

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПОР И НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НА ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ СВОЙСТВА ПОРИСТОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ PZT-4

© 2024 г. А. А. Паньков^{а,*}

^аПермский национальный исследовательский политехнический университет,
Пермь, Россия

* e-mail: a_a_pankov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.06.2023 г.

После доработки 12.07.2023 г.

Принята к публикации 04.08.2023 г.

Получено численно-аналитическое решение “задачи эффективного модуля” трансверсально-изотропной пористой керамики с учетом ее начального напряженного состояния и эллипсоидальной формы ориентированных пор различной связанности на основе решения связанной стохастической краевой задачи электроупругости механики композитов по методу функций Грина. Осуществлен численный расчет начальных и результирующих значений эффективного пьезоэлектрического модуля пористой пьезокерамики (PZT-4) в зависимости от значений объемной доли, параметра формы и связанности эллипсоидальных, в частности: сферических, дисковых или туннельных пор с учетом начального напряженного состояния пористой пьезокерамики, обусловленного ее начальной осесимметричной деформацией. Выявлены характерные значения объемной доли сферических и дисковых пор с учетом их связанностей, при которых происходит смена знака численных значений начального эффективного пьезоэлектрического модуля по отношению к соответствующему модулю монолитной керамики PZT-4. Определены значения объемной доли, параметра формы и тип связанности пор, при которых реализуются максимальные градиенты линейной зависимости значений результирующего пьезомодуля пористой пьезокерамики от ее начальных макродеформаций. Дан анализ графиков непрерывных зависимостей начального и результирующего значений эффективного пьезоэлектрического модуля от параметра формы пор для различных случаев их объемного содержания, связанности и осесимметричных начальных деформаций пористой пьезокерамики.

Ключевые слова: пористая пьезокерамика, эффективные свойства, эллипсоидальные поры, начальное напряженное состояние, электроупругость, численное моделирование

DOI: 10.31857/S1026351924010149, EDN: VZJQKB

1. Введение. Нелинейные эффекты деформирования композитов обуславливаются, в общем, различными факторами, один из которых наличие в материале начального напряженного состояния [1–3]. Изучение закономерностей и эффектов влияния начального напряженного состояния элементов структуры материала на особенности его последующего нагружения одна из задач механики композитов [1–9]. Решение этой задачи актуально для различных практических приложений, в частности, ультразвукового неразрушающего контроля напряженного состояния нагруженных конструкций [10], методов геомеханики и сейсмических исследований [11]. Линеаризованный подход [3, 6, 7, 12, 13] теории упругости использован ранее для математического моделирования распространения упругих волн в структурно неоднородных упругих средах с начальным напряженным состоянием [14–16]. Этот подход использован также для нахождения асимптотических решений эффективных свойств упругих композитов с идеально периодическими начально-напряженными структурами [17–20], например, когда начальное напряженное состояние слоистой или однонаправлено-волокнистой структур обусловлено их тепловым нагревом [17]. Изучение эффектов влияния начального напряженного состояния на свойства и поведение материала актуально также для пьезоэлектрических и/или пьезомагнитных (магнитострикционных) композитов, которые интегрируются в современные “интеллектуальные” конструкции в качестве информационных элементов, датчиков и/или актюаторов систем управления акустическими и/или аэродинамическими характеристиками поверхностей, геометрической формой, напряженным состоянием, демпфированием вибраций конструкции [21].

Математическое моделирование поведения пьезоактивных композитов на микро-, макроуровнях и прогнозирование их эффективных свойств основывается на постановке и решении связанных краевых задач электромагнитотермоупругости для микрон неоднородной представительной области с использованием методов механики композитов, в частности, асимптотических методов [17–20, 22] и методов на основе двоякопериодических комплексных функций [23, 24] для идеально периодических структур и методов статистической механики композитов для нерегулярных структур [24–26]. Современные методы функций комплексных переменных [24] эффективно используются для решения двумерных задач теплопроводности и теории упругости композитов, в том числе, со “случайной” периодической структурой [24] с ячейкой периодичности в виде статистической реализации некоторой “представительной области” с большим числом случайно расположенных круглых включений; при этом решение “задачи эффективного модуля” осуществляется в реализациях, т.е. посредством вычисления и статистической обработки (усреднения) представительной выборки численных решений краевых задач для различных реализаций случайной структуры ячейки. Методы статистической механики композитов [25–32], в отличие от аналитических и численных методов решения стохастических краевых задач в реализациях, ориентированы на установление непосредственных функциональных зависимостей искомых статистических характеристик, например, математических ожиданий и дисперсий деформационных полей в элементах структуры (для оценки прочности на микро- и макроуровнях) и макроскопических (усредненных) характеристик эффективных физико-механических модулей композитов от заданных статистических характеристик

случайной структуры, например, в виде многоточечных моментных функций структуры [25, 26] или вероятностных законов разупорядочивания (случайного расположения и/или размера) включений в ячейках квазипериодических структур [30] в представительной области композита со свойствами статистической однородности и эргодичности [25]. Многие статистические методы механики композитов [25–32] основаны на использовании функций Грина некоторой однородной “среды сравнения” для сведения поставленной стохастической краевой задачи к соответствующему интегро-дифференциальному уравнению относительно поля пульсаций искомой величины (например, перемещений, температуры, электрического потенциала) в представительной области композита относительно ее макроскопического значения. Далее, решение интегро-дифференциального уравнения осуществляется методом последовательных приближений [25, 26], по которому, например, искомый тензор эффективных упругих свойств композита представляется в виде суммы осредненного по “правилу смеси” значения и поправки бесконечного ряда кратных интегралов от многоточечных статистических моментов (корреляционных функций) рассматриваемой случайной структуры композита. Вычисление этой поправки с учетом реального вида многоточечных статистических моментов структуры представляет собой сложную задачу, известно лишь о расчете поправки – сумме двух членов ряда, учитывающих лишь двухточечные и трехточечные корреляционные функции для двумерной случайной структуры с круговыми включениями. Сходимость этих рядов исследована, как правило, численно или аналитически лишь для частных (предельных) случаев, например, для случая “предельной локальности” [26] многоточечных моментных функций или в сингулярном приближении [27], когда у второй производной функции Грина учитывается лишь сингулярная составляющая (пропорциональная дельта-функции Дирака) и, как следствие, нахождение искомого тензора эффективных упругих свойств композита, в частности, эффективного объемного модуля и модуля сдвига макроизотропного композита (сферопластика) сводится к суммированию соответствующих алгебраических рядов геометрических прогрессий, сходимость которых оценивается аналитически. В сингулярном приближении результаты, полученные для эффективных модулей композита посредством суммирования членов ряда, совпадают с соответствующими решениями, полученными по подходу [27] без разложения в ряд и последующего суммирования, т.е. когда делается непосредственный переход от интегро-дифференциального уравнения к соответствующей системе алгебраических уравнений, в частности, двух алгебраических уравнений для макроизотропного композита. В рамках обобщенного сингулярного приближения получены решения [30, 31] связанных стохастических краевых задач электромагнитотермоупругости для случайных, в том числе, квазипериодических пьезоактивных структур композитов при отсутствии в них начального напряженного состояния. Линеаризованный подход теории упругости для тела с начальным напряженным состоянием обобщен на электромагнитно-упругий материал в [32–34], в том числе для решения динамических задач [34].

В представленной работе рассматривается постановка связанной краевой задачи электроупругости с учетом начального комбинированного деформационного и электрического напряженного состояния и ее решение в обобщенном

сингулярном приближении [27] на основе перехода от системы интегро-дифференциальных уравнений электроупругости к соответствующей системе алгебраических уравнений для нахождения эффективных упругих модулей, диэлектрических проницаемостей и пьезоэлектрических констант пористой пьезокерамики с эллипсоидальными порами. Считаем, что осесимметричное начальное напряженное состояние не изменяет класс трансверсальной изотропии пористой керамики.

Цель — новое численно-аналитическое решение задачи “эффективного модуля” для трансверсально-изотропной начально-напряженной пористой поляризованной керамики с эллипсоидальными порами и, на его основе, изучение закономерностей влияния объемной доли, формы и связанности пор и начального осесимметричного электроупругого напряженного состояния на эффективные свойства в рамках обобщенного сингулярного приближения электромагнитоупругости [30–32] статистической механики композитов.

