

УДК 539.3

ТЕОРИЯ ТОНКИХ УПРУГИХ ПЛАСТИН – ИСТОРИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

© 2024 г. В. В. Васильев^{а,*}

^аЦентральный НИИ специального машиностроения, Хотьково, Россия

*e-mail: vvvas@dol.ru

Поступила в редакцию 09.10.2023 г.

После доработки 24.10.2023 г.

Принята к публикации 27.10.2023 г.

Статья является аналитическим обзором и посвящена теории тонких, изотропных упругих пластин. Приводятся основные соотношения теории, основанной на кинематической гипотезе, согласно которой тангенциальные перемещения распределяются линейно по толщине пластины, а ее прогиб не зависит от нормальной координаты. В результате получена система уравнений шестого порядка относительно двух потенциальных функций – проникающего потенциала, определяющего прогиб пластины, и краевого потенциала, позволяющего поставить на краю пластины три граничных условия и устранить известное противоречие теории пластин Кирхгофа. Рассмотрены задачи, не имеющие корректного решения в рамках теории Кирхгофа – цилиндрический изгиб пластины со свободным краем, изгиб прямоугольной пластины с неклассическим шарнирным закреплением, кручение квадратной пластины моментами, распределенными по контуру, изгиб пластины жестким штампом. В заключение представлен краткий исторический обзор работ, посвященных теории изгиба пластин.

Ключевые слова: теория тонких упругих пластин

DOI: 10.31857/S1026351924020018, EDN: uwrosi

1. Введение. Рассмотрим прямоугольную пластину, отнесенную к координатам x, y, z , и определим ее как тело, относительная толщина которого $\bar{h} = h / a$, где a – характерный размер пластины в плане (рис. 1), значительно меньше единицы. Асимптотический анализ уравнений теории упругости показывает [1], что если принять порядок деформаций пластины в плоскости xu равным ε , то порядок деформаций сдвига в плоскостях xz и yz оказывается равным $\bar{h}^2\varepsilon$, а порядок деформации в направлении оси z составляет $\bar{h}^4\varepsilon$. Таким образом, трансверсальные по отношению к плоскости xu деформации для относительно тонких пластин оказываются второстепенными. Это обстоятельство, по существу, и лежит в основе традиционно называемой классической теории пластин, построенной в XIX в. С. Пуассоном и Г. Кирхгофом [2] и предполагающей линейное распределение

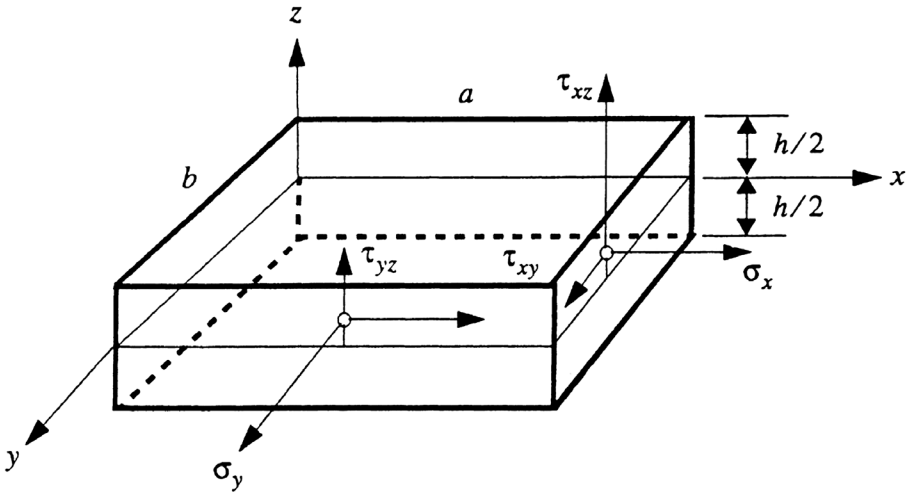


Рис. 1. Напряжения, действующие в пластине.

тангенциальных перемещений по толщине пластины и независимость прогиба от нормальной координаты, то есть

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) = z\theta_x(x, y), \quad u_y(x, y, z) = z\theta_y(x, y), \\ u_z(x, y, z) = w(x, y) \end{aligned}, \quad (1.1)$$

Здесь θ_x и θ_y – углы поворота элемента пластины в плоскостях xz и yz , которые выражаются через прогиб пластины:

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (1.2)$$

Для поля перемещений, определяемого равенствами (1.1) и (1.2), имеем $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$ и $\varepsilon_z = 0$, то есть трансверсальные деформации отсутствуют. В результате теория сводится к бигармоническому уравнению для прогиба:

$$D\Delta\Delta(w) = p. \quad (1.3)$$

где $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – изгибная жесткость пластины и p – давление, действующее на ее поверхности.

Традиционная классическая теория обладает принципиальным недостатком, следующим из соотношений (1.2). В задаче изгиба элемент пластины обладает тремя независимыми степенями свободы, соответствующими перемещению w и углам поворота θ_x, θ_y . Однако в обсуждаемой теории эти кинематические переменные не являются взаимно независимыми, так как углы поворота выражаются через прогиб. В результате возникает известное противоречие между порядком уравнения (1.3) и числом граничных условий – на краю пластины действуют три напряжения (два касательных и одно нормальное,

(рис. 1), а уравнение (1.3) позволяет сформулировать только два условия. Это противоречие породило многолетнюю дискуссию, которая завершилась формальным преобразованием статических граничных, предложенных Г. Кирхгофом [3] и физически обоснованных Томсоном и Тэтом [4], но не приведших к окончательному решению проблемы [5]. Попытки построить теорию пластин, свободную от отмеченного недостатка, продолжаются [6]. Здесь не обсуждаются многочисленные работы, посвященные уточненным теориям пластин из материалов с относительно низкой трансверсальной жесткостью. Рассматриваются тонкие изотропные пластины, то есть предлагается ревизия традиционной классической теории пластин.

2. Уравнения теории пластин. Приведем основные соотношения теории, выведенные в работах [7–9] и основанные на результатах, полученных Г. Кирхгофом [3], Г. Генки [10] и Л. Болле [11]. Поле перемещений задается, как и в теории Г. Кирхгофа, равенствами (1.1), в которых углы поворота являются независимыми переменными и не связаны с прогибом равенствами (1.2). Эти равенства, предложенные Г. Генки [10], обеспечивают существование трех независимых степеней свободы элемента пластины и устраняют основной недостаток традиционной классической теории. При этом трансверсальные деформации сдвига оказываются отличными от нуля и учитываются приближенно, а деформация в направлении оси z остается равной нулю. Напряжения, действующие в плоскости пластины, определяются законом Гука и имеют вид:

$$\sigma_x = \bar{E}z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) (x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu)z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \quad \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2}. \quad (2.1)$$

Символ (x, y) обозначает перестановку индексов, позволяющую получить из равенства для направления x аналогичное равенство для направления y . Имеется принципиальная возможность использовать аналогичный подход для определения трансверсальных касательных напряжений, то есть

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu) \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu) \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (x, y). \quad (2.2)$$

Это выражение не удовлетворяет статическим граничным условиям на поверхностях пластины, которые свободны от нагрузки так, что $\tau_{xz}(z = \pm h/2) = 0$ (рис. 1). Однако полученный результат является неправомерным, так как он требует дифференцирования перемещения u_x по координате z . Дело в том, что функция $u_x(z)$ в равенствах (1.1) является приближенной, а дифференцирование приближенных функций, как известно, не допускается. Для того чтобы исключить операцию дифференцирования, введем равнодействующие касательных напряжений – поперечные силы:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = \frac{1}{2} \bar{E}(1 - \nu) \left[u_x(h/2) - u_x(-h/2) + h \frac{\partial w}{\partial x} \right] = S\gamma_x(x, y), \quad (2.3)$$

$$\gamma_x = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (x, y). \quad (2.4)$$

Здесь γ_x – осредненная по толщине пластины деформация сдвига, а $S = \bar{E}h(1 - \nu) / 2$ – жесткость пластины при трансверсальном сдвиге. Таким образом, равенство (2.2) в рассматриваемой теории отсутствует, а соотношения упругости для трансверсального сдвига существуют только в форме осредненной по толщине. Такая ситуация представляется естественной, так как деформация пластины в направлении оси z равна нулю, то есть она считается абсолютно жесткой в этом направлении. Как известно, распределение напряжений по поверхности абсолютно жесткого тела не влияет на его поведение – существенны только равнодействующие силы (в рассматриваемом случае это поперечные силы Q_x и Q_y).

Напряжения (2.1) статически эквивалентны моментам:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = D \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) (x, y), \\ M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \frac{1}{2} D(1 - \nu) \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Моменты и поперечные усилия, действующие на элемент пластины, связаны традиционными уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0, \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (2.6)$$

Подставляя в эти уравнения силы и моменты из равенств (2.3), (2.4) и (2.5), получим следующую систему:

$$L_{11}(\theta_x) + L_{12}(\theta_y) + L_{13}(w) = 0 \quad (2.7)$$

$$L_{21}(\theta_x) + L_{22}(\theta_y) + L_{23}(w) = 0 \quad (2.8)$$

$$L_{31}(\theta_x) + L_{32}(\theta_y) + L_{33}(w) + p = 0 \quad (2.9)$$

Здесь

$$L_{11}(\cdot) = \frac{D}{S} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} - (\cdot), \quad L_{12}(\cdot) = L_{21}(\cdot) = k^2 \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x \partial y},$$

$$L_{22}(\cdot) = \frac{D}{S} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} - (\cdot), \quad L_{13}(\cdot) = -\frac{1}{S} L_{31}(\cdot) = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial x},$$

$$L_{23}(\cdot) = -\frac{1}{S} L_{32}(\cdot) = -\frac{\partial(\cdot)}{\partial y}, \quad L_{33}(\cdot) = S \Delta(\cdot).$$

$$k^2 = \frac{D}{2S}(1 - \nu), \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}.$$

Используя операторный метод, приведем эту систему к одному уравнению относительно функции F в соответствии с равенствами:

$$\begin{aligned} \theta_x &= L_{12}L_{23}(F) - L_{13}L_{22}(F) = -\frac{\partial}{\partial x} L(F), \\ \theta_y &= L_{21}L_{13}(F) - L_{23}L_{11}(F) = -\frac{\partial}{\partial y} L(F), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$w = L_{11}L_{22}(F) - L_{12}L_{21}(F) = L(F) - \frac{D}{S}\Delta L(F), \quad L(F) = F - k^2\Delta F. \quad (2.11)$$

Подстановка равенств (2.10) в уравнения (2.7) и (2.8) приводит к тождественному удовлетворению этих уравнений, а подстановка в уравнение (2.9) дает

$$D\Delta\Delta(F) = p. \quad (2.12)$$

Предположим, что $L(F) \neq 0$, и введем потенциальную функцию:

$$\varphi = L(F). \quad (2.13)$$

Тогда из соотношений (2.10) и (2.11) следует:

$$\theta_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \theta_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad w = \varphi - \frac{D}{S}\Delta\varphi. \quad (2.14)$$

и уравнение (2.12) приводится к форме:

$$D\Delta\Delta\varphi = p. \quad (2.15)$$

Следует заметить, что уравнение (2.15) имеет четвертый порядок, тогда как система (2.7)–(2.9) имеет шестой порядок. Следовательно, должно существовать еще одно уравнение второго порядка. Учтем, что преобразования (2.10), (2.11) несправедливы, если $L(F) = 0$. В этом случае, согласно равенствам (2.11), $w = 0$. Как следует из соотношений (2.14), функция φ является потенциалом движения в плоскости пластины. Действительно, при $z = z_0$ из равенств (1.1) имеем:

$$u_x^0 = \theta_x z_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} z_0, \quad u_y^0 = \theta_y z_0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} z_0. \quad (2.16)$$

