

УДК 539.3

РАСЧЕТ ИЗНОСА МАНЖЕТНОГО УПЛОТНЕНИЯ ВАЛА ПРИ СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ТЕМПЕРАТУРЕ И НАГРУЗКЕ

© 2024 г. И. А. Солдатенков^а, *

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: iasoldat@hotmail.com

Поступила в редакцию 01.08.2023 г.

После доработки 09.10.2023 г.

Принята к публикации 10.10.2023 г.

Описывается стохастическая модель процесса изнашивания манжетного уплотнения вала, учитывающая случайные изменения температуры и внешней нагрузки. Приводятся результаты расчета процесса изнашивания уплотнения применительно к условиям работы в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях. Оценивается важность учета случайных изменений температуры и внешней нагрузки для прогнозирования долговечности уплотнения.

Ключевые слова: контактная задача, трение, износ, упругий слой, манжетное уплотнение, температура, нагрузка

DOI: 10.31857/S1026351924020089, EDN: uwamiz

1. Введение. Расчет уплотнений вала на износ является предметом ряда работ, в которых учитывались различные факторы процесса изнашивания: смазка, поверхностная шероховатость и текстура, давление рабочей среды и др. [1–5].

Ниже описывается метод расчета процесса изнашивания манжетного (сальникового) уплотнения вала в условиях случайно изменяющихся температуры и внешней нагрузки (величина, направление). Подобные условия характерны, например, для узлов трения, работающих в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях [6–9]. Изменение температуры узла трения в этом случае обусловлено его заходом в тень Земли или станции и по разным оценкам лежит в диапазоне от -150 до $+150^{\circ}\text{C}$. Для таких узлов трения также следует ожидать значительного разброса величины и направления внешней нагрузки, что обуславливается отсутствием постоянной силы тяжести как основного фактора нагружения.

Отметим, что применительно к условиям работы на орбитальных станциях ранее был выполнен расчет изнашивания радиального подшипника скольжения, который учитывал изменения температуры и внешней нагрузки [10, 11].

Цель описываемых ниже исследований состоит в учете и оценке значимости факторов случайного изменения температуры и внешней нагрузки

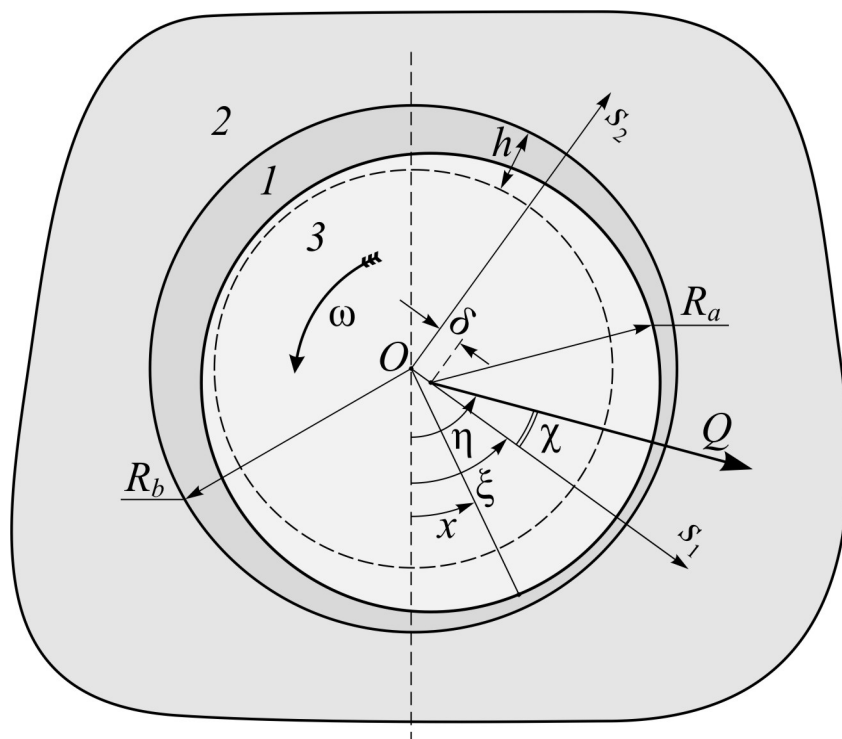


Рис. 1. Схема подвижного контакта уплотнения 1, связанного с обоймой 2, и вала 3.

при моделировании процесса изнашивания манжетного уплотнения вала и прогнозирования его долговечности.

2. Постановка задачи. Рассмотрим узел трения, состоящий из манжетного уплотнения 1 в виде тонкого упругого слоя толщины h , связанного с обоймой 2 (рис. 1). Уплотнение контактирует по всей своей поверхности с валом 3, который может вращаться (движение типа I, показано на рисунке) или совершать возвратно-поступательное перемещение вдоль своей оси (движение типа II). Контактное взаимодействие вала с уплотнением определяется величиной Q внешней нагрузки на вал и углом $\eta \in [-\pi, \pi]$ ее приложения, который отсчитывается от вертикали (рис. 1). Модуль упругости E уплотнения считается значительно более низким, чем модули упругости вала и обоймы, что позволяет считать вал и обойму абсолютно жесткими.

Считается, что оси вала и обоймы располагаются параллельно друг другу, поэтому характер взаимодействия вала и уплотнения не меняется вдоль оси вала, т.е. рассматривается плоская контактная задача. Точки поверхности уплотнения задаются с помощью угловой координаты x (рис. 1).

Скольжение вала по уплотнению сопровождается трением, которое подчиняется закону Кулона [12]:

$$\tau = \mu p \quad (2.1)$$

где μ — коэффициент трения скольжения, p — контактное давление, τ — касательное контактное напряжение (напряжение трения), причем эти величины принимают неотрицательные значения.

Радиусы R_a и R_b вала и обоймы связаны очевидным неравенством $R_a < R_b$ (рис. 1), поэтому зазор $d = R_b - R_a$ между валом и обоймой всегда положителен. Предполагается, что имеют место соотношения:

$$h \ll R_b, \quad d \ll R_b, \quad (2.2)$$

первое из которых отвечает условию малости толщины h уплотнения, а второе — малости зазора d .

Допускается изменение температуры T узла трения и, как следствие этого, изменение трибомеханических параметров (μ , E), а также изменение размеров уплотнения, вала и обоймы по причине их теплового расширения. Соответствующие температурные зависимости будут приведены в следующем разделе.