2. Модель пористой керамики. Считаем, что в рассматриваемой представительной области V пористой керамики трансверсально-изотропная микроструктура (рис. 1) образована ориентированными эллипсоидальными, в частности: сферическими, дисковыми или игольчатыми полидисперсными порами со случайным взаимным расположением и заданным соотношением $a_3 / a_{1(2)}$ главных полуосей: $a_1 = a_2, a_3$ вдоль координатных осей $r_{1,2,3}$. Варьируемые величины: $k_{\text{form}} \equiv a_3 / a_{1(2)}$ — параметр формы и v_0 — относительная объемная доля пор при различных типах их связанности. Изолированную (закрытую) пористость, т.е. наличие в пористой керамике не сообщающихся между собой пор моделируем наличием минимальной гарантированной прослойки между порами. Взаимопроникающую (открытую) пористость имеем при равенстве нулю толщины такой прослойки, что обуславливает образование в пористой структуре керамики кластеров из контактирующих и взаимопроникающих пор.

3. Математическая постановка и решение задачи. *3.1. Постановка задачи.* При электромеханическом нагружении области V пористой керамики напряжениями σ^{*0} , деформациями ϵ^{*0} и/или внешним электрическим полем с напряженностью E^{*0} в керамическом каркасе возникают поля напряжения σ и индукции D , которые удовлетворяют уравнениям равновесия и непрерывности [32–35]

$$(\sigma_{ij} + \sigma_{kj}^0 u_{i,k})_{,j} = 0, (D_j + D_k^0 u_{j,k})_{,j} = 0 \quad (3.1)$$

с учетом “поправок” в виде дополнительных слагаемых $\sigma_{kj}^0 u_{i,k}, D_k^0 u_{j,k}$, обусловленных наличием заданных начальных полей σ^{*0}, D^0 и дополнительного искомого поля перемещений u . Начальные поля σ^{*0}, D^0 удовлетворяют уравнениям равновесия $\sigma_{ij,j}^0 = 0$ и непрерывности $D_{i,i}^0 = 0$. Первое уравнение в (3.1) преобразуем к виду

$$\sigma_{ij,j} + \sigma_{kj}^0 u_{i,kj} = 0$$

с учетом выполнения равенств $\sigma_{kj,j}^0 = 0$ для поля σ^{*0} начальных напряжений.

В каркасе пористой керамики напряжения σ и индукции D (3.1) выражаются по известным определяющим соотношениям [35]

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} u_{m,n} - e_{nij} E_n, D_i = e_{imn} u_{m,n} + \lambda_{in} E_n \quad (3.2)$$

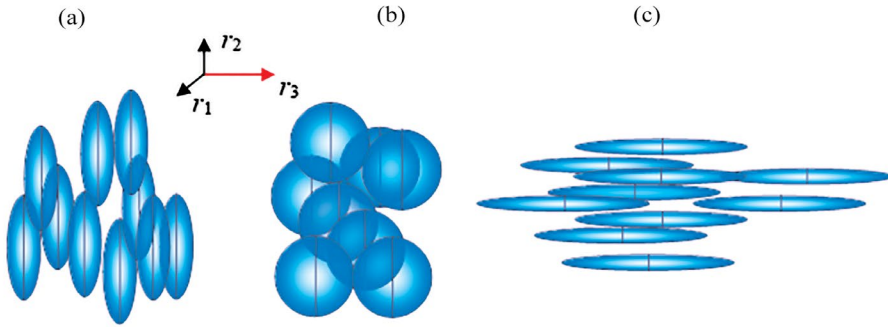


Рис. 1. Фрагменты пористых структур с дисковыми (а), сферическими (б) и игольчатыми (с) эллипсоидальными порами.

через градиенты перемещений $\nabla \mathbf{u}$, напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля с использованием известных тензоров упругих $\mathbf{C}$, пьезоэлектрических $\mathbf{e}$ и диэлектрических λ свойств монолитной керамики. Осредненные оператором “объемного осреднения” $\langle \dots \rangle = 1/V \int_V \dots d\mathbf{r}$ “макроскопические” значения деформационного $\langle \nabla \mathbf{u} \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ и электрического $\langle \mathbf{E} \rangle$, $\langle \mathbf{D} \rangle$ полей связаны между собой с учетом начального напряженного состояния

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijmn}^* \langle u_{m,n} \rangle - e_{(\sigma)nij}^* \langle E_n \rangle, \langle D_i \rangle = e_{(D)imn}^* \langle u_{m,n} \rangle + \lambda_{in}^* \langle E_n \rangle \quad (3.3)$$

посредством искоемых тензоров $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{e}_{(\sigma)}^*$, $\mathbf{e}_{(D)}^*$, λ^* эффективных электроупругих свойств пористой керамики как гомогенного однородного материала (3.2). Отметим, что для монолитной (3.2) и пористой керамики (3.3) с начальным осесимметричным по оси r_3 напряженным состоянием (ϵ^{*0} , $\mathbf{E}^{*0}$) transversально-изотропный тензор пьезоэлектрических свойств $\mathbf{e}^*$ в матричной форме записи имеет вид [35]

$$\|e_{ij}^*\| = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15}^* & 0 & 0 \\ e_{31}^* & e_{31}^* & e_{33}^* & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

с учетом замен: $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, 23 и $32 \rightarrow 4$, 13 и $31 \rightarrow 5$, 12 и $21 \rightarrow 6$ парных тензорных индексов на матричные.

3.2. Эффективные свойства пористой керамики. Искомые тензоры $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{e}_{(\sigma)}^*$, $\mathbf{e}_{(D)}^*$, λ^* (3.3) эффективных свойств transversально-изотропной пористой керамики найдем

$$\mathbf{C}^* = \langle \mathbf{C} \rangle + \Delta^c, \mathbf{e}_{(\sigma)}^* = \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(\sigma)}^e, \mathbf{e}_{(D)}^* = \langle \mathbf{e} \rangle + \Delta_{(D)}^e, \lambda^* = \langle \lambda \rangle + \Delta^\lambda \quad (3.5)$$

как частный случай полученного ранее решения [32] для двухфазного микронеоднородного композита с начальным напряженным состоянием через поправки

$$\begin{aligned}
\Delta_{ijmn}^c &= v_o(1-v_o)(-C_{ijdb}\bar{A}_{dbmn} + e_{pij}\bar{F}_{pmn}) \\
\Delta_{(\sigma)nij}^e &= v_o(1-v_o)(-e_{pij}\bar{H}_{pn} + C_{ijpq}\bar{B}_{pqn}) \\
\Delta_{(D)imn}^e &= v_o(1-v_o)(-e_{ipq}\bar{A}_{pqmn} - \lambda_{ip}\bar{F}_{pmn}) \\
\Delta_{kn}^\lambda &= -v_o(1-v_o)(\lambda_{kp}\bar{H}_{pn} + e_{kpq}\bar{B}_{pqn})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

к соответствующим осредненным по объему значениям

$$\langle \mathbf{C} \rangle = \mathbf{C}(1-v_o), \langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}(1-v_o), \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle = \boldsymbol{\lambda}(1-v_o),$$

где тензоры $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \dots$ (3.6) входят в разложения

$$\bar{u}_{ij} = \bar{A}_{ijmn}u_{mn}^* + \bar{B}_{ijn}E_n^*, \quad \bar{E}_i = \bar{F}_{imn}u_{mn}^* + \bar{H}_{in}E_n^* \tag{3.7}$$

с учетом представления пульсаций ($\mathbf{r} \in \mathbf{V}$)

$$u'_{i,j}(\mathbf{r}) \equiv u_{i,j}(\mathbf{r}) - u_{ij}^* = \bar{u}_{ij}i'_o(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}'(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \mathbf{E}^* = \bar{\mathbf{E}}i'_o(\mathbf{r})$$

производных перемещений $u'_{i,j}(\mathbf{r})$ и электрической напряженности $\mathbf{E}'(\mathbf{r})$ в области $\mathbf{V}$, $i'_o(\mathbf{r}) = i_o(\mathbf{r}) - v_o$ – пульсация индикаторной функции $i_o(\mathbf{r})$ пор (здесь $i_o = 1$ в области пор и $i_o = 0$ – каркасе пористой керамики), $v_o = \langle i_o \rangle$ – относительное объемное содержание туннельных пор в области $\mathbf{V}$, в общем, $v_o \in (0;1)$. В выражениях (3.6), (3.7) компоненты тензоров $\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{F}}$ и $\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{B}}$ решения двух независимых систем линейных алгебраических уравнений по методу функций Грина в “обобщенном сингулярном приближении” [32].