В результате угол поворота в плоскости пластины

$$\omega_z^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x^0}{\partial y} - \frac{\partial u_y^0}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Как известно из кинематики, в общем случае движение складывается из потенциальной и вращательной составляющей. Вращение в плоскости пластины описывается соотношениями:

$$\theta_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad w = 0. \quad (2.18)$$

В этом случае аналогично равенствам (2.16) и (2.17) имеем:

$$u_x^0 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} z_0, \quad u_y^0 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} z_0, \quad \omega_z^0 = \frac{z_0}{2} \Delta \Psi.$$

Подстановка равенств (2.18) в уравнение (2.9) дает $p = 0$, а уравнения (2.7) и (2.8) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} L(\psi) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} L(\psi) = 0.$$

Оператор $L(\cdot)$ определяется равенством (2.11). Таким образом, $L(\psi) = \text{const}$. Принимая несущественную для потенциальной функции константу равной нулю, получим:

$$k^2 \Delta \psi - \psi = 0, \quad k^2 = \frac{D}{2S}(1 - \nu) = \frac{h^2}{6(1 - \nu)}. \quad (2.19)$$

Поскольку задача является линейной, ее общее решение определяется суперпозицией решений (2.14) и (2.19), то есть

$$\theta_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \theta_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad w = \varphi - \frac{D}{S} \Delta \varphi. \quad (2.20)$$

Потенциалы φ и ψ определяются из уравнений (2.15) и (2.19). Моменты и поперечные усилия выражаются через потенциальные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right], \\ M_y &= -D \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right], \\ M_{xy} &= -D(1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$Q_x = S \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi + S \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Q_y = S \left(\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta \varphi + S \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

Напряжения, действующие в плоскости пластины, следуют из равенств (2.1) и (2.5):

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z, \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z, \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z. \quad (2.22)$$

Трансверсальные касательные напряжения определяются интегрированием уравнений равновесия теории упругости с учетом граничных условий на поверхностях пластины и имеют следующий окончательный вид:

$$\tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right), \quad \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right). \quad (2.23)$$

При $S \rightarrow \infty$ имеем $k = 0$, из уравнений (2.15) и (2.19) следует $\varphi = w$, $\psi = 0$, и рассматриваемая теория вырождается в традиционную классическую теорию пластин. При конечном значении коэффициента сдвиговой жесткости построенная теория учитывает два эффекта, связанные с деформацией сдвига. Первый эффект связан со вторым членом в последнем равенстве (2.14) и учитывает влияние сдвига на прогиб пластины при изгибе. Второй эффект описывается уравнением (2.19), которое определяет быстро изменяющееся напряженное состояние, связанное с кручением пластины. Это состояние невозможно описать, если считать, что пластина обладает бесконечно большой жесткостью при поперечном сдвиге.

Таким образом, рассматриваемая теория сводится к уравнениям (2.15) и (2.19) для потенциальных функций φ и ψ . Аналогичные функции были впервые введены в работе Л. Болле [11].

В теории Кирхгофа, как следует из соотношений (1.2) и (2.17), $\varphi = w$ и $\psi = 0$, то есть потенциальной функцией для углов поворота является прогиб, а потенциал, позволяющий учесть возможный поворот элемента пластины в ее плоскости, отсутствует.

3. Граничные условия. Полученные уравнения имеют в совокупности шестой порядок, и их решение должно удовлетворять на краю пластины трем граничным условиям. Для формулировки граничных условий воспользуемся вариационным принципом Лагранжа. В рамках принятых гипотез вариация функционала Лагранжа имеет вид:

$$\delta L = \iiint \left[\begin{aligned} & \sigma_x \delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \sigma_y \delta \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \\ & + \tau_{xy} \delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \tau_{xz} \delta \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ & + \tau_{yz} \delta \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right] dx dy dz - \iint p \delta w dx dy$$

С учетом соотношений, представленных в разделе 2, этот функционал может быть приведен к двумерной форме:

$$\delta L = \iint \left[\begin{aligned} &M_x \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + M_y \delta \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \\ &+ M_{xy} \delta \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + Q_x \gamma_x + Q_y \gamma_y - p \delta w \end{aligned} \right] dx dy . \quad (3.1)$$

Используя вариационный принцип Лагранжа и традиционные операции варьирования, из функционала (3.1) можно получить три уравнения равновесия (2.6). Отсюда следует, что рассматриваемая теория является энергетически согласованной. Таковой предлагается считать теорию, для которой из вариационного принципа Лагранжа следуют уравнения, обеспечивающие равновесие бесконечно малого элемента пластины как твердого тела [12, 13]. Заметим, что теория Кирхгофа не является энергетически согласованной. Действительно, вариация функционала (3.1) для этой теории имеет вид

$$\delta L = \iint \left[M_x \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + M_y \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2M_{xy} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - p \delta w \right] dx dy . \quad (3.2)$$

и приводит к следующему вариационному уравнению:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0 . \quad (3.3)$$

Равновесие бесконечно малого элемента пластины как твердого тела обеспечивается уравнениями (2.6). Вариационное уравнение (3.3) следует из них, но не эквивалентно им. Возможное нарушение условий равновесия элемента пластины в теории Кирхгофа отмечается в работе П.А. Жилина [14].

Вернемся к обсуждаемой теории. Осуществляя варьирование в функционале (3.1) и используя принцип Лагранжа, получим:

$$\delta L = \iint \left\{ \begin{aligned} &(D \Delta \Delta \varphi - p) \delta w + \frac{\partial}{\partial y} \left[S \Psi - \frac{D}{2} (1 - \nu) \Delta \Psi \right] \delta \theta_x + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[S \Psi - \frac{D}{2} (1 - \nu) \Delta \Psi \right] \delta \theta_y \end{aligned} \right\} dx dy \quad (3.4)$$

$$+ \left[\int (M_x \delta \theta_x + M_{xy} \delta \theta_y + Q_x \delta w) dy \right]_x +$$

$$+ \left[\int (M_y \delta \theta_y + M_{xy} \delta \theta_x + Q_y \delta w) dx \right]_y = 0 .$$

Отсюда следуют уравнения (2.15) и (2.19) и три естественные граничные условия. Рассмотрим типовые граничные условия.

Предположим, что край $x = 0$ жестко закреплен. На нем, согласно уравнению (3.4), должны выполняться граничные условия $\theta_x = \theta_y = w = 0$. При этом из равенств (1.1) следует $u = v = w = 0$, т.е. в рамках принятых гипотез перемещения

на закрепленном краю тождественно равны нулю. Используя равенства (2.20), имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{D}{S} \Delta \varphi = \varphi. \quad (3.5)$$

Рассмотрим случай свободного опирания края $x = 0$. В рассматриваемой теории возможны два варианта граничного условия.

Классическое условие соответствует пластине, опертой на стенки, которые являются абсолютно гибкими и абсолютно жестким в своей плоскости. В этом случае на краю имеем $w = M_x = \theta_y = 0$. С учетом соотношений (2.20) и (2.21) получим:

$$\varphi = \frac{D}{S} \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Проведем некоторые преобразования. Используя последнее условие (3.6), исключим $\partial \psi / \partial x$ из второго условия. В результате получим $\Delta \varphi = 0$. Тогда с учетом первого условия для края $x = 0$ имеем:

$$\varphi = \Delta \varphi = 0. \quad (3.7)$$

С учетом этих соотношений последнее условие (3.6) дает $\partial \psi / \partial x = 0$ на краях $x = 0, a$. Аналогично на краях $y = 0, b$ получим $\partial \psi / \partial y = 0$. Таким образом, функция ψ определяется из однородного уравнения (2.19) с однородными граничными условиями, накладываемыми на нормальную производную функции. Такая краевая задача имеет тривиальное решение, т.е. $\psi = 0$ [15]. Таким образом, свободно опертая в традиционном смысле пластина описывается уравнением (2.15) с граничными условиями (3.7).

Второй случай свободного опирания соответствует пластине со свободными краями, лежащей на опорах. В этом случае $w = M_x = M_{xy} = 0$ или

$$\varphi = \frac{D}{S} \Delta \varphi, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right). \quad (3.8)$$

Исключая из последнего условия $\partial^2 \psi / \partial x^2$ с помощью уравнения (2.19), получим:

$$\psi - \frac{D}{S} (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

При $S \rightarrow \infty$ отсюда имеем $\psi = 0$, и первые два условия (3.8) вырождаются в классические условия свободного опирания края пластины.

Критическими для теории Кирхгофа являются граничные условия для свободного края пластины. Выполняя операцию варьирования в функционале (3.2) и вводя поперечные силы с помощью уравнений равновесия (2.6), имеем:

$$\begin{aligned}
\delta L = & \iint \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p \right) \delta w dx dy + \\
& + \left[\int_0^b M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right]_x + \left[\int_0^a M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \right]_y - \\
& - \left[\int_0^b \left(Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) \delta w dy \right]_x - \left[\int_0^a \left(Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) \delta w dx \right]_y + 2 [M_{xy} \delta w]_{x,y}.
\end{aligned} \quad (3.9)$$

Из условия $\delta L = 0$ получим уравнение (3.3) и два граничных условия на краю $x = 0$ – одно для изгибающего момента и второе для обобщенной поперечной силы Кирхгофа:

$$K_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] (x, y). \quad (3.10)$$

Вторая часть этого условия была формально получена из вариационного принципа Г. Кирхгофом [3] без ассоциации с какой-либо силой. Первая часть условия (3.10) была получена позже У. Томсоном и П. Тэтом [4], которые использовали теорему статики, позволяющую привести крутящий момент к паре сил. Справедливость этой операции вызывает сомнение, так как такое приведение строго возможно для абсолютно жесткого тела, каковым не является упругая пластина. Еще один сомнительный момент связан с последним членом в равенстве (3.9). В угловой точке прямоугольной пластины (она обозначается символом x, y) удвоенный крутящий момент умножается на δw и может быть интерпретирован как сосредоточенная сила:

$$P = 2M_{xy}. \quad (3.11)$$

В общем случае такие силы на пластину не действуют.

Вернемся к теории, рассмотренной в разделе 2. Если край $x = 0$ свободен от нагрузки, из равенства (3.4) имеем $M_x = M_{xy} = Q_x = 0$. Из соотношений (2.22) и (2.23) при этом следует, что $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$, то есть в рамках принятых гипотез напряжения на свободном краю пластины отсутствуют. С помощью равенств (2.21) получим:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right), \quad \frac{D}{S} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Преобразуем второе из этих условий. Исключая из него $\partial^2 \psi / \partial x^2$ с помощью уравнения (2.19), дифференцируя вдоль края (по y) и используя последнее условие (3.12) для исключения $\partial \psi / \partial y$, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{D}{S} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Delta \varphi \right] = 0.$$

При $S \rightarrow \infty$ имеем $\varphi = w$ и получаем граничное условие Кирхгофа, выражающееся через обобщенную поперечную силу (3.10). При этом угловые силы (3.11) не появляются. Рассмотрим некоторые задачи, иллюстрирующие теорию.

4. Анализ конкретных задач теории пластин. В качестве первой задачи рассмотрим пластину, занимающую область $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq b$, у которой края $y = 0$ и $y = b$ свободно оперты, а край $x = 0$ свободен от нагрузки (рис. 2). Пластина нагружена давлением, изменяющимся по закону $p_1 = p_0 \sin \pi y / b$.

