в резонансном и нерезонансном вращении спутника могут отличаться на величину порядка ε , сопоставимую с (4.45).

Оценим границы интервалов значений угла нутации ρ , в пределах которых существуют резонансные вращения 2:1 для динамически симметричного спутника. Положим, что в правой части уравнения (4.30) $O(\varepsilon) = a\varepsilon$, где $a \neq 0$ – некоторая ограниченная величина. Тогда получим уравнение:

$$\sin 2\theta^* \cos X^* \sin \rho (1 + \cos \rho) = a\varepsilon.$$

Это уравнение не имеет решений, если $\sin \rho (1 + \cos \rho) < |a|\varepsilon$, т.е. для следующих значений ρ из интервала $(0, \pi)$: $2\rho < \varepsilon|a|$, $(\pi - \rho)^3 < 2\varepsilon|a|$.

Таким образом, интервал значений угла нутации ρ , где существуют резонансные вращения 2:1, описывается формулой:

$$\rho_1 < \rho < \pi - \rho_2, \text{ где } \rho_1 \sim \varepsilon, \rho_2 \sim \varepsilon^{1/3}. \quad (4.46)$$

Из формулы (4.46) следует, что нет резонансных вращений для значений ρ , близких к нулю и близких к π . При этом, поскольку $\rho_2 \gg \rho_1$, то примыкающий к π интервал $(\pi - \rho_2, \pi)$, где нет резонансных вращений, имеет гораздо большие размеры, чем примыкающий к нулю интервал $(0, \rho_1)$.

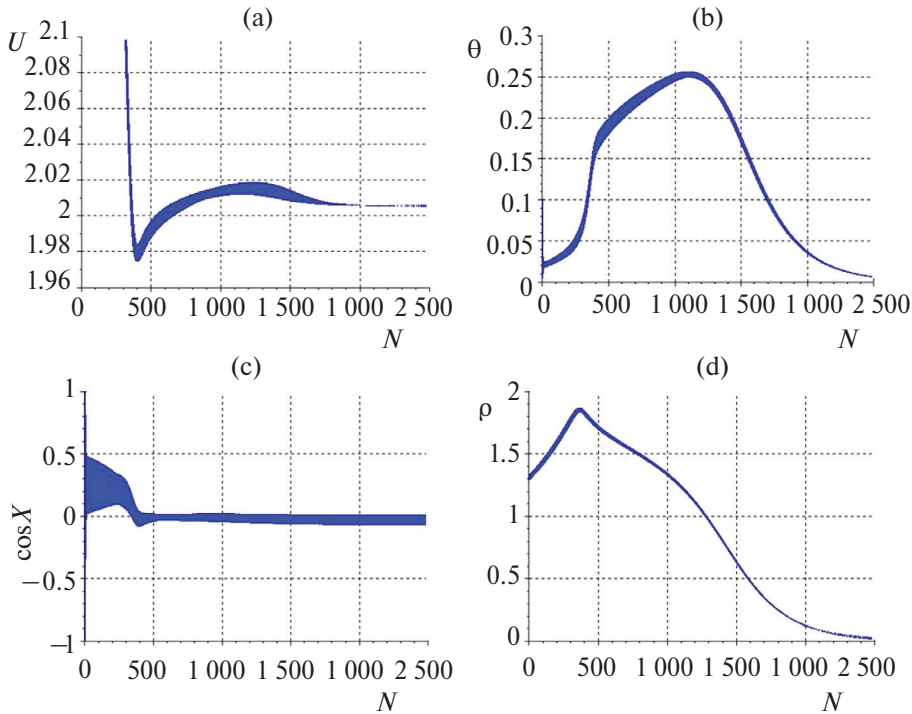


Рис. 4. Резонансные вращения 2:1.

Из формулы (4.46) следует также, что с уменьшением параметра ε диапазон значений ρ , где существуют резонансные вращения 2:1, увеличивается.

