

УДК 539.3

ТЕНЗОРНО НЕЛИНЕЙНЫЕ ВЯЗКОУПРУГИЕ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛОВСКОГО ТИПА: ВИБРОПОЛЗУЧЕСТЬ И РЕТЧЕТТИНГ

© 2024 г. Д. В. Георгиевский^{a, b, c,*}

^aМосковский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

^bИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

^cМосковский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 18.10.2023 г.

После доработки 27.10.2023 г.

Принята к публикации 30.10.2023 г.

Некоторые эффекты напряженно-деформированного состояния, такие как виброползучесть, ускорение ползучести и ретчеттинг, наблюдаемые и изучаемые в экспериментальной механике деформируемого твердого тела, предлагается моделировать на основе определяющих соотношений, реализуемых в тензорно нелинейных вязкоупругих моделях максвелловского типа. Привлекается аппарат изотропных тензор-функций, зависящих от двух симметричных тензорных аргументов. Приводятся примеры сложного напряженного состояния в трубчатом образце, когда имеет место существенный непропорциональный рост во времени осевой компоненты деформации при совместном действии постоянной осевой и колебательной сдвиговой нагрузок по сравнению со случаем действия только осевой нагрузки. Вводятся понятия обобщенного и комбинированного ретчеттинга в условиях сложного напряженного состояния.

Ключевые слова: изотропная тензор-функция, инвариант, материальная функция, вязкоупругость, среда максвелловского типа, виброползучесть, ретчеттинг

DOI: 10.31857/S1026351924030017, EDN: UIKYFM

1. Определяющие соотношения в виде изотропных функций двух тензорных аргументов. В линейной теории вязкоупругости известны две базовые одномерные модели, состоящие из различным образом соединенных друг с другом элементарных упругого и вязкого элементов, — модели Фойгта и Максвелла. В дифференциальных определяющих соотношениях модели Фойгта напряжение является линейной комбинацией деформации, в силу структуры модели совпадающей у двух элементов, и скорости деформации. В модели Максвелла скорость деформации есть линейная комбинация напряжения, совпадающего в упругом и вязком звеньях, и скорости напряжения.

В трехмерной изотропной теории вязкоупругости [1] говорят о средах фойгтовского типа, если в их дифференциальных определяющих соотношениях тензор напряжений σ является некоторой изотропной, вообще говоря, нелинейной функцией двух тензорных аргументов — тензоров деформации ε и скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}$. Соответственно дифференциальные определяющие соотношения сред максвелловского типа связывают в виде изотропной нелинейной функции тензор скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}$ с тензорами напряжений σ и скоростей напряжений $\dot{\sigma}$. Естественно, предполагается, что в каждый момент времени тензоры σ и $\dot{\sigma}$ локально независимы.

Известно [2, 3], что в трехмерном пространстве наиболее общее представление изотропной тензор-функции двух аргументов, связывающей симметричный тензор второго ранга (в данном случае $\dot{\varepsilon}$) с двумя симметричными тензорами второго ранга (σ и $\dot{\sigma}$), следующее:

$$\dot{\varepsilon} = K_0 \mathbf{I} + K_1 \sigma + K_2 \dot{\sigma} + K_3 \sigma^2 + K_4 \dot{\sigma}^2 + K_5 (\sigma \cdot \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \cdot \sigma) + K_6 (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \cdot \sigma^2) + K_7 (\sigma \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma) + K_8 (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma^2), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор второго ранга, а девять скалярных материальных функций $K_0, \dots, K_8$ зависят от десяти функционально независимых инвариантов:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \sigma, \quad I_2 = \dot{I}_1 = \text{tr } \dot{\sigma}, \quad I_3 = \sqrt{\text{tr } \sigma^2}, \quad I_4 = \sqrt{\text{tr } \dot{\sigma}^2}, \quad I_5 = \sqrt[3]{\text{tr } \sigma^3}, \\ I_6 &= \sqrt[3]{\text{tr } \dot{\sigma}^3}, \quad I_7 = \sqrt{\text{tr } (\sigma \cdot \dot{\sigma})}, \quad I_8 = \sqrt[3]{\text{tr } (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma})}, \\ I_9 &= \sqrt[3]{\text{tr } (\sigma \cdot \dot{\sigma}^2)}, \quad I_{10} = \sqrt[4]{\text{tr } (\sigma^2 \cdot \dot{\sigma}^2)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