3.3. Метод функций Грина. Введем в рассмотрение функции Грина

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} U_{ik} & U_i^{(1)} \\ \Phi_k & \Phi^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{3.8}$$

для однородной анизотропной пьезоэлектрической “среды сравнения” [27, 31], где $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{p})$, $\mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. В первом столбце матрицы (3.8) величины U_{ik} , Φ_k это перемещения по оси r_i и электрический потенциал в точке $\mathbf{r}$ от действия в точке $\mathbf{r}_1$ единичной силы вдоль координатной оси r_k . Во втором столбце матрицы (3.8) величины $U_i^{(1)}$, $\Phi^{(1)}$ это перемещения по оси r_i и электрический потенциал в точке $\mathbf{r}$ от действия в точке $\mathbf{r}_1$ единичного электрического источника соответственно. Свойства среды сравнения задаем через тензоры упругих свойств $\mathbf{C}_o$, диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\lambda}_o$ и пьезоэлектрических модулей $\mathbf{e}_o$, которые (в различных приближениях) можно приравнять, в частности, к осредненным по объему свойствам $\mathbf{C}_o = \langle \mathbf{C} \rangle$, $\boldsymbol{\lambda}_o = \langle \boldsymbol{\lambda} \rangle$, $\mathbf{e}_o = \langle \mathbf{e} \rangle$ или к свойствам монолитной керамики $\mathbf{C}_o = \mathbf{C}$, $\boldsymbol{\lambda}_o = \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{e}_o = \mathbf{e}$ или к искомому эффективному свойствам композита $\mathbf{C}_o = \mathbf{C}^*$, $\boldsymbol{\lambda}_o = \boldsymbol{\lambda}^*$, $\mathbf{e}_o = \mathbf{e}^*$ по схеме самосогласования [26, 27, 30].

В результате от постановки краевой задачи (3.1), (3.2) перейдем к системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} u_i'(\mathbf{r}) &= \int_V U_{ij}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_i^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \\ \phi'(\mathbf{r}) &= \int_V \Phi_j(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{g}_j(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \tilde{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

относительно пульсаций $\mathbf{u}'(\mathbf{r})$, $\phi'(\mathbf{r})$, которые обусловлены действием в однородной среде ($\mathbf{C}_\bullet$, $\lambda_\bullet$, $\mathbf{e}_\bullet$) распределенных объемных сил $\tilde{g}_i = g_{ij,j}$ и электрических источников $\tilde{q}^{(1)} = q_{i,i}^{(1)}$, где поля

$$\begin{aligned} g_{ij} &= C_{ijmn}' u_{mn}^* - e_{nij}' E_n^* + C_{ijmn}' u_{m,n}' + e_{nij}' \phi_{,n}' + \sigma_{kj}' u_{i,k}' \\ q_j^{(1)} &= e_{jmn}' u_{mn}^* + \lambda_{jn}' E_n^* + e_{jmn}' u_{m,n}' - \lambda_{jn}' \phi_{,n}' + D_k^{(0)} u_{jk}^* + D_k^{(0)} u_{j,k}' \end{aligned} \quad (3.10)$$

с учетом равенств $(\sigma_{kj}' u_{ik}^*)_{,j} = \sigma_{kj,j}' u_{ik}^* = 0$ в силу выполнения уравнений равновесия $\sigma_{nj,j}^{(0)} = 0$ для начальных напряжений $\sigma^0(\mathbf{r})$ в области $\mathbf{V}$ и независимости макроскопических величин u_{mn}^* , E_n^* от координат $\mathbf{r}$. Здесь использованы обозначения пульсаций

$$\sigma'^0(\mathbf{r}) = \sigma^0(\mathbf{r}) - \sigma^{*0}, \quad \mathbf{D}'^0(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{D}^{*0} \quad (3.11)$$

для начального напряженного состояния, отклонений микронеоднородных свойств композита от однородных свойств среды сравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_\bullet'(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{C}(\mathbf{r}) - \mathbf{C}_\bullet = \tilde{\mathbf{C}} + \mathbf{C}'(\mathbf{r}), \quad \lambda_\bullet'(\mathbf{r}) \equiv \lambda(\mathbf{r}) - \lambda_\bullet = \tilde{\lambda} + \lambda'(\mathbf{r}), \\ \mathbf{e}_\bullet'(\mathbf{r}) &\equiv \mathbf{e}(\mathbf{r}) - \mathbf{e}_\bullet = \tilde{\mathbf{e}} + \mathbf{e}'(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где тензоры разностей $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} - \mathbf{C}_\bullet$, $\tilde{\lambda} = \lambda - \lambda_\bullet$, $\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e} - \mathbf{e}_\bullet$. С использованием “теоремы о свертках” дифференцирование $\partial/\partial r_{(1)i}$ функций $\mathbf{g}(\mathbf{r}_1)$, $\mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{r}_1)$ в подинтегральных выражениях интегро-дифференциальных уравнений (3.9) может быть заменено дифференцированием $-\partial/\partial r_{(1)i}$ или $\partial/\partial r_i$ соответствующих ядер — функций Грина $\mathbf{U}$, $\Phi, \dots$ (3.8) [25–27] с учетом их разностного аргумента $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ и асимптотических равенств нулю при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$. В результате получим уравнения

$$\begin{aligned} u_i'(\mathbf{r}) &= \int_V U_{ij,s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_{i,s}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \\ \phi'(\mathbf{r}) &= \int_V \Phi_{j,s}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi_{,s}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (3.13)$$

относительно полей пульсаций перемещений $\mathbf{u}'(\mathbf{r})$, электрического потенциала $\phi'(\mathbf{r})$ и их производных

$$\begin{aligned} u_{i,n}'(\mathbf{r}) &= \int_V U_{ij,sn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V U_{i,sn}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \\ \phi_{,n}'(\mathbf{r}) &= \int_V \Phi_{j,sn}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) g_{js}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 + \int_V \Phi_{,sn}^{(1)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) q_s^{(1)}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

после дифференцирования $\partial / \partial r_n$ левых и правых частей (3.13) с учетом выражений (3.10).

В обобщенном сингулярном приближении [30–32] в интегро-дифференциальных уравнениях (3.14) у вторых производных функций Грина

$$\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{G}^s = \begin{pmatrix} U_{ijn}^s & U_{imn}^{s(1)} \\ \Phi_{imn}^s & \Phi_{mn}^{s(1)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

