

УДК 531.36

КВАТЕРНИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И РЕГУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ ОРБИТАЛЬНОГО (ТРАЕКТОРНОГО) ДВИЖЕНИЯ: ОБЗОР И АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

© 2024 г. Ю. Н. Челноков^{а,*}

^а*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия*

^{*}*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Поступила в редакцию 14.03.2023 г.

После доработки 10.04.2023 г.

Принята к публикации 12.04.2023 г.

В обзорной статье кратко излагается предложенная нами общая кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле, потенциал которого полагается произвольной дифференцируемой функцией расстояния от точки до центра поля. Точка находится также под действием возмущающего потенциала, полагаемого произвольной функцией времени и декартовых координат местоположения точки, и под действием возмущающего ускорения, полагаемого произвольной функцией времени, радиус-вектора и вектора скорости точки. Рассмотрены условия приводимости излагаемых кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к осцилляторному виду с помощью использования трех регуляризующих функций, содержащих расстояние до центра поля. Приведены различные дифференциальные кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в осцилляторной и нормальной формах, построенные с помощью этой теории, в том числе регулярные уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) или четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля или их модификации, предложенные нами. Рассмотрены регулярные кватернионные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки, связи используемых четырехмерных переменных с элементами орбиты, униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения. В качестве приложения изложены регуляризованные дифференциальные кватернионные уравнения движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля, а также в наших модифицированных четырехмерных переменных и в параметрах Эйлера. Приведен анализ изложенных регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения, показывающий, что кватернионный метод регуляризации, основанный на использовании параметров Эйлера или переменных Кустаанхеймо–Штифеля или их модификаций уникален в совместной регуляризации, линеаризации и увеличении размерности для трехмерных кеплеровских систем и центрального движения.

Изложенные регуляризованные (в отношении ньютоновской силы притяжения) дифференциальные кватернионные уравнения движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в наших модифицированных четырехмерных переменных имеют перед кватернионными уравнениями в переменных Кустаанхеймо–Штифеля преимущества, указанные в статье. В изложенных дифференциальных кватернионных уравнениях движения спутника, построенных с использованием четырехмерных параметров Эйлера, регуляризуются слагаемые уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния до центра Земли четвертого порядка включительно. Во всех этих регуляризованных уравнениях в описании гравитационного поля Земли учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения Земли (учитывается несферичность Земли).

Ключевые слова: дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки, кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований, условия приводимости кватернионных уравнений к осцилляторному виду, регуляризующие функции, кватернионные уравнения в осцилляторной и нормальной формах, параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона), переменные Кустаанхеймо–Штифеля, модифицированные четырехмерные переменные, элементы орбиты, униформизированное решение, регуляризованные кватернионные уравнения движения спутника; центральная (ньютоновская), зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения Земли

DOI: 10.31857/S1026351924010043, EDN: WAPMKG

1. Введение. Регуляризация моделей небесной механики и астродинамики. В основе небесной механики и астродинамики (механики космического полета) лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в декартовых координатах. Эти уравнения вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральным) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название “регуляризация” (Леви-Чивита, 1920), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными.

Среди методов регуляризации и регулярных моделей небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение (особенно за рубежом) получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании гиперкомплексных переменных — кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля (KS -переменные) или их модификации. Эти методы и модели имеют

ряд качественных преимуществ аналитического и вычислительного характеров перед другими методами и моделями.

1.1. Регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел Кустаанхеймо—Штифеля. Проблема устранения указанной особенности, известная в небесной механике и астродинамике как проблема регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной задачи двух тел, восходит к Эйлеру (1765) [1] и Леви-Чивита (1920) [2–4], которые дали решения одномерной и двумерной задач о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Наиболее эффективная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, так называемая спинорная или *KS*-регуляризация, была предложена Кустаанхеймо и Штифелем (1964–1965) [5, 6]. В регуляризации Кустаанхеймо использованы достоинства методов теории спиноров: вместо одной комплексной переменной теории Леви-Чивита была взята пара комплексных чисел. В регуляризации Штифеля использована введенная им специальная четырехмерная матрица, названная им *KS*-матрицей. Регуляризация Кустаанхеймо—Штифеля наиболее полно изложена в широко известной книге Штифеля и Шейфеле (1971) [7].