среди которых последние четыре совместные. Точка над тензором означает его инвариантную, или объективную, производную по времени, такую что соотношение (1.1) остается инвариантным относительно вращений. Такой производной является, например, вращательная производная Яуманна, часто используемая в гидродинамике неньютоновских жидкостей [4, 5]:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \sigma + \sigma \cdot \omega - \omega \cdot \sigma, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости, ω — тензор вихря. Однако в отличие от гидромеханических приложений будем рассматривать деформирование вязкоупругой среды, в котором скорости и все компоненты градиента скоростей настолько малы, что нелинейными слагаемыми в (1.3) можно пренебречь по сравнению с частной производной по времени.

Представления функций двух тензорных аргументов, сходные по структуре с (1.1), (1.2), неоднократно использовались в задачах и приложениях механики деформируемого твердого тела при моделировании различных проявлений тензорной нелинейности в поведении сплошных сред под нагрузкой [6–9].

Остановимся на весьма частном виде тензор-функции (1.1), позволяющем тем не менее качественно отразить некоторые эффекты

напряженно-деформированного состояния (НДС), о которых пойдет речь ниже. Пусть в (1.1)

$$K_0(I_1, I_2) = \frac{I_1}{k_{01}} + \frac{I_2}{k_{02}}, \quad K_1 \equiv \frac{1}{k_1}, \quad K_2 \equiv \frac{1}{k_2}, \quad K_7 \equiv \frac{\tau}{k_7^3}, \quad (1.4)$$

где k_{01} , k_{02} , k_1 , k_2 , k_7 и τ — постоянные коэффициенты (материальные константы), характеризующие выбранную вязкоупругую среду, причем k_{01} и k_1 имеют размерность динамической вязкости, k_{02} , k_2 и k_7 — модулей упругости, а τ — времени. Остальные помимо (1.4) материальные функции K_i в (1.1) положим тождественно нулевыми. Тогда определяющее соотношение (1.1) запишется следующим образом:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{\text{lin}}(\sigma, \dot{\sigma}) + \dot{\epsilon}_{\text{nl}}(\sigma, \dot{\sigma}), \quad (1.5)$$

$$\dot{\epsilon}_{\text{lin}} = \left(\frac{I_1}{k_{01}} + \frac{I_2}{k_{02}} \right) \mathbf{I} + \frac{\sigma}{k_1} + \frac{\dot{\sigma}}{k_2}, \quad \dot{\epsilon}_{\text{nl}} = \frac{\tau}{k_7^3} (\sigma \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma), \quad (1.6)$$

где $\dot{\epsilon}_{\text{lin}}(\sigma, \dot{\sigma})$ — физически линейный дифференциальный оператор, соответствующий трехмерной линейной модели Максвелла, а $\dot{\epsilon}_{\text{nl}}(\sigma, \dot{\sigma})$ — тензорно нелинейная составляющая скоростей деформаций, характеризующаяся модулем k_7 и временем релаксации τ . Заметим, что и оператор $\dot{\epsilon}_{\text{nl}}$ в (1.6), и вся сумма (1.5) формально тензорно линейны по первому аргументу σ при любом втором аргументе $\dot{\sigma}$.

Разлагая тензоры $\dot{\epsilon}$, σ и $\dot{\sigma}$ на девиаторные и шаровые составляющие

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3} \dot{\theta} \mathbf{I}, \quad \sigma = \mathbf{s} + \frac{1}{3} I_1 \mathbf{I}, \quad \dot{\sigma} = \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{3} I_2 \mathbf{I}, \quad (1.7)$$

соотношения (1.5), (1.6) можно представить в виде:

$$\dot{\theta} = \left(\frac{3}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} \right) I_1 + \left(\frac{3}{k_{02}} + \frac{1}{k_2} \right) I_2 + \frac{2\tau}{k_7^3} I_9^3, \quad (1.8)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\mathbf{s}}{k_1} + \frac{\dot{\mathbf{s}}}{k_2} + \frac{\tau}{k_7^3} \left(\sigma \cdot \dot{\sigma}^2 + \dot{\sigma}^2 \cdot \sigma - \frac{2}{3} I_9^3 \mathbf{I} \right), \quad (1.9)$$

$$I_9^3 = \text{tr}(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}}^2) + \frac{1}{3} I_1 \text{tr} \dot{\mathbf{s}}^2 + \frac{2}{3} I_2 \text{tr}(\mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{s}}) + \frac{1}{9} I_1 I_2^2 \quad (1.10)$$