В результате взаимодействия с валом уплотнение изнашивается, и это приводит к изменению его толщины h во времени t и, вообще говоря, по координате x , при этом вал считается неизнашиваемым. Скорость изнашивания уплотнения в точке x в каждый момент времени t определяется величиной контактного давления p , скоростью V скольжения и температурой T узла трения согласно закону изнашивания [12–14]:

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} \equiv -\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = F(p(x,t), V, T), \quad (2.3)$$

причем $W(x,t) = h_0 - h(x,t)$ — линейный износ уплотнения, h_0 — начальная ($t = 0$) толщина уплотнения, а вид функции $F(p, V, T)$ определяется износоустойчивыми свойствами уплотнения. В частности, возможен линейный закон изнашивания:

$$-\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \alpha(T) p(x,t) V, \quad (2.4)$$

где α — коэффициент износа, величина которого зависит от температуры.

В случае движения вала типа I скорость скольжения определяется по формуле $V = \omega R_a$, в которой ω — постоянная угловая скорость вращения вала. Отметим, что при изменении температуры радиус R_a вала может меняться вследствие его теплового расширения. Однако это изменение мало по сравнению с самим радиусом R_a и не оказывает заметного влияния на скорость скольжения $V = \omega R_a$, которую, как и угловую скорость ω , можно считать постоянной. В случае движения вала типа II скорость скольжения задается постоянной величиной V_s скорости перемещения вала вдоль своей оси: $V = V_s$.

В каждый момент процесса взаимодействия вала и уплотнения величины T, η, Q могут принимать случайные значения, т.е. они являются случайными функциями времени t (процессами) [15, 16]. При дальнейших выкладках предполагается, что случайные изменения величин T, η, Q во времени t приводят к тому, что уплотнение изнашивается равномерно по всей поверхности, т.е.

$$h(x,t) = h(t), \quad x \in [-\pi, \pi]. \quad (2.5)$$

Ниже будут указаны условия выполнения равенства (2.5) в терминах средних значений.

Рассматриваемая постановка задачи предполагает контакт вала с уплотнением по всей его поверхности (полный контакт), т.е. выполнение неравенства

$$0 < p_m(t), \quad (2.6)$$

где $p_m(t) = \min_{x \in [-\pi, \pi]} p(x, t)$ – минимальное значение контактного давления.

Неравенство (2.6) будет в дальнейшем интерпретироваться как условие герметичности уплотнения.

Одной из важнейших характеристик процесса изнашивания уплотнения является его долговечность, определяемая здесь как момент времени t_* , когда впервые происходит нарушение герметичности уплотнения при некотором x , т.е. неравенства (2.6). Отметим, что аналогичным образом ранее определялась долговечность поршневого кольца [14].

Ставится задача построения стохастической модели процесса изнашивания уплотнения в рассматриваемом узле трения, учитывающей случайный характер величин T, η, Q и позволяющую рассчитывать долговечность уплотнения.

3. Основные уравнения. Для построения модели процесса изнашивания уплотнения рассмотрим вначале контактное взаимодействие вала и уплотнения при некоторых фиксированных значениях T, η, Q и заданной толщине $h(t)$.

Учитывая сделанные выше допущения относительно толщины и модуля упругости уплотнения, воспользуемся для описания его упругого поведения уточненной моделью Винклера. В случае движения вала типа I, когда напряжение трения лежит в плоскости задачи (рис. 1), эта модель при учете условия (2.5) представляется соотношением [17]:

$$Bhp(x) = -v(x) - Cv'(x), \quad (3.1)$$

в котором v – радиальное перемещение поверхности уплотнения, v' – производная этого перемещения по x , B – коэффициент податливости уплотнения,

$$B = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{(1 - \nu)E}, \quad C = \mu \frac{\kappa - 2}{\kappa - 1} \frac{h}{R_b}, \quad (3.2)$$

E и ν – модуль упругости (Юнга) и коэффициент Пуассона, $\kappa = 3 - 4\nu$, причем для сокращения выкладок аргументы t и T , указывающие на зависимость величин от времени и температуры, здесь опускаются. Отметим, что соотношение (3.1) предполагает, что вращение вала происходит против часовой стрелки, как показано на рис. 1.

В случае движения вала типа II напряжение трения направлено перпендикулярно плоскости задачи (рис. 1) и оно не влияет на контактное давление [13, 14]. В этом случае справедлива традиционная модель Винклера [17, 18]:

$$Bhp(x) = -v(x). \quad (3.3)$$

Если связать перемещение v с параметрами геометрии контакта в рассматриваемом узле трения (рис. 1), то соотношениям (3.1) и (3.3) несложно придать следующий вид:

$$Bhp(x) = h - d + [\cos(x - \xi) - C \sin(x - \xi)]\delta - \text{движение I}$$

$$Bhp(x) = h - d + \cos(x - \xi) \cdot \delta - \text{движение II} \quad (3.4)$$

где ξ — угол, определяющий направление смещения центра вала относительно центра обоймы, $0 \leq \delta$ — величина этого смещения, причем в силу геометрических ограничений: $\delta < d$ (рис. 1).

Величина смещения δ и его направление связаны с величиной нагрузки Q на вал и ее направлением. Эту связь можно установить на основе условия равновесия вала. Для этого введем в рассмотрение декартову систему координат Os_1s_2 , начало которой свяжем с центром обоймы, ось s_1 расположим по направлению смещения δ , а ось s_2 — перпендикулярно этому направлению (рис. 1). Путем интегрирования по угловой координате x , выполним суммирование проекций на оси системы координат Os_1s_2 напряжения трения τ и контактного давления p , определяемых согласно равенствам (2.1), (3.4). Полученные таким образом величины приравняем к проекциям Q_1 и Q_2 нагрузки Q на соответствующие оси системы координат Os_1s_2 . В результате получим для рассматриваемых типов движения вала:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\pi R_b}{Bh}(\mu - C)\delta, & Q_2 &= \frac{\pi R_b}{Bh}(1 + \mu C)\delta & - \text{движение I,} \\ Q_1 &= 0, & Q_2 &= \frac{\pi R_b}{Bh}\delta & - \text{движение II.} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из равенств (3.5) несложно получить искомую связь величин δ и Q :

$$Q = \sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = \delta \begin{cases} m\sqrt{1 + C^2}D^{-1} & - \text{движение I} \\ D^{-1} & - \text{движение II} \end{cases} \quad (3.6)$$

где

$$D = \frac{Bh}{\pi R_b}, \quad m = \sqrt{1 + \mu^2}. \quad (3.7)$$

Равенства (3.5) позволяют также получить выражение для угла χ между направлениями нагрузки Q и смещения δ (рис. 1):

$$\chi = \arctg \frac{Q_1}{Q_2} = \begin{cases} \arctg \frac{\mu - C}{1 + \mu C} & - \text{движение I} \\ 0 & - \text{движение II} \end{cases} \quad (3.8)$$

при этом, в силу определения (3.2) коэффициента C и первого условия (2.2), $\chi \in [0, \pi/2)$.