На рис. 4 приведены построенные по результатам численного интегрирования точных уравнений (2.14), (2.15), (2.10) фазовые траектории вращательного движения спутника с демпфером в плоскости переменных U_X , U_Z для следующих значений параметров: $\mu=1$, $\gamma=1$, $\varepsilon=0.1$. Здесь U_X – проекция угловой скорости спутника на плоскость орбиты, а U_Z – проекция угловой скорости спутника на нормаль к плоскости орбиты. На рис. 3, а изображены фазовые траектории для начальных условий из области $U > 2$, а на рис. 3, б – из области $U < 2$. Стрелками показано направление эволюции.

Резонансным вращениям 2:1 на представленных рисунках соответствует дуга окружности радиуса $U \approx 2$. Как видно из этих рисунков, асимптотически устойчивые резонансные вращения 2:1 существуют в широком диапазоне значений угла нутации ρ из интервала $(0, \pi)$. Отсутствие резонансных вращений, близких к “обратным”, где значения ρ близки к π , объясняется формулой (4.46).

На рис. 4, а–д изображено поведение переменных U , ρ , θ и X на резонансных вращениях 2:1. Эти графики построены по результатам численного интегрирования точных уравнений движения спутника (3.4)–(3.11) для следующих значений параметров: $\mu=1$, $\gamma=1$, $\varepsilon=0.1$. Здесь N – число оборотов центра масс спутника вокруг притягивающего центра.

Представленные графики полностью подтверждают полученные выше аналитические выводы о поведении переменных на резонансных вращениях 2:1. Из графика на рис. 4, а следует, что после захвата в резонансное вращение (в момент захвата $N \approx 400$) величина угловой скорости спутника практически не меняется и близка к значению $U=2$, а графики углов θ и $X = \psi - 2(\tau - \sigma)$ на рис. 4, б, с полностью согласуются с формулами (4.40).

График угла нутации ρ на рис. 4, д показывает, что значение этой переменной на резонансном вращении монотонно уменьшается, т.е. движение спутника монотонно стремится к “прямому” плоскому стационарному вращению вокруг нормали к плоскости орбиты.

5. Резонансные вращения 1:1. Исследуем теперь вращения спутника, для которых выполняется резонансное соотношение (4.4). Такие вращения будем называть резонансами 1:1. Для них угловая скорость спутника с точностью до $O(\varepsilon)$ равна угловой скорости орбитального базиса. Для исследования этих резонансных вращений применим ту же самую процедуру, которая использовалась выше при анализе резонансов 2:1.

Введем новую переменную X согласно формуле

$$X = \psi - (\tau - \sigma). \quad (5.1)$$

Резонансное соотношение (4.4) будет выполняться для тех движений спутника, где среднее значение переменной X остается неизменным. При этом для резонансных вращений 1:1 будет иметь место такая синхронизация между движением центра масс и вращательным движением спутника, при которой за один оборот центра масс спутника относительно базиса $Os_1s_2s_3$ ось симметрии спутника e совершает ровно один оборот вокруг вектора угловой скорости U (см. рис. 2, 3).

Согласно (3.5) и (3.11) уравнение, описывающее поведение переменной X (5.1), записывается в виде:

$$X' = U - 1 - \operatorname{ctg} \theta (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) / U + M_2 (1 - \cos \rho) / (U \sin \rho). \quad (5.2)$$

Уравнения (3.4)–(3.11) и (5.2) заменой $\tau - \sigma = \psi - X$ приводятся к автономной системе в переменных $\rho, U, W_1, W_2, W_3, \theta, X, \psi$. В рассматриваемом случае вычисленные по формулам (3.15) проекции гравитационного момента \mathbf{m} (2.19) на оси базиса $Os_1s_2s_3$ запишутся в виде:

$$m_1 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ \sin \rho (1 + \cos \rho) \sin^2 \theta \sin 2X + \right. \\ \left. + \sin 2\theta [-2 \cos^2 \rho \cos \psi + (1 + \cos \rho)(2 - \cos \rho) \cos(\psi - 2X)] + \right. \\ \left. + \sin 2\rho \sin^2 \theta \sin 2\psi + \sin 2\theta ((1 - \cos \rho)(2 + \cos \rho) \cos(3\psi - 2X) + \right. \\ \left. + \sin^2 \theta \sin \rho (\cos \rho - 1) \sin(4\psi - 2X) + 2 \sin \rho (3 \cos^2 \theta - 1) \sin 2(\psi - X) \right\}, \quad (5.3)$$

$$m_2 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ \sin 2\rho (1 - 3 \cos^2 \theta) - \sin^2 \theta \sin \rho (1 + \cos \rho) \cos 2X + \right. \\ \left. + \sin 2\theta [-2 \cos 2\rho \sin \psi + (\cos \rho + \cos 2\rho) \sin(\psi - 2X)] + \right.$$

$$-\sin 2\rho[\sin^2 \theta \cos 2\psi + (3\cos^2 \theta - 1)\cos(2\psi - 2X)] + \\ + \sin^2 \theta \sin \rho(1 - \cos \rho)\cos(4\psi - 2X) + \sin 2\theta(\cos 2\rho - \cos \rho)\sin(3\psi - 2X)\}, \quad (5.4)$$

$$m_3 = \frac{3\varepsilon}{8} \left\{ -\sin^2 \theta(1 + \cos \rho)^2 \sin 2X - \sin 2\theta \sin 2\rho \cos \psi - \right. \\ \left. - \sin 2\theta \sin \rho(1 + \cos \rho)\cos(\psi - 2X) + 2\sin^2 \theta \sin^2 \rho \sin 2\psi + \right. \\ \left. + \sin 2\theta \sin \rho(1 - \cos \rho)\cos(3\psi - 2X) - \sin^2 \theta(1 - \cos \rho)^2 \sin(4\psi - 2X) \right\}. \quad (5.5)$$

После осреднения уравнений (3.4)–(3.9) по “быстрой” переменной ψ получим систему (4.13)–(4.15), в которой согласно (5.3)–(5.5) средние по ψ компоненты гравитационного момента будут выражаться формулами:

$$\bar{m}_1 = 3\varepsilon \sin^2 \theta \sin 2X \sin \rho(1 + \cos \rho)/8, \quad (5.6)$$

$$\bar{m}_2 = 3\varepsilon (\sin 2\rho(1 - 3\cos^2 \theta) - \sin \rho(1 + \cos \rho)\sin^2 \theta \cos 2X)/8, \quad (5.7)$$

$$\bar{m}_3 = -3\varepsilon \sin^2 \theta \sin 2X(1 + \cos \rho)^2/8. \quad (5.8)$$

Чтобы усреднить правые части уравнений (3.10) и (5.2) с точностью до $O(\varepsilon^2)$, воспользуемся формулами (4.23) и (4.24). В рассматриваемом случае на основании формул (4.17), (4.19), (5.3) и (5.4) получим:

$$\alpha_1 = 3\varepsilon \sin 2\theta (2\cos^2 \rho + 4U^2/3 + (1 + \cos \rho)(\cos \rho - 2)\cos 2X)/8,$$

$$\beta_1 = 3\varepsilon \sin 2\theta \sin 2X(1 + \cos \rho)(\cos \rho - 2)/8,$$

$$\alpha_2 = 3\varepsilon \sin 2\theta \sin 2X(\cos \rho + \cos 2\rho)/8,$$

$$\beta_2 = 3\varepsilon \sin 2\theta (2\cos 2\rho + 4U^2/3 - (\cos \rho + \cos 2\rho)\cos 2X)/8.$$

Отсюда находим

$$\alpha_2 - \beta_1 = 3\varepsilon \sin 2\theta \sin 2X(\cos \rho + 1)^2/8, \quad (5.9)$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 3\varepsilon \sin 2\theta (6\cos^2 \rho - 2 + 8U^2/3 - (1 + \cos \rho)^2 \cos 2X)/8. \quad (5.10)$$

