

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ МАТЕРИАЛАХ

© 2024 г. А. А. Маркин^{а, *}, М. Ю. Соколова^{а, **}

^аТулский государственный университет, Тула, Россия

*e-mail: markin-nikram@yandex.ru,

**e-mail: socolova-m-u@yandex.ru

Поступила в редакцию 03.04.2023 г.

После доработки 27.05.2023 г.

Принята к публикации 01.08.2023 г.

Рассмотрены два подхода к получению динамических уравнений распространения малых возмущений перемещений, основанные на использовании моделей гиперупругих и гипопругих материалов. Показано, что эти уравнения взаимосвязаны. Для случая плоской монохроматической волны получены выражения акустических тензоров. Проведен сравнительный анализ влияния предварительных деформаций на скорости распространения акустических волн в изотропных и анизотропных материалах. Выявлены эффекты, которые могут быть описаны только в рамках модели гипопругой среды.

Ключевые слова: акустические волны, конечные деформации, фазовые скорости распространения волн, константы упругости второго и третьего порядков

DOI: 10.31857/S1026351924020066, EDN: uwgcail

1. Введение. Одной из важных проблем современной механики является построение нелинейных моделей деформирования различных сред, их идентификация, верификация и создание на их основе математических моделей процессов и состояний. Идентификация моделей нелинейной упругости связана с определением большого числа констант, особенно если материал изначально обладает анизотропией свойств. Одним из возможных способов определения констант нелинейно упругого материала является измерение скоростей распространения акустических волн в предварительно деформированных телах из этих материалов. Этот способ основан на том, что фазовые скорости упругих волн зависят от величины предварительных напряжений (деформаций), что установлено в работах [1–3]. Интерес к вопросам о распространении акустических волн в настоящее время связан с исследованием свойств кристаллов и горных пород [4, 5], развитием методов неразрушающего контроля в технике [6] и ультразвуковой диагностики в медицине [7, 8], применением их в сейсмологии и сейсмозащите [9].

В линейно упругом теле из изотропного материала без предварительных деформаций распространяются волна сжатия (продольная) и волна сдвига (поперечная), что является следствием уравнений движения, записанных в перемещениях [10]. В анизотропных материалах наряду с продольной (квази-продольной) волной распространяются две поперечные (квазипоперечные) волны. Распространение акустических волн в кристаллах в рамках линейной упругости подробно рассмотрено в монографии [11]. Вопросам распространения акустических волн в нелинейно упругих и упругопластических средах с предварительными напряжениями и конечными деформациями посвящены многочисленные работы отечественных и зарубежных исследователей [12–20].

В работах [3, 12–20] динамические уравнения распространения акустических волн получены из уравнений движения упругой среды, записанных в лагранжевой форме. В работах [12, 13, 17–20] последовательно рассматриваются как лагранжев, так и эйлеров подходы к записи уравнений движения. В работе [15] выведены уравнения движения в смешанной форме Лагранжа–Эйлера. В работах [12, 14–16, 20] задача о распространении акустических волн в телах с предварительными конечными деформациями рассматривается как задача о малых возмущениях однородного деформированного состояния. В большинстве работ [12, 14–18, 20] среды в естественном состоянии являются изотропными, а в работах [12, 13, 18–20] распространение акустических волн рассматривается в средах с начальной упругой анизотропией, в частности в ортотропных средах [13, 19, 20].

В большинстве из перечисленных работ используется модель гиперупругого материала, в которой постулируется существование упругого потенциала. В работах [16, 17, 19, 20] получены выражения для скоростей распространения продольных и поперечных волн в изотропных нелинейно упругих средах, которые могут быть использованы для определения констант, входящих в представление для упругого потенциала. В работах [15, 17–19] приведены результаты, отражающие влияние предварительных деформаций и напряжений на скорости распространения акустических волн, в частности проявление анизотропии акустических свойств начально изотропного материала [15, 17].

Наряду с моделями гиперупругих материалов широкое распространение получили гипопругие модели [21–23], в которых устанавливается связь между коротационными производными тензора напряжений Коши и энергетически сопряженными с этим тензором мерами деформаций. В данной работе рассмотрены два подхода к построению динамических уравнений с использованием гиперупругих и гипопругих моделей изотропных и анизотропных сред. Для двух вариантов динамических уравнений рассмотрен случай распространения плоской монохроматической волны, получены выражения акустических тензоров.

В качестве примера рассмотрены гиперупругие материалы с потенциалом, представленным разложением в ряд по степеням тензора деформаций [12, 20, 24, 25]. В работах [14, 24] показано, что при сохранении в разложении членов третьего порядка такая модель для изотропного материала совпадает с моделью Мурнагана. Упругие свойства изотропного материала определяются в этом случае двумя константами второго порядка и тремя константами

третьего порядка. Работа [25] посвящена анализу нелинейных эффектов, описываемых моделью гиперупругого анизотропного материала с симметрией свойств, присущей кристаллам кубической сингонии. По симметрии упругих свойств такой материал наиболее близок к изотропному материалу, но в его модели определяются три константы второго порядка и шесть констант третьего порядка [11]. Модель гиперупругого анизотропного материала с кубической симметрией свойств предложена в работе [26].

На основе полученных результатов проведен анализ влияния вида предварительных деформаций на скорости распространения акустических волн в изотропных и анизотропных материалах в рамках рассмотренных гиперупругих и гиперупругих моделей.

2. Две формы уравнений распространения акустических волн. Рассмотрим два возможных подхода к записи динамических уравнений распространения малых возмущений поля перемещений. Первый подход, традиционный [12–20], связан с использованием в определяющих соотношениях тензора деформаций Коши–Грина и энергетически сопряженного с ним второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгоффа. Во втором подходе предлагается в качестве меры конечных деформаций использовать не голономную меру деформаций $\mathbf{K}$, введенную в работе [23], и энергетически сопряженный с ней обобщенный тензор истинных напряжений. В обоих случаях процесс распространения акустической волны будем рассматривать как процесс слабых возмущений, накладываемых на конечные деформации.