Из (1.8) видно, что несжимаемость среды эквивалентна равенству бесконечности всех коэффициентов k_{01} , k_{02} , k_1 , k_2 и k_7 . Из-за тензорной нелинейности модели девиаторные и шаровые части скоростей деформаций одновременно зависят и от девиаторных, и от шаровых частей напряжений, а не по раздельности, как в скалярно нелинейных изотропных моделях.

2. Тензорно нелинейные (ортогональные) эффекты НДС. Возьмем длинный трубчатый образец постоянного круглого кольцевого сечения, материал которого удовлетворяет определяющим соотношениям (1.5), (1.6), и будем

производить различные выборочные процессы его нагружения во времени. Пусть в цилиндрической системе координат (r, θ, z) , связанной с осью z образца, ненулевые физические компоненты тензоров σ и $\dot{\sigma}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \sigma_0(\mathbf{x})h(t), \quad \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \\ \dot{\sigma}_{\theta z} &= \dot{\sigma}_{z\theta} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t,\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $h(t)$ – функция Хевисайда, $\sigma_0(\mathbf{x}) > 0$, $\tau_0(\mathbf{x})$ и $\tau_1(\mathbf{x})$ – не зависящие от t функции, обеспечивающие выполнение уравнений равновесия стержня и условий совместности в напряжениях. Для напряженного состояния (2.1) инварианты I_1 и I_2 , входящие в (1.6), (1.8)–(1.10), следующие:

$$I_1 = \sigma_0, \quad I_2 \equiv 0. \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в соотношения (1.5) и (1.6), выпишем ненулевые компоненты скоростей деформаций при $t > 0$:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{zz} &= \left(\frac{1}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} + \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \cos^2 \omega t \right) \sigma_0, \quad \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} = \dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\sigma_0}{k_{01}}, \\ \dot{\varepsilon}_{\theta z} &= \dot{\varepsilon}_{z\theta} = (\tau_0 + \tau_1 \sin \omega t) \left(\frac{1}{k_1} + \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \cos^2 \omega t \right).\end{aligned}\quad (2.3)$$

Наличие ненулевого коэффициента τ/k_7^3 приводит к тому, что осевая компонента $\dot{\varepsilon}_{zz}$ явно зависит от частоты ω и амплитуды τ_1 крутильных (θz) -колебаний. Относительное влияние параметров ω и τ_1 на осевую скорость деформации характеризуется безразмерным отношением:

$$\sup_t \left| \frac{\dot{\varepsilon}_{nl\,zz}}{\dot{\varepsilon}_{lin\,zz}} \right| = \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \left(\frac{1}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} \right)^{-1}. \quad (2.4)$$

Даже при малой амплитуде τ_1 крутильной (θz) -колебательной нагрузки (2.1) ($\tau_1 \ll \sigma_0$) отношение (2.4) может достичь конечной величины за счет высокой частоты вибрации ω . Показателен случай, когда линейные динамические вязкости k_{01} и k_1 равны бесконечности, т.е. $\dot{\varepsilon}_{lin\,zz} = 0$ и линейная составляющая осевой деформации образца постоянна. Тогда наличие $\dot{\varepsilon}_{nl\,zz}$ в (1.5) приводит к нарастанию осевой деформации по пульсирующему закону:

$$\varepsilon_{zz}(t) = \varepsilon_{zz}(0) + \frac{\tau}{2k_7^3} \omega \tau_1^2 \sigma_0 (2\omega t + \sin 2\omega t). \quad (2.5)$$

Заметим, что в (2.4) и в (2.5) не входит присутствующая в (2.1) функция $\tau_0(\mathbf{x})$ – среднее по периоду колебаний крутильное напряжение $\sigma_{\theta z}$. Это говорит о том, что на дополнительный, вызванный тензорной нелинейностью, рост осевой деформации не влияет, с нулевым или с ненулевым средним осуществляется вибрационный (θz) -процесс на основном фоне растяжения стержня вдоль оси z .