Для свободно опертых продольных краев пластины имеем следующие граничные условия:

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \tag{4.1}$$

Этим условиям удовлетворяет решение в виде:

$$\varphi = \Phi(x) \sin \lambda y, \quad \psi = \Psi(x) \cos \lambda y, \quad \lambda = \pi / b. \tag{4.2}$$

Подставляя выражения (4.2) в уравнения (2.15) и (2.19), получим:

$$D(\Phi^{(4)} - 2\lambda^2 \Phi^{(2)} + \lambda^4 \Phi) = p_0, \quad \Psi^{(2)} - r^2 \Psi = 0, \quad r^2 = \lambda^2 + \frac{1}{k^2}, \quad \lambda = \frac{\pi}{b}.$$

Решения этих уравнений для полубесконечной пластины (рис. 2) записываются следующим образом:

$$\Phi = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 x e^{-\lambda x} + \frac{p_0}{D\lambda^4}, \quad \Psi = C_3 e^{-rx}.$$

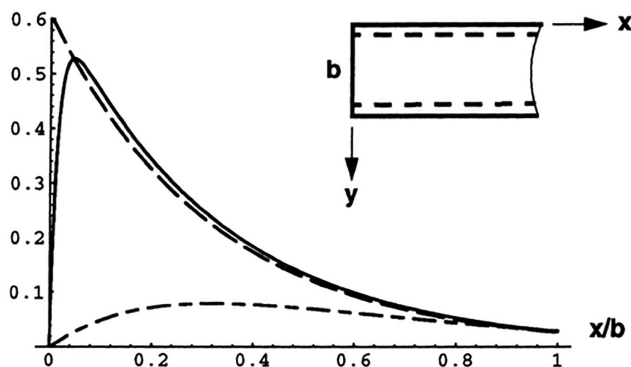


Рис. 2. Распределение относительных поперечных сил по продольной координате: — $\bar{Q}_x(x, y = b/2)$, - - - $\bar{Q}_x^k(x, y = b/2)$, - · - $\bar{K}_x(x, y = b/2)$.

Предположим, что край $x = 0$ свободен от нагрузки, то есть на нем выполняются условия $M_x = 0$, $M_{xy} = 0$, $Q_x = 0$, из которых определяются постоянные $C_{1,2,3}$. В качестве примера рассмотрим пластину с параметрами $h/b = 0.05$, $\nu = 0.3$, для которой $\lambda = 3.14/b$, $r = 69.35/b$. Окончательно получим:

$$w = \frac{p_0}{D\lambda^4} \left[1 + 0.178e^{-\lambda x} \left(1 - 1.69 \frac{x}{b} \right) \right] \sin \lambda y, \quad Q_x = 0.64 \frac{p_0 \nu}{\lambda} (e^{-\lambda x} - e^{-rx}) \sin \lambda y. \quad (4.3)$$

Для сравнения запишем решение, соответствующее классической теории пластин, которое при $x = 0$ должно удовлетворять условиям $M_x = 0$, $K_x = 0$, где K_x – обобщенная поперечная сила Кирхгофа (3.10). Имеем:

$$w_k = \frac{p_0}{D\lambda^4} \left[1 + 0.169e^{-\lambda x} \left(1 - 1.69 \frac{x}{b} \right) \right] \sin \lambda y, \quad Q_x^k = 0.606 \frac{p_0 \nu}{\lambda} e^{-\lambda x} \sin \lambda y, \quad (4.4)$$

$$K_x = 0.666 \frac{p_0 \nu}{b\lambda} x e^{-\lambda x} \sin \lambda y. \quad (4.5)$$

Сравнивая классическое решение (4.4) с равенствами (4.3), можно заключить, что прогибы пластины w и w_k различаются незначительно. Изменение относительных поперечных усилий $(\bar{Q}, \bar{K}) = \lambda(Q, K) / p_0 \nu$ по продольной координате показано на рис. 2. Усилие \bar{Q}_x (4.3) в соответствие с граничным условием обращается в ноль при $x = 0$. Усилие \bar{Q}_x^k (4.4) не удовлетворяет этому условию, однако вдали от края $x = 0$ оно практически совпадает с усилием \bar{Q}_x . Усилие \bar{K}_x (4.5) удовлетворяет граничному условию, однако не имеет ничего общего с усилием \bar{Q}_x .

Известная проблема классической теории пластин связана с расчетом пластин, опирающихся ко контуру на упругие балки. Возникает вопрос: какую силу реактивную следует передавать на балку – поперечную силу Q или обобщенную поперечную силу K ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим пластину, показанную на рис. 2, и предположим, что край $x = 0$ этой пластины подкреплен упругой балкой. Возможны два варианта уравнений равновесия балки. Согласно теории пластин, описанной в разделе 2, на балку действуют со стороны пластины поперечное усилие Q_x^0 и крутящий момент M_{xy}^0 , которые изгибают балку (индекс 0 обозначает, что решение теории пластин записывается для края $x = 0$). Соответствующие уравнения равновесия балки имеют вид:

$$\frac{dQ_b}{dy} + Q_x^0 = 0, \quad \frac{dM_b}{dy} - Q_b + M_{xy}^0 = 0. \quad (4.6)$$

Используя равенства (2.21) и решение (4.2) при $S \rightarrow \infty$ и $\psi = 0$ (балка описывается классической теорией) имеем:

$$Q_x^0 = -D \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi \right)_0 = -D \left(\Phi_0''' - \lambda^2 \Phi_0' \right) \sin \lambda y,$$

$$M_{xy}^0 - D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 = -D(1 - \nu) \lambda \Phi_0' \cos \lambda y .$$

Интегрируя первое уравнение (4.6) и учитывая условие симметрии, согласно которому $Q_b(y = b / 2) = 0$, получим:

$$Q_b = -\frac{D}{\lambda} (\Phi_0'' - \lambda^2 \Phi_0') \cos \lambda y .$$

В результате второе уравнение (4.6) принимает вид:

$$\frac{dM_b}{dy} + \frac{D}{\lambda} [\Phi_0'' - \lambda^2 (2 - \nu) \Phi_0'] \cos \lambda y = 0 . \quad (4.7)$$

Теперь, согласно теории Кирхгофа, предположим, что на балку действует со стороны пластины только обобщенная поперечная сила:

$$K_x^0 = Q_x^0 + \frac{\partial M_{xy}^0}{\partial y} = -D [\Phi_0''' - (2 - \nu) \lambda^2 \Phi_0''] \sin \lambda y .$$

В этом случае уравнения равновесия балки имеют вид:

$$\frac{dQ_b}{dy} + K_x^0 = 0, \quad \frac{dM_b}{dy} - Q_b = 0 . \quad (4.8)$$

Интегрируя первое уравнение (4.8), найдем:

$$Q_b = -\frac{D}{\lambda} [\Phi_0''' - (2 - \nu) \lambda^2 \Phi_0''] \cos \lambda y .$$

Подстановка этого результата во второе уравнение (4.8) приводит к уравнению (4.7). Таким образом, возможны два эквивалентных подхода к определению краевых реакций пластины, воздействующих на балку, – приложение краевой поперечной силы Q_x^0 в сочетании с краевым крутящим моментом M_{xy}^0 или приложение обобщенной поперечной силы K_x^0 . Полученный результат представляется естественным, так как обобщенная поперечная сила получается в результате статического преобразования крутящего момента к поперечной силе. Таким образом, при расчете пластин с краем, подкрепленным балкой, в рамках теории Кирхгофа силу взаимодействия между пластиной и балкой следует определять как обобщенную поперечную силу Кирхгофа.

В качестве второго примера рассмотрим прямоугольную пластину, показанную на рис. 3 и нагруженную давлением, распределенным по закону:

$$q = -p = q_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} . \quad (4.9)$$

Такая нагрузка, с одной стороны, позволяет существенно упростить решение, а с другой стороны, позволяет сохранить все качественные особенности решения, соответствующего произвольной нагрузке. При традиционном свободном

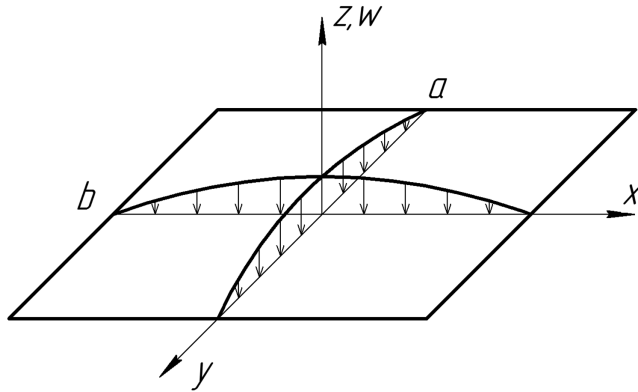


Рис. 3. Прямоугольная свободно опертая пластина.

опиранию на краю пластины отсутствуют прогиб, изгибающий момент и угол поворота в плоскости края.

Изгиб пластины описывается уравнениями (2.15) и (2.19) с граничными условиями в форме (3.7). Представим функцию φ , удовлетворяющую этим граничным условиям, в виде:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Используя уравнение (2.15) для нагрузки в форме (4.9), получим:

$$\varphi_0 = -\frac{q_0 a^4 b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2}.$$

В результате прогиб пластины (2.14) принимает вид:

$$w_0 = -\frac{q_0 a^4 b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2} \left[1 + \frac{\pi^2 D}{S} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \right] \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Второе слагаемое в квадратных скобках учитывает влияние деформации сдвига на прогиб пластины. Для рассматриваемых граничных условий $\psi = 0$. Равенства (2.21) приводят к следующим выражениям для поперечных усилий:

$$Q_x = Q_x^0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad Q_y = Q_y^0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (4.10)$$

где

$$Q_x^0 = \frac{q_0 a b^2}{\pi (a^2 + b^2)}, \quad Q_y^0 = \frac{q_0 a^2 b}{\pi (a^2 + b^2)}.$$

Найдем равнодействующую опорных реакций. С учетом равенств (4.10) имеем:

$$R = \int_{-b/2}^{b/2} [Q_x(a/2) - Q_x(-a/2)] dy + \int_{-a/2}^{a/2} [Q_y(b/2) - Q_y(-b/2)] dx = \frac{4}{\pi^2} q_0 ab. \quad (4.11)$$

С другой стороны, равнодействующая внешней нагрузки (4.9) имеет вид:

$$R = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} q dx dy = \frac{4}{\pi^2} q_0 ab. \quad (4.12)$$

Таким образом, поперечные усилия Q_x и Q_y уравнивают внешнюю нагрузку. Распределение безразмерного усилия $\bar{Q}_x = Q_x / Q_0$ по краю $x = a/2$ для квадратной ($a = b$) пластины показано на рис. 4.

Рассмотрим аналогичную задачу в рамках классической теории пластин. При нагрузке (4.9) решение уравнения (1.3) имеет вид:

$$w = -\frac{q_0 a^4 b^4}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Поперечные усилия Q , действующие на краях пластины, уравнивают внешнюю нагрузку, однако традиционно [16] в качестве опорных реакций в рассматриваемой задаче предлагается считать обобщенные поперечные усилия Кирхгофа (3.10), т.е., например:

$$K_x = -\frac{q_0 ab^2}{\pi (a^2 + b^2)^2} [b^2 + (2 - \nu)a^2] \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}. \quad (4.13)$$

Замена Q на K в выражении (4.11) дает следующую равнодействующую опорных реакций:

$$R_1 = R \left[1 + \frac{2(1 - \nu)a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} \right].$$

Эта величина не совпадает с силой R , определяемой равенством (4.11), т.е. обобщенные поперечные усилия Кирхгофа не уравнивают внешнюю нагрузку. Для квадратной ($a = b$) пластины различие составляет $(1 - \nu) / 2$, т.е. 35%. Для других задач это различие может быть еще больше [17]. Распределение безразмерного усилия $\bar{K}_x = K_x / Q_0$ по краю $x = a/2$ для квадратной пластины показано на рис. 4. Для выполнения условия равновесия пластины как твердого тела необходимо учесть сосредоточенные силы (3.11), приложенные в угловых точках пластины. Если обобщенные усилия Кирхгофа трактуются как реальные контурные реакции, то и эти силы (необходимые для равновесия пластины) следует считать реальными. В результате равнодействующая опорных реакций имеет вид

$$R = R_1 - \Delta R, \quad \Delta R = 8[M_{xy}]_{x,y} = \frac{2(1-\nu)q_0a^2b^2}{\pi^2(a^2 + b^2)^2}$$

и уравнивает приложенную нагрузку.