Пусть в начальный момент времени t_0 в среде отсутствуют деформации и напряжения, а к моменту времени t_1 создано однородное напряженно-деформированное состояние, которому соответствует поле перемещений $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1)$ и напряжения $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}(t_1)$. Аффинор деформаций $\Phi_1 = \Phi(t_1)$ связан с полем перемещений известным соотношением [10]:

$$\Phi_1 = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_1 \quad (2.1)$$

где $\mathbf{E}$ – единичный тензор, $\nabla^0 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ – набла-оператор начального состояния,

$\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки среды в момент времени t_0 .

Нагружение на интервале $[t_0, t_1]$ полагается квазистатическим, а напряжения $\mathbf{S}_1$ – уравновешенными, так что

$$\nabla^1 \cdot \mathbf{S}_1 \equiv \mathbf{0}, \quad \ddot{\mathbf{u}}_1 \equiv \mathbf{0} \quad (2.2)$$

где $\nabla^1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}$ – набла-оператор деформированного состояния в момент времени t_1 , $\ddot{\mathbf{u}}_1$ – ускорение, точкой обозначено скалярное произведение.

В момент времени t_1 в рассматриваемой среде возбуждается звуковая волна с полем перемещений $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau)$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \mathbf{u}_1$, $\tau = t - t_1$. Считаем, что вызываемые волной перемещения $\mathbf{u}_2$ и их градиенты малы, а также что в любой момент времени $t > t_1$ перемещения точек среды могут быть определены в виде суммы

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_1, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t_1) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau) \quad \forall t > t_1 \quad (2.3)$$

Аффино́р деформаций в момент времени $t > t_1$ определяется выражением:

$$\Phi = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u} = \mathbf{E} + \nabla^0 \mathbf{u}_1 + \nabla^0 \mathbf{u}_2$$

Учитывая, что перемещения $\mathbf{u}_2$ определены в конфигурации $t = t_1$, а также связь между набла-операторами начального $\nabla^0(\cdot)$ и деформированного $\nabla^1(\cdot)$ состояний [10, 14] и соотношения (2.1), получим представление для аффино́ра деформаций в виде:

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_1 \cdot \nabla^1 \mathbf{u}_2 = \Phi_1 \cdot (\mathbf{E} + \nabla^1 \mathbf{u}_2) \quad (2.4)$$

Ввиду предположения о малости перемещений $\mathbf{u}_2$ и градиентов $\nabla^1 \mathbf{u}_2$ во всех дальнейших преобразованиях слагаемыми, содержащими $\nabla^1 \mathbf{u}_2$ во второй и более высоких степенях, будем пренебрегать.

Запишем уравнения движения среды в эйлеровой форме для момента времени $t_2 > t_1$ в виде:

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 (\ddot{\mathbf{u}}_1 + \ddot{\mathbf{u}}_2)$$

или с учетом (2.2)

$$\nabla^2 \cdot \mathbf{S}_2 = \rho_2 \ddot{\mathbf{u}}_2 \quad (2.5)$$

В рамках первого подхода к получению динамических уравнений тензор истинных напряжений Коши $\mathbf{S}_2$ требуется связать с тензором Пиолы–Кирхгоффа в соответствии с известными соотношениями $\mathbf{S}_2 = J_2^{-1} \Phi_2^T \cdot \mathbf{T}_2 \cdot \Phi_2$, где $J_2 = \det \Phi_2$ [10, 14]. Следуя работе [12], представим тензор $\mathbf{T}_2$ разложением в ряд в окрестности состояния, соответствующего моменту времени t_1 ,

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 + \left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1) + O(\|\nabla^1 \mathbf{u}_2\|), \quad (2.6)$$

где $\left. \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1} \equiv \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$ – обобщенный тензор жесткости материала.

В соотношениях (2.6) тензор деформаций Коши–Грина $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ в соответствии с (2.1) определяется через поле перемещений $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1)$ соотношениями:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2} (\Phi_1 \cdot \Phi_1^T - \mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\nabla^0 \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1 \nabla^0 + \nabla^0 \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 \nabla^0).$$

С учетом представлений (2.3) и (2.4) тензор деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_{12}, \quad (2.7)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} \Phi_1 \cdot (\nabla^1 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \nabla^1) \cdot \Phi_1^T$

На основании соотношений (2.6) и (2.7) второй тензор Пиолы–Кирхгоффа в момент времени t_2 представляется выражением:

$$\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_{12}, \quad (2.8)$$

где $\mathbf{T}_{12} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{12}$ содержит градиент перемещений $\nabla^1 \mathbf{u}_2$ в первой степени.

Выражая тензор истинных напряжений $\mathbf{S}_2$ через $\mathbf{T}_2$ и подставляя вместе с (2.8) в уравнения движения (2.5), после преобразований получим динамические уравнения в виде:

$$\nabla^1 \cdot (\boldsymbol{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1) + \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 \nabla^1 \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2, \quad (2.9)$$

где $\boldsymbol{\Sigma}_1 = J_1 \mathbf{S}_1$ — обобщенный тензор истинных напряжений в момент времени t_1 . Уравнения (2.9) совпадают по форме с уравнениями, рассматриваемыми в работах [12, 16–20].