Аналогично (2.4) для компоненты $\dot{\varepsilon}_{\theta z}$ имеем:

$$\sup_t \left| \frac{\dot{\varepsilon}_{nl \theta z}}{\dot{\varepsilon}_{lin \theta z}} \right| = \frac{2\tau k_1}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2. \quad (2.6)$$

В экспериментальной механике деформируемого твердого тела известны близкие к описанным выше эффекты поведения материалов под нагрузкой, реализуемые в сложном напряженном состоянии и называемые ортогональными эффектами НДС [8]. Кратко перечислим некоторые из них.

1) В работе [10] в испытаниях трубчатых образцов из алюминиевых сплавов Д16Т и АД1 наблюдалось резкое возрастание скорости ползучести при добавлении к статическому напряжению вибрационного напряжения малой относительной амплитуды. Этот эффект, названный гораздо ранее виброползучестью [11], проявляется только в тех случаях, когда вид напряженного состояния при совместном действии статического и динамического напряжений отличается от вида статического напряженного состояния. В работе [10] предложена модель для описания полученных экспериментальных данных, в которой фигурирует кинетический параметр. В качестве количественной меры этого параметра используется величина угла поворота вектора максимального главного напряжения при добавлении малых вибраций к основному напряженному состоянию.

2) Известны эксперименты [12], в которых немонотонные (периодические) нагрузки приводят к так называемому ускорению ползучести. Эти эксперименты не удается объяснить главными теориями вязкоупругости, т.е. теориями, основанными на однократных интегралах. В работе [13] показывается, что ускорение ползучести с вполне допустимой точностью можно моделировать на основе нелинейных определяющих соотношений теории вязкоупругости [14], имеющих в трехмерном случае следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \int_0^t A_{ijklmn}(t, \tau) Q_{mn}(\tau, \varepsilon) \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

где Q_{mn} — mn -ая компонента тензора Q :

$$Q = \left(\mathbf{I} - \alpha \int_0^\tau \mathbf{q}(\tau, \tau_1) : \varepsilon(\tau_1) d\tau_1 \right)^{-1} \quad (2.8)$$

В (2.7) и (2.8) $A(t, \tau)$ — тензор шестого ранга внешних ядер релаксации, $q(t, \tau)$ — тензор четвертого ранга внутренних ядер релаксации, α — по модулю меньший единицы параметр, по которому можно вести разложение дроби в (2.8) в степенной ряд. Нулевое приближение этого разложения соответствует линейной теории вязкоупругости.

3) На протяжении последних трех десятилетий много работ посвящено ретчеттингу — одностороннему накоплению деформации в материале при его циклическом нагружении. В работах [9, 15] содержатся некоторые обзоры таких работ, а также предлагается вариант классификации проявлений ретчеттинга в зависимости от степени сложности всего процесса деформирования. Обращает на себя внимание то, что единое устоявшееся определение термина “ретчеттинг” пока не сложилось. Некоторые понимают его только в узком

смысле и связывают с движением (“дрейфом”) петли гистерезиса при действии циклической нагрузки в ортогональном основному процессу направлении. Другие же не привязываются к моделированию ретчеттинга исключительно с позиций теории упругопластических процессов, трактуя данное понятие значительно шире.

3. Обобщенный ретчеттинг. Реализуем теперь другое, отличающееся от (2.1), напряженное состояние в трубчатом образце:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \sigma_0(\mathbf{x})h(t), \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \\ \dot{\sigma}_{rz} &= \dot{\sigma}_{zr} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Различие состоит в том, что на фоне той же самой постоянной по времени осевой нагрузки $\sigma_0(\mathbf{x})$ происходят не (θz) -колебания, а продольные сдвиговые (rz) -колебания с некоторым средним $\tau_0(\mathbf{x})$.

Подстановка (3.1) в определяющие соотношения (1.5), (1.6) приводит к тому, что выражения для осевых компонент $\dot{\varepsilon}_{zz}$, $\dot{\varepsilon}_{\theta\theta}$ и $\dot{\varepsilon}_{rr}$ останутся такими же, как и в (2.3), среди сдвиговых отличной от нуля будет только $\dot{\varepsilon}_{rz}$, причем вид ее будет такой же, как $\dot{\varepsilon}_{\theta z}$ в (2.3). Выражения (2.4) и (2.5) со всеми выводами из них остаются в силе.