Углы ξ и η , задающие направления смещения δ и нагрузки Q , связаны равенством (рис. 1)

$$\xi = \eta - \chi, \quad (3.9)$$

Замечание 1. Согласно равенствам (3.8) и (3.9), при отсутствии трения в плоскости задачи (движение вала типа II) углы ξ и η совпадают. Аналогичное совпадение имеет место в задаче расчет износа радиального подшипника скольжения при отсутствии трения [11].

Подстановка выражения (3.6) в соотношения (3.4) после элементарных тригонометрических преобразований позволяет записать следующие выражения для контактного давления:

$$p(x, t) = \mathcal{P}_\gamma(x, t; T, \eta, Q), \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (3.10)$$

где

$$\mathcal{P}_A(x, t; T, \eta, Q) = \frac{1}{B(t)h(t)} \left[h(t) - d(T) + \cos(x - \xi + \varphi_c(t, T)) \cdot \frac{D(t, T)}{m(T)} Q \right]$$

$$\mathcal{P}_B(x, t; T, \eta, Q) = \frac{1}{B(t)h(t)} [h(t) - d(T) + \cos(x - \xi) \cdot D(t, T) Q]. \quad (3.11)$$

Здесь и далее предполагается, что $\gamma = A, B$, причем индекс A (B) отвечает движению вала типа I (II), угол ξ находится по формулам (3.8), (3.9):

$$d(T) = R_b(T) - R_a(T), \quad \varphi_c(t, T) = \arcsin \frac{C(t, T)}{\sqrt{1 + C^2(t, T)}}.$$

В выражениях (3.11) указаны зависимости используемых величин от времени t и температуры T , существующие в силу данных выше определений этих величин. Отметим, что здесь не учитывается изменение толщины h уплотнения в результате его теплового расширения, что допустимо для тонкого уплотнения – соответствующее обоснование представлено в работе [11].

Располагая выражениями (3.10), (3.11), для контактного давления, можно установить, что для выполнения условия герметичности (2.6) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$d(T) + \Lambda_\gamma(T) D(t, T) Q < h(t), \quad (3.12)$$

в котором $\Lambda_A = m^{-1}(T)$, $\Lambda_B = 1$.

Примем теперь во внимание случайный характер величин T, η, Q во времени и введем в рассмотрение соответствующую функцию плотности вероятности $\rho(T, \eta, Q, t)$ [15]. В дальнейшем для более компактной записи формул будут использоваться обозначения:

$$X_1 = T, \quad X_2 = \eta, \quad X_3 = Q. \quad (3.13)$$

Диапазоны изменения случайных процессов $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ определим следующим образом [11]:

$$X_1(t) \in [T^-, T^+], \quad X_2(t) \in [-\pi, \pi], \quad X_3(t) \in [0, Q_M], \quad (3.14)$$

причем $Q_M = 0$ при отсутствии нагрузки на вал. Отметим, что функция плотности вероятности $\rho(X, t)$ удовлетворяет условию нормировки [15]:

$$\int_{\{X\}} \rho(X, t) dX = 1. \quad (3.15)$$

Символом X для краткости обозначается совокупность величин X_1, X_2, X_3 , запись $\{X\}$ обозначается множество допустимых значений этих величин, определяемое диапазонами (3.14), $dX = dX_1 dX_2 dX_3$.

Для описания рассматриваемого процесса изнашивания уплотнения воспользуемся известным подходом, основанным на статистическом осреднении закона изнашивания (2.3) по параметрам T, ξ, Q [14]. Результатом такой операции при учете условия (2.5) является равенство:

$$\dot{h}(t) = - \int_{\{X\}} F(\mathcal{P}_\gamma(x, t; X), V, X_1) \rho(X, t) dX, \quad (3.16)$$

в котором $\dot{h}(t)$ – производная по времени. Здесь и далее h уже представляет собой среднее статистическое значение толщины уплотнения.

Указанная выше функция $\mathcal{P}_\gamma(x, t; X)$ определяется выражениями (3.10), (3.11) с учетом обозначений (3.13), поэтому равенство (3.16) представляет собой дифференциальное уравнение, которое при начальном условии $h(0) = h_0$ описывает кинетику изменения толщины изнашиваемого уплотнения в терминах средних значений. Равенства (3.10), (3.11) и уравнение (3.16) составляют стохастическую модель процесса изнашивания уплотнения и тем самым решают поставленную выше задачу.

Левая часть уравнения (3.16) в силу условия (2.5) не зависит не зависит от координаты x . Из физических соображений можно предположить, что правая часть (3.16) также не зависит от x , если направление $\eta = X_2$ внешней нагрузки на вал является равновероятным и статистически независимым от температуры $T = X_1$ и нагрузки $Q = X_3$, т.е.

$$\rho(X, t) = \frac{1}{2\pi} \rho_{13}(X_1, X_3, t). \quad (3.17)$$

В этом случае можно предположить, что скорость изнашивания $F(\mathcal{P}_\gamma(x, t; X), V, X_1)$, будучи функцией координаты x , равномерно усредняется по $X_2 \in [-\pi, \pi]$ и это приводит к независимости правой части равенства (3.16) от x . Справедливость этого предположения проверяется подстановкой выражения в уравнение (3.16) и взятием интеграла по аргументу X_2 с учетом равенства (3.9) и выражений (3.17), (3.11) для контактного давления.

Замечание 2. Допущение (3.17), обеспечивающее выполнение условия (2.5), представляется физически приемлемым для узла трения, работающего на околоземной орбитальной станции, где отсутствует сила тяжести и поэтому направления внешней нагрузки на вал можно считать равновероятными. Наличие равенства (2.5) существенно упрощает расчет процесса изнашивания уплотнения, однако это равенство не является принципиально необходимым. Действительно, если допустить зависимость толщины h уплотнения от угловой координаты x , то вместо деформационной модели (3.1) можно воспользоваться более общей моделью [17]:

$$Bhp(x) = -v(x) - \frac{\mu(\kappa - 2)}{(\kappa - 1)R_b} h(x)v'(x) - \frac{\mu\kappa}{(\kappa - 1)R_b} h'(x)v(x),$$

включающую производную h' толщины по координате. В этом случае уравнение (3.16), наряду с производной $\partial h(x, t) / \partial t$ в левой части, будет содержать производную $\partial h(x, t) / \partial x$ в правой части. Подобные износосеконтактные задачи рассматривались ранее [17].