Рассмотрим второй подход к построению динамических уравнений. Используемая в этом случае неголономная мера деформаций $\mathbf{K}$ определяется в любой момент времени как решение дифференциального уравнения [10, 23]

$$\dot{\mathbf{K}}^\Delta = \dot{\mathbf{K}} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K} - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{W},$$

в котором $\mathbf{K}^\Delta$ — обобщенная яуманновская производная, тензор деформации скорости $\mathbf{W}$ и тензор спина $\boldsymbol{\Omega}$ определяются через левую меру искажения $\mathbf{U}$ и ортогональный тензор $\mathbf{R}$, входящие в полярное разложение аффинора деформаций $\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}$, соотношениями:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \mathbf{R}^{-1} \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}) \cdot \mathbf{R}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{R}}.$$

В любой фиксированный момент времени компоненты меры $\mathbf{K}$ не выражаются через поле перемещений конечными соотношениями, однако ее изменение на интервале $[t_1, t_2]$ ввиду предположения о малости градиентов перемещений $\nabla^1 \mathbf{u}_2$ определяется выражением:

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \frac{1}{2} (\nabla^1 \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \nabla^1). \quad (2.10)$$

Разложим обобщенный тензор напряжений $\boldsymbol{\Sigma}_2$ в ряд в окрестности состояния, соответствующего моменту времени t_1 :

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_1 + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}}{\partial \mathbf{K}} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_1} \cdot (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1) + O(\|\nabla^1 \mathbf{u}_2\|), \quad (2.11)$$

где $\partial \boldsymbol{\Sigma} / \partial \mathbf{K}|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_1} \equiv \mathbf{C}(\mathbf{K}_1)$ — тензор четвертого ранга, имеющий смысл тензора жесткости.

Отметим, что при $\mathbf{K}_1 \rightarrow 0, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rightarrow 0$ тензоры $\mathbf{C}(\mathbf{K}_1)$ и $\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)$ равны и совпадают с постоянным тензором упругости материала, входящим в обобщенный закон Гука. Запишем соотношения (2.11) в виде, аналогичном (2.8):

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_{12} = \mathbf{C}(\mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{K}_{12}. \quad (2.12)$$

Учитывая, что тензор истинных напряжений Коши $\mathbf{S}_2 = J_2^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_2$, и подставляя (2.12) в уравнения движения (2.5), после преобразований получим динамические уравнения распространения малых возмущений перемещений в виде:

$$\nabla^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 \nabla^1 \cdot \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (2.13)$$

Уравнения (2.13) могут быть получены непосредственно из (2.9), если учесть связь между тензорами $\mathbf{T}_{12}$ и $\boldsymbol{\Sigma}_{12}$: $\boldsymbol{\Phi}_1^T \cdot \mathbf{T}_{12} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_2 \nabla^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_1$. Уравнения (2.9) и (2.13) являются линейризованными в том смысле, что при их выводе учитывалась малость градиентов перемещений $\nabla^1 \mathbf{u}_2$.

Известным свойством неголономной меры деформаций $\mathbf{K}$ является связь ее первого инварианта с относительным изменением объема. В соответствии с выражением (2.10) $\nabla^1 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{E}$, и уравнения (2.13) могут быть записаны в виде:

$$\nabla^1 \cdot \boldsymbol{\Sigma}_{12} - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \nabla^1 (\mathbf{K}_{12} \cdot \mathbf{E}) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (2.14)$$

Второе слагаемое в (2.14) связано с чисто объемной составляющей малых возмущений поля перемещений.

3. Динамические уравнения для гиперупругих и гипопругих материалов. При построении моделей гиперупругих материалов постулируется существование упругого потенциала W , в качестве которого рассматривается удельная (отнесенная к единице начального объема) потенциальная энергия деформаций, дифференциал которой $dW = \mathbf{T} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}$. В таких моделях напряжения определяются выражением:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.1)$$

В работах [16, 17, 19, 20, 24–26] используется разложение упругого потенциала в ряд по степеням тензора деформаций Коши–Грина:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2!} \mathbf{N} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{3!} \mathbf{L} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon} + \dots, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ – постоянные тензоры упругости четвертого и шестого рангов соответственно, компоненты которых симметричны по парам индексов:

$$N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}$$

$$L_{ijklmn} = L_{jiklmn} = L_{ijlkmn} = L_{ijklnm} = L_{ijmnlk} = L_{kljlmn}.$$

Компоненты тензора $\mathbf{N}$ связаны с константами упругости второго порядка, компоненты тензора $\mathbf{L}$ – с константами упругости третьего порядка. В изотропном материале тензор $\mathbf{N}$ имеет две независимые компоненты, а тензор $\mathbf{L}$ – три. Для анизотропных материалов тензоры $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ имеют наименьшее число ненулевых компонент в базисе главных осей анизотропии [10, 25].

Для материала, в котором упругий потенциал определяется выражением (3.2), обобщенный тензор жесткости на основании соотношений (2.6) и (3.1) определяется выражением:

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon}_1} = \mathbf{N} + \mathbf{L} \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

а динамические уравнения (2.9) преобразуются к виду:

$$\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}_1^T \cdot \nabla^1 \boldsymbol{\varepsilon}_{12} \cdot \boldsymbol{\Phi}_1^T \right) \cdot \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \cdot \nabla^1 \nabla^1 \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (3.3)$$

При рассмотрении гипотупругих материалов полагают, что связь между коротационными производными тензоров $\boldsymbol{\Sigma}$ и $\mathbf{K}$ является квазилинейной [21–23]:

$$\boldsymbol{\Sigma}^\Delta = \mathbf{C}(\mathbf{K}) \cdot \cdot \mathbf{K}^\Delta.$$

Для гипотупругого материала определим удельную потенциальную энергию деформаций $W(\mathbf{K})$, дифференциал которой $dW = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \cdot d\mathbf{K}$, так что

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{K}}.$$

По аналогии с (3.2) разложим потенциал $W(\mathbf{K})$ в степенной ряд:

$$W(\mathbf{K}) = \frac{1}{2!} \mathbf{N}_R \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} + \frac{1}{3!} \mathbf{L}_R \cdot \cdot \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} \mathbf{K} + \dots, \quad (3.4)$$

где тензоры четвертого и шестого рангов $\mathbf{N}_R$ и $\mathbf{L}_R$ отнесены к вращающемуся базису $\mathbf{n}_i$.