Таким образом, явление дополнительного нарастания во времени осевой деформации при действии сдвиговой колебательной нагрузки имеет место не только при классическом ретчеттинге, когда этой сдвиговой нагрузкой служат крутильные (θz) -колебания сечений, но и в случае продольных сдвиговых (rz) -вибраций цилиндрических слоев трубчатого образца. Совпадение соответствующих компонент тензоров скоростей деформаций не только качественное, но и, как было выше установлено, количественное.

Аналогичная картина наблюдается, когда в качестве основной ненулевой фоновой нагрузки выбирается внутреннее давление с компонентой напряжений σ_{rr} (а следовательно, в силу уравнений равновесия и $\sigma_{\theta\theta}$):

$$\sigma_{rr} = \sigma_0(\mathbf{x})h(t), \quad \sigma_{\theta\theta} = \tilde{\sigma}_0(\mathbf{x})h(t), \quad (3.2)$$

а в качестве ненулевой колебательной сдвиговой либо σ_{rz} :

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \quad \dot{\sigma}_{rz} = \dot{\sigma}_{zr} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t \quad (3.3)$$

либо $\sigma_{r\theta}$:

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = (\tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x})\sin\omega t)h(t), \quad \dot{\sigma}_{r\theta} = \dot{\sigma}_{\theta r} = \omega\tau_1(\mathbf{x})h(t)\cos\omega t. \quad (3.4)$$

Тогда происходит пульсирующее нарастание радиальной деформации ε_{rr} по аналогичным (2.3) и (2.5) законам:

$$\dot{\varepsilon}_{rr} = \left(\frac{1}{k_{01}} + \frac{1}{k_1} + \frac{2\tau}{k_7^3} \omega^2 \tau_1^2 \cos^2 \omega t \right) \sigma_0, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{rr}(t) = \varepsilon_{rr}(0) + \frac{\tau}{2k_7^3} \omega \tau_1^2 \sigma_0 (2\omega t + \sin 2\omega t), \quad k_{01} = k_1 = \infty. \quad (3.6)$$

Совокупность описанных тензорно нелинейных эффектов, проявляющихся при формально разной геометрии НДС, уместно назвать термином “обобщенный ретчеттинг”. Он заключается в существенном непропорциональном росте во времени компоненты $\varepsilon_{\alpha\alpha}(t)$ деформаций при совместном действии постоянной $\sigma_{\alpha\alpha}$ и колебательной сдвиговой $\sigma_{\alpha\beta}(t)$ нагрузок (даже если амплитуда колебаний мала) по сравнению со случаем действия только нагрузки $\sigma_{\alpha\alpha}$. Здесь $(\alpha\alpha)$ и $(\alpha\beta)$ — диагональная и внедиагональная физические компоненты тензоров в ортогональной криволинейной системе координат (в рассмотренном случае в цилиндрической). Данный рост $\varepsilon_{\alpha\alpha}(t)$ не зависит от среднего по периоду колебаний значения $\varepsilon_{\alpha\beta}(t)$, но зависит от амплитуды и частоты вибрации.

4. Комбинированный ретчеттинг. Пусть во взятом выше трубчатом образце реализуется сложное напряженное состояние довольно общего комбинированного вида:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha}(\mathbf{x})h(t), \quad \alpha = z, \theta, r, \\ \sigma_{\theta z} &= \sigma_{z\theta} = \sigma_{\theta z}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\sin\omega_1 t, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \sigma_{rz}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\sin\omega_2 t, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\sin\omega_3 t, \\ \dot{\sigma}_{\theta z} &= \dot{\sigma}_{z\theta} = \omega_1 \sigma_{\theta z}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\cos\omega_1 t, \quad \dot{\sigma}_{rz} = \dot{\sigma}_{zr} = \omega_2 \sigma_{rz}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\cos\omega_2 t, \\ \dot{\sigma}_{r\theta} &= \dot{\sigma}_{\theta r} = \omega_3 \sigma_{r\theta}^{(1)}(\mathbf{x})h(t)\cos\omega_3 t,\end{aligned}\tag{4.1}$$

где ω_1 , ω_2 и ω_3 — вообще говоря, не связанные друг с другом частоты вибраций сдвиговых нагрузок, а амплитуды $\sigma_{\theta z}^{(1)}$, $\sigma_{rz}^{(1)}$ и $\sigma_{r\theta}^{(1)}$ много меньше характерных значений $\sigma_{\alpha\alpha}$. Средние за период колебания сдвиговые напряжения для простоты положены нулевыми.