В итоге осредненные по ψ уравнения (5.2) и (3.10) запишутся в виде:

$$X' = F_X = U - 1 + (\bar{m}_2 + \mu\gamma W_2)(1 - \cos \rho)/(U \sin \rho) + \\ + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2U} \left(\frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} (\alpha_1 + \beta_2) + \frac{\mu\gamma U(\beta_1 - \alpha_2)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \right) + O(\varepsilon^2), \quad (5.11)$$

$$\theta' = F_\theta = -\frac{3\varepsilon}{16U} \frac{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)}{U^2 + \mu^2(1 + \gamma)^2} \sin 2\theta \sin 2X(\cos \rho + 1)^2 -$$

$$-\frac{3\epsilon\mu\gamma\sin 2\theta(6\cos^2\rho-2+8U^2/3-(1+\cos\rho)^2\cos 2X)}{16(U^2+\mu^2(1+\gamma)^2)}+O(\epsilon^2). \quad (5.12)$$

В рассматриваемом случае стационарные решения (положения равновесия) осредненной системы (4.14), (4.15), (5.11), (5.12) по переменным $W_1, W_2, W_3, U, \theta, X$ при фиксированном ρ определяются решениями следующей системы уравнений:

$$W_1^* = -\frac{3\epsilon\sin^2\theta^*\sin 2X^*\sin\rho(1+\cos\rho)}{8\mu(1+\gamma)} + O(\epsilon^2), \quad (5.13)$$

$$W_2^* = -\frac{3\epsilon\sin 2\rho(1-3\cos^2\theta^*)-\sin\rho(1+\cos\rho)\sin^2\theta^*\cos 2X^*}{8\mu(1+\gamma)} + O(\epsilon^2), \quad (5.14)$$

$$W_3^* = \frac{3\epsilon\sin^2\theta^*\sin 2X^*(1+\cos\rho)^2}{8\mu(1+\gamma)} + O(\epsilon^2), \quad (5.15)$$

$$\sin^2\theta^*\sin 2X^*(1+\cos\rho)^2 = O(\epsilon), \quad (5.16)$$

$$U^* = 1 + O(\epsilon), \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \sin 2\theta^*\sin 2X^*(\cos\rho+1)^2[1+\mu^2(1+\gamma)] + \\ & + \sin 2\theta^*\mu\gamma(6\cos^2\rho-2+8/3-(1+\cos\rho)^2\cos 2X^*) = O(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Если значения угла нутации ρ удовлетворяют условию

$$(1+\cos\rho)^2 \gg \epsilon, \quad (5.19)$$

то система (5.13)–(5.18) допускает стационарные решения (положения равновесия), в которых X^* и θ^* с точностью до $O(\epsilon)$ описываются формулами:

$$\sin 2X^* = 0, \quad \theta^* = \pm\pi/2 \Rightarrow \cos 2\theta^* = -1 \quad (5.20)$$

Матрица линеаризованной системы для этих положений равновесия выражается следующей формулой:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\mu(1+\gamma) & 0 & 0 & 0 & O(\epsilon) & 0 \\ 0 & -\mu(1+\gamma) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu(1+\gamma) & 0 & \epsilon f_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\gamma & 0 & -\epsilon f_3 & 0 \\ 0 & \mu\gamma \frac{1-\cos\rho}{\sin\rho} & 0 & 1 & 0 & O(\epsilon) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon f_{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Здесь

$$\varepsilon f_3 = -\frac{\partial \bar{m}_3}{\partial X} = \frac{3\varepsilon}{4} \cos 2X^* (1 + \cos \rho)^2, \quad (5.22)$$

$$\varepsilon f_{\theta\theta} = \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = \frac{3\varepsilon\mu\gamma(6\cos^2 \rho - 2 + 8/3 - (1 + \cos \rho)^2 \cos 2X^*)}{8(1 + \mu^2(1 + \gamma)^2)}. \quad (5.23)$$