В этом случае обобщенный тензор жесткости материала может быть представлен выражением:

$$\mathbf{C}(\mathbf{K}_1) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{K}^2} \right|_{\mathbf{K}=\mathbf{K}_1} = \mathbf{N}_R + \mathbf{L}_R \cdot \cdot \mathbf{K}_1,$$

а динамические уравнения (2.13) принимают вид:

$$\nabla^1 \mathbf{K}_{12} \cdot \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}_1) - \boldsymbol{\Sigma}_1 \cdot \cdot \nabla^1 \nabla^1 \cdot \mathbf{u}_2 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_2. \quad (3.5)$$

В случае изотропного материала компоненты тензоров $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$ в неподвижном базисе $\mathbf{e}_i$ совпадают с компонентами тензоров $\mathbf{N}_R$ и $\mathbf{L}_R$ во вращающемся базисе $\mathbf{n}_i$ (полярном). Пусть при этом деформации в момент времени t_1 не сопровождаются жестким поворотом $\mathbf{R}(t_1) \equiv \mathbf{E}$, тогда неголономная мера $\mathbf{K}_1 = \ln \mathbf{U}_1$, т.е. совпадает с логарифмической мерой деформаций Генки. В этом случае потенциал (3.4) является потенциалом модели Генки–Мурнагана, предложенным в работе [24].

Для анизотропного материала совпадение компонент тензоров $\mathbf{N}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}_R$, $\mathbf{L}_R$ возможно только при использовании гипотезы о вращении главных осей анизотропии материала в соответствии с законом $\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{a}_i^0 \cdot \mathbf{R}(t)$, где $\mathbf{a}_i^0$ – базис главных осей анизотропии материала в начальный момент времени t_0 . Полагая, что в начальный момент базис главных осей анизотропии совпадает с декартовым базисом $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{e}_i$, получим, что в любой момент времени $t > t_0$ базис главных осей анизотропии совпадает с полярным базисом $\mathbf{a}_i(t) = \mathbf{n}_i(t)$. Такое предположение о вращении главных осей анизотропии материала при деформации принималось в работах [10, 26].

4. Уравнения распространения плоской монохроматической волны. Рассмотрим в среде с предварительными деформациями распространение плоской монохроматической волны, для которой поле перемещений имеет вид:

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1, \tau) = A \exp(i(k\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 + \omega\tau)), \quad (4.1)$$

где A – амплитуда, $\mathbf{p}$ – вектор поляризации единичной длины, k – волновое число, ω – частота, $\mathbf{n}$ – единичный вектор волновой нормали.

Получим из динамических уравнений (3.3) и (3.5) уравнения распространения акустических волн и выражения для акустического тензора [14]. При рассмотрении гиперупругих материалов для поля перемещений (4.1) запишем тензор деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{12} = \frac{1}{2} ik \Phi_1 \cdot (\mathbf{n} \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \mathbf{n}) \cdot \Phi_1^T.$$

Первое слагаемое из уравнений (3.3) преобразуется к виду $-k^2 \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{u}_2$, где $\mathbf{F}_1 = \Phi_1^T \cdot \Phi_1$ – мера конечных деформаций Фингера [10, 14], $\mathbf{M}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \mathbf{n}$ – обобщенный тензор Кристоффеля [11], определяемый как свойствами материала, так и направлением распространения волны.

На основании уравнений (3.3) уравнения распространения плоской монохроматической волны могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = \rho_0 c^2 \mathbf{p}, \quad (4.2)$$

где $c = \omega/k$ – фазовая скорость распространения волны.

Акустический тензор среды [14] с предварительными деформациями $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ определяется выражением:

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{M}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \cdot \mathbf{F}_1 + \Sigma_1 \cdot \mathbf{n} \mathbf{n} \mathbf{E}. \quad (4.3)$$

Из уравнений (4.2) следует, что значение $\rho_0 c^2$ является собственным значением акустического тензора $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)$, а вектор поляризации – его собственным вектором.

При рассмотрении модели гипопругого материала по полю перемещений (4.1) определяется тензор деформаций:

$$\mathbf{K}_{12} = \frac{1}{2} ik (\mathbf{n} \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2 \mathbf{n}),$$

а динамические уравнения (3.5) преобразуются к виду (4.2), однако акустический тензор и обобщенный тензор Кристоффеля зависят теперь от направления распространения волны и значения $\mathbf{K}_1$ неголономной меры деформаций:

$$\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1) = \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1) - \Sigma_1 \cdot \mathbf{nn}, \quad \mathbf{M}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}(\mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{n}. \quad (4.4)$$

Полученное выражение для акустического тензора показывает, что в некоторых случаях предварительного напряженно-деформированного состояния материала и при произвольном направлении вектора волновой нормали тензор $\mathbf{A}(\mathbf{n}, \mathbf{K}_1)$ может оказаться несимметричным. В этом случае векторы поляризации продольной и поперечных волн оказываются неортогональными. В изотропном материале при рассмотрении главных волн [3, 14], для которых вектор волновой нормали направлен вдоль главных осей предварительных деформаций, акустический тензор всегда симметричен, а векторы поляризации продольной и поперечных волн ортогональны.

Расчеты скоростей распространения плоских волн через собственные значения акустического тензора (4.4) показали, что наличие слагаемого $-\Sigma_1 \cdot \mathbf{nn}$ в выражении для акустического тензора в изотропных материалах влияет только на величину скорости распространения продольных волн, которые являются объемными волнами. В анизотропных материалах с кубической симметрией свойств это слагаемое оказывает влияние на величины как продольных, так и поперечных (сдвиговых) волн, распространяющихся под углом к осям анизотропии материала. Этот результат является следствием соотношений (2.14) и свойств неголономной меры деформаций $\mathbf{K}$, первый инвариант которой изменяется только при объемном деформировании.