Принимая во внимание обозначения (3.13) случайных величин X_1, X_2, X_3 и диапазоны (3.14) их изменения, можно на основе неравенства (3.12) прийти к следующему условию герметичности уплотнения:

$$H_\gamma \equiv \max_{X_1 \in [T^-, T^+]} \left| \frac{d(X_1)}{1 - \Omega_\gamma(X_1)Q_M} \right| < h(t), \quad \Omega_\gamma(X_1) \equiv \frac{B(X_1)\Lambda_\gamma(X_1)}{\pi R_b(X_1)}. \quad (3.18)$$

Постановка рассматриваемой задачи предполагает выполнение условия герметичности (3.18) в начальный момент времени, т.е. выполнение неравенства $H_\gamma < h_0$.

Отметим, что для выполнения условия (3.18) необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\Omega_\gamma(X_1)Q_M < 1$, $X_1 \in [T^-, T^+]$, обеспечивающее положительность знаменателя в левой части этого условия. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\max_{X_1 \in [T^-, T^+]} \Omega_\gamma(X_1) < \frac{1}{Q_M}, \quad (3.19)$$

которое налагает ограничение на максимально возможное значение величины Q_M , определяющей верхнюю границу диапазона изменения нагрузки Q в силу соотношения (3.14).

В предыдущем разделе была определена долговечность уплотнения, как момент t_* нарушения условия герметичности (2.6), равносильного условию (3.18). Согласно данным выше определениям: $\Lambda_A = m^{-1}$, $\Lambda_B = 1$, $m = \sqrt{1 + \mu^2} \geq 1$, поэтому в условии (3.18): $\Omega_A(X_1) \leq \Omega_B(X_1)$. Это означает, что при заданной толщине $h(t)$ уплотнения условие (3.18) его герметичности нарушается для движения вала типа II ($\gamma = B$) раньше, чем для движения типа I ($\gamma = A$). Соответствующим образом соотносятся долговечности t_{*A} и t_{*B} уплотнения для движений I и II:

$$t_{*B} \leq t_{*A}. \quad (3.20)$$

Таким образом, движение вала типа II представляется более опасным, чем движение типа I.

Замечание 3. При моделировании процесса изнашивания упругого покрытия в радиальном подшипнике скольжения в качестве долговечности покрытия используется время его полного изнашивания, когда $h = 0$ [11]. Однако к рассматриваемой задаче изнашивания уплотнения подобное определение долговечности неприменимо, т.к. нарушение герметичности уплотнения происходит до его полного изнашивания — это следует из неравенства (3.18), левая часть которого положительна.

Замечание 4. Можно рассмотреть комбинированный тип движения вала, при котором имеет место частое чередование движений I и II. В этом случае уравнение (3.16) кинетики изнашивания уплотнения принимает вид:

$$\dot{h}(t) = - \int_{\{X\}} [q_A F(\mathcal{P}_A(x, t; X), V, X_1) + q_B F(\mathcal{P}_B(x, t; X), V, X_1)] \rho(X, t) dX, \quad (3.21)$$

где q_A и q_B — доли общего времени работы уплотнения, приходящиеся на движения I и II, причем $q_A + q_B = 1$. Согласно выкладкам, предшествующим неравенству (3.20), при комбинированном типе движения вала долговечность уплотнения определяется условием герметичности (3.18) для движения типа II ($\gamma = B$), т.к. герметичность уплотнения нарушается прежде всего именно при таком типе движения.

4. Аналитические решения (линейный закон изнашивания). Рассмотрим процесс изнашивания уплотнения при линейном законе изнашивания, т.е. при

$$F(p, V, T) = \alpha(T) pV. \quad (4.1)$$

Случайные процессы $X_1(t)$, $X_3(t)$ будем считать стационарными и независимыми, в силу чего функция $\rho_{13}(X_1, X_3, t)$ в выражении (3.17) имеет вид [15, 16]:

$$\rho_{13}(X_1, X_3, t) = \rho_1(X_1) \rho_3(X_3), \quad (4.2)$$

причем функции плотности вероятности $\rho_1(X_1)$, $\rho_3(X_3)$ случайных процессов $X_1(t)$, $X_3(t)$ удовлетворяют условию нормировки (3.15).

При таких допущениях подставим выражения (3.10), (3.11) для контактного давления в уравнение (3.16) кинетики изнашивания уплотнения и выполним в нем интегрирование по аргумента X_2 и X_3 , принимая во внимание выражения (3.17), (4.2) для функции плотности вероятности $\rho(X, t)$ и условие нормировки (3.15) для функции $\rho_3(X_3)$. В результате уравнение (3.16) для обоих типов движения вала (I и II) примет вид равенства:

$$-\dot{h}(t) = a - \frac{b}{h(t)}, \quad (4.3)$$

в котором

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = V \int_{\{X_1\}} \frac{\alpha(X_1)}{B(X_1)} \begin{Bmatrix} 1 \\ d(X_1) \end{Bmatrix} \rho_1(X_1) dX_1 \quad (4.4)$$

и которое не зависит от внешней нагрузки Q .

Решение дифференциального уравнения (4.3) при начальном условии $h(0) = h_0$ задается неявно как решение алгебраического уравнения:

$$h(t) - h_0 + d_{av} \ln \left(\frac{h(t) - d_{av}}{h_0 - d_{av}} \right) = -at, \quad (4.5)$$

где

$$d_{av} \equiv \frac{b}{a} = d(X_{1av}), \quad X_{1av} \in [T^-, T^+], \quad (4.6)$$

причем последнее равенство получается, если применить ко второму интегралу (4.4) теорему о среднем [19]. Отметим, что при выполнении условия герметичности (3.8) имеет место неравенство: $d(X_1) < h(t)$, $X_1 \in [T^-, T^+]$, поэтому, учитывая соотношения (4.6), можно заключить, что в равенстве (4.5): $0 < h(t) - d_{av}$, $0 < h_0 - d_{av}$.

Для каждого значения $h(t)$ толщины уплотнения, найденного из равенства (4.5) при увеличении времени t , необходимо выполнить проверку условия метичности (3.18) уплотнения. В отличие от уравнения (4.3) кинетики изнашивания и его решения (4.5), это условие зависит от максимального значения Q_M внешней нагрузки и различается для движений вала типа I ($\gamma = A$) и II ($\gamma = B$). Согласно данному в разделе 1 определению, по нарушению условия (3.18) находятся долговечности t_{*A} и t_{*B} для движений I и II. Результаты соответствующих расчетов будут представлены в следующем разделе.

Пример 1. Рассмотрим частный случай постоянной температуры узла трения. Это означает, что величина X_1 не является случайной и принимает некоторое постоянное значение T , поэтому формально можно положить:

$$\rho_1(X_1) = \delta(X_1 - T), \quad (4.7)$$

где $\delta(X)$ — дельта-функция.