учитывают лишь составляющие, пропорциональные обобщенной дельта-функции $\delta(\mathbf{r})$, с использованием однородной пьезоэлектрической “среды сравнения” с эллипсоидальным “зерном неоднородности”. Геометрическая форма и характер связанности пор (включений) в представительной области пористой керамики (композита) учитывается формой эллипсоидального “зерна неоднородности” и выбором свойств, т.е. значениями тензоров $\mathbf{C}_*$, $\mathbf{e}_*$, λ_* однородной электроупругой “среды сравнения”. Начальные $\mathbf{C}^{*0}$, $\mathbf{e}^{*0}$, λ^{*0} и результирующие $\mathbf{C}^*$, $\mathbf{e}^*$, λ^* значения тензоров эффективных свойств пористой керамики для случая изолированных пор получим при приравнивании свойств среды сравнения к свойствам монолитной керамики $\mathbf{C}_* = \mathbf{C}$, $\lambda_* = \lambda$, $\mathbf{e}_* = \mathbf{e}$, а для случая взаимопроникающих пор – к осредненным по объему значениям $\mathbf{C}_* = \langle \mathbf{C} \rangle$, $\lambda_* = \langle \lambda \rangle$, $\mathbf{e}_* = \langle \mathbf{e} \rangle$ (для этого случая возможно уточнение по схеме самосогласования, когда $\mathbf{C}_0^* = \mathbf{C}^*$, $\lambda_0^* = \lambda^*$, $\mathbf{e}_* = \mathbf{e}^*$). Начальное напряженное состояние элементов структуры (каркаса пористой структуры) $\zeta_0 = \{\sigma^0, \mathbf{D}^0\}$ в представительной области $\mathbf{V}$ и, в целом, на макроуровне $\zeta_0^* = \{\sigma^{*0}, \mathbf{D}^{*0}\}$ пористой пьезокерамики задаются, в общем, через компоненты тензора начальных макродеформаций ϵ^{*0} , компоненты вектора начальной макронапряженности $\mathbf{E}^{*0}$ области $\mathbf{V}$. При этом тензоры σ^{*0} , $\mathbf{D}^{*0}$ связаны с заданными значениями тензоров ϵ^{*0} , $\mathbf{E}^{*0}$ посредством тензоров начальных эффективных свойств $\mathbf{C}^{*0}$, $\mathbf{e}^{*0}$, λ^{*0} [30, 31] пористой пьезокерамики. В результате, например, при заданной начальной осевой деформации $\epsilon_{33}^{*0} \neq 0$, когда другие компоненты $\epsilon_{ij}^{*0} = 0$, $\mathbf{E}^{*0} = 0$ имеем, в общем, ненулевые значения компонент начального напряженного состояния элементов структуры ζ_0 и, в целом, композита ζ_0^* . Значения начального напряженного состояния фаз $\zeta_{0f}^* \equiv \langle \zeta_0 \rangle_f = \{\sigma_f^0, \mathbf{D}_f^0\}$, в частности, тензоры $\sigma_{1,2}^0$, $\mathbf{D}_{1,2}^0$ пористой пьезокерамики как двухфазного композита могут быть найдены, например, по известному решению [30, 31], полученному для случая $\zeta_0 = 0$.

4. Результаты численного моделирования. С использованием полученных решений (3.5)–(3.15) осуществлен расчет начальных e_{311}^{*0} (рис. 2) и результирующих “деформационных” e_{311}^* (рис. 3–8) значений эффективного пьезоэлектрического модуля трансверсально-изотропной пористой пьезокерамики в зависимости от объемной доли v_* и связанности, т.е. изолированных (сплошные линии) или взаимопроникающих (пунктирные линии) сферических ($k_{\text{form}} = 1$, рис. 2–4), дисковых ($k_{\text{form}} = 0.2$, рис. 2, рис. 5, рис. 6) или туннельных ($k_{\text{form}} \rightarrow \infty$, рис. 2, 7, 8) пор и начальных осесимметричных деформаций: $\epsilon_{11,22}^{*0}$, ϵ_{33}^{*0} гидростатического ($\epsilon_{11}^{*0} = \epsilon_{22}^{*0}$) в плоскости изотропии и осевого (ϵ_{33}^{*0}) вдоль оси симметрии деформирований материала. При этом на рис. 2 представлены графики зависимости отношения e_{311}^{*0} / e_{311} начальных значений эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^{*0} пористой пьезокерамики к величине модуля e_{311} монолитной керамики PZT-4, а на рис. 3–8 – отношение e_{311}^* / e_{311}^{*0} результирующего e_{311}^* и начального e_{311}^{*0} значений эффективного пьезоэлектрического модуля пористой

пьезокерамики при различных осесимметричных ее начальных деформациях. При предельном значении пористости $\nu_0 \rightarrow 1$ начальный $e_{311}^{0*} \rightarrow 0$ (рис. 2) и результирующий $e_{311}^* \rightarrow 0$ пьезомодули стремятся к нулю и, как следствие, для относительной величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} (рис. 3, 5, 7) имеем неопределенность типа “0/0”; численный расчет и построение графиков осуществлено до значения пористости $\nu_0 = 0.99$. Дополнительно, для начальных значений эффективного модуля e_{311}^{0*} пористой пьезокерамики на рис. 9 даны графики непрерывной зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} пор при их различном объемном содержании ν_0 . Соответствующие зависимости результирующего эффективного модуля e_{311}^* от параметра формы k_{form} , объемной доли ν_0 пор и различных начальных деформаций ($\epsilon_{11}^{0*} = \epsilon_{22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*}) пористой пьезокерамики даны на рис. 10.

5. Заключение. Получено решение (3.5)–(3.15) “задачи эффективного модуля” трансверсально-изотропной пористой керамики с учетом ее начального напряженного состояния и эллипсоидальной формы ориентированных пор различной связанности на основе численно-аналитического решения связанной стохастической краевой задачи электроупругости механики композитов по методу функций Грина. С использованием полученных решений осуществлен расчет начальных e_{311}^{0*} (рис. 2, 9) и результирующих e_{311}^* (рис. 3–8, 10) значений эффективного пьезоэлектрического модуля трансверсально-изотропной пористой пьезокерамики PZT-4 в зависимости от значений объемной доли ν_0 , параметра формы $k_{\text{form}} \equiv a_3 / a_{1(2)}$ и типа связанности эллипсоидальных (рис. 9, 10), в частности: сферических (рис. 3, 4), дисковых (рис. 5, 6) или туннельных (рис. 7, 8) пор с учетом начального напряженного состояния пористой пьезокерамики, обусловленного ее начальными осесимметричными деформациями $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} в плоскости изотропии ($\epsilon_{11,22}^{0*}$) и вдоль оси симметрии (ϵ_{33}^{0*}) материала. Выявлены (рис. 2) характерные значения объемной доли ν_0 сферических ($k_{\text{form}} = 1$) и дисковых ($k_{\text{form}} = 0.2$) пор с учетом их связанностей, при которых происходит смена знака

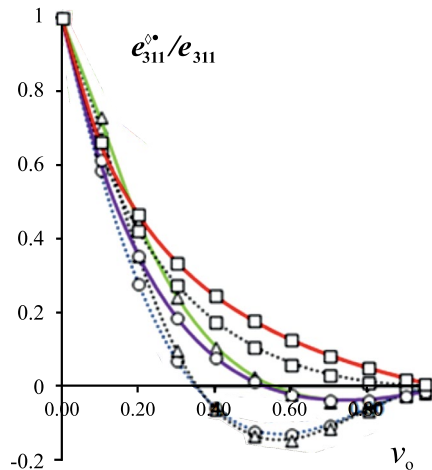


Рис. 2. Начальный эффективный пьезомодуль e_{311}^{0*} пористой керамики PZT-4 (e_{311}) в зависимости от объемной доли ν_0 сферических (о), дисковых (Δ) или туннельных ($\square$) пор.

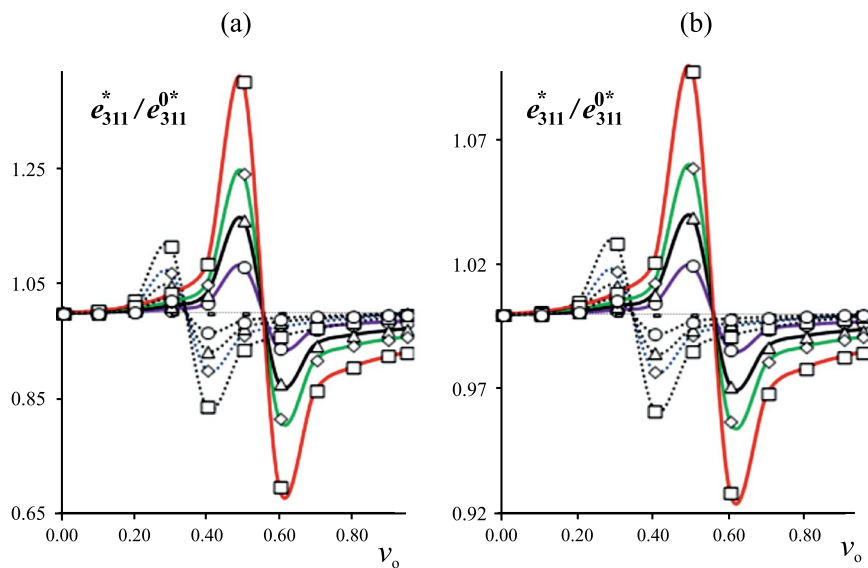


Рис. 3. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 в зависимости от содержания v_o сферических пор для случая $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