Заметим, что точное решение задачи теории упругости для свободно опертой плиты получено в 1931 г. Б.Г. Галеркиным. Для плиты, поверхности $z = \pm h/2$ которой свободны от касательных напряжений, а поверхность $z = -h/2$ нагружена давлением (4.9), трансверсальные напряжения имеют вид:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-\nu)\Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right], \quad \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(1-\nu)\Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right]$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[(2-\nu)\Delta F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right], \quad \Delta(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2},$$

где

$$F = (C_1 \text{sh } \lambda z + C_2 \text{ch } \lambda z + C_3 z \text{ch } \lambda z + C_4 z \text{sh } \lambda z) \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \quad \lambda = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

Постоянные $C_1 - C_4$ определяются из граничных условий $\sigma_z(-h/2) = 0$, $\sigma_z(h/2) = -q$, $\tau_{xz}(-h/2) = \tau_{xz}(h/2) = 0$ (или $\tau_{yz}(h/2) = \tau_{yz}(-h/2) = 0$).

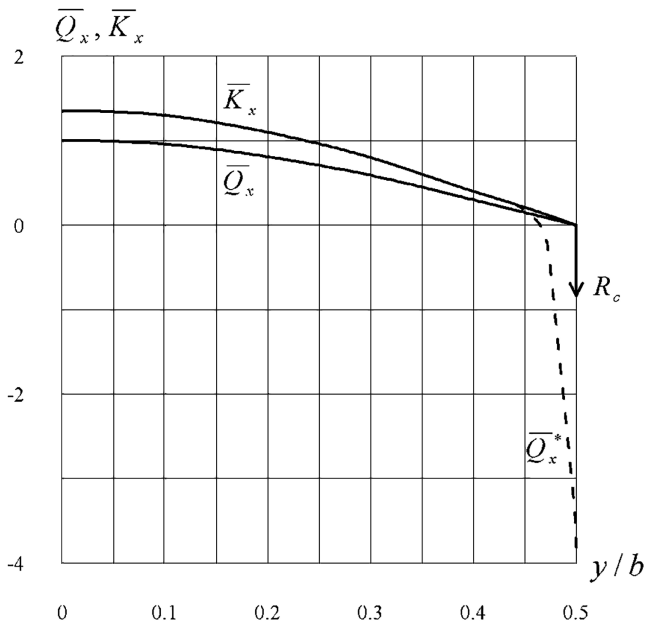


Рис. 4. Распределение поперечных усилий по краю пластины.

Не останавливаясь на определении этих постоянных, заметим, что приведенное решение, очевидно, не имеет особенностей в угловых точках пластины, которые могут быть интерпретированы как сосредоточенные силы. Таким образом, для свободно опертой пластины преобразования Кирхгофа и Томсона–Тэта явно несправедливы. Более того, в этих преобразованиях просто нет необходимости.

Рассмотрим прямоугольную пластину с нетрадиционным вариантом свободного опирания, при котором на краю пластины отсутствуют прогиб, изгибающий и крутящий моменты. В этом случае граничные условия определяются равенствами (3.8). Для края $x = \text{const}$ граничные условия имеют вид:

$$\phi - \frac{D}{S} \Delta \phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - (1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (4.14)$$

$$2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.15)$$

Рассмотрим квадратную ($a = b$) пластину, нагруженную давлением (4.9) (рис. 3), и будем искать решение уравнений (2.15) и (2.19) в форме [15]:

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{qa^4}{4\pi^4 D} \cos \lambda_1 x \cos \lambda_1 y + \\ & + \sum_m \left[C_1^m (\text{ch } \lambda_m y \cos \lambda_m x + \text{ch } \lambda_m x \cos \lambda_m y) + \right. \\ & \left. + C_2^m (y \text{ sh } \lambda_m y \cos \lambda_m x + x \text{ sh } \lambda_m x \cos \lambda_m y) \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\psi = \sum_m B_m (\text{sh } \kappa_m y \sin \lambda_m x + \text{sh } \kappa_m x \sin \lambda_m y),$$

$$\lambda_m = (2m - 1) \frac{\pi}{a}, \quad \kappa_m^2 = \lambda_m^2 + s^2.$$

Подстановка решений (4.16) в граничные условия (4.14) позволяет выразить коэффициенты C_1^m и C_2^m через B_m , а граничное условие (4.15) приводит к бесконечной системе алгебраических уравнения для коэффициентов B_m . Есть основания ожидать, что для одночленной аппроксимации давления (4.9) можно ограничиться в рядах (4.16) только одним первым членом, приняв $m = 1$ и $\lambda_m = \lambda_1 = \pi / a$. В результате можно получить приближенное распределение поперечного усилия по краю $x = a/2$ пластины в виде:

$$\bar{Q}_x^* = \frac{Q_x^*}{Q_x^0} = \cos \frac{\pi y}{a} - \frac{1 - \nu}{\pi} \left(\frac{\sqrt{3} a \text{ ch } \lambda y}{h \text{ ch } \bar{\lambda}} - \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi y}{a} \right),$$

где

$$Q_x^0 = \frac{q_0 a}{2\pi}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{12}{h^2}}, \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{2} \lambda a.$$

Распределение усилия $\bar{Q}_x^*(y/b)$ по краю $x = a/2$ пластины с относительной толщиной $h/a = 0.1$ показано на рис. 4 штриховой линией. В середине рассматриваемой стороны, т.е. при $y = 0$ имеем:

$$\bar{Q}_x^*(y = 0) = 1 + (1 - \nu) / 2.$$

При $y=0$ усилие Q_x^* совпадает не с поперечным усилием Q_x , следующим из классической теории пластин, а с обобщенным усилием Кирхгофа K_x . В угловой точке края, т.е. при $y = a/2$, получим:

$$\bar{Q}_x^*(y = a/2) = -(1 - \nu)\sqrt{3}a / \pi h. \quad (4.17)$$

Как следует из рис. 4, в средней части края кривая отражает распределение обобщенного поперечного усилия Кирхгофа классической теории пластин (сплошная линия \bar{K}_x), а в окрестности угловой точки имеет место краевой эффект (штриховая кривая \bar{Q}_x^*), изменяющий знак усилия Q_x^* . Для абсолютно тонкой пластины ($h \rightarrow 0$) равенство (4.17) имеет особенность, которую можно интерпретировать как сосредоточенную силу. Таким образом, для рассматриваемых граничных условий обобщенное поперечное усилие Кирхгофа является контурной реакцией в средней части края, а сосредоточенная сила, получаемая в угловой точке края в результате преобразований Кирхгофа и Томсона–Тэта, может быть истолкована как асимптотическое приближение для бесконечно тонкой пластины. Заметим, что этот анализ справедлив только для пластины, лежащей на опорах. В работе [16] он неправомерно используется для обоснования теории Кирхгофа применительно к задаче об изгибе пластины с традиционным вариантом классического шарнирного опирания.

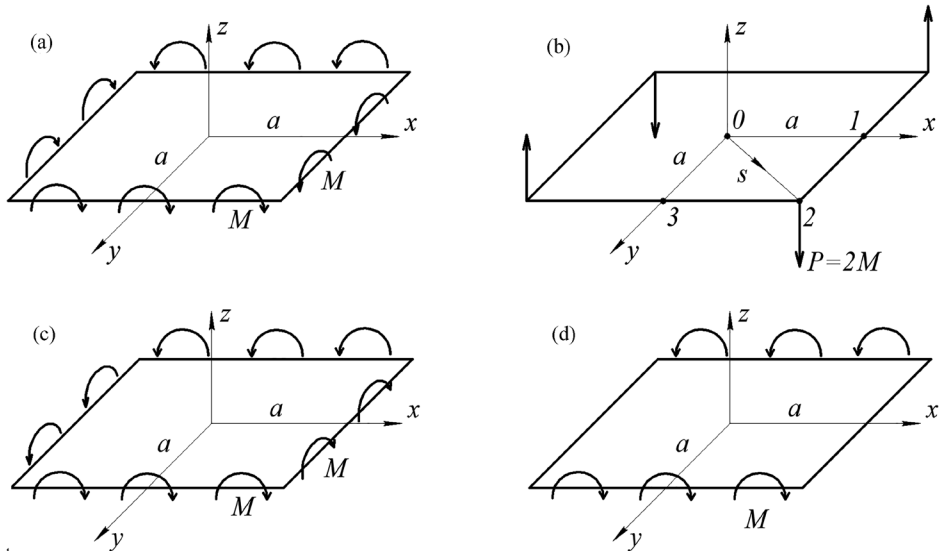


Рис. 5. Кручение пластины распределенными моментами и угловыми силами.

Асимптотическая интерпретация преобразований Кирхгофа и Томсона–Тэта обсуждается в работе П.А. Жилина [14].

Рассмотрим еще одну классическую задачу теории упругих пластин – кручение квадратной изотропной пластины моментами, распределенными по краям пластины и силами, приложенными в угловых точках (рис. 5) [18].

Задача о кручении пластины угловыми силами занимает особое место в теории пластин. Ее традиционное решение, полученное в конце XIX в. Г. Лэмбом, В. Томсоном и П. Тэтом [19] и экспериментально обоснованное А. Надаи [20], до настоящего времени используется в учебной литературе для иллюстрации преобразований Кирхгофа и Томсона–Тэта [16] и служит основой для экспериментального метода определения модуля сдвига ортотропных материалов [21].

Рассмотрим чистое кручение пластины моментами M , равномерно распределенными по ее сторонам (рис. 5, а). Прогиб пластины w описывается в рамках традиционной классической теории пластин уравнением (1.3). Задавая прогиб в виде

$$w = -\frac{Mxy}{D(1-\nu)} \quad (4.18)$$

и полагая, что давление $p = 0$, можно тождественно удовлетворить уравнение (1.3) и получить решение, соответствующее условиям нагружения пластины, показанной на рис. 5, а. Однако в теории Кирхгофа существует обсуждавшееся выше преобразование, приводящее крутящий момент к обобщенной поперечной силе (3.10). Для прогиба в форме (4.18) эта сила равна нулю, и отличными от нуля оказываются только угловые сосредоточенные силы (3.11). Таким образом, формально задача о кручении пластины распределенными краевыми моментами (рис. 5, а) в рамках теории Кирхгофа сводится к задаче кручения пластины угловыми сосредоточенными силами $P = 2M_{xy}$. Для пластины, показанной на рис. 5, б, имеем $P = 2M$. Прогиб такой пластины определяется равенством (4.18), если выразить M через P , то есть

$$w = \frac{Pxy}{2D(1-\nu)}. \quad (4.19)$$

Таким образом, задачи о кручении пластин, показанных на рис. 5, а и 5, б, формально являются идентичными, если справедливы преобразования Кирхгофа. Однако фактически эти задачи различаются, что вызывает сомнение в справедливости этих преобразований. Действительно, выражение (4.18) является точным решением задачи о кручении пластины моментами (рис. 5, а). При таком нагружении в пластине действуют только крутящие моменты, и пластина находится в равновесии при отсутствии поперечных сил Q_x и Q_y . Однако в задаче о кручении пластины угловыми силами (рис. 5, б) поперечные силы также оказываются равными нулю. Если выделить некоторой гладкой кривой участок пластины в окрестности ее угла, то этот участок оказывается нагруженным только угловой силой P и не находится в равновесии.

Ограниченность традиционной классической теории пластин применительно к рассматриваемой задаче о кручении пластины в еще большей степени проявляется в задаче о кручении пластины моментами, равномерно распределенными по

контур (рис. 5, с). В этом случае сила Кирхгофа оказывается равной нулю, и угловые силы, появляющиеся в результате преобразования Кирхгофа, отсутствуют. В результате задача классической теории пластин оказывается однородной и имеет только тривиальное решение. Таким образом, нагрузка, показанная на рис. 5, с, не вызывает деформации пластины, что трудно признать корректным решением.