Если подставить выражение (4.7) в равенства (4.4) и учесть определение (4.6), то можно получить следующие выражения для коэффициентов a, b, d_{av} в рассматриваемом случае:

$$a = \frac{\alpha V}{B}, \quad b = \frac{\alpha V}{B} d, \quad d_{av} = d, \quad (4.8)$$

причем здесь и далее $\alpha = \alpha(T)$, $B = B(T)$, $d = d(T)$.

При постоянной температуре $X_1 = T$ условие герметичности (3.18) имеет вид:

$$\frac{d}{1 - \Omega_\gamma Q_M} < h(t), \quad (4.9)$$

Согласно равенству (4.5), толщина h уплотнения монотонно убывает со временем t . При достижении толщиной h значения

$$h_\gamma = \frac{d}{1 - \Omega_\gamma Q_M}$$

происходит нарушение неравенства (4.9) как условия герметичности уплотнения. Соответствующий момент времени $t_{*\gamma}$, задающий долговечность уплотнения, находится непосредственно из равенства (4.5) при $h = h_\gamma$, $d_{av} = d$:

$$t_{*\gamma} = \frac{1}{a} \left[h_0 - h_\gamma - d \ln \left(\frac{h_\gamma - d}{h_0 - d} \right) \right]. \quad (4.10)$$

Отметим, что, используя формулу (4.10), можно подтвердить полученное выше неравенство (3.20): $t_{*B} \leq t_{*A}$. В следующем разделе будут представлены некоторые результаты по оценке долговечности уплотнения на основе этой формулы.

Пример 2. Рассмотрим детерминированную постановку задачи, допустив в рассмотренном выше примере отсутствие внешней нагрузки Q на вал, т.е. положив $Q_M = 0$. В этом случае остаются прежними уравнение (4.3) кинетики изнашивания уплотнения и его решение (4.5) при наличии выражений (4.8). Однако условие (4.9) герметичности уплотнения принимает более простой вид, одинаковый для обоих типов (I и II) движения вала:

$$d < h(t). \quad (4.11)$$

Несложный анализ равенства (4.5) при $d_{av} = d$ показывает, что функция $h(t)$ является монотонно убывающей и обладает следующим асимптотическим свойством: $h(t) \rightarrow d + 0$, $t \rightarrow \infty$. Это означает, что условие герметичности (4.11) выполняется при любом $t \in [0, \infty)$, т.е., в отличие от стохастического случая примера 1 (формула (4.10)), здесь формально $t_{*y} = \infty$, $y = A, B$.

5. Численные результаты. Ниже описываются и анализируются некоторые результаты расчетов процесса изнашивания уплотнения, выполненных на основе полученных выше формул. Предметом анализа, в частности, является оценка важности учета случайных изменений температуры и внешней нагрузки для прогнозирования долговечности уплотнения.

При выборе параметров материала уплотнения для расчетов будем ориентироваться на использование самосмазывающихся композитов, в том числе на полимерной основе. Подобные композиты успешно используются в узлах трения, работающих в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях в условиях вакуума и при значительных перепадах температуры [6–9].

Как показывают эксперименты [20–22], для полимерных композитов характерно существенное снижение модуля упругости с ростом температуры, которое может достигать нескольких порядков. По этой причине для расчетов воспользуемся экспоненциальной зависимостью [21]

$$E(T) = E_0 \exp(k_E \theta), \quad E_0 = E(T_0) \quad (5.1)$$

с отрицательным параметром k_E . Здесь и далее $\theta = T - T_0$ – температура, отсчитываемая от нормальной температуры T_0 . Подстановка выражения (5.1) в равенство (3.2) определяет температурную зависимость $B(T)$ коэффициента податливости уплотнения, при этом без ограничения общности рассмотрения можно считать коэффициент Пуассона независимым от температуры.

Результаты трибологических испытаний свидетельствуют о том, что с ростом температуры скорость W износа полимерных композитов может претерпевать значительные изменения, достигающие нескольких порядков [21–25]. В отличие от температурной зависимости (5.1) модуля упругости, зависимость скорости износа от температуры может быть как возрастающей, так и убывающей. С учетом указанных обстоятельств, имея в виду линейный закон изнашивания (2.4), примем экспоненциальную зависимость коэффициента износа от температуры:

$$\alpha(T) = \alpha_0 \exp(n_\alpha \theta), \quad \alpha_0 = \alpha(T_0), \quad (5.2)$$

в которой параметр n_α может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

Согласно экспериментальным данным [21, 23–25], коэффициент трения μ с ростом температуры может как увеличиваться, так и уменьшаться в несколько раз. Это дает основание использовать для расчетов линейную зависимость

$$\mu(T) = \mu_0(1 + n_\mu \theta), \quad \mu_0 = \mu(T_0), \quad (5.3)$$

при этом допускаются как отрицательные, так и положительные значения параметра n_μ .

При увеличении температуры происходит тепловое расширение вала и обоймы, учитываемое в выражениях (3.11) для контактного давления. В рассматриваемом случае тонкого и мягкого уплотнения можно пренебречь его влиянием на расширение обоймы, полагая [10, 26]:

$$R_i(T) = R_{i0}(1 + k_i \theta), \quad R_{i0} = R_i(T_0), \quad i = a, b, \quad (5.4)$$

где k_a и k_b – коэффициенты линейного теплового расширения вала и обоймы.

В силу равенств (3.17) и (4.2), функция плотности вероятности случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$, $X_3(t)$ имеет вид: $\rho(X, t) = (2\pi)^{-1} \rho_1(X_1) \rho_3(X_3)$. Функция плотности вероятности $\rho_3(X_3)$ случайного процесса $X_3(t) \in [0, Q_M]$, согласно выкладкам предыдущего раздела, может иметь произвольный вид. В отношении функции $\rho_1(X_1)$ будем считать, что

$$\rho_1(X_1) = \rho_{10} + \rho_{11} \cos\left(\pi \frac{X_1 - T_0}{\theta_M}\right), \quad (5.5)$$

где $\theta_M = (T^+ - T_0)/2$, $\rho_{10} = (T^+ - T^-)^{-1} > 0$, ρ_{11} – произвольный параметр, удовлетворяющий неравенству $|\rho_{11}| \leq \rho_{10}$, которое обеспечивает неотрицательность функции $\rho_1(X_1)$. Здесь предполагается, что T_0 представляет собой среднюю температуру, т.е. $T_0 = (T^+ + T^-)/2$. Нетрудно проверить выполнение условия нормировки (3.15) для функции (5.5). Отметим также, что функция $\rho_1(X_1)$ принимает вид равномерного распределения, если $\rho_{11} = 0$.