5. Влияние предварительных деформаций на скорости распространения акустических волн в изотропных и анизотропных материалах. Полученные в разделах 3 и 4 динамические уравнения могут быть использованы для описания распространения акустических волн как в изотропных, так и в анизотропных материалах. Для этого требуется конкретизировать выражения для упругих потенциалов (3.2) и (3.4), а именно представить тензоры $\mathbf{N}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}_R$, $\mathbf{L}_R$ разложениями по инвариантным для данного типа материала тензорным базисам. В работах [24–26] были получены такие разложения для изотропных материалов и анизотропных материалов с кубической симметрией свойств. Наиболее удобными оказываются разложения тензоров упругих свойств четвертого и шестого рангов по собственным базисным тензорам:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} N_{\alpha} \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\beta=1}^{\beta=k} n_{\beta} \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1 \dots m$, – собственные тензоры для тензоров упругих свойств четвертого ранга, $\mathbf{B}^{(\beta)}$, $\beta = 1 \dots k$, – собственные тензоры для тензоров упругих свойств шестого ранга. Число m равно количеству различных собственных значений тензора упругости четвертого ранга, а число k – количество различных собственных значений тензора шестого ранга. Собственные тензоры $\mathbf{\Omega}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{B}^{(\beta)}$ имеют наиболее простое представление в тензорных базисах

четвертого и шестого рангов, построенных на основе канонического базиса А.А. Ильюшина [10]:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3), \quad \mathbf{I}^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2), \\ \mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1), \quad \mathbf{I}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2), \quad \mathbf{I}^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3) \\ \mathbf{I}^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha), \\ \mathbf{I}^{\alpha\beta\gamma} &= \frac{1}{6}(\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\alpha\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\alpha + \mathbf{I}^\gamma\mathbf{I}^\beta\mathbf{I}^\alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, 5$, а векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — единичные ортогональные векторы, которые в изотропном материале могут быть выбраны произвольно, а в анизотропном материале направлены вдоль главных осей анизотропии материала в начальном состоянии.

Для изотропного материала разложения (5.1) имеют вид:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} N_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\beta=1}^{\beta=3} n_\beta \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (5.2)$$

где $\mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}$, $\mathbf{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22} + \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}$, $\mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}$,
 $\mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022} + \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}$

$$\mathbf{B}^{(3)} = \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{I}^{111} - \frac{6}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{122} + \mathbf{I}^{133}) + \frac{3}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155}) + \frac{3}{\sqrt{2}}(\mathbf{I}^{255} - \mathbf{I}^{244} + 2\mathbf{I}^{345})$$

Константы N_1, N_2 и n_1, n_2, n_3 связаны с константами упругости изотропного материала соответственно второго и третьего порядков [24].

В модели гипотупругого материала при построении тензоров $\mathbf{N}_R$, $\mathbf{L}_R$ векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ следует считать совпадающими с векторами полярного базиса, соотношения (5.2) при этом сохраняют свою форму.

В качестве примера анизотропного материала рассмотрим материал с симметрией упругих свойств, присущей кристаллам кубической сингонии [10, 11, 25]. Для таких анизотропных материалов разложения (5.1) имеют вид:

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=3} N_\alpha \mathbf{\Omega}^{(\alpha)}, \quad \mathbf{L} = \sum_{\beta=1}^{\beta=6} n_\beta \mathbf{B}^{(\beta)}, \quad (5.3)$$

$$\text{где } \mathbf{\Omega}^{(1)} = \mathbf{I}^{00}, \mathbf{\Omega}^{(2)} = \mathbf{I}^{11} + \mathbf{I}^{22}, \mathbf{\Omega}^{(3)} = \mathbf{I}^{33} + \mathbf{I}^{44} + \mathbf{I}^{55}, \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{I}^{000}, \\ \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{I}^{011} + \mathbf{I}^{022}, \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{I}^{033} + \mathbf{I}^{044} + \mathbf{I}^{055}, \mathbf{B}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{111} - 3\mathbf{I}^{122}), \\ \mathbf{B}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{I}^{144} + \mathbf{I}^{155} - 2\mathbf{I}^{133}), \mathbf{B}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{I}^{345}.$$

Константы N_1, N_2, N_3 и $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ связаны с константами упругости второго и третьего порядков анизотропного материала с кубической симметрией свойств [25, 26].

В модели гипопругого анизотропного материала разложения тензоров $\mathbf{N}_R, \mathbf{L}_R$ по форме совпадают с (5.3), если считать, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ совпадают с векторами полярного базиса, в начальном состоянии направленными вдоль главных осей анизотропии.

Рассмотрим результаты решения задачи об определении скоростей распространения акустических волн в изотропном материале и анизотропном материале с кубической симметрией свойств при двух видах предварительных деформаций: всестороннем сжатии $\mathbf{\Phi}_1 = \lambda \mathbf{E}$ и чистом формоизменении в главных осях $\mathbf{\Phi}_1 = \lambda \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \lambda^{-1} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$. При таких предварительных деформациях главные оси деформаций совпадают с одними и теми же материальными волокнами, а в случае анизотропных материалов и с главными осями анизотропии. В этом случае неголономная мера деформаций $\mathbf{K}$ совпадает с тензором деформаций Генки. В моделях гиперупругих и гипопругих материалов скорость распространения волны в направлении вектора волновой нормали $\mathbf{n}$ определяется через собственные значения акустического тензора (4.3) или (4.4) соответственно.

На рис. 1 и 2 приведены графики угловых зависимостей фазовых скоростей распространения акустических волн при двух видах предварительных

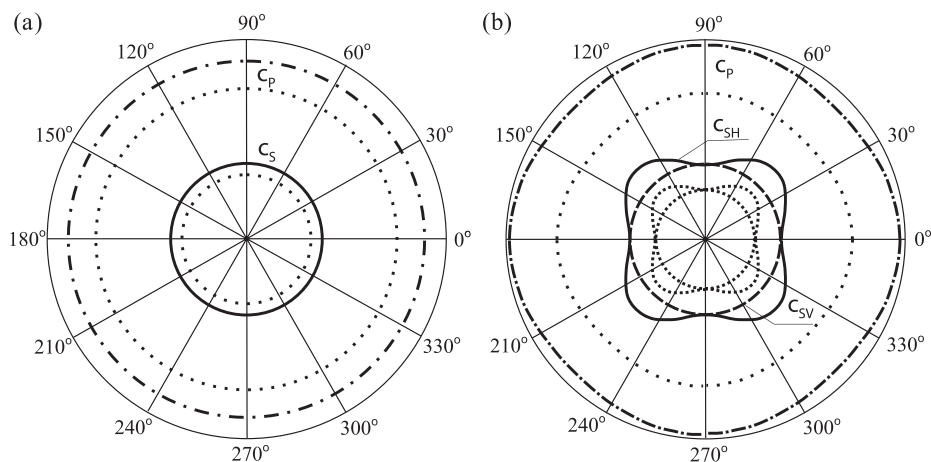


Рис. 1. Угловые зависимости фазовых скоростей распространения продольных c_p и поперечных c_{sh}, c_{sv} волн при предварительном всестороннем сжатии: а) изотропный материал; б) анизотропный материал с кубической симметрией свойств.