На основании изложенного выше можно заключить, что для решения задачи о кручении пластины угловыми силами необходимо привлекать теорию пластин, описанную в разделе 2. Эта теория сводится к уравнениям (2.15) и (2.19) для потенциальных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Рассмотрим задачу о кручении пластины краевыми моментами, показанную на рис. 5, а. Примем решение в виде:

$$\varphi = \frac{Mxy}{D(1-\nu)}, \quad \psi = 0.$$

Тогда уравнения (2.15) и (2.19) удовлетворяются тождественно (при $p = 0$), изгибающие моменты и поперечные силы (2.21) оказываются равными нулю, крутящий момент $M_{xy} = M$, а последнее равенство (2.20) приводит к соотношению (4.18) для прогиба пластины. Таким образом, для пластины, нагруженной моментами (рис. 5, а), полученное решение совпадает с решением, следующим из традиционной классической теорий пластин.

Получим решение задачи о кручении пластины угловыми силами (рис. 5, б). Введем безразмерные координаты $\bar{x} = x/a, \bar{y} = y/a$, где $2a$ – длина стороны пластины так, что $-1 \leq \bar{x}, \bar{y} \leq 1$, и представим угловые силы в виде поверхностной нагрузки, действующей на срединную плоскость пластины. Разлагая эту нагрузку в двойной тригонометрический ряд, получим:

$$p = \frac{4P}{a^2} \sum_m \sum_n \sin \lambda_m \sin \lambda_n \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}, \quad \lambda_m = \frac{2m-1}{2} \pi, \quad \lambda_n = \frac{2n-1}{2} \pi.$$

Подставляя p в уравнение (2.15), найдем его частное решение:

$$\varphi_p = \frac{4Pa^2}{D} \sum_m \sum_n \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}. \quad (4.20)$$

Учитывая условия симметрии задачи, общие решения однородных уравнений (2.15) и (2.19) будем искать в форме:

$$\begin{aligned} \varphi_0 = & \sum_m C_1^m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} + \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) + \\ & + \sum_m C_2^m (\bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y} \sin \lambda_m \bar{x}), \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\psi_0 = \sum_m C_3^m (\cos \lambda_m \bar{x} \cosh \eta_m \bar{y} - \cosh \eta_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y}), \quad \eta_m^2 = \lambda_m^2 + \frac{12a^2}{h^2}. \quad (4.22)$$

В результате общие решения принимают вид $\varphi = \varphi_p + \varphi_0$ и $\psi = \psi_0$. Подставляя эти решения в равенства (2.20) и (2.21), получим следующие выражения для прогиба, моментов и поперечной силы:

$$\begin{aligned}
 w = \frac{4Pa^2}{D} & \left\{ \sum_m \bar{C}_1^m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} + \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & + \sum_m \bar{C}_2^m [\bar{x} \cosh \lambda_m \bar{y} \sin \lambda_m \bar{x} + \bar{y} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} - \\
 & - \frac{\lambda_m h^2}{3(1-\nu)a^2} (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y})] + \\
 & \left. + \sum_m \sum_n \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \left[1 + \frac{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)h^2}{6(1-\nu)a^2} \right] \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y} \right\}, \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_x = -4P(1-\nu) & \left\{ \sum_m C_1^m \lambda_m^2 (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y} - \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & + \sum_m \bar{C}_2^m \lambda_m \left[\frac{2}{1-\nu} (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & - (2 \sinh \lambda_m \bar{y} + \lambda_m \bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y}) \sin \lambda_m \bar{x} + \lambda_m \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} \left. \right] + \\
 & \left. + \sum_m \bar{C}_3^m \lambda_m \eta_m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \eta_m \bar{y} - \sinh \eta_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) \right\} + \\
 & + 4P \sum_m \sum_n \frac{\lambda_m^2 + \nu \lambda_n^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \sin \lambda_m \sin \lambda_n \sin \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} = -2P(1-\nu) & \left\{ 2 \sum_m \bar{C}_1^m \lambda_m^2 (\cos \lambda_m \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{y} + \cosh \lambda_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
 & + 2 \sum_m \bar{C}_2^m \lambda_m [(\cosh \lambda_m \bar{y} + \lambda_m \bar{y} \sinh \lambda_m \bar{y}) \cos \lambda_m \bar{x} + \\
 & + (\cosh \lambda_m \bar{x} + \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{x}) \cos \lambda_m \bar{y}] - \\
 & - \sum_m \bar{C}_3^m (\lambda_m^2 + \eta_m^2) (\cosh \eta_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y} + \cos \lambda_m \bar{x} \cosh \eta_m \bar{y}) + \\
 & \left. + 2 \sum_m \sum_n \lambda_m \lambda_n \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2} \cos \lambda_m \bar{x} \cos \lambda_n \bar{y} \right\}, \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x = & 24 \frac{Pa}{h^2} \left[\sum_m \bar{C}_3^m (\eta_m \cos \lambda_m \bar{x} \sinh \eta_m \bar{y} + \lambda_m \cosh \eta_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) \cdot \right. \\
& - \sum \bar{C}_2^m \frac{\lambda_m^2 h^2}{3(1-\nu)a^2} (\cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} + \cos \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) \left. \right] + \quad (4.26) \\
& + \frac{4P}{a} \sum_m \sum_n \lambda_m \frac{\sin \lambda_m \sin \lambda_n}{\lambda_m^2 + \lambda_n^2} \cos \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_n \bar{y}.
\end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные коэффициенты:

$$\bar{C}_i^m = C_i^m \frac{D}{4Pa^2} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.27)$$

Постоянные \bar{C}_i^m определяются из граничных условий, которые для края $\bar{x} = 1$ имеют вид:

$$Q_x(\bar{y}) = 0, \quad M_{xy}(\bar{y}) = 0, \quad M_x(\bar{y}) = 0. \quad (4.28)$$

Из первого и второго граничных условий (4.28) найдем:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_3^m = & \frac{\lambda_m h^2 \cosh \lambda_m}{3(1-\nu)a^2 \cosh \eta_m} \bar{C}_2^m, \quad \bar{C}_1^m = -c_m \bar{C}_2^m, \\
c_m = & \frac{1}{\lambda_m} + \tanh \lambda_m - \frac{(\lambda_m^2 + \eta_m^2)h^2}{6\lambda_m(1-\nu)a^2}. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

Подставляя коэффициенты (4.29) в третье граничное условие (4.28), умножая его на $\sin \lambda_i \bar{y}$ и интегрируя по \bar{y} от 1 до 2, получим следующую связанную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных \bar{C}_2^m :

$$\begin{aligned}
& \bar{C}_2^i \lambda_i \frac{\cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i} \left[2 \tanh \lambda_i + \lambda_i (1-\nu) (1 - c_i \tanh \lambda_i) - \frac{\lambda_i \eta_i h^2}{3a^2} \tanh \eta_i \right] + \\
& + \sum_m \bar{C}_2^m \frac{2\lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \sin \lambda_m \cosh \lambda_m \left[(1-\nu) \left(c_m \lambda_m - \lambda_m \tanh \lambda_m + \frac{\lambda_m^2 - \lambda_i^2}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \right) \right. \\
& \left. + 2\nu + \frac{\eta_m^2 h^2 (\lambda_m^2 + \lambda_i^2)}{3a^2 (\eta_m^2 + \lambda_i^2)} \right] = \sum_m \frac{\lambda_m^2 + \nu \lambda_i^2}{(\lambda_m^2 + \lambda_i^2)^2}. \quad (4.30)
\end{aligned}$$

В работе А. Надаи [20] приведены результаты экспериментального исследования стальной пластины с параметрами $a = 81.32$ мм, $h = 14.96$ мм ($h/2a = 0.092$), $E = 198.44$ ГПа, $\nu = 0.3$ и $P = 4.96$ кН. Прогиб пластины измерялся с высокой точностью (до 0.001 мм) в точках, расположенных на диагонали 0–2 пластины, показанной на рис. 5, б. Для точек диагонали

имеем $\bar{x} = \bar{y} = \bar{s}\sqrt{2}$, где $\bar{s} = s / a$ и s – диагональная координата (рис. 5, b). Для численного анализа в приведенных выше разложениях принималось $m = n = i = 10$. Результаты представлены на рис. 6, где показаны зависимости относительного прогиба пластины $\bar{w} = wD / (Pa^2)$ от диагональной координаты \bar{s} . Точками показаны результаты эксперимента. Сплошная линия соответствует решению (4.23), штриховая линия соответствует традиционному классическому решению (4.19).

Как следует из рис. 6, классическая теория пластин описывает прогиб с удовлетворительной точностью. Однако этот вывод справедлив только для

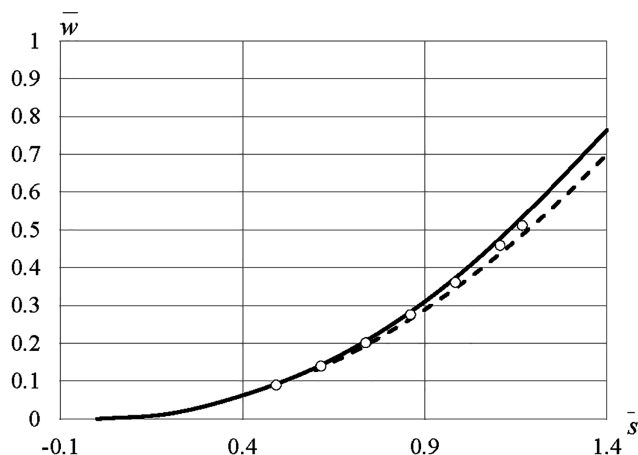


Рис. 6. Распределение прогиба вдоль диагонали квадратной пластины, соответствующее решениям (4.23) (—) и (4.19) (- - -) и эксперименту (o).

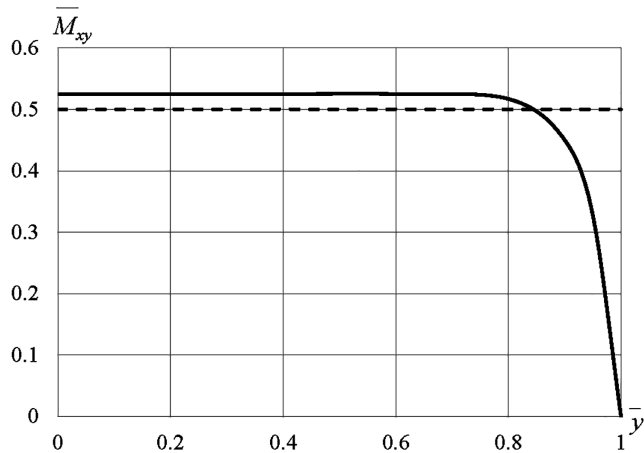


Рис. 7. Распределение относительного крутящего момента по координате \bar{y} при $\bar{x} = 0$, соответствующее уравнению (4.25) (—) и теории Кирхгофа (- - -).

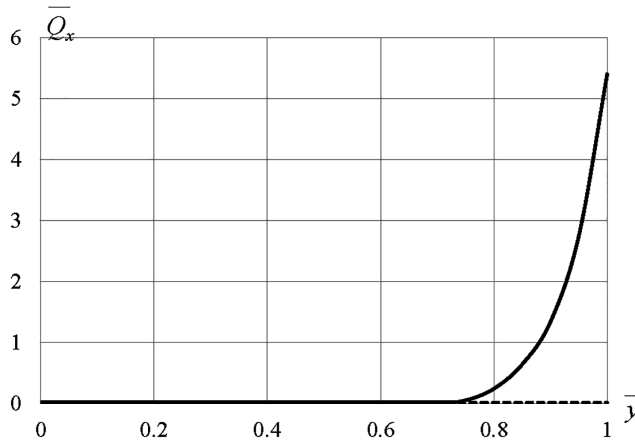


Рис. 8. Распределение относительной поперечной силы по координате \bar{y} при $\bar{x} = 0$, соответствующее уравнению (4.26) (—) и теории Кирхгофа (- - -).

прогиба. На рис. 7 показано распределение относительного крутящего момента $\bar{M}_{xy} = M_{xy} / P$ в сечении $x = 0$.