С учетом экспериментальных данных по полимерным композитам из упомянутых выше литературных источников для расчетов процесса изнашивания уплотнения были выбраны следующие значения трибофизических параметров: $E = 10$ МПа, $\nu = 0.3$, $k_E = -0.01$ К⁻¹, $\alpha_0 = 10^{-15}$ Па⁻¹, $\mu_0 = 0.3$, $k_a = 2 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, $k_b = 3 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹, $T_0 = 293$ К (20°С). Геометрические параметры узла трения и условия его работы определялись значениями $h_0 = 2$ мм, $R_{a0} = 10$ мм, $R_{b0} = 11$ мм, $\omega = 2\pi$ с⁻¹, $T^- = 143$ К (-130°С), $T^+ = 443$ К (170°С). Значения остальных параметров указываются ниже для каждого конкретного примера.

Отметим, что указанные значения коэффициентов линейного теплового расширения вала k_a и обоймы k_b характерны для алюминиевых и магниевых сплавов [27], а выбранный диапазон изменения температуры T соответствует условиям работы узлов трения в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях [6–9].

Расчеты процесса изнашивания уплотнения проводились при линейном законе изнашивания (2.4) на основе соответствующего решения (4.5), при этом

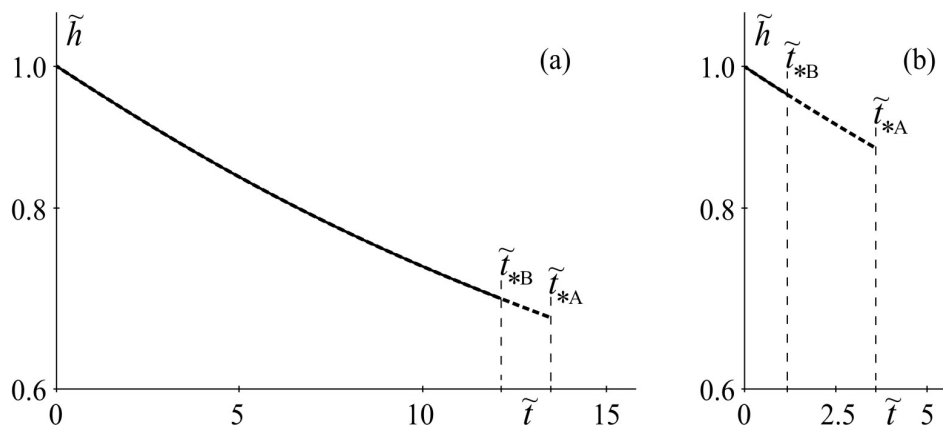


Рис. 2. Зависимость толщины h изнашиваемого уплотнения от времени t при двух значениях максимальной нагрузки Q_M , кН/м: 30 (а) и 50 (б). Пунктирной (сплошной) линией показаны зависимости для движения вала типа I (II).

скорости скольжения для движений вала типа I и II полагались одинаковыми: $V_s = \omega R_a$. Долговечности t_{*A} и t_{*B} уплотнения для движений I и II, как принято, определялись по нарушению условия (3.18). Полученные результаты расчетов представлены ниже с использованием безразмерных величин $\tilde{h} = h / h_0$ и $\tilde{t} = t / t_c$, $t_c = 10^5$ с ≈ 27.8 ч.

Рис. 2 иллюстрирует зависимость толщины h изнашиваемого уплотнения от времени t для двух значений максимальной нагрузки Q_M , кН/м: 30 (а) и 50 (б), при этом в формулах (5.2), (5.3) полагалось $n_\alpha = 0.02$, $n_\mu = 0.003$ и использовалось равномерное распределение $\rho_1(X_1)$ (выражение (5.5) при $\rho_{11} = 0$). Пунктирная и сплошная линии отвечают движениям вала типа I и II, причем до момента времени t_{*B} эти линии совпадают, т.к. используемое решение (4.5) не зависит от типа движения вала. На рис. 2 указаны значения $\tilde{t}_{*A} = t_{*A} / t_c$, $\tilde{t}_{*B} = t_{*B} / t_c$ долговечности уплотнения для каждого из этих типов движения.

Таблица 1. Значения долговечностей $\tilde{t}_{*A}$, $\tilde{t}_{*B}$ уплотнения для различных значений параметров n_μ и Q_M при равномерном распределении $\rho_1(X_1)$ и $n_\alpha = 0.02$

n_μ Q_M , кН / м	– 0.003		0		0.003	
	30	50	30	50	30	50
$\tilde{t}_{*A}$	12.37	1.57	12.84	2.41	13.50	3.58
$\tilde{t}_{*B}$	12.16	1.16	12.16	1.16	12.16	1.16

Таблица 2. Значения долговечностей $\tilde{t}_{*A}, \tilde{t}_{*B}$ уплотнения для различных значений параметра n_μ и видов распределения $\rho_1(X_1)$ (равномерное (—), неравномерное (~~)) при $Q_M = 50$ кН/м и $n_\alpha = -0.02$.

n_μ $\rho_1(X_1)$	- 0.003		0		0.003	
	—	~~	—	~~	—	~~
$\tilde{t}_{*A}$	0.218	0.668	0.334	1.03	0.495	1.52
$\tilde{t}_{*B}$	0.162	0.495	0.162	0.495	0.162	0.495

В табл. 1 представлены значения долговечностей $\tilde{t}_{*A}, \tilde{t}_{*B}$ уплотнения для различных значений параметров n_μ и Q_M , при этом функция плотности вероятности $\rho_1(X_1)$ полагается постоянной (равномерное распределение), $n_\alpha = 0.02$ (возрастающая зависимость $\alpha(T)$). При таких условиях значения долговечностей $\tilde{t}_{*A0}$ и $\tilde{t}_{*B0}$, отвечающие случаю постоянной температуры $T = T_0$ и рассчитанные по формуле (4.10), составляют 30.44 и 30.03 – для $Q_M = 30$ кН/м, 25.40 и 24.96 – для $Q_M = 50$ кН/м.

В табл. 2 представлены значения долговечностей $\tilde{t}_{*A}, \tilde{t}_{*B}$ уплотнения для различных значений параметра n_μ и двух видов распределения $\rho_1(X_1)$ – равномерного (—) и неравномерного (~~), рассчитанного по общей формуле (5.5) при $\rho_{11} = \rho_{10}$. Здесь считается, что $Q_M = 50$ кН/м, $n_\alpha = -0.02$ (убывающая зависимость $\alpha(T)$). Значения долговечностей $\tilde{t}_{*A0}$ и $\tilde{t}_{*B0}$ составляют 3.61 и 3.54 – для равномерного распределения $\rho_1(X_1)$, 11.00 и 10.81 – для неравномерного распределения $\rho_1(X_1)$.