Вычислим на основе определяющих соотношений (1.5), (1.6) диагональные компоненты $\dot{\varepsilon}_{nl\,zz}$ и $\dot{\varepsilon}_{nl\,rr}$:

$$\dot{\varepsilon}_{nl\,zz} = \frac{2\tau}{k_7^3} \left[\sigma_{zz} \left(\omega_1^2 \sigma_{\theta z}^{(1)2} \cos^2 \omega_1 t + \omega_2^2 \sigma_{rz}^{(1)2} \cos^2 \omega_2 t \right) + \right. \\ \left. + \sigma_{\theta z}^{(1)} \sigma_{rz}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} \omega_3 \cos \omega_3 t \left(\omega_2 \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t + \omega_1 \sin \omega_2 t \cos \omega_1 t \right) \right], \tag{4.2}$$

$$\dot{\varepsilon}_{nl\,rr} = \frac{2\tau}{k_7^3} \left[\sigma_{rr} \left(\omega_2^2 \sigma_{rz}^{(1)2} \cos^2 \omega_2 t + \omega_3^2 \sigma_{r\theta}^{(1)2} \cos^2 \omega_3 t \right) + \right. \\ \left. + \sigma_{\theta z}^{(1)} \sigma_{rz}^{(1)} \sigma_{r\theta}^{(1)} \omega_1 \cos \omega_1 t \left(\omega_2 \sin \omega_3 t \cos \omega_2 t + \omega_3 \sin \omega_2 t \cos \omega_3 t \right) \right]. \tag{4.3}$$

Второе слагаемое, стоящее в квадратных скобках в (4.2), имеет более высокий порядок малости чем первое слагаемое. Такая же ситуация имеет место и в отношении равенства (4.3). Таким образом, главные части тензорно нелинейных добавок (4.2) и (4.3) к диагональным компонентам скоростей деформаций обусловлены наличием (θz) -, (rz) -сдвигов для $\dot{\varepsilon}_{zz}$ и (rz) -, $(r\theta)$ -сдвигов для $\dot{\varepsilon}_{rr}$ и зависят от них аддитивно. Назовем тензорно нелинейное НДС в трубчатом образце, описываемое соотношениями (4.1)–(4.3), комбинированным ретчеттингом.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 24-21-20008).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Лохин В.В., Седов Л.И.* Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 393–417.
3. *Spencer A.J.M.* Continuum Physics. V. 1. Part III. Theory of Invariants. N.-Y. London, 1971. P. 239–353. [Спенсер Э. Теория инвариантов. М.: Мир, 1974. 156 с.]
4. *Astarita G., Marrucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. Maidenhead, UK: McGraw-Hill Book, 1974. [Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 312 с.]
5. *Пухначев В.В.* Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51. Вып. 4. С. 116–126.
6. *Георгиевский Д.В.* О потенциальных изотропных тензор-функциях двух тензорных аргументов в МДТТ // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 220–224.
7. *Агахи К.А., Георгиевский Д.В.* Тензорно нелинейные определяющие соотношения изотропной теории ползучести с тензорной мерой поврежденности // Изв. Тульского ГУ. Сер. Естественные науки. 2013. № 2 (2). С. 10–16.
8. *Георгиевский Д.В.* Нелинейные тензор-функции двух аргументов и некоторые “ортогональные эффекты” напряженно-деформированного состояния // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 5. С. 21–26. <https://doi.org/10.31857/S0572329920040042>
9. *Васин Р.А., Георгиевский Д.В., Чистяков П.В.* Тенденции и возможные подходы к математическому моделированию ретчеттинга // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2021. С. 38–47.
10. *Локощенко А.М.* Виброползучесть металлов при одноосном и сложном напряженных состояниях // Изв. РАН. МТТ. 2014. № 4. С. 111–120.
11. *Локощенко А.М., Шестериков С.А.* О виброползучести // Инженер. журн. Механика твердого тела. 1966. № 3. С. 141–143.
12. *Самарин А.П.* Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Изд-во Куйбышевского ун-та, 1979. 84 с.
13. *Анисимов А.Б.* Об эффекте “ускорения ползучести” в теории вязкоупругости // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2007. № 1. С. 57–61.
14. *Победря Б.Е.* Математическая теория нелинейной вязкоупругости // Упругость и неупругость. Вып. 3. М.: Изд-во МГУ, 1973. С. 18–29.
15. *Васин Р.А., Быля О.И., Чистяков П.В.* О некоторых тенденциях в исследовании ретчеттинга // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2021. № 2. С. 57–60.