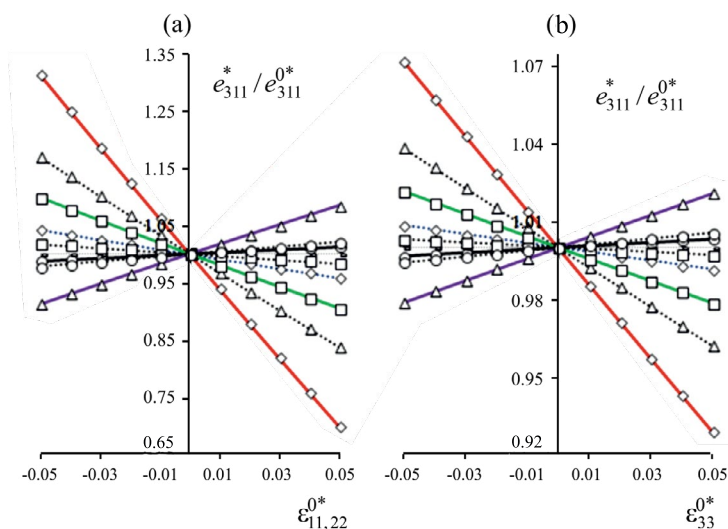


Рис. 4. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 с объемной долей $v_o = 0.2$ (○), 0.4 (Δ), 0.6 (◇), 0.8 (□) сферических пор в зависимости от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

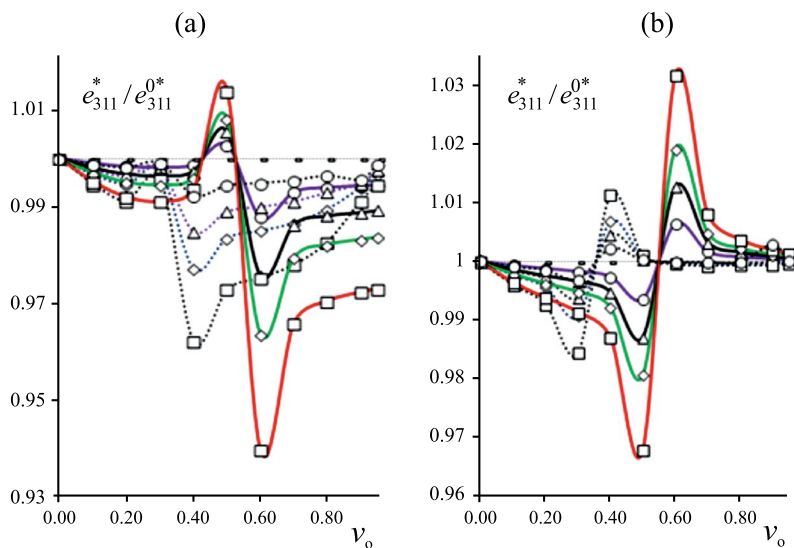


Рис. 5. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 в зависимости от содержания v_o дисковых пор для случая $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.02 (Δ), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

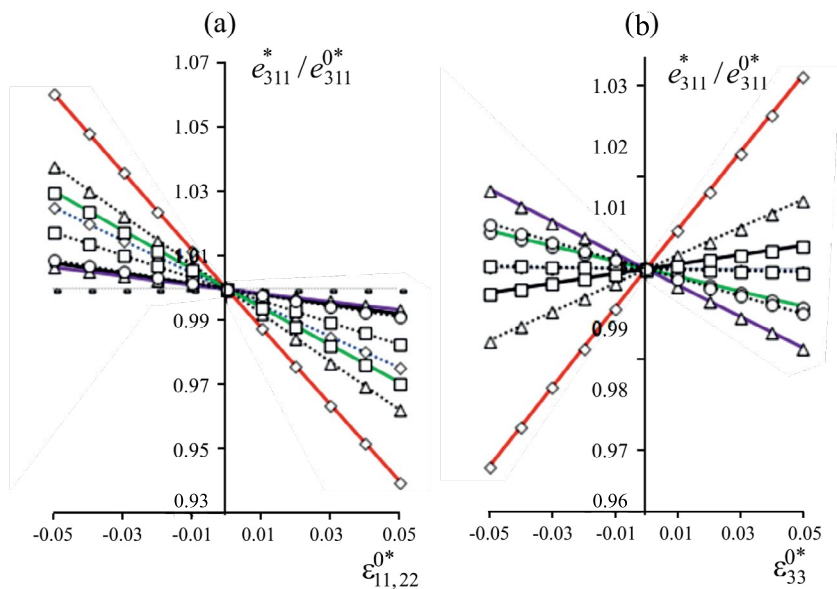


Рис. 6. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 с объемной долей $v_o = 0.2$ (○), 0.4 (Δ), 0.6 (◇), 0.8 (□) дисковых пор в зависимости от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

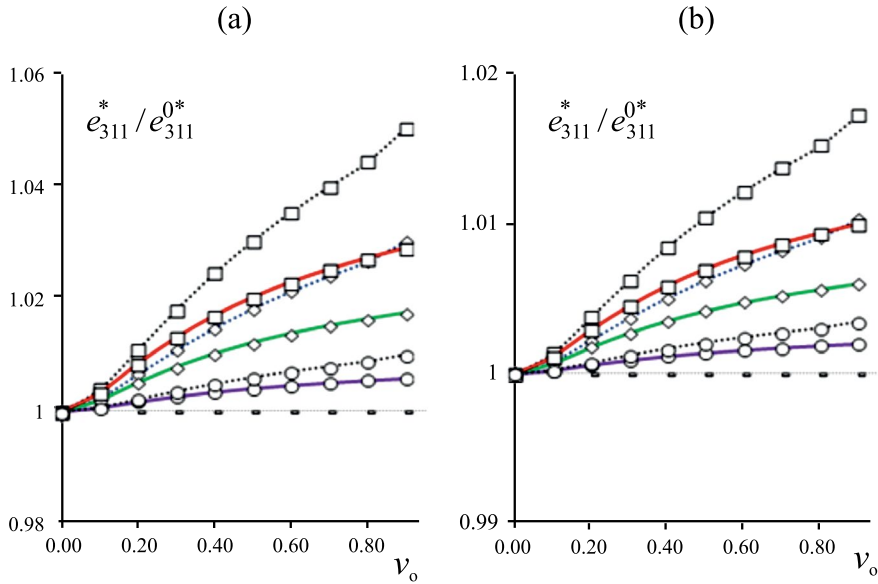


Рис. 7. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 в зависимости от содержания v_o туннельных пор для случая $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (—), 0.01 (○), 0.03 (◇), 0.05 (□) при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

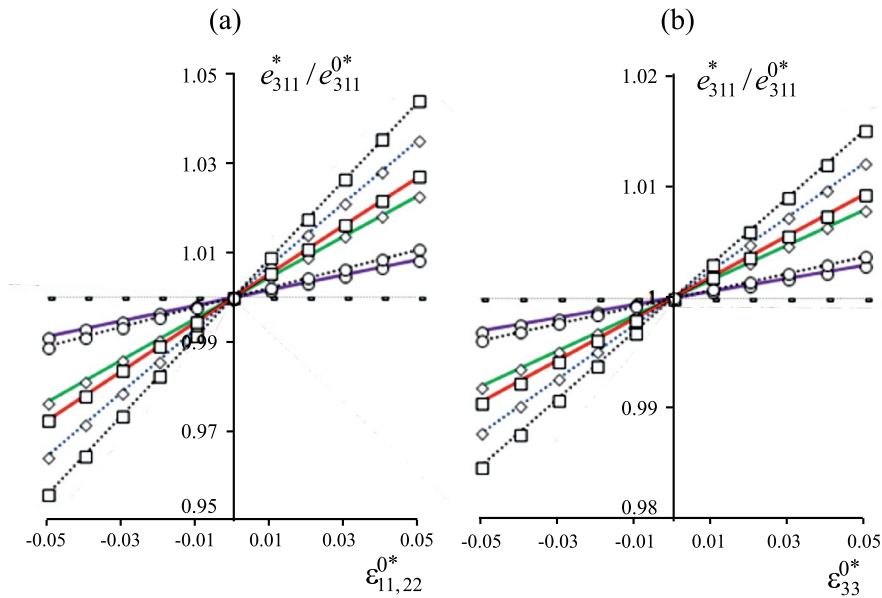


Рис. 8. Эффективный пьезомодуль e_{311}^* пористой керамики PZT-4 с объемной долей туннельных пор $v_o = 0.2$ (○), 0.6 (◇), 0.8 (□) в зависимости от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{33}^{0*} = 0$ (a), $\epsilon_{33}^{0*} \neq 0$ при $\epsilon_{11,22}^{0*} = 0$ (b), $E^{0*} = 0$.