6. Обсуждение результатов. Согласно графикам рис. 2, толщина h уплотнения со временем монотонно уменьшается, как и следовало ожидать. Увеличение максимальной нагрузки Q_M приводит к существенному увеличению предельно допустимого износа уплотнения и, соответственно, к снижению его долговечности t_* . При этом наблюдается увеличение расхождения значений долговечностей t_{*A} и t_{*B} , соответствующих движениям I и II. Рис. 2 свидетельствует также о том, что движение вала типа II является более опасным для герметичности уплотнения, чем движение типа I, подтверждая тем самым неравенство (3.20).

Приведенные в табл. 1 результаты демонстрируют возможность значительного снижения долговечности t_* уплотнения при увеличении максимальной нагрузки Q_M для обоих типов I и II движения вала, что согласуется с графиками рис. 2. В связи с этим следует отметить, что при отсутствии нагрузки на вал ($Q_M = 0$) и постоянной температуре уплотнение имеет неограниченную долговечность (Пример 2).

В случае движения вала типа I, согласно данным табл. 1 и 2, на долговечность t_* уплотнения оказывает влияние характер зависимости коэффициента трения μ от температуры T (формула (5.3.)). А именно при увеличении параметра n_μ , определяющего наклон прямой $\mu(T)$, долговечность уплотнения растет. Особенно сильно это влияние проявляется при больших значениях максимальной нагрузки Q_M (табл. 1).

Сравнение данных табл. 1 и 2 между собой позволяет заключить, что на долговечность t_* уплотнения может оказывать существенное влияние характер зависимости коэффициента износа α от температуры T (формула (5.2)). А именно переход от убывающей зависимости $\alpha(T)$ ($n_\alpha = -0.02$) к возрастающей зависимости $\alpha(T)$ ($n_\alpha = 0.02$) приводит к увеличению долговечности t_* для обоих типов I и II движения вала.

Сравнение данных табл. 1 и 2 с указанными в предыдущем разделе значениями долговечностей $\tilde{t}_{*A0}$ и $\tilde{t}_{*B0}$ уплотнения в случае постоянной температуры $T = T_0$ позволяет сделать вывод о важности учета фактора случайности величины $X_1 = T$ при оценке долговечности уплотнения. Этот вывод также подтверждают данные о влиянии вида функции плотности вероятности $\rho_1(X_1)$ на долговечность t_* , приведенные в табл. 2. Действительно, согласно этим данным, переход от равномерного распределения $\rho_1(X_1)$ к неравномерному приводит к существенному увеличению долговечности t_* для обоих типов I и II движения вала.

Отметим также, что максимальная нагрузка Q_M является параметром случайной величины $X_3 = Q$, который задает диапазон ее изменения в силу отношения (3.14). Данное обстоятельство позволяет расценивать указанное выше влияние Q_M на долговечность t_* уплотнения как дополнительное свидетельство важности учета фактора случайности величины $X_3 = Q$.

Выводы. 1. Предложена стохастическая модель процесса изнашивания тонкого уплотнения, учитывающая случайные изменения температуры и внешней нагрузки и позволяющая оценивать долговечность уплотнения по критерию его герметичности.

2. Проведены расчеты процесса изнашивания уплотнения, ориентированные на условия работы узла трения в открытом космосе на околоземных орбитальных станциях. Получены соответствующие оценки долговечности уплотнения.

3. Выявлены зависимости долговечности уплотнения от ряда параметров задачи. В частности, установлено, что увеличение максимальной нагрузки Q_M приводит к существенному снижению долговечности t_* уплотнения. Также долговечность t_* снижается, если вращение вала (движение типа I) заменяется на возвратно-поступательное перемещение (движение типа II).

4. Показана важность учета фактора случайности температуры T и внешней нагрузки Q при оценке долговечности уплотнения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-49-02010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Guo F., Jia X., Longke W., Salant R. F., Wang Y. The effect of wear on the performance of a rotary lip seal // ASME. J. Tribol. 2014. V. 136. № 4. 041703. <https://doi.org/10.1115/1.4027623>
2. Продан В.Д., Божко Г.В. Сальниковые уплотнения с мягкой набивкой: учебное пособие. Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО "ТГТУ", 2016. 124 с.

3. Kaufmann A., Lindner-Silwester T., Antretter T. Modeling dry wear of piston rod sealing elements of reciprocating compressors considering gas pressure drop across the dynamic sealing surface // ASME. J. Tribol. 2018. V. 140. № 4. 042201. <https://doi.org/10.1115/1.4038863>
4. Ran H., Liu D., Wang S. A numerical wear simulation method of reciprocating seals with a textured rod // Materials. 2020. V. 13. № 19. 4458. <https://doi.org/10.3390/ma13194458>
5. Grün J., Feldmeth S., Bauer F. Wear on radial lip seals: a numerical study of the influence on the sealing mechanism // Wear. 2021. V. 476. 203674. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.203674>
6. Маленков М.И., Каратушин С.И., Тарасов В.М. Конструкционные и смазочные материалы космических механизмов. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2007. 54 с.
7. Spacecraft Systems Engineering / Ed. P. Fortescue, G. Swinerd, J. Stark. Chichester: John Wiley & Sons, 2011. <https://doi.org/10.1002/9781119971009>
8. Броневец М.А. Трибология и космические транспортные системы // Вестник РГУПС. 2017. № 1. С. 18–23.
9. Мышкин Н.К., Григорьев А.Я., Басинюк В.Л., Мардосевич Е.И., Ковальчук Г.Ф., Папина С.С., Ковалева И.Н., Кудрицкий В.Г. Космическая трибология: состояние и перспективы // Механика машин, механизмов и материалов. 2012. № 3–4 (20–21). С. 126–130.
10. Александров В.М., Броневец М.А., Солдатенков И.А. Математическое моделирование изнашивания подшипника скольжения в условиях открытого космоса // Трение и износ. 2008. Т. 29. № 3. С. 238–245.
11. Солдатенков И.А. Расчет износа радиального подшипника скольжения при случайно изменяющихся температуре и нагрузке // МТТ. 2023. № 2. С. 166–175.
12. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
13. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
14. Солдатенков И.А. Износоконтактная задача с приложениями к инженерному расчету износа. М.: Физматкнига, 2010. 160 с.
15. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятности и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.
16. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2000. 384 с.
17. Солдатенков И.А. К расчету кинетики изнашивания покрытия: использование уточненных деформационных моделей // ПММ. 2020. Т. 84. № 1. С. 122–136.
18. Механика контактных взаимодействий / Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 670 с.
19. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3-х томах). М.: Физматлит, 2003. Т. 2. 864 с.
20. Friedrich K., Schlarb A.K. Tribology of polymeric nanocomposites // Amsterdam: Elsevier, 2008.
21. Polymer Tribology / Ed. S.K. Sinha, B.J. Briscoe. London: Imperial College Press, 2009.
22. Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения / Под ред. А.В. Герасимова. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 311 с.
23. Бартнев Г.М., Лаврентьев В.В. Трение и износ полимеров. Л. Химия, 1972. 240 с.
24. Fusaro R.L., Sliney H.E. Lubricating characteristics of polyimide bonded graphite fluoride and polyimide thin films // ASLE Trans., 1973. V. 16. P. 189–196. <https://doi.org/10.1080/05698197308982721>

25. *Burris D.L.* Investigation of the tribological behavior of polytetrafluoroethylene at cryogenic temperatures // *Tribology Trans.* 2008. V. 51. № 1. P. 92–100.
<https://doi.org/10.1080/10402000701660618>
26. *Кикоин А.К., Кикоин И.К.* Молекулярная физика. М.: Наука, 1976. 480 с.
27. *Физические величины: справочник* / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.