В основе регуляризации Кустаанхеймо—Штифеля лежит нелинейное неоднозначное преобразование декартовых координат изучаемого тела (*KS*-преобразование), обобщающее преобразование Леви-Чивита. Причем это преобразование состоит в переходе от трехмерного пространства декартовых координат к четырехмерному пространству новых координат (*к* четырехмерным *KS*-переменным). Неоднозначность этого преобразования делает, по мнению Штифеля и Шейфеля, прямой вывод регулярных уравнений в трехмерном (т.е. пространственном) случае невозможным [7]. Поэтому в своей книге [7] они постулируют матричное регулярное уравнение пространственной задачи двух тел, записанное ими по аналогии с матричным регулярным уравнением Леви-Чивита плоского движения, и с помощью нескольких теорем доказывают, что при этом удовлетворяется старое векторное ньютоновское уравнение.

1.2. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Вскоре после открытия *KS*-преобразования было рассмотрено использование кватернионов (четырёхмерных гиперкомплексных чисел) и четырёхмерных кватернионных матриц для регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел. Однако в своей книге [7] Штифель и Шейфеле полностью отвергли эту идею, написав, что “любая попытка заменить теорию *KS*-матриц более популярной теорией кватернионных матриц приводит поэтому к неудаче или, во всяком случае, к очень громоздкому формализму”. Это утверждение было впервые опровергнуто автором статьи (1981, 1984) [8, 9], показавшим, что в действительности кватернионный подход к регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании кватернионных матриц [8] или кватернионов Гамильтона [9], в отличие от подхода, использующего аппарат *KS*-матриц Штифеля, позволяет дать ясные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризующему преобразованию Кустаанхеймо—Штифеля, раскрывает геометрический смысл его неоднозначности и позволяет дать прямой и наглядный вывод более общих

регулярных уравнений пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля.

Так, было показано, что переход в уравнениях пространственной задачи двух тел от трехмерных декартовых координат второго тела к четырехмерным KS -переменным фактически означает запись этих уравнений во вращающейся (неголономной) системе координат с использованием в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона), являющихся компонентами кватерниона поворота этой системы координат, с дальнейшей их нормировкой посредством множителя, равного квадратному корню из расстояния от второго тела до центра притяжения. Также было показано, что билинейное соотношение, играющее, по словам Штифеля и Шейфеле [7], “основную роль в нашем построении небесной механики”, имеет ясный геометрический и механический смысл. Отказ от выполнения этого соотношения позволил автору статьи получить [8, 9] более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел.

Позднее (1985, 1992, 1993) [10–13] идеи кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел были использованы автором статьи для разработки теории кватернионной регуляризации векторного дифференциального уравнения возмущенного центрального движения материальной точки. Так, им были получены регулярные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки осцилляторного вида, регулярные для потенциала, являющегося полиномом четвертой отрицательной степени расстояния до центра притяжения (уравнения Кустаанхеймо–Штифеля регулярны лишь для полинома первой отрицательной степени этого расстояния).

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием KS -переменных посвящены работы [14–31], а также работы автора статьи [10–13, 32–43].

Отметим статьи известного западного ученого Вальдфогеля [22, 23], посвященные кватернионной регуляризации уравнений задачи двух тел. Так, в 2008 году им была опубликована статья [23] под названием “Кватернионы для регуляризации небесной механики: верный (истинный) путь”, в которой говорится, что кватернионы “являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике”. Отметим, что Вальдфогель [23] признает приоритет автора статьи в области кватернионной регуляризации, говоря об этом в своей статье.