Характеристический полином матрицы (5.21), в коэффициентах которого учтены только главные члены разложения по ε , записывается в виде:

$$f(\lambda) = (\mu(1 + \gamma) + \lambda)^2 (\lambda - \varepsilon f_\theta) (\lambda^3 + \lambda^2 \mu(1 + \gamma) + \lambda \varepsilon f_3 + \mu \varepsilon f_3). \quad (5.24)$$

Отсюда на основании критерия Рауса–Гурвица заключаем, что те из стационарных решений, для которых $f_3 > 0$ и $f_\theta < 0$, асимптотически устойчивы, а решения, для которых $f_3 < 0$ либо $f_\theta > 0$, неустойчивы.

Условия $f_3 > 0, f_3 < 0$ асимптотической устойчивости найденных стационарных решений на основании формул (5.20), (5.22) и (5.23) записываются в виде:

$$\cos 2X^* = 1, \quad 5\cos^2 \rho - 2\cos \rho - 1/3 < 0. \quad (5.25)$$

Отсюда следует, что пространственные резонансные вращения спутника 1:1 асимптотически устойчивы в следующем интервале значений угла нутации ρ :

$$\frac{3 - \sqrt{24}}{15} < \cos \rho < \frac{3 + \sqrt{24}}{15} \Rightarrow \rho_1 < \rho < \rho_2; \quad \rho_1 \approx 1.0, \quad \rho_2 \approx 1.7. \quad (5.26)$$

Вне этого интервала резонансные вращения (5.20) неустойчивы.

Отметим, что согласно формулам (5.20) резонансные движения 1:1 для динамически симметричного спутника представляют собой вращения вокруг оси, лежащей в экваториальной плоскости эллипсоида инерции спутника.

Оценим интервалы значений угла нутации ρ , где существуют исследуемые резонансные вращения 1:1. Положим, что в правой части уравнения (5.16) $O(\varepsilon) = a\varepsilon$, где $a \neq 0$ – некоторая ограниченная величина. Тогда получим

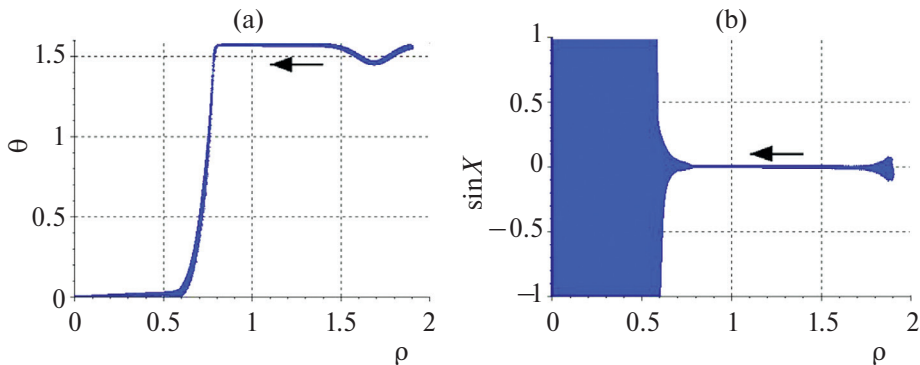


Рис. 5. Резонансные вращения 1:1.

уравнение $\sin^2\theta^* \sin 2X^*(1 + \cos \rho)^2 = a\varepsilon$. Это уравнение не имеет решений, если $(1 + \cos \rho)^2 < a\varepsilon$, т.е. для следующих значений ρ : $(\pi - \rho)^4 < 4\varepsilon|a|$. Таким образом, интервал значений угла нутации ρ , где существуют резонансные вращения 1:1 для динамически симметричного спутника, описывается формулой:

$$0 \leq \rho < \pi - \rho^*, \text{ где } \rho^* \sim \varepsilon^{1/4}. \quad (5.27)$$

Из этой формулы следует, что нет резонансных вращений для значений ρ , близких к π , т.е. для движений, близких к “обратным” вращениям спутника.