Сплошная линия соответствует рассматриваемой теории, а штриховая — традиционной классической теории. На рис. 8 представлено распределение относительной поперечной силы $\bar{Q}_x = Q_x a / P$ в сечении $x = 0$, из которого следует, что поперечная сила, действующая в сечении, ортогональном краю, отлична от нуля на краю пластины и уравнивается угловую силу. Теория Кирхгофа дает $\bar{Q}_x = 0$ (штриховая линия на рис. 8).

Рассмотрим задачу о кручении пластины краевыми моментами, не изменяющими своего направления при обходе контура пластины (рис. 5, с). Граничные условия для такой пластины отличаются знаком крутящего момента от условий, соответствующих пластине, показанной на рис. 5, а, то есть

$$M_x = 0, Q_x = 0, M_{xy} = -M \text{ при } x = a, \quad (4.31)$$

$$M_y = 0, Q_y = 0, M_{xy} = M \text{ при } y = a. \quad (4.32)$$

Для того чтобы удовлетворить эти граничные условия, решения следует искать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi = \sum_m [\bar{C}_1^m (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} - \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}) + \\ + \bar{C}_2^m (\bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y} \sin \lambda_m \bar{x} - \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y})] \\ \psi = \sum_m \bar{C}_3^m (\cos \lambda_m \bar{x} \cosh \eta_m \bar{y} + \cosh \eta_m \bar{x} \cos \lambda_m \bar{y}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

где, как и ранее,

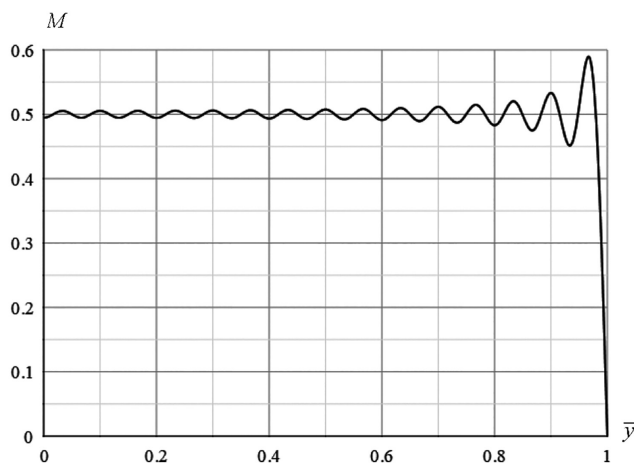


Рис. 9. Зависимость $M(\bar{y})$.

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \bar{y} = \frac{y}{a}, \lambda_m = \frac{2m-1}{2} \pi, \eta_m^2 = \lambda_m^2 + \frac{12a^2}{h^2}.$$

Для решения задачи достаточно удовлетворить граничные условия (4.31). При этом граничные условия (4.32) удовлетворяются автоматически. Представим момент M , действующий на краю $\bar{x} = 1$, следующим образом:

$$M = \sum_m M_m \cos \lambda_m \bar{y}, \quad M_m = \frac{2M}{\lambda_m} \sin \lambda_m. \quad (4.34)$$

Заметим, для того чтобы симметрия касательных напряжений не нарушалась в угловых точках края пластины, момент в этих точках должен обращаться в ноль. Разложение (4.34) удовлетворяет этому условию – зависимость $M(\bar{y})$ показана на рис. 9.

Из третьего и второго граничного условия (4.31) получим выражения для постоянных \bar{C}_3^m и \bar{C}_1^m :

$$\psi = \sum_m B_m (\text{sh } \kappa_m y \sin \lambda_m x + \text{sh } \kappa_m x \sin \lambda_m y)$$

$$\bar{C}_1^m = -d_m \bar{C}_2^m - \frac{2Ma^2 \sin \lambda_m}{D(1-\nu)\lambda_m^3 \cosh \lambda_m} \quad d_m = \frac{1}{\lambda_m} + \tanh \lambda_m + \frac{(\lambda_m^2 + \eta_m^2)h^2}{6\lambda_m(1-\nu)a^2},$$

где $\bar{C}_i^m = C_i^m Ma^2 / D$ ($i = 1, 2, 3$). Первое граничное условие (4.31) приводит к системе алгебраических уравнений для постоянных \bar{C}_2^m :

$$\begin{aligned}
& \bar{C}_2^i \lambda_i \frac{\cosh \lambda_i}{\sin \lambda_i} \left[\lambda_i (1 - \nu) (1 + d_i \tanh \lambda_i) - 2 \tanh \lambda_i + \frac{\lambda_i \eta_i h^2}{3a^2} \right] + \\
& \quad + 2 \sum_m \lambda_m^2 \bar{C}_2^m \frac{\sin \lambda_m \cosh \lambda_m}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \times \\
& \times \left[(1 - \nu) \left(d_m \lambda_m + \lambda_m \tanh \lambda_m + \frac{2(2 - \nu)}{1 - \nu} \frac{\lambda_m^2 - \lambda_i^2}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2} \right) + \frac{h^2 \eta_m^2 (\lambda_m^2 + \lambda_i^2)}{3a^2 (\eta_m^2 + \lambda_i^2)} \right] = \\
& \quad = -\frac{2}{\lambda_i} \tanh \lambda_i - \sum_m \frac{4}{\lambda_m^2 + \lambda_i^2}.
\end{aligned}$$

Прогиб пластины определяется равенством:

$$\begin{aligned}
w = \frac{Ma^2}{D} \sum_m \bar{C}_2^m \left\{ \left[d_m - \frac{\lambda_m h^2}{3(1 - \nu)a^2} \right] (\sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y} - \sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y}) + \right. \\
\left. + [\bar{y} \cosh \lambda_m \bar{y} - \bar{x} \cosh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}] \right\} - \\
- \frac{2Ma^2}{D(1 - \nu)} \sum_m \frac{\sin \lambda_m}{\lambda_m^3 \cosh \lambda_m} (\sin \lambda_m \bar{x} \sinh \lambda_m \bar{y} - \sinh \lambda_m \bar{x} \sin \lambda_m \bar{y}).
\end{aligned} \quad (4.35)$$

Зависимость относительного прогиба $\bar{w} = Dw / Ma^2$ от координаты $\bar{x} = x / a$ на краю пластины $y = a$ (рис. 5, с) представлена на рис. 10 сплошной линией. В рамках теории Кирхгофа для такой задачи получим $w = 0$.

Суперпозицией решений для пластин, показанных на рис. 5, а и 5, с, можно получить решение для пластины, у которой поперечные края нагружены

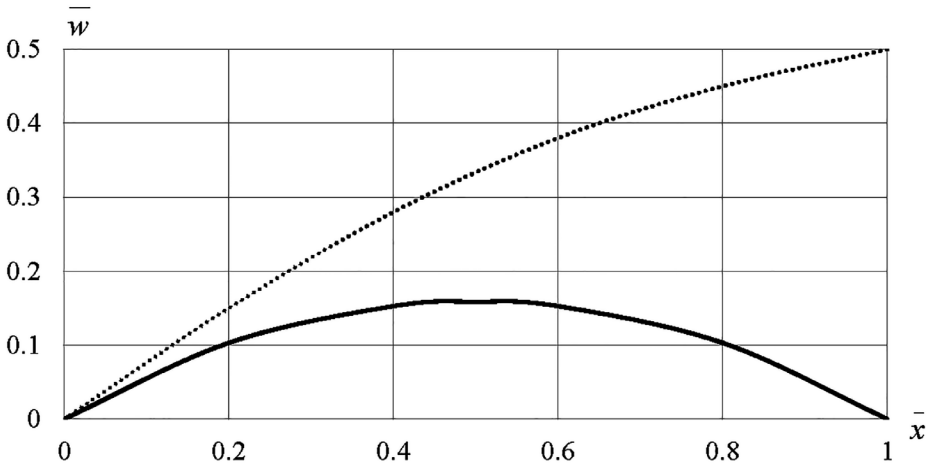


Рис. 10. Зависимость относительного прогиба от координаты \bar{x} на краю $\bar{y} = 1$.

распределенными крутящими моментами, а продольные края свободны (рис. 5, d). Соответствующая зависимость для прогиба показана на рис. 10 точечной линией.

В качестве последнего примера рассмотрим пластину, изгибаемую жестким штампом. В зоне контакта пластины со штампом прогиб пластины соответствует поверхности штампа. Предположим, что эта поверхность такова, что $\Delta\Delta w = 0$. Тогда из уравнения теории Кирхгофа (1.3) следует, что $p = 0$, то есть давление, изгибающее пластину, отсутствует. Этот результат не имеет физического смысла. Используем для решения этой задачи уравнения (2.14) и (2.15). Преобразуем эти уравнения. Воздействуя бигармоническим оператором на последнее уравнение (2.14), имеем:

$$\Delta\Delta w = \Delta\Delta\phi - \frac{D}{S} \Delta\Delta\Delta\phi.$$

Выражая $\Delta\Delta\phi$ через p с помощью уравнения (2.15), получим следующее уравнение для контактного давления:

$$\Delta p - \frac{S}{D} p = 0.$$

Это уравнение Гельмгольца, решение которого имеет характер краевого эффекта. Таким образом, контактное давление сосредоточено вблизи границы области контакта между пластиной и штампом.

В заключение рассмотрим вопрос о практической применимости теории Кирхгофа для расчета пластин. Выше были приведены примеры задач, для которых эта теория не позволяет получить корректного решения. Однако эти примеры специально подобраны и не отражают реальной ситуации — для большинства практически значимых задач теория Кирхгофа приводит к вполне приемлемым результатам. Для выявления таким задач вернемся к вариации функционала Лагранжа (3.2) и, используя уравнения равновесия (2.6), приведем ее к виду:

$$\begin{aligned} \delta L = & \iint \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p \right) \delta w dx dy + \\ & = \left[\int_0^b M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \right]_x + \left[\int_0^a M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \right]_y - \\ & \quad - \left[\int_0^b Q_x \delta w dy \right]_x - \left[\int_0^a Q_y \delta w dx \right]_y + \\ & \quad + \left[\int_0^b M_{xy} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \right]_x + \left[\int_0^a M_{xy} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \right]_y. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Дальнейшее варьирование приводит к выражению (3.9), однако мы ограничимся анализом функционала (4.36). Для внутренней области выполняется уравнение равновесия (3.3) и двойной интеграл обращается в нуль. Предположим,

что пластина оперта по контуру, на котором $w = 0$. Тогда обращаются в нуль интегралы, включающие поперечные силы. Поскольку на контуре пластины прогиб равен нулю, то соответственно равна нулю и производная от прогиба вдоль контура. В результате обращаются в нуль все остальные интегралы в выражении (4.16). Таким образом, $\delta L = 0$ и теория Кирхгофа фактически требует только двух граничных условий – отсутствия прогиба на контуре пластины и отсутствия изгибающих моментов или углов поворота в направлении нормали к контуру пластины. Это соответствует традиционным условиям шарнирного опирания или жесткого закрепления краев пластины. Для таких пластин два граничных условия соответствуют четвертому порядку уравнения (1.3). Для большинства практически важных задач сформулированные выше условия удовлетворяются, и теория Кирхгофа является вполне корректной.

5. К истории теории пластин. Исторический обзор, начинающийся с результатов, полученных С. Пуассоном, А. Навье и Г. Кирхгофом, представлен в работах [7, 22]. Здесь обсуждаются результаты, имеющие непосредственное отношение к теории, представленной в разделе 2.

Традиционно начало проблемы ассоциируется с работой С.П. Тимошенко [23] по динамике балок, в которой к прогибу, вызванному изгибом пластины, добавлялся прогиб, вызванный сдвигом. Анализ этой и близких к ней теорий представлен в работе [24].