деформаций для случая, когда вектор волновой нормали лежит в плоскости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, так что $\mathbf{n} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2$. Для обоих случаев предварительных деформаций величина $\lambda = 0.975$. Для сравнения на рисунках точками приведены фазовые скорости в рассматриваемых материалах без предварительных деформаций при $\lambda = 1$. Приведенные результаты расчетов получены для модели гипопругого материала.

При чисто объемной предварительной деформации (рис. 1) как в изотропном, так и в анизотропном материале вид угловых зависимостей скоростей распространения продольных и поперечных волн по сравнению с недеформированным состоянием не изменяется. Происходит изменение только числовых значений этих скоростей. Как и в недеформированном состоянии после всестороннего сжатия в изотропном материале распространяется продольная волна и множество поперечных волн с векторами поляризации, расположенными в плоскости, перпендикулярной вектору волновой нормали. В анизотропном материале с кубической симметрией свойств наряду с продольной волной (Р-волна) распространяются две поперечные волны: одна с вектором поляризации, расположенным в плоскости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (SH-волна), вторая (SV-волна) с вектором поляризации $\mathbf{e}_3$. Названия волн, приведенные в скобках, используются в сейсмологии. Отметим, что скорость SV-волны не зависит от угла φ . Расчеты по моделям гиперупругого и гипопругого материалов (при одинаковых значениях констант) дают качественно одинаковые результаты, различия только в абсолютных значениях.

При чистом формоизменении изотропного материала предварительные деформации приводят к появлению анизотропии материала в отношении скоростей распространения акустических волн. Вместе с продольной волной распространяются две поперечные волны. В плоскости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ у материала появляются акустические оси, ориентированные под углом 45° к главным

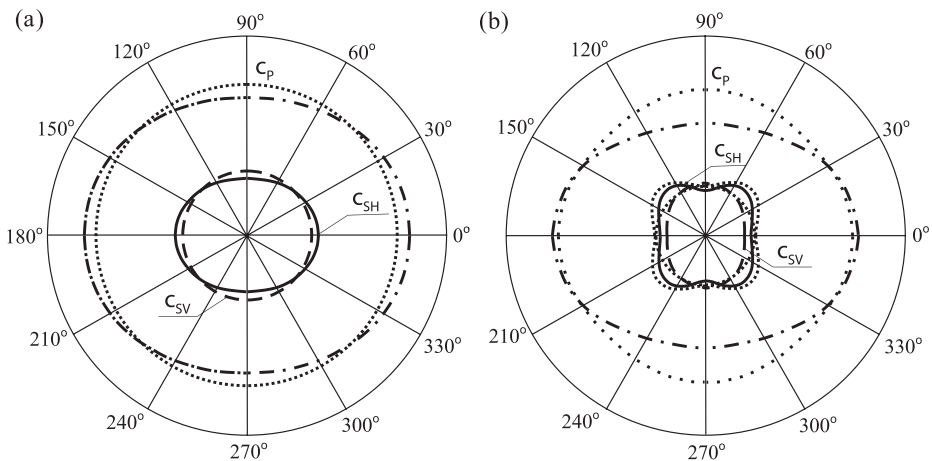


Рис. 2. Угловые зависимости фазовых скоростей распространения продольных c_p и поперечных c_{SH} , c_{SV} волн при предварительном формоизменении: а) изотропный материал; б) анизотропный материал с кубической симметрией свойств.

осям деформаций, однако вид угловой зависимости фазовых скоростей в этой плоскости не соответствует известным для какой-либо кристаллографической системы [11]. Отметим, что модели гиперупругих и гипопругих изотропных материалов приводят к качественно отличным результатам при расчетах скоростей поперечных волн с вектором поляризации $\mathbf{e}_3$, в направлении которого деформации не происходят. При расчетах по соотношениям (4.3) скорости распространения SV-волн изменяются относительно начальной скорости распространения сдвиговой волны в материале без деформаций, а при расчетах по соотношениям (4.4) скорость распространения этой волны при любом направлении волновой нормали $\mathbf{n}$ одинакова и равна начальному значению.

В анизотропном материале с кубической симметрией свойств предварительные деформации чистого формоизменения приводят к значительным изменениям картины угловой зависимости скоростей распространения продольных и поперечных волн. В частности, если в таком материале при отсутствии деформаций в плоскости векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ расположены две акустические оси, направленные вдоль векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, то после деформаций эти оси поворачиваются, составляя угол $\pm 75^\circ$ к вектору $\mathbf{e}_1$. В анизотропном материале обе рассмотренные модели прогнозируют изменение скорости поперечной волны с вектором поляризации $\mathbf{e}_3$.

6. Заключение. В статье рассмотрены два подхода к построению динамических уравнений распространения акустических волн в материалах с предварительными конечными деформациями. Первый (традиционный) подход предполагает использование модели гиперупругого материала, второй (альтернативный) подход использует модель гипопругого материала. Для обоих подходов получены динамические уравнения в общем виде и их конкретизации при прохождении плоской монохроматической волны. Представления акустических тензоров (4.3) и (4.4) различны как по форме, так и тем, что входящие в них обобщенные тензоры Кристоффеля $\mathbf{M}$ зависят от направления вектора волновой нормали, в модели гиперупругого материала — от значений тензора деформаций Коши—Грина $\boldsymbol{\epsilon}_1$, а в модели гипопругого материала — от значений неголономной меры деформаций $\mathbf{K}_1$. Свойства меры деформаций $\mathbf{K}$, связанные с тем, что ее первый инвариант не меняется при формоизменении, а девиатор не зависит от объемных деформаций, позволяют получить более достоверные результаты при расчетах фазовых скоростей в изотропном материале с предварительными деформациями.