На рис. 5, а, б изображены типичные графики поведения переменных θ и $X = \psi - (\tau - \sigma)$ в зависимости от угла нутации ρ на резонансных вращениях 1:1. Эти графики построены по результатам численного интегрирования точных уравнений движения спутника (3.4)–(3.11). Здесь стрелками показано направление эволюции.

Графики полностью подтверждают полученные выше выводы о существовании асимптотически устойчивых резонансных вращений спутника 1:1 и формулы (5.20) для значений переменных θ и $X = \psi - (\tau - \sigma)$ на этих вращениях.

Из графиков видно, что правая граница интервала асимптотической устойчивости резонансных вращений 1:1 хорошо согласуется со значением $\rho_2 = 1.7$ из формулы (5.26). Вычисленная же из графиков левая граница этого интервала составляет $\rho_1 \approx 0.8$ и немного отличается от значения $\rho_1 = 1.0$ формулы (5.26). Но это небольшое различие объяснимо. Когда в процессе эволюции значение угла нутации становится меньше, чем $\rho_1 = 1.0$, стационарные решения $\theta^*(\rho)$, $X^*(\rho)$ не исчезают, а только становятся неустойчивыми, т.е. имеет место “мягкая” потеря устойчивости. В таких случаях заметный уход из окрестности неустойчивого решения наблюдается с некоторой задержкой по времени Δt , что на графиках проявляется в смещении границы ρ_1 влево на некоторую величину $\Delta \rho_1$.

Следует отметить, что в рассматриваемой задаче численным интегрированием уравнений движения спутника устойчивые резонансные вращения 1:1 можно обнаружить только соответствующим подбором начальных условий, а именно: начальное значение U должно быть близким к $U^* = 1$, а начальное значение θ – близким к $\theta^* = \pi/2$. Если же начальные условия не удовлетворяют указанным требованиям, то спутник быстро переходит в режим устойчивого нерезонансного вращения, где $\theta = O(\varepsilon)$, а этот режим является устойчивым для всех значений U из окрестности $U^* = 1$. Иначе говоря, в отличие от резонансов 2:1, резонансные вращения 1:1 для симметричного спутника изолированы от нерезонансных вращений в том смысле, что спутник, эволюционирующий в режиме нерезонансного вращения, не может перейти в режим резонансного вращения 1:1.

Заключение. В работе получены уравнения вращательного движения динамически симметричного спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите и проведено детальное исследование пространственных резонансных вращений на круговой орбите. Установлено, что для спутника, “сплюснутого” вдоль оси симметрии, на круговой орбите существуют асимптотически устойчивые пространственные резонансные вращения 2:1 и 1:1. Эти резонансные вращения обусловлены синхронизацией между вращательным движением

спутника и движением его центра масс и представляют собой эволюционирующие процессы, в которых величина угловой скорости спутника остается практически неизменной, равной угловой скорости орбитального базиса для резонанса 1:1 и удвоенной угловой скорости орбитального базиса для резонанса 2:1, а ось вращения спутника монотонно поворачивается в сторону нормали к плоскости орбиты. Определены интервалы значений угла нутации, в пределах которых существуют пространственные резонансные вращения 2:1 и 1:1, а также интервалы, в пределах которых эти резонансные вращения асимптотически устойчивы.