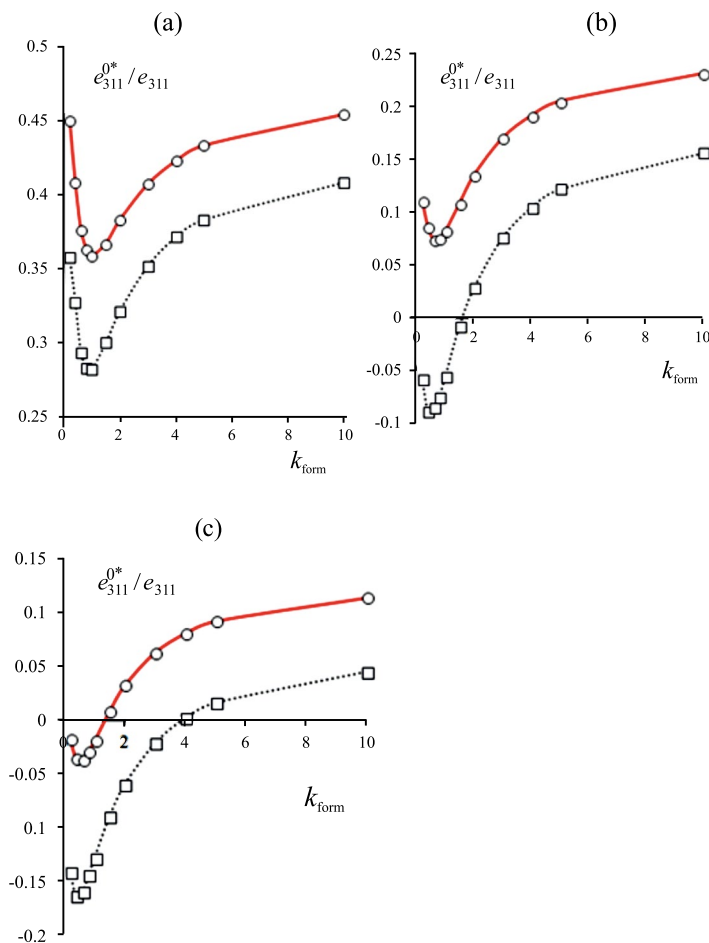


Рис. 9. Начальный эффективный пьезомодуль e_{311}^{0*} пористой керамики PZT-4 в зависимости от параметра $k_{form} \equiv a_3/a_{1(2)}$ формы эллипсоидальных изолированных (○) и взаимопроникающих (□) пор при объемной доле $v_0 = 0.2$ (а), 0.4 (б), 0.6 (с).

численных значений начального эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^{0*} по отношению к соответствующему модулю e_{311} монолитной керамики PZT-4. Определены (рис. 3) характерные значения объемной доли v_0^* , в частности, сферических пор, при которых увеличение результирующих значений пьезомодуля e_{311}^* (относительно его соответствующего начального значения e_{311}^{0*}) сменяется снижением результирующих значений, при этом значение v_0^* для случая открытой пористости примерно в два раза меньше соответствующего значения для изолированной пористости и на значение v_0^* не влияет величина начального деформирования $\epsilon_{11,22}^{0*}$ и/или ϵ_{33}^{0*} ; эти эффекты не наблюдаются на графиках зависимости e_{311}^*/e_{311}^{0*} от v_0 для случая туннельных пор (рис. 7). Установлено

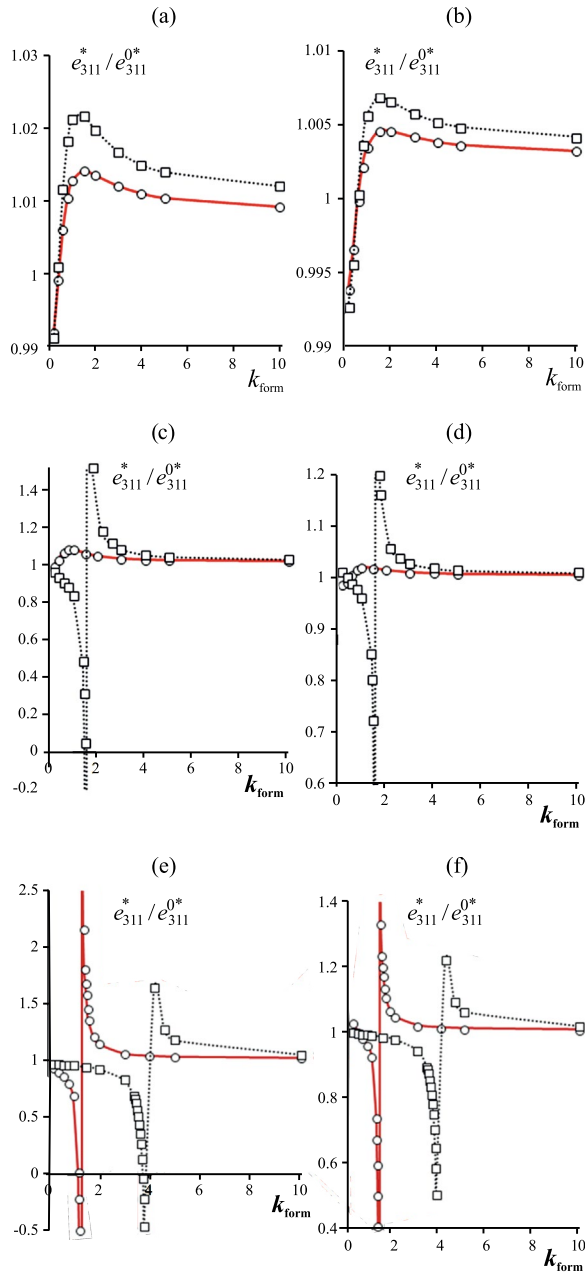


Рис. 10. Эффективный пьезомодуль e^*_{311} пористой керамики PZT-4 в зависимости от параметра $k_{\text{form}} \equiv a_3/a_{(2)}$ формы эллипсоидальных изолированных (о) и взаимопроникающих (□) пор при объемной доле $v = 0.2$ (а, б), 0.4 (с, д), 0.6 (е, ф) для случаев $\epsilon^{0*}_{11,22} = 0.05$, $\epsilon^{0*}_{33} = 0$ (а, с, е), $\epsilon^{0*}_{11,22} = 0$, $\epsilon^{0*}_{33} = 0.05$ (б, д, ф) при $E^{0*} = 0$.

(рис. 4, 6, 8), что величина e_{311}^* / e_{311}^{0*} относительных значений результирующего пьезомодуля e_{311}^* пористой пьезокерамики линейно зависит от ее начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} и, например, для случая сферических пор (рис. 4) максимальные (по модулю) градиенты роста и убывания относительных значений e_{311}^* / e_{311}^{0*} реализуются соответственно при значениях объемной доли $v_0 \approx 0.4$ и 0.6 изолированных сферических пор. При этом для случая туннельных пор (рис. 8) имеем возрастающие линейные зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от начальных макродеформаций $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} , при этом максимальный градиент имеем при объемной доле $v_0 \approx 0.8$ открытых (взаимопроникающих) туннельных пор. Доказано, что начальное гидростатическое деформирование $\epsilon_{11,22}^{0*}$ более существенно влияет на результирующие значения пьезомодуля e_{311}^* пористой пьезокерамики (рис. 10, а, с, е), чем ее начальная осевая деформация ϵ_{33}^{0*} (рис. 10, b, d, f) при всех рассматриваемых значениях объемной доли v_0 , параметра формы k_{form} и связанности, в особенности, сферических (рис. 3, 4) пор. Выявлен (рис. 9) немонотонный характер с наличием точек минимума зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} эллипсоидальных пор, определены величины объемной доли пор v_0 и характерные значения параметра формы k_{form} , при которых происходит смена знака численных значений начального эффективного пьезоэлектрического модуля e_{311}^{0*} по отношению к соответствующему модулю e_{311} монолитной керамики PZT-4. При этом графики зависимости величины e_{311}^{0*} / e_{311} от параметра формы k_{form} для изолированных пор лежат выше, чем для взаимопроникающих пор для всех рассмотренных значений объемной доли v_0 . Немонотонный характер (рис. 10) также имеет зависимость величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} эллипсоидальных пор с наличием точки максимума для случая малой объемной доли пор v_0 (рис. 10, a, b) и наличием разрывов (обусловленных сменой знака величины e_{311}^{0*}) значений этой функции при значении k_{form}'' для случая средних и больших значений объемной доли v_0 (рис. 10, c–f). Вид функций e_{311}^* / e_{311}^{0*} от k_{form} однотипен для случаев изолированных и взаимопроникающих пор с характерным смещением по оси абсцисс k_{form} (рис. 10).