UDC 539.3

WEAR CALCULATION FOR A SHAFT LIP SEAL UNDER RANDOMLY CHANGING TEMPERATURE AND LOAD

© 2024 г. I. A. Soldatenkov^a, *

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Abstract — A stochastic model of the wear process of a shaft lip seal that takes into account random changes in the temperature and external load was described. The results of a numerical analysis of the process of seal wear in relation to the conditions of operation in open space at near-Earth orbital stations are presented. The importance of taking into account random changes in temperature and external load for predicting the seal durability was evaluated.

Keywords: contact problem, friction, wear, elastic layer, lip seal, temperature, load

REFERENCES

1. *Guo F., Jia X., Longke W. et al.* The effect of wear on the performance of a rotary lip seal // *ASME J. Tribol.* 2014. V. 136. № 4. 041703;
<https://doi.org/10.1115/1.4027623>
2. *Prodan V.D., Bozhko G.V.* Stuffing box seals with soft package: tutorial. GTU, Tambov, 2016 [in Russian].
3. *Kaufmann A., Lindner-Silvester T., Antretter T.* Modeling dry wear of piston rod sealing elements of reciprocating compressors considering gas pressure drop across the dynamic sealing surface // *ASME. J. Tribol.* 2018. V. 140. 042201;
<https://doi.org/10.1115/1.4038863>
4. *Ran H., Liu D., Wang S.* A numerical wear simulation method of reciprocating seals with a textured rod // *Materials.* 2020. V. 13. 4458;
<https://doi.org/10.3390/ma13194458>
5. *Grün J., Feldmeth S., Bauer F.* Wear on radial lip seals: a numerical study of the influence on the sealing mechanism // *Wear.* 2021. V. 476. 203674;
<https://doi.org/10.1016/j.wear.2021.203674>
6. *Malenkov M.I., Karatushin S.I., Tarasov V.M.* Constructional and Lubricating Materials of Space Mechanisms. Balt. GTU, St. Petersburg, 2007 [in Russian].
7. *Spacecraft Systems Engineering*, Ed. by P. Fortescue, G. Swinerd, and J. Stark. John Wiley & Sons, Chichester, 2011.

8. *Bronovets M.A.* Tribology and space transport systems // Vestnik RGUPS. 2017. № 1. P. 18–23 [in Russian].
9. *Myshkin N.K., Grigoriev A.Ya., Basiniuk V.L. et al.* Space tribology: the states and prospects // Mekh. Mashin Mekh. Mater. 2012. № 3–4 (20–21). P. 126–130 [in Russian].
10. *Aleksandrov V.M., Bronovets M.A., Soldatenkov I.A.* Mathematical modeling of wear of journal bearings in outer space // J. Frict. Wear. 2008. V. 29. P. 182–187;
<https://doi.org/10.3103/S1068366608030057>
11. *Soldatenkov I.A.* Wear Calculation for a Radial Plain Bearing under Randomly Changing Temperature and Load // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. № 2. P. 516–523;
<https://doi.org/10.3103/S0025654422601276>
12. *Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kambalov V.S.* Friction and Wear: Calculation Methods. Mashinostroenie, Moscow, 1977; Pergamon, Oxford, 1982.
13. *Galin L.A.* Contact Problems: The Legacy of L.A. Galin. Springer, Berlin, 2008.
14. *Soldatenkov I.A.* Wear Contact Problem with Applications to Engineering Wear Calculations. Fizmatkniga, Moscow, 2010 [in Russian].
15. *Wentzel E., Ovcharov L.* Applied Problems in Probability Theory. Mir Publishers, Moscow, 1986.
16. *Wentzel E.S., Ovcharov L.A.* Theory of Random Processes and its Engineering Applications. Vysshaya Shkola, Moscow, 2000 [in Russian].
17. *Soldatenkov I.A.* On the Calculation of Coating Wear Kinetics: the Use of Refined Deformation Models // Mechanics of Solids. 2020. V. 55. № 7. P. 1093–1104;
<https://doi.org/10.3103/S0025654420070201>
18. Mechanics of Contact Interactions, Ed. I.I. Vorovich, V.M. Aleksandrov. Fizmatlit, Moscow, 2001 [in Russian].
19. *Fikhtengol'ts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. In 3 Vols. Fizmatlit, Moscow, 2001. V. 1 [in Russian].
20. *Friedrich K., Schlarb A.K.* Tribology of Polymeric Nanocomposites. Elsevier: Amsterdam, 2008.
21. Polymer Tribology, Ed. by S.K. Sinha, B.J. Briscoe. Imperial College Press, London, 2009.
22. Dispersion-Filled Polymer Composites for Technical and Medical Purpose, Ed. by A.V. Gerasimov. SO RAN, Novosibirsk, 2017 [in Russian].
23. *Bartenev G.M., Lavrentev V.V.* Friction and Wear of Polymers. Leningrad, Khimia, 1972; Amsterdam, Elsevier, 1981.
24. *Fusaro R.L., Sliney H.E.* Lubricating characteristics of polyimide bonded graphite fluoride and polyimide thin films // ASLE Trans. 1973. V. 16. P. 189–196;
<https://doi.org/10.1080/05698197308982721>
25. *Burris D.L.* Investigation of the tribological behavior of polytetrafluoroethylene at cryogenic temperatures // Tribol. Trans. 2008. V. 51. P. 92–100;
<https://doi.org/10.1080/10402000701660618>
26. *Kikoin A.K., Kikoin I.K.* Molecular Physics. Moscow, Nauka, 1976; Moscow, Mir, 1978.
27. Handbook of Physical Quantities. Ed. by I.S. Grigoriev, E.Z. Meilikhov. Moscow, Energoatomizdat, 1991; CRC Press, Boca Raton, 1996.