Аналитические выводы работы подтверждаются результатами компьютерного моделирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амелькин Н.И.* Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 204–223.
2. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Об устойчивости стационарных вращений спутника с внутренним демпфированием в центральном гравитационном поле // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 2. С. 123–136.
3. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* О стационарных вращениях спутника при наличии внутренних упругих и диссипативных сил // ПММ. 2017. Т. 81. Вып. 6. С. 628–641.
4. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Эволюция вращательного движения динамически симметричного спутника с внутренним демпфированием на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 3–15. <https://doi.org/10.1134/S0032823519010016>
5. *Амелькин Н.И., Холощак В.В.* Вращательное движение несимметричного спутника с демпфером на круговой орбите // ПММ. 2019. Т. 83. № 1. С. 16–31. <https://doi.org/10.1134/S0032823519010028>
6. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты на круговой орбите под влиянием внутренних упругих и диссипативных сил. // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 2. С. 96–111. <https://doi.org/10.31857/S0572329920020038>
7. *Амелькин Н.И.* Эволюция вращательного движения планеты Земля под влиянием внутренних диссипативных сил // Космические исследования. 2023. Т. 61. № 6. С. 486–497. <https://doi.org/10.31857/S0023420623600162>
8. *Амелькин Н.И.* О плоских резонансных вращениях спутника с шаровым демпфером на эллиптической орбите // ПММ. 2022. Т. 86. № 3. С. 313–328. <https://doi.org/10.31857/S003282352203002X>
9. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
10. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
11. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
12. *Тихонов А.Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Матем. сб. 1952. Т. 73. № 3. С. 575–586.

RESONANT ROTATIONS OF A DYNAMICALLY SYMMETRICAL SATELLITE WITH A BALL DAMPER IN A CIRCULAR ORBIT

N. A. Amel'kin^{a, *}

^aMoscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

** e-mail: namelkin@mail.ru*

Abstract – For a satellite with a ball damper, the effect of internal dissipation on rotational motion in the central gravitational field is studied. The equations of rotational motion of a dynamically symmetric satellite with a spherical damper in an elliptical orbit are obtained. For the case of a circular orbit, the spatial resonance rotations of a dynamically symmetric satellite with a ball damper were investigated using the averaging method.

Keywords: gravitational field, satellite with ball damper, averaging method, evolutionary equations, spatial resonant rotations in circular orbit

REFERENCES

1. *Amel'kin N.I.* The asymptotic properties of the motions of satellites in a central field due to internal dissipation // *J. Appl. Math. Mech.* 2011. V. 75. № 2. P. 140–153. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.05.003>
2. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Stability of the steady rotations of a satellite with internal damping in a central gravitational field // *J. Appl. Math. Mech.* 2017. V. 81. № 2. P. 85–94. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.08.002>
3. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Steady rotations of a satellite with internal elastic and dissipative forces // *J. Appl. Math. Mech.* 2017. V. 81. № 6. P. 431–441. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2018.03.011>
4. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Evolution of the rotational movement of a dynamically symmetric satellite with inner damping in a circular orbit // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 2. P. 179–189. <https://doi.org/10.3103/S0025654419030014>
5. *Amel'kin N.I., Kholoshchak V.V.* Rotational motion of a non-symmetrical satellite with a damper in a circular orbit // *Mech. Solids.* 2019. V. 54. № 2. P. 190–203. <https://doi.org/10.3103/S0025654419030026>
6. *Amel'kin N.I.* Evolution of the rotational motion of a planet in a circular orbit under the influence of internal elastic and dissipative forces // *Mech. Solids.* 2020. V. 55. № 2. P. 234–247. <https://doi.org/10.3103/S0025654420020053>
7. *Amel'kin N.I.* Evolution of rotational motion of the planet Earth under the influence of internal dissipative forces // *Cosmic Res.* 2023. V. 61. № 6. P. 510–521. <https://doi.org/10.1134/S001095252370051X>
8. *Amel'kin N.I.* On the plane resonant rotations of a satellite with a spherical damper in an elliptical orbit // *Mech. Solids.* 2022. V. 57. № 7. P. 1644–1656. <https://doi.org/10.31857/S003282352203002X>
9. *Beletskii V.V.* Motion of a Satellite with Respect to Center of Mass in Gravitational Field. Moscow: Izd. MGU, 1975 (in Russian).
10. *Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A.* Asymptotic Methods for Theory of Nonlinear Oscillations. Moscow: Nauka, 1974 (in Russian).
11. *Zhuravlev V.Ph., Klimov D.M.* Applied Methods for Oscillations Theory. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
12. *Tikhonov A.N.* Systems of differential equations containing small parameters at derivatives // *Math. collection.* 1952. V. 73. № 3. P. 575–586 (in Russian).