1.3. О точности численного решения регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. В работах [7, 44–51] приводятся результаты сравнения численного решения уравнений орбитального движения небесных и космических тел в KS -переменных, параметрах Эйлера и в других переменных, которые свидетельствуют об эффективности использования KS -переменных и параметров Эйлера в задачах небесной механики и астродинамики.

Логиновым и Челноковым [52] проведено сравнительное исследование точности численного интегрирования классических ньютоновских дифференциальных уравнений пространственной ограниченной задачи трех тел (Земля, Луна и космический аппарат) в декартовых координатах и построенных автором статьи [39, 40] регулярных кватернионных дифференциальных уравнений этой

задачи в KS -переменных, принимающих вид регулярных кватернионных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в случае отсутствия поля тяготения Луны. Эти уравнения показали значительно более высокую точность в сравнении с уравнениями в декартовых координатах: для круговой орбиты точность оказалась выше на 2 порядка, для возмущенных эллиптических орбит со средним эксцентриситетом — на 4 порядка, для возмущенной эллиптической орбиты с высоким эксцентриситетом — на 7 порядков. Сравнение этих результатов с результатами, приведенными в книге Бордовицыной [44], показало, что они в целом согласуются между собой.

1.4. Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием переменных Леви-Чивита и параметров Эйлера. Леви-Чивита в отношении своих попыток обобщить предложенную им знаменитую регуляризацию уравнений плоской задачи двух тел на пространственную задачу позже признал [3]: “Проблема в пространстве долго сопротивлялась моим усилиям, так как я пытался подойти к ней с помощью аналогичных изменений координат [...]”. Штифель и Шейфеле в своей книге [7] отмечали, что Леви-Чивита приложил много усилий, чтобы найти обобщение своего метода регуляризации дифференциальных уравнений плоского движения в задаче двух тел на общую пространственную задачу двух тел, но безуспешно. В работе [53] (Aarseth, Zare), а также в книге [54] (Aarseth) говорится, что из-за фундаментальных трудностей, первоначально разъясненных Хопфом [55] и Гурвицем [56], невозможно обобщить преобразование Леви-Чивита к эквивалентному набору трехмерных переменных (на случай трехмерного пространства). Тем не менее, автором статьи [37] было показано, что регуляризация Леви-Чивита может быть с успехом использована для построения регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел.

Предложенный нами [37] новый метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел основан на использовании двухмерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и регулярных двухмерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение второго (рассматриваемого) тела в идеальной системе координат [57] (Deprit), в которой уравнения пространственного движения принимают вид уравнений плоского движения, а также основан на использовании четырехмерных параметров Эйлера (Родрига–Гамильтона) и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. В полученных с помощью этого метода регулярных скалярных и кватернионных уравнениях возмущенной пространственной задачи двух тел переменными являются переменные Леви-Чивита, кеплеровская энергия, время и параметры Эйлера. Используемые в качестве переменных параметры Эйлера и кватернион ориентации идеальной системы координат являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты изучаемого (второго) тела (медленно изменяющимися переменными).

Эти регулярные уравнения, образуют в общем случае систему нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений десятого порядка (такую же размерность имеют регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля). Они, также как и уравнения Кустаанхеймо–Штифеля, регулярны в центре притяжения (в отличие от нерегулярных ньютоновских уравнений), линейны для невозмущенных

кеплеровских движений (в отличие от существенно нелинейных для этих движений ньютоновских уравнений); позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения (эллиптического, гиперболического, параболического) с использованием функций Штумпфа, близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений, позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их численного решения.