TENSOR NONLINEAR VISCOELASTIC MODELS BY MAXWELL-TYPE: VIBROCREEP AND RATCHETING

D. V. Georgievskii^{a, b, c,*}

^a*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

^c*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Some effects of the stress-strain state, such as vibrocreep, creep acceleration and ratcheting, observed and studied in experimental mechanics of a deformable solid, are proposed to be modeled on the basis of constitutive relations implemented in tensor nonlinear viscoelastic Maxwell-type models. The apparatus of isotropic tensor functions depending on two symmetric tensor arguments is involved. Examples of a complex stress state in a tubular specimen are given, when there is a significant disproportionate increase in time of the axial component of strain under the combined action of constant axial and vibrational shear loads compared with the case of the action of only axial load. The concepts of generalized and combined ratcheting are introduced in conditions of a complex stress state.

Keywords: isotropic tensor function, invariant, material function, viscoelasticity, Maxwellian-type medium, vibration creep, ratcheting

REFERENCES

1. *Ilyushin A.A., Pobedria B.E.* Foundations of mathematical theory of thermoviscoelasticity. Moscow: Nauka, 1970. (In Russian)
2. *Lokhim V.V., Sedov L.I.* Nonlinear tensor functions of several tensor variables // Journal of Applied Math. and Mech. 1963. V. 27. № 3. P. 597–629.
3. *Spencer A.J.M.* Continuum Physics. V. 1. Part III. Theory of Invariants. N.-Y. London, 1971. P. 239–353.
4. *Astarita G., Marrucci G.* Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics. Maidenhead, UK: McGraw-Hill Book, 1974.
5. *Pukhnachev V.V.* Mathematical model of an incompressible viscoelastic Maxwell medium // Journal of Applied Mech. And Technical Phys. 2010. V. 51. № 4. P. 546–554.
6. *Georgievskii D.V.* On potential isotropic tensor functions of two tensor arguments in mechanics of solids // Mechanics of Solids. 2010. V. 45. № 3. P. 493–496.
7. *Agakhi K.A., Georgievskii D.V.* Tensor nonlinear constitutive relations of the isotropic theory of creep with tensor measure of damage // Proc. Tula State Univ. Ser. Natural sciences. 2013. № 2 (2). P. 10–16. (In Russian)
8. *Georgievskii D.V.* Nonlinear tensor functions of two arguments and some “orthogonal effects” of the stress-strain state // Mechanics of Solids. 2020. V. 55. № 5. P. 619–623.
9. *Vasin R.A., Georgievskii D.V., Chistyakov P.V.* Trends and possible approaches to mathematical modeling of ratcheting // Elasticity and unelasticity. Moscow: Moscow State Univ. Press, 2021. P. 38–47. (In Russian)
10. *Lokoshchenko A.M.* Vibrocreep of metals in uniaxial and complex stress states // Mechanics of Solids. 2014. V. 49. № 4. P. 453–460.
11. *Lokoshchenko A.M., Shesterilov S.A.* On vibrocreep // Engineering J. 1966. № 3. P. 141–143. (In Russian)
12. *Samarin A.P.* Equations of state of materials with complex rheological properties. Kuybyshev: Kuybyshev Univ. Press, 1979. (In Russian)
13. *Anisimov A.B.* The effect of “creep acceleration” in the theory of viscoelasticity // Moscow Univ. Mechanics Bull. 2007. V. 62. № 1. P. 21–24.
14. *Pobedria B.E.* Mathematical theory of nonlinear viscoelasticity // Elasticity and unelasticity. Moscow: Moscow State Univ. Press, 1973. V. 3. P. 95–173. (In Russian)
15. *Vasin R.A., Bylya O.I., Chistyakov P.V.* Some trends in ratcheting research // Moscow Univ. Mechanics Bull. 2021. V. 76. № 2. P. 61–4.