В дальнейшем этот подход был распространен Я.С. Уфляндом на пластины [25]. Вводимая изначально геометрически, гипотеза С.П. Тимошенко, по существу, соответствует соотношениям (2.4), согласно которым

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_x - \theta_x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_y - \theta_y.$$

То есть углы поворота касательной к деформированной срединной поверхности пластины не равны углам поворота нормали к этой поверхности (с обратным знаком) и отличаются от них на деформации сдвига, которые связаны с поперечными усилиями равенствами (2.3). В результате получаются уравнения, позволяющие учитывать влияние сдвига на прогиб пластины. Предложенная в работе С. П. Тимошенко сдвиговая модель, оказалась настолько привлекательной, что впоследствии все теории пластин с линейным распределением перемещений по толщине часто связывались с его именем. Для этого нет оснований. Уравнение теории пластин, основанное на этой модели, имеет четвертый порядок и не решает принципиальной проблемы традиционной классической теории – несоответствия числа граничных условий порядку уравнения. Теория пластин должна сводиться к системе уравнений шестого порядка.

Интересно, что Я.С. Уфляндом получена система уравнений шестого порядка, аналогичная системе (2.7)–(2.8), однако она сведена к уравнению динамики четвертого порядка, аналогичному уравнению статики (2.15), а дополнительное уравнение второго порядка, аналогичное уравнению (2.19), в теории отсутствует.

Исследование влияния инерции поворота элемента пластины и деформации сдвига на частоты свободных колебаний прямоугольных пластин представлено в работе Р.Д. Миндлина [26]. Эта работа получила столь широкое распространение, что соответствующая теория пластин в зарубежной литературе имеет название

«Теория Миндлина». Для этого нет оснований – фактически в работе [26] используется уравнение, полученное Я.С. Уфляндом [25].

Принципиально новый результат был опубликован в 1944–1945 гг. Э. Рейсснером [27, 28]. Теория построена в напряжениях. В качестве исходных приняты выражения для напряжений (2.22) и (2.23), следующие из теории Кирхгофа, то есть

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z(x, y), \quad \tau_{xy} = \frac{12M_{xy}}{h^3} z, \quad \tau_{xz} = \frac{3Q_x}{2h} \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right) (x, y). \quad (5.1)$$

Для вывода уравнений использовался вариационный принцип Кастильяно. С этой целью напряжения (5.1) подставлялись в выражение для потенциальной энергии деформации и учитывались уравнения равновесия классической теории пластин. В частности, в последнее равенство (5.1) подставлялось выражение

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} (x, y),$$

следующее из уравнений равновесия (2.6), и строился расширенный функционал, включающий уравнение равновесия для моментов:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p_1 = 0.$$

Это уравнение вводилось в функционал с помощью множителя Лагранжа, которым являлся прогиб пластины w . В результате минимизации функционала получены довольно громоздкие уравнения

$$D\Delta\Delta w = p_1 - \frac{(2-\nu)h^2}{10(1-\nu)} \Delta p_1. \quad (5.2)$$

$$M_{xy} - \frac{h^2}{10} \Delta M_{xy} = -(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{h^2}{10} \left[\frac{h^2}{5(1-\nu)} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x \partial y} + D(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Delta w \right] \quad (5.3)$$

и еще два аналогичных уравнения для M_x и M_y . В результате Э. Рейсснером были установлены два фундаментальных результата. Во-первых, показано, что уравнение для прогиба (5.2) имеет четвертый порядок. Дело в том, что в теории пластин, в которой напряжения сводятся к силам и моментам, согласно равенствам (5.1), уравнение для прогиба шестого порядка существовать не может. Действительно, в случае цилиндрического изгиба пластины на ее краю действуют только два силовых фактора – поперечная сила и изгибающий момент, соответствующие уравнению четвертого порядка. Во-вторых, обнаружен краевой эффект, описываемый левой частью уравнения (5.3). В дальнейшем для этого эффекта было получено отдельное уравнение:

$$\frac{h^2}{10} \Delta \chi - \chi = 0, \quad (5.4)$$

где χ – функция напряжений такая, что $Q_x = \partial \chi / \partial y$, $Q_y = -\partial \chi / \partial x$.

Особенностью теории Э. Рейсснера является то, что она построена на основе теории Кирхгофа и принципа Кастильяно, не использовавшегося ранее для этой цели. Причины этого обсуждаются ниже.

Я познакомился с Э. Рейсснером в апреле 1993 г. на конференции в Калифорнии и затем состоял с ним в переписке. Меня интересовали причины, по которым он использовал нетрадиционный подход к построению теории пластин, основанный на принципе Кастильяно. Дело в том, что принятые им в качестве исходных соотношения (5.1) соответствуют полю перемещений (1.1), то есть линейному распределению тангенциальных перемещений по толщине пластины. Как показано в разделе 2, использование этих соотношений позволяет получить значительно более простые уравнения, описывающие те же эффекты, что и теория Рейсснера. Насколько я понял, соображения, которыми он руководствовался, связаны с равенствами (2.2). Он справедливо полагал, что дифференцирование перемещений по нормальной координате приведет к потере точности и нарушению статических граничных условий для касательных напряжений. В связи с этим они были приняты в форме (5.1), удовлетворяющей этим граничным условиям. Как показано в разделе (2), возможную потерю точности можно избежать, компенсировав дифференцирование по нормальной координате интегрированием с использованием равенства (2.3).

Следующей классической работой является статья Г. Генки [10], в которой впервые было использовано поле перемещений в форме (1.1). При этом возможная потеря точности, которую пытался избежать Э. Рейсснер, вообще не обсуждалась, и для трансверсальных касательных напряжений были получены равенства (2.2), не удовлетворяющие граничным условиям. В результате была получена система уравнений (2.7)–(2.9), которые сведены к следующим уравнениям:

$$D\Delta\Delta w = p - \frac{h^2}{6(1-\nu)} \Delta p, \quad (5.5)$$

$$\frac{h^2}{12} \Delta\omega - \omega = 0, \quad \omega = \frac{\partial\theta_x}{\partial y} - \frac{\partial\theta_y}{\partial x}, \quad (5.6)$$

$$D\Delta f = -p, \quad f = \frac{\partial\theta_x}{\partial x} + \frac{\partial\theta_y}{\partial y}. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.5) и (5.6) отличаются от уравнений Э. Рейсснера (5.2) и (5.4) только коэффициентами, однако порядок системы явно завышен. Статья Г. Генки завершается уравнениями (5.5)–(5.7). Граничные условия не обсуждаются. Отсутствует и анализ специфического для теории пластин уравнения (5.6). Статья [10], опубликованная в 1947 г., была представлена в ноябре 1944 г. Создается впечатление, что статья не завершена.

В 1991 г. на последнем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике я выступил с докладом по теории пластин и предложил квалифицировать теорию, изложенную в разделе 2, как современный вариант теории пластин. Это предложение встретило неоднозначную реакцию. Под руководством С.А. Алексева, А.Л. Гольденвейзера и В.И. Феодосьева был

проведен семинар по этой проблеме, и на страницах журнала “Механика твердого тела” была организована дискуссия. В ней приняли участие Н.А. Алфутов [17], К.Ю. Волох [29], В.М. Даревский [30], А.Л. Гольденвейзер [31, 32] и П.А. Жилин [14, 33]. В целом, за исключением некоторых деталей, критика теории Кирхгофа получила одобрение в процессе дискуссии. Принципиальным противником критики этой теории оказался А.Л. Гольденвейзер, который выступил с критикой теории Э. Рейсснера еще в 1958 г. [34]. Существо этой критики связано с уравнением Гельмгольца (5.4), которое дополняет уравнение классической теории. Это уравнение рекомендуется отбросить, во-первых, потому, что оно описывает краевой эффект, быстро затухающий при удалении от края пластины, и, во-вторых, потому, что его решение имеет асимптотически более высокий порядок по отношению к малому параметру (относительной толщине пластины) по сравнению с классическим решением. Эта критика представляется необоснованной. Во-первых, быстрое затухание решения при удалении от края не является основанием для того, чтобы его отбрасывать. Функция $\exp(-kx)$ стремится к нулю при увеличении x , однако при $x = 0$ она равна единице и затухающее решение взаимодействует с проникающим через граничные условия. Это иллюстрируется задачей о цилиндрическом изгибе пластины, рассмотренной в разделе 4. Именно наличие затухающего решения позволяет обратить в ноль поперечное усилие на свободном краю пластины. Во-вторых, формальное требование одинакового асимптотического порядка составляющих решения, следующее из асимптотического метода, не является обязательным для физической теории, в которой могут равноправно состоять составляющие решения с различными асимптотическими порядками, если это обуславливается физическим смыслом задачи. Уравнение Гельмгольца необходимо в теории пластин, поскольку без него нарушаются условия равновесия и не удовлетворяются граничные условия. Эта дискуссия отражена в работах [35, 36].

Статья Л. Болле [11], опубликованная в трудах Лозаннского университета в Швейцарии, долгое время оставалась мне неизвестной — я получил ее в 2001 г. когда читал лекции в университете Сорбонна во Франции. В качестве исходного Л. Болле принимает без обоснования распределение деформаций по толщине пластины, следующее из равенств (1.1), то есть, по существу, из распределения перемещений, предложенного Г. Генки,

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} (x, y), \quad \varepsilon_{xy} = z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} (x, y).$$

То обстоятельство, что получаемые из этих соотношений выражения для трансверсальных касательных напряжений не удовлетворяют статическим граничным условиям, не обсуждается. Из уравнений равновесия получена система, аналогичная уравнениям (2.7)–(2.9), которая преобразуется введением двух функций φ и ω таких, что

$$\theta_x = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right), \quad \theta_y = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{h^2}{5} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right).$$

В результате получены уравнения:

$$D\Delta\Delta\varphi = p, \quad \Delta\omega - \frac{10}{h^2}\omega = 0,$$

первое из которых совпадает с уравнением (2.15), а второе отличается от уравнения (2.19) коэффициентом и совпадает с уравнением (5.4), полученным Э. Рейсснером. Таким образом, теория изгиба пластин, сводящаяся к системе уравнений шестого порядка и сформулированная в перемещениях, была фактически построена Л. Болле. В примечании к своей статье Л. Болле отмечает, что работа была доложена в 1946 г. на конгрессе по прикладной механике в Париже, после чего ему стало известно о работах Э. Рейсснера [27, 28], где были получены аналогичные результаты.

Различие в коэффициентах уравнений, соответствующих различным теориям, связано с так называемым корректирующим коэффициентом k_s , учитывающим неравномерность распределения трансверсальных касательных напряжений по толщине пластины. В общем случае зависимость между поперечными силами и осредненными по толщине деформациями трансверсального сдвига можно принять в виде $Q_x = k_s \gamma_x(x, y)$. Из равенства (2.3) следует, что для теории, описанной в разделе 2, $k_s = 1$. В работе Э. Рейсснера при параболическом распределении касательных напряжений (5.1) получено $k_s = 5/6$. В работе Я.С. Уфлянда [25] принято $k_s = 2/3$, что является отношением среднего касательного напряжения к его максимальному значению, следующему из равенства (5.1). В статье Р. Миндлина [26] из условия согласования решения, следующего из теории пластин, с решением трехмерной задачи динамики найден коэффициент $k_s = \pi^2/12$. Существует множество других выражений для этого коэффициента [24]. Заметим, что конкретная величина этого коэффициента не имеет большого значения. Учет деформации сдвига в теории пластин имеет скорее принципиальное, чем прикладное значение. Он позволяет получить систему уравнений шестого порядка и рассматривать задачи, не имеющие корректного решения в рамках теории Кирхгофа. Для большинства прикладных задач теории тонких изотропных пластин, поправка, вносимая в решение учетом деформации сдвига, несущественна и конкретная величина k не имеет большого значения.