Таким образом, эффект начального напряженного состояния наиболее сильно проявляется для пьезомодуля e_{311}^* керамики со сферическими порами (рис. 1, b) при объемной доле $v_0 \approx 0.5$ и 0.6 для случая изолированных, 0.3 и 0.4 — для случая взаимопроникающих сферических пор, при этом особенно существенно — для случая трансверсального начального деформирования $\epsilon_{11,22}^{0*}$ в плоскости $r_1 r_2$ и пропорционально величине этих деформаций (рис. 3, a). Для керамики с ориентированными дисковыми порами (рис. 1, a, рис. 5) эффект начального напряженного состояния проявляется на значениях пьезомодуля e_{311}^* гораздо слабее, чем для случая сферических пор (рис. 3), при этом экстремумы имеем при таких же значениях пористости $v_0 \approx 0.5$ и 0.6 для изолированных, 0.3 и 0.4 — для взаимопроникающих дисковых пор. Имеем монотонные, практически, линейно возрастающие зависимости величины e_{311}^* / e_{311}^{0*} от значений туннельной пористости v_0 (рис. 7) при всех рассматриваемых начальных макродеформациях $\epsilon_{11,22}^{0*}$, ϵ_{33}^{0*} в отличие от немонотонных зависимостей e_{311}^* / e_{311}^{0*} от v_0 для случая сферических (рис. 3) и дисковых (рис. 5) пор. Отметим, что графики зависимостей значений начального пьезомодуля e_{311}^{0*} от параметра формы k_{form} (рис. 9) имеют характерный экстремум — точку минимума при значении $k_{\text{form}} \approx 1$, т.е. для случая сферических

пор. При этом максимальный эффект от наличия начального напряженного состояния проявляется также при $k_{\text{form}} \approx 1$ (рис. 10, а, б) при относительно малой пористости, например, $\nu_0 = 0.2$. Наличие точек разрыва на графиках (рис. 10, с–f) обусловлено отсутствием пьезоэффекта ($e_{311}^{0*} = 0$) при значении параметра формы $k_{\text{form}} \approx 1.5$, т.е. эффект начального напряженного состояния обуславливает появление пьезоэффекта ($e_{311}^* \neq 0$) для пористой керамики с “овальной” формой пор.

Благодарности. Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Washizu K. Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford: Pergamon Press, 1982. 630 p. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
2. Гузь А.Н. Об определении приведенных упругих постоянных композитных слоистых материалов с начальными напряжениями // Доклады АН УССР. Сер. А. 1975. № 3. С. 216–219.
3. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х т. Киев: Наук. Думка, 1986. 910 с.
4. Алехин В.В., Аннин Б.Д., Колтаков А.Г. Синтез слоистых материалов и конструкций. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1988. 128 с.
5. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials // Int. Appl. Mech. 2009. V. 45. № 10. P. 1141–1151. <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0255-y>
6. Akbarov S.D. Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses // Int. Appl. Mech. 2007. V. 43. № 12. P. 1305–1324. <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8>
7. Akbarov S.D. Stability loss and buckling delamination: Three-dimensional linearized approach for elastic and viscoelastic composites. Springer, 2013. 448 p. <http://dx.doi.org/10.1007/97893964293029099>
8. Гулиев М.С., Сейфулаев А.И., Абдуллаева Д.Н. Исследование распространения упругих волн в составном цилиндре с начальным кручением // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. № 5. С. 404–413.
9. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Свойства преднапряженных изотропных материалов при учете упругих модулей высших порядков // Наука Юга России. 2017. № 2. С. 3–12.
10. Гузь А.Н. Об ультразвуковом неразрушающем методе определения напряжений в элементах конструкций и в приповерхностных слоях материалов: фокус на украинские исследования (обзор) // Прикладная механика. 2014. Т. 50. № 3. С. 3–30.
11. Kuliev G.G., Jabbarov M.D. To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media // Proceedings the sciences of Earth of academy sciences Azerbaijan. 1998. N2. P. 103–112.
12. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. Springer, 1999. 555 p.
13. Akbarov S.D. Dynamics of pre-strained bi-material elastic systems: Linearized three-dimensional approach. Springer, 2016. 1004 p.
14. Gupta S., Majhi D.K., Kundu S., Vishwakarma S.K. Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space // Appl. Math. Comput. 2012. V. 218. № 9. P. 5655–5664. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.060>

15. *Hu W.T., Chen W.Y.* Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model // *J. of Central South University*. 2014. V. 21. № 2. P. 753–760.
16. *Yesil U.B.* Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities // *Comput. Mater. Continua*. 2017. V. 53. № 1. P. 1–22.
17. *Kolpakov A.G.* Effect of inflation of initial stresses on the homogenized characteristics of composite // *Mechanics of Materials*. 2005. V. 37. № 8. P. 840–854.
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.08.002>
18. *Kolpakov A.G.* On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses // *Computers & Structures*. 1992. V. 44. № 1–2. P. 97–101.
19. *Kolpakov A.G.* Averaged characteristics of stressed laminated media // *J. of Engineering Physics*. 1995. V. 68. № 5. P. 605–613. <https://doi.org/10.1007/BF00858059>
20. *Колпаков А.Г.* Усредненные модели упругих композиционных материалов и элементов конструкций: дис. ... доктор физико-математических наук: 01.02.04. Новосибирск, 2002. 291 с.
21. *Pan'kov A.A., Anoshkin A.N., Pisarev P.V., Bayandin S.R.* Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. V. 1093. P. 012023.
<http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/1093/1/012023>
22. *Победра Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
23. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А.* Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
24. *Mityushev V.* Random 2D composites and the generalized method of Schwarz // *Advances in Mathematical Physics*. 2015. V. 2015. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/535128>
25. *Волков С.Д., Ставров В.П.* Статистическая механика композитных материалов. Мн.: Изд-во БГУ, 1978. 208 с.
26. *Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.* Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. М.: Наука, 1984. 115 с.
27. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микрон неоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
28. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Леценко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. Киев: Наук. думка, 1989. 208 с.
29. *Канаун С.К.* Метод эффективного поля в механике композитных материалов. Петрозаводск: Изд-во Петрозавод. ун-та, 1993. 600 с.
30. *Паньков А.А.* Пьезокомпозиты и датчики: монография в 3-х частях / Часть 1. Статистическая механика пьезокомпозитов. Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2022. 234 с.
31. *Паньков А.А.* Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // *Физическая мезомеханика*. 2011. Т. 14. № 2. С. 93–99.
32. *Pan'kov A.A.* Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite // *Mechanics of Composite Materials*. 2022. V. 58. № 5. P. 733–746.
<https://doi.org/10.22364/mkm.58.5.11>
33. *Guo X., Wei P.* Dispersion relations of elastic waves in one – dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses // *Ultrasonics*. 2016. V. 66. P. 72–85.
<https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.11.008>
34. *Dasdemir A.* Forced vibrations of pre – stressed sandwich plate – strip with elastic layers and piezoelectric core // *Int. Appl. Mech*. 2018. V. 54. № 4. P. 480–493.
<https://doi.org/10.1007/s10778-018-0901-3>
35. *Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г.* Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях // *Физическая акустика*. Т. 1: Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. М.: Мир, 1966. С. 204–326.