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ (шифр FEWG-2023-0002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* The influence of initial stress on elastic waves // *J. Appl. Phys.* 1940. V. 11. № 8. P. 522–530.
<https://doi.org/10.1063/1.1712807>
2. *Toupin R. A., Bernstein B.* Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // *J. Acoust. Soc. Am.* 1961. V. 33. № 2. P. 216–225.

- <https://doi.org/10.1121/1.1908623>
3. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // *Arch. Ratio. Mech. Anal.* 1961. V. 8. № 1. P. 105–138.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-88691-1_5
 4. *Kube C.N.* Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 6. P. 4756–4767.
<https://doi.org/10.1121/1.4986747>
 5. *Кулиев Г.Г., Агаев Х.Б., Гасанова Г.Г.* Определение модулей упругости третьего порядка для осадочных пород на основе скважинных геофизических данных // *Физика Земли*. 2016. № 6. С. 54–60.
<https://doi.org/10.7868/S0002333716050069>
 6. *Беляев А.К., Полянский В.А., Третьяков Д.А.* Оценка механических напряжений, пластических деформаций и поврежденности посредством акустической анизотропии // *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2020. № 4. С. 130–151.
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.12>
 7. *Jiang Y., Li G., Qian L.-X., Liang S., Destrade M., Cao Y.* Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis // *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2015. V. 14. № 5. P. 1119–1128.
<https://doi.org/10.1007/s10237-015-0658-0>
 8. *Zaitsev V.Y.* Nonlinear acoustics in studies of structural features of materials // *MRS Bulletin*. 2019. V. 44. P. 350–360.
<https://doi.org/10.1557/mrs.2019.109>
 9. *Стозний П.В., Хохлов Н.И., Петров И.Б.* Моделирование волновых процессов в геологических трещиноватых средах с использованием модели Шонберга // *ПММ*. 2020. Т. 84. № 3. С. 375–386.
<https://doi.org/10.31857/S0032823520030091>
 10. *Маркин А.А., Соколова М.Ю.* Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 320 с.
 11. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.
 12. *Haupt P., Pao Y.H., Hutter K.* Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation // *J. Elasticity*. 1992. V. 28. P. 193–221.
<https://doi.org/10.1007/BF00132211>
 13. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 т. Киев: Наукова Думка, 1986.
 14. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
 15. *Роменский Е.И., Лысь Е.В., Чеверда В.А., Энов М.И.* Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями // *ПМТФ*. 2017. Т. 58. № 5. С. 178–189.
<https://doi.org/10.15372/PMTF20170518>
 16. *Белянкова Т.И., Калинчук В.В., Шейдаков Д.Н.* Модули высших порядков в уравнениях динамики преднапряженного упругого тела // *Изв. РАН. МТТ*. 2019. № 3. С. 3–15.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919030036>
 17. *Pau A., Vestroni F.* The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity // *Wave Motion*. 2019. V. 86. P. 79–90.
<https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.12.005>
 18. *Destrade M., Ogden R.W.* On stress-dependent elastic moduli and wave speeds // *J. Appl. Math.* 2013. V. 78. № 5. P. 965–997.
<https://doi.org/10.1093/imatat/hxs003>
 19. *Yang H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye, Müller T.M.* Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // *Front. Earth Sci.* 2022. V. 10.
<https://doi.org/10.3389/feart.2022.886920>

20. Pao Y.H., Gamer U. Acoustoelastic waves in orthotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1985. V. 77. № 3. P. 806–812.
<https://doi.org/10.1121/1.392384>
21. Поздеев А.А., Трусков П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986. 231 с.
22. Бровко Г.Л. Класс моделей упругих тел при конечных деформациях и устойчивость равновесия // Устойчивость в механике деформируемых тел / Материалы II Всесоюзного симпозиума. Калинин: изд-во КГУ, 1986. С. 111–121.
23. Маркин А.А., Толоконников Л.А. Меры процессов конечного деформирования // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1987. № 2. С. 49–53.
24. Маркин А.А., Соколова М.Ю. Вариант соотношений нелинейной упругости // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 6. С. 68–75.
<https://doi.org/10.1134/S0572329919060096>
25. Соколова М.Ю., Христич Д.В. Конечные деформации нелинейно упругих анизотропных материалов // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2021. № 70. С. 103–116.
<https://doi.org/10.17223/19988621/70/9>
26. Маркин А.А., Соколова М.Ю., Христич Д.В. Нелинейная упругость кубических кристаллов // Упругость и неупругость / Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 110-летию со дня рождения А.А. Ильюшина. Москва, 2021. С. 100–110.

UDC 539.3

DYNAMIC EQUATIONS OF ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN PRE-DEFORMED MATERIALS

© 2024 г. А. А. Маркин^a, *, М. Ю. Соколова^a, **

^a Tula State University, Tula, Russia

*e-mail: markin-nikram@yandex.ru;

**e-mail: m.u.sokolova@gmail.com

Abstract – Two approaches to obtaining dynamic equations for the propagation of displacement small disturbances are considered. These approaches are based on the use of models of hyperelastic and hypoelastic materials. We showed that these equations are interrelated. For the case of a plane monochromatic wave, expressions of acoustic tensors are obtained.

A comparative analysis of the effect of preliminary deformations on the propagation velocity of acoustic waves in isotropic and anisotropic materials is carried out. In the model of a hypoelastic material, the acoustic tensor depends on a nonholonomic measure of finite deformations. A nonholonomic measure of deformations is defined in such a way that its first invariant does not change during shape change, and the deviator does not depend on volumetric deformations. In this regard, the use of a hypoelastic material model allows us to obtain more reliable results when calculating phase velocities in an isotropic material with preliminary deformation.