6. Заключение. Через 30 с лишним лет, прошедших после последнего Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, я возвращаюсь к своему предложению квалифицировать теорию пластин, описанную в разделе 2, как современную форму классической теории пластин и излагать ее в учебных курсах. Основанная на естественном обобщении гипотез Г. Кирхгофа и методе перемещений, эта теория сопоставима с теорией Г. Кирхгофа по степени сложности. Вывод уравнений теории оказывается более сложным, но формулировка краевой задачи, не требующая преобразования Кирхгофа и Томсона–Тэта, существенно упрощается. Для пластин, закрепленных по контуру, краевым эффектом можно пренебречь, и теория сводится к теории Кирхгофа. Для пластин со свободными или нагруженными краями обобщенная сила Кирхгофа образуется естественным путем, не требующим приведения крутящего момента к поперечной силе и не вызывающим появление трудно

объяснимых угловых сил. Имеется опыт изложения этой теории в учебной литературе [37].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 23-11-00275), выданного Институтом прикладной механики РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 270 с.
2. *Todhunter L., Pearson K.* A history of the theory of elasticity and the strength of materials. N.-Y.: Dover, 1960. Pt. 1. 762 p. Pt. 2. 546 p.
3. *Кирхгоф Г.* Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
4. *Томсон У., Тэт П.* Трактаг по натуральной философии. М., Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика” Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. Ч. 2. 560 с.
5. *Васильев В.В.* О преобразованиях Кирхгофа и Томсона–Тэта в классической теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 98–107.
6. *Carrera E., Elishakoff I., Petrolo M.* Who needs refined structural theories? // Compos. Struct. 2021. V. 264. P. 1–16.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113671>
7. *Васильев В.В.* К теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.
8. *Васильев В.В.* Классическая теория пластин – история и современный анализ // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 3. С. 46–58.
9. *Vasiliev V.V.* Modern conceptions of plate theory // Compos. Struct. 2000. V. 48. № 1–3. P. 39–48.
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00071-9)
10. *Hencky H.* Uber die Berücksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten // Ing.-Archiv. 1947. V. 16. P. 72–76. <https://doi.org/10.1007/BF00534518>
11. *Bolle L.* Contribution au problem lineaire de flexion d'une plaque elastique // Bull. Tech. Suisse Romander. 1947. V. 11. P. 32.
12. *Васильев В.В., Лурье С.А.* К проблеме построения неклассических теорий пластин // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 2. С. 158–167.
13. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* On refined theories of beams, plates and shells // J. Compos. Mater. 1992. V. 26. № 4. P. 546–557.
<https://doi.org/10.1177/002199839202600405>
14. *Жилин П.А.* О классической теории пластин и преобразовании Кельвина–Тэта // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 134–140.
15. *Шереметьев М.П., Пелех Б.Л., Дячина О.П.* Исследование влияния деформации сдвига на изгиб квадратной пластины сосредоточенной силой // Прикладная механика. 1968. Т. 4. Вып. 4. С. 1–7.
16. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
17. *Алфатов Н.А.* О некоторых парадоксах теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 65–72.
18. *Васильев В.В.* Кручение квадратной изотропной пластины угловыми силами и распределенными моментами // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 20–31.
19. *Тимошенко С.П.* История науки о сопротивлении материалов. М.: URSS, 2001. 536 с.
20. *Nadai A.* Die elastischen Platten. Berlin.: Verlag von Julius Springer, 1925. 125 p.

21. Методы статических испытаний армированных пластиков. Справочное пособие под ред. Ю.М. Тарнопольского. Рига.: Зинатне, 1972. 227 с.
22. *Jamielita G.* On the winding paths of the theory of plates // *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*. J. Theor. Appl. Mech. 1993. V. 31. № 2. P. 312–327.
23. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // *Phil. Mag.* 1921. V. 41. № 245. P. 744–746.
<https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
24. *Elishakoff I.* Handbook on Timoshenko–Ehrenfest beam and Uflyand–Mindlin plate theories. World scientific publ. Co. 2020. 769 p.
25. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 8. С. 287–300.
26. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18 (1). P. 31–38.
<https://doi.org/10.1115/1.4010217>
27. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // *J. Math. Phys.* 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
28. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // *Trans. ASME*. 1945. V. 15. P. A69–A77.
29. *Волох К.Ю.* О классической теории пластин // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 156–165.
30. Даревский В.М. О статических граничных условиях в классической теории пластин и оболочек // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 4. С. 129–132.
31. *Гольденвейзер А.Л.* О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 134–149.
32. *Гольденвейзер А.Л.* Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
33. *Жилин П.А.* О теориях пластин Пуассона и Кирхгофа с позиций современной теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 48–64.
34. *Гольденвейзер А.Л.* О теории изгиба пластинок Райсснера // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1958. № 4. С. 99–109.
35. *Васильев В.В.* Об асимптотическом методе обоснования теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 3. С. 150–155.
36. *Гольденвейзер А.Л.* Замечание о статье В.В. Васильева “Об асимптотическом методе обоснования теории пластин” // Изв. РАН. МТТ. 1997. № 4. С. 150–158.
37. *Сливкер В.И.* Строительная механика: вариационные основы. Учебное пособие. М.: Изд. Ассоц. строит. вузов, 2005. 736 с.

UDC 539.3

THEORY OF THIN ELASTIC PLATE: HISTORY AND CURRENT STATE OF THE PROBLEM

© 2024 г. V. V. Vasil'ev^{a,*}^aCentral Research Institute of Special Machine Building, Hotkovo, Russia

*e-mail: vvvas@dol.ru

Abstract – The article is an analytical review and is devoted to the theory of thin, isotropic elastic plates. There are basic relations of the theory based on the kinematic hypothesis confirming that the tangential displacements are distributed linearly along the thickness of the plate and its deflection does not depend on the normal coordinate. As a result, a system of equations of the sixth order with respect to two potential functions – the penetrating potential, which determines the plate deflection, and the boundary potential which makes it possible to set three boundary conditions on the plate edge and eliminate the known contradiction of Kirchhoff's plate theory was obtained. Problems that have no correct solution in the framework of Kirchhoff's theory – cylindrical bending of a plate with a free edge, bending of a rectangular plate with non-classical hinge fixing, torsion of a square plate by moments distributed along the contour, and bending of a plate by a rigid die – are considered. In conclusion, a brief historical review of the papers devoted to the theory of plate bending was presented.

Keywords: theory of thin elastic plates

REFERENCES

1. Vasil'ev V.V. Mechanics of structures made of composite materials. M.: Mashinostroenie, 1988. 270 pp. [in Russian]
2. Todhunter L., Pearson K. A history of the theory of elasticity and the strength of materials. N.-Y.: Dover, 1960. Pt. 1. 762 p. Pt. 2. 546 p.
3. Kirghof G. Mechanics. M: Publ. of the USSR Academy of Sciences, 1962. 402 pp. [in Russian]
4. Thomson U., Tait P. Treatise on Natural Philosophy. M., Izhevsk: SIC "Regular and Chaotic Dynamics" Izhevsk Institute of Computer Research, 2011. Part 2. 560 p. [in Russian]
5. Vasil'ev V.V. On Kirchhoff and Thomson-Tait transformations in classical plate theory // RAS bulletin. Sol. Mech. 2012. № 5. P. 98–107. [in Russian]
6. Carrera E., Elishakoff I., Petrolo M. Who needs refined structural theories? // Compos. Struct. 2021. V. 264. P. 1–16.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113671>
7. Vasil'ev V.V. On the theory of thin plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1992. № 3. P. 26–47. [in Russian]
8. Vasil'ev V.V. Classical plate theory – history and modern analysis // RAS bulletin. Sol. Mech. 1998. № 3. P. 46–58. [in Russian]
9. Vasiliev V.V. Modern conceptions of plate theory // Compos. Struct. 2000. V. 48. № 1–3. P. 39–48.
[https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00071-9)

10. *Hencky H.* Uber die Berucksichtigung der Schubverzerrung in ebenen Platten // Ing.-Archiv. 1947. V. 16. P. 72–76.
<https://doi.org/10.1007/BF00534518>
11. *Bolle L.* Contribution au problem lineaire de flexion d'une plaque elastique // Bull. Tech. Suisse Romander. 1947. V. 11. P. 32.
12. *Vasil'ev V.V., Lur'e S.A.* On the problem of constructing non-classical theories of plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1990. № 2. P. 158–167. [in Russian]
13. *Vasiliev V.V., Lurie S.A.* On refined theories of beams, plates and shells // J. Compos. Mater. 1992. V. 26. № 4. P. 546–557.
<https://doi.org/10.1177/002199839202600405>
14. *Zhilin P.A.* On classical plate theory and the Kelvin-Tait transformation // RAS bulletin. Sol. Mech. 1995. № 4. P. 134–140. [in Russian]
15. *Sheremet'ev M.P., Peleh B.L., Dyachina O.P.* Investigation of the influence of shear deformation on the bending of a square plate by a concentrated force // Applied Mechanics. 1968. Vol. 4. Iss. 4. P. 1–7. [in Russian]
16. *Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S.* Plates and shells. M.: Fizmatgiz, 1963. 635 pp. [in Russian]
17. *Alfutov N.A.* On some paradoxes of the theory of thin plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1992. № 3. P. 65–72. [in Russian]
18. *Vasil'ev V.V.* Torsion of a square isotropic plate by angular forces and distributed moments // RAS bulletin. Sol. Mech. 2017. № 2. P. 20–31. [in Russian]
19. *Timoshenko S.P.* History of the strength of materials science. M.: URSS, 2001. 536 c.
20. *Nadai A.* Die elastischen Platten. Berlin.: Verlag von Julins Springer, 1925. 125 p.
21. Methods of static tests of reinforced plastics. Reference manual ed. by Y.M. Tarnopolskiy. Riga: Zinatne, 1972. 227 pp. [in Russian]
22. *Jamielita G.* On the winding paths of the theory of plates // Mechanika Teoretyczna i Stosowana. J. Theor. Appl. Mech. 1993. V. 31. № 2. P. 312–327.
23. *Timoshenko S.P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // Phil. Mag. 1921. V. 41. № 245. P. 744–746.
<https://doi.org/10.1080/14786442108636264>
24. *Elishakoff I.* Handbook on Timoshenko-Ehrenfest beam and Uflyand-Mindlin plate theories. World scientific publ. Co. 2020. 769 p.
25. *Uflyand Ya.S.* Wave propagation in transverse vibrations of rods and plates // J. App. Math. Mech. 1948. Vol. 12. Iss. 8. P. 287–300. [in Russian]
26. *Mindlin R.D.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates // J. Appl. Mech. 1951. V. 18(1). P. 31–38.
<https://doi.org/10.1115/1.4010217>
27. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates // J. Math. Phys. 1944. V. 23. № 4. P. 184–191.
28. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates // Trans. ASME. 1945. V. 15. P. A69-A77.
29. *Voloh K.Ju.* On the classical theory of plates // J. App. Math. Mech. 1994. Vol. 58. Iss. 6. P. 156–165. [in Russian]
30. *Darevskii V.M.* On static boundary conditions in the classical theory of plates and shells // RAS bulletin. Sol. Mech. 1995. № 4. P. 129–132. [in Russian]
31. *Gol'denveizer A.L.* On approximate methods of calculation of thin elastic shells and plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1997. № 3. P. 134–149. [in Russian]
32. *Gol'denveizer A.L.* Algorithms for asymptotic construction of linear two-dimensional thin shell theory and Saint-Venant's principle // J. App. Math. Mech. 1994. Vol. 58. Iss. 6. P. 96–108. [in Russian]

-
33. *Zhilin P.A.* On the Poisson and Kirchhoff plate theories in terms of modern plate theory // RAS bulletin. Sol. Mech. 1992. № 3. P. 48–64. [in Russian]
 34. *Gol'denveizer A.L.* On the bending theory of Reissner plates // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Dept. of Technical Sciences. 1958. № 4. P. 99–109. [in Russian]
 35. *Vasil'ev V.V.* On the asymptotic justification method of the theory of plates // RAS bulletin. Sol. Mech. 1997. № 3. P. 150–155. [in Russian]
 36. *Gol'denveizer A.L.* Note on the article by V.V. Vasiliev “On the asymptotic method of justification of the theory of plates” // RAS bulletin. Sol. Mech. 1997. № 4. P. 150–158. [in Russian]
 37. *Slivker V.I.* Structural mechanics: variation bases. Textbook. M: Publ. of the Association of Civil Engineering Universities, 2005. 736 p. [in Russian]