INFLUENCE OF PORE SHAPE AND INITIAL STRESS STATE ON THE ELECTROELASTIC PROPERTIES OF POROUS PIEZOCERAMICS PZT-4

A. A. Pankov^{a*}^aPerm National Research Polytechnic University Perm, 614990 Russia

* e-mail: a_a_pankov@mail.ru

Received 13.06.2023

Revised 12.07.2023

Accepted 04.08.2023

Abstract – A numerical-analytical solution to the “effective modulus problem” of transversally isotropic porous ceramics is obtained, taking into account its initial stressed state and the ellipsoidal shape of oriented pores of various connectivity based on the solution of the associated stochastic boundary value problem of electroelasticity of composite mechanics using the Green’s function method. A numerical calculation of the initial and resulting values of the effective piezoelectric modulus of porous piezoceramics (PZT-4) was carried out depending on the values of the volume fraction, shape parameter and connectivity of ellipsoidal, in particular: spherical, disk or tunnel pores, taking into account the initial stressed state of the porous piezoceramics due to its initial axisymmetric deformation. Characteristic values of the volume fraction of spherical and disk pores are identified, taking into account their connections, at which the sign of the numerical values of the initial effective piezoelectric modulus changes with respect to the corresponding module of PZT-4 monolithic ceramics. The values of the volume fraction, shape parameter and type of pore connectivity at which the maximum gradients of the linear dependence of the values of the resulting piezoelectric modulus of porous piezoceramics on its initial macrodeformations are realized are determined. An analysis of graphs of continuous dependences of the initial and resulting values of the effective piezoelectric modulus on the pore shape parameter is given for various cases of their volumetric content, connectivity and axisymmetric initial deformations of porous piezoceramics.

Keywords: porous piezoceramics, effective properties, ellipsoidal pores, initial stress state, electroelasticity, numerical modeling

REFERENCES

1. K. Washizu, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1982; Mir, Moscow, 1987).
2. A. N. Guz', "On the determination of the reduced elastic constants of composite layered materials with initial stresses," *Dokl. AN USSR. Ser. A*, No. 3, 216–219 (1975).
3. A. N. Guz', *Elastic Waves in Bodies with Initial Stresses*, Vol. 1: *General Problems*; Vol. 2: *Dependencies of Propagation* (Naukova Dumka, Kiev, 1986) [in Russian].
4. V. V. Alekhin, B. D. Aninin, and A. G. Kolpakov, *Synthesis of Layered Materials and Structures* (Inst. Gidrodyn. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1988) [in Russian].
5. S. D. Akbarov and M. S. Guliev, "Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestretched compound circular cylinder made of incompressible materials," *Int. Appl. Mech.* **45** (10), 1141–1151 (2009). <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0255-y>

6. S. D. Akbarov, "Recent investigations on dynamic problems for an elastic body with initial (residual) stresses," *Int. Appl. Mech.* **43** (12), 1305–1324 (2007).
<https://doi.org/10.1007/s10778-008-0003-8>
7. S. D. Akbarov, *Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites* (Springer, 2013).
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-30290-9>
8. M. S. Guliev, A. I. Seifulaev, and D. N. Abdulaeva, "Investigation of the distribution of elastic waves in the composite cylinder with the initial torsion," *Stroit. Mech. Inzh. Konstr. Sooruzh.*, No. 5, 404–413 (2018).
9. T. I. Belyankova and V. V. Kalinchuk, "Properties of prestressed isotropic materials taking into account higher-order elastic moduli," *Nauka Yuga Rossii*, No. 2, 3–12 (2017).
10. A. N. Guz', "On the ultrasonic non-destructive method for determining stresses in structural elements and in near-surface layers of materials: focus on Ukrainian research (Review)," *Appl. Mech.*, **50** (3), 3–30 (2014).
11. G. G. Kuliev and M. D. Jabbarov, "To elastic waves propagation in strained nonlinear anisotropic media," *Proc. Sci. Earth Acad. Sci. Azerbaijan*, No.2, 103–112 (1998).
12. A. N. Guz', *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies* (Springer, 1999).
13. S. D. Akbarov, *Dynamics of Pre-Strained Bi-Material Elastic Systems: Linearized Three-Dimensional Approach* (Springer, 2016).
14. S. Gupta, D. K. Majhi, S. Kundu, and S. K. Vishwakarma, "Propagation of torsional surface waves in a homogeneous layer of finite thickness over an initially stressed heterogeneous half-space," *Appl. Math. Comput.* **218** (9), 5655–5664 (2012).
<https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.060>
15. W. T. Hu and W. Y. Chen, "Influence of lateral initial pressure on axisymmetric wave propagation in hollow cylinder based on first power hypo-elastic model," *J. Central South Univ.* **21** (2), 753–760 (2014).
16. U. B. Yesil, "Forced and natural vibrations of an orthotropic pre-stressed rectangular plate with neighboring two cylindrical cavities," *Comput. Mater. Continua.* **53** (1), 1–22 (2017).
17. A. G. Kolpakov, "Effect of influence of initial stresses on the homogenized characteristics of composite," *Mech. Mater.* **37** (8), 840–854 (2005).
<https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2004.08.002>
18. A. G. Kolpakov, "On the dependence of the velocity of elastic waves in composite media on initial stresses," *Comput. Struct.* **44** (1–2), 97–101 (1992).
19. A. G. Kolpakov, "Averaged characteristics of stressed laminated media," *J. Eng. Phys.* **68** (5), 605–613 (1995). <https://doi.org/10.1007/BF00858059>
20. A. G. Kolpakov, Doctoral Dissertation in Physics and Mathematics (NGU, Novosibirsk, 2002).
21. A. A. Pan'kov, A. N. Anoshkin, P. V. Pisarev, and S. R. Bayandin, "Using an electromechanical analogy to describe the damping characteristics of an MFC actuator," *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* **1093**, 012023 (2021).
<http://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/1093/1/012023>
22. B. E. Pobedrya, *Mechanics of Composite Materials* (Mos. Gos. Univ, Moscow, 1984) [in Russian].
23. E. I. Grigolyuk and L. A. Fil'shtinskii, *Perforated Plates and Shells* (Nauka, Moscow, 1970) [in Russian].
24. V. Mityushev, "Random 2D composites and the generalized method of Schwarz," *Adv. Math. Phys.* **2015**, 535128 (2015). <http://dx.doi.org/10.1155/2015/535128>
25. S. D. Volkov and V. P. Stavrov, *Statistical Mechanics of Composite Materials* (Belarus. Gos. Univ., Minsk, 1978) [in Russian].
26. Yu. V. Sokolkin and A. A. Tashkinov, *Mechanics of the Deformation and Failure of Structurally Inhomogeneous Bodies* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].

27. T. D. Shermergor, *Theory of Elasticity of Microheterogeneous Media* (Nauka, Moscow, 1977) [in Russian].
28. L. P. Khoroshun, B. P. Maslov, and P. V. Leschenko, *Prediction of Effective Properties of Piezoactive Composite Materials* (Naukova Dumka, Kiev, 1989) [in Russian].
29. S. K. Kanaun and V. M. Levin, *The Effective Field Method in the Mechanics of Composite Materials* (Petrozavodsk. Gos. Univ. Petrozavodsk, 1993) [in Russian].
30. A. A. Pan'kov, *Piezocomposites and Sensors*, Vol. 1: *Statistical Mechanics of Piezocomposites* (Perm Gos. Politech. Univ., Perm, 2022) [in Russian].
31. A. A. Pan'kov, "Electromagnetic coupling factors for a composite and piezoactive phases," *Phys. Mesomech.* **14** (2), 93–99 (2011).
32. A. A. Pan'kov, "Effect of initial stress state on effective properties of piezocomposite," *Mech. Compos. Mater.* **58** (5), 733–746 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s11029-022-10063-w>
33. X. Guo and P. Wei, "Dispersion relations of elastic waves in one—dimensional piezoelectric/piezomagnetic phononic crystal with initial stresses," *Ultrasonics* **66**, 72–85 (2016).
<https://doi.org/10.1016/j.ultras.2015.11.008>
34. A. Dasdemir, "Forced vibrations of pre—stressed sandwich plate—strip with elastic layers and piezoelectric core," *Int. Appl. Mech.* **54** (4), 480–493 (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10778-018-0901-3>
35. D. A. Berlincourt, D. R. Curran, and H. Jaffe, "Piezoelectric and Piezomagnetic Materials and Their Function in Transducers," in *Physical Acoustics*, Vol. 1: *Principles and Methods*, Ed. by W. P. Mason (Academic Press, 1964), pp. 169–270.
<https://doi.org/10.1016/B978-1-4832-2857-0.50009-5>