Keywords: acoustic waves, finite deformations, phase velocities of wave propagation, second and third orders elastic constants

REFERENCES

1. *Biot M.A.* The influence of initial stress on elastic waves // *J. Appl. Phys.* 1940. V. 11. № 8. P. 522–530;
<https://doi.org/10.1063/1.1712807>
2. *Toupin R.A., Bernstein B.* Sound waves in deformed perfectly elastic materials. Acoustoelastic effect // *J. Acoust. Soc. Am.* 1961. V. 33. № 2. P. 216–225;
<https://doi.org/10.1121/1.1908623>
3. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain // *Arch. Ratio. Mech. Anal.* 1961. V. 8. № 1. P. 263–296;
https://doi.org/10.1007/978-3-642-88691-1_5
4. *Kube C.N.* Scattering of harmonic waves from a nonlinear elastic inclusion // *J. Acoust. Soc. Am.* 2017. V. 141. № 6. P. 4756–4767;
<https://doi.org/10.1121/1.4986747>
5. *Guliyev H., Aghayev Kh.B., Hasanova G.* Determination of third-order elastic modulus for sedimentary rocks based on borehole geophysical data // *Izvestiya Physics of the Solid Earth*. 2016. № 6. P. 54–60;
<https://doi.org/10.7868/S0002333716050069>
6. *Belyaev A.K., Polyanskiy V.A., Tretyakov D.A.* Estimating of mechanical stresses, plastic deformations and damage by means of acoustic anisotropy. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2020. № 4. P. 130–151;
<https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.12>
7. *Jiang Y., Li G., Qian L.-X. et al.* Measuring the linear and nonlinear elastic properties of brain tissue with shear waves and inverse analysis // *Biomech. Model. Mechanobiol.* 2015. V. 14. № 5. P. 1119–1128;
<https://doi.org/10.1007/s10237-015-0658-0>
8. *Zaitsev V.Y.* Nonlinear acoustics in studies of structural features of materials // *MRS Bulletin*. 2019. V. 44. P. 350–360;
<https://doi.org/10.1557/mrs.2019.109>
9. *Stognii P.V., Khokhlov N.I., Petrova I.B.* Modelling of Wave Processes in Fractured Geological Media Using Shoenberg Model // *J. Appl. Math. Mech.* 2020. V. 84. № 3. P. 375–386;
<https://doi.org/10.31857/S0032823520030091>
10. *Markin A.A., Sokolova M.Yu.* Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. 2015. Cambridge: Cambridge International Science Publishing.
11. *Sirotnin Yu.I., Shaskolskaya M.P.* Fundamentals of crystal physics. 1979. M.: Nauka.
12. *Haupt P., Pao YH., Hutter K.* Theory of incremental motion in a body with initial elasto-plastic deformation // *J. Elasticity*. 1992. V. 28. P. 193–221;
<https://doi.org/10.1007/BF00132211>
13. *Guz A.N.* Elastic waves in bodies with initial stresses. 1986. Kiev: Naukova Dumka.
14. *Lurie A.I.* Non-linear Theory of Elasticity. 2012. North Holland.
15. *Romenskii E.I., Lys' E.B., Cheverda V.A., Epov M.I.* Dynamics of deformation of an elastic medium with initial stresses // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. V. 58. № 5. P. 914–923;
<https://doi.org/10.15372/PMTF20170518>

16. *Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Sheidakov D.N.* Higher-Order Modules in the Equations of Dynamics of a Prestressed Elastic Solid // *Mech. Solids*. 2019. V. 54, P. 491–501; <https://doi.org/10.3103/S0025654419040010>
17. *Pau A., Vestroni F.* The role of material and geometric nonlinearities in acoustoelasticity // *Wave Motion*. 2019. V. 86. P. 79–90; <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2018.12.005>
18. *Destrade M., Ogden R.W.* On stress-dependent elastic moduli and wave speeds // *J. Appl. Math.* 2013. V. 78. № 5. P. 965–997; <https://doi.org/10.1093/imamat/hxs003>
19. *Yang H., Fu Li-Yun, Fu Bo-Ye, Müller T.M.* Acoustoelastic FD simulation of elastic wave propagation in prestressed media // *Front. Earth Sci.* 2022. V. 10; <https://doi.org/10.3389/feart.2022.886920>
20. *Pao YH., Gamer U.* Acoustoelastic waves in orthotropic media // *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. V. 77. P. 806–812; <https://doi.org/10.1121/1.392384>
21. *Pozdeev A.A., Trusov P.V., Nyashin Yu.I.* Large elastoplastic deformations: theory, algorithms, applications. 1986. M.: Nauka.
22. *Brovko G.L.* A class of models of elastic bodies under finite deformations and stability of equilibrium // *Stability in the mechanics of a deformable solid / Materials of the II All-Union Symposium*. Kalinin. 1986. P. 111–121.
23. *Markin A.A., Tolokonnikov L.A.* Measures of the final deformation processes // *Proceedings of the North Caucasian Scientific Center of Higher Education. Natural sciences*. 1987. № 2. P. 49–53.
24. *Markin A.A., Sokolova M.Y.* Variant of nonlinear elasticity relations // *Mechanics of Solids*. 2019. V. 54. № 8. P. 1182–1188; <https://doi.org/10.3103/S0025654419080089>
25. *Sokolova M.Yu., Khristich D.V.* Finite strains of nonlinear elastic anisotropic materials. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 2021. № 70. P. 103–116; <https://doi.org/10.17223/19988621/70/9>
26. *Markin A.A., Sokolova M.Y., Khristich D.V.* Nonlinear elasticity of cubic crystals // *Elasticity and Anelasticity / Materials of the International Scientific Symposium on the problems of mechanics of deformable bodies, dedicated to the 110th anniversary of the birth of A.A. Ilyushin*. Moscow, 2021. P. 100–110.