Однако эти регулярные уравнения имеют существенные отличия от регулярных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля: 1) для невозмущенного эллиптического кеплеровского движения изучаемого тела они эквивалентны уравнениям движения не четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, как в случае Кустаанхеймо–Штифеля, а уравнениям движения двухмерного одночастотного гармонического осциллятора, т.к. для этого случая движения тела кватернион ориентации идеальной системы координат, в которой записаны эти уравнения движения, и его компоненты (параметры Эйлера) остаются постоянными, 2) для возмущенного движения изучаемого тела кватернион ориентации идеальной системы координат является кватернионным оскулирующим элементом (т.е. медленно изменяющейся кватернионной переменной), а параметры Эйлера (компоненты этого кватерниона) – скалярными оскулирующими элементами, что также является полезным свойством этих уравнений, позволяющим эффективно использовать методы нелинейной механики.

Отметим, однако, что эти уравнения не пригодны для исследования прямолинейных орбит, когда модуль c вектора момента орбитальной скорости второго тела обращается в ноль, поскольку кватернионное дифференциальное уравнение ориентации идеальной системы координат в этом случае вырождается (в знаменателях коэффициентов этого уравнения присутствует величина c). От этого недостатка этих уравнений можно избавиться, переходя в них от используемой независимой переменной τ , связанной с реальным временем t дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$ (преобразованием времени Зундмана [58]), к новой независимой переменной τ^* в соответствии с дифференциальным соотношением $d\tau = c d\tau^*$ и дополняя полученные уравнения дифференциальным уравнением для переменной c .

1.5. Содержание статьи. В нашей статье, носящей обзорно-аналитический характер, кратко излагается предложенная нами [10–13, 35] общая кватернионная теория регуляризирующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле.

Приводятся различные регулярные кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения в осцилляторной и нормальной формах, построенные в рамках этой теории, в том числе уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера или переменные Кустаанхеймо–Штифеля, или их модификации, предложенные нами:

1) регулярные осцилляторные уравнения, в которых используются четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля, энергия h центрального движения или полная энергия h^* возмущенного центрального движения материальной точки, включающая потенциал возмущающих сил, и время t ; в качестве независимой

переменной в этих уравнениях используется переменная τ , определяемая дифференциальным преобразованием времени Зундмана ($dt = r d\tau$);

2) регулярные осцилляторные уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона), расстояние r , полная энергия h^* , квадрат модуля c вектора $\mathbf{c}$ момента орбитальной скорости материальной точки и время t ; в качестве независимой переменной в этих уравнениях используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$, либо переменная φ (полярная координата), определяемая дифференциальным соотношением $d\varphi = (c / r^2) dt$;

3) регулярные нормальные уравнения, в которых используются кватернион λ ориентации используемой вращающейся системы координат (его компоненты — параметры Эйлера), двухмерный или трехмерный кватернион $\mathbf{c}$ момента орбитальной скорости точки, расстояние r , полная энергия h^* и время t ; в качестве независимой переменной в этих уравнениях используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$, либо полярная координата φ .

Из первой группы уравнений следуют, как частные, системы регулярных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля для возмущенного кеплеровского движения, нашедшие широкое распространение. Уравнения второй и третьей групп являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом Π , имеющим четвертый порядок относительно величины r^{-1} , обратной расстоянию до центра притяжения (уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля являются регулярными лишь для возмущенного движения материальной точки в силовом поле с потенциалом Π , имеющим первый порядок относительно величины r^{-1} , т.е. в силовом поле с ньютоновским потенциалом). Уравнения этих групп могут быть использованы для прогноза движения планет с учетом эффектов общей теории относительности (ОТО) и для построения регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли.

В статье рассмотрены кватернионные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки, имеющие вид уравнений движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна $c/2$ или равна $1/2$ (в зависимости от используемого регуляризирующего дифференциального преобразования времени). Также рассмотрены связи используемых четырехмерных λ и u -переменных с элементами орбиты, приведено униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения, позволяющее избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений, возникающих при обходе критических точек типа полюсов, приведены различные регулярные кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли, в которых используются или четырехмерные параметры Эйлера, или переменные Кустаанхеймо—Штифеля, или их модификации. Дан анализ регулярных кватернионных уравнений.

В статье в разделе 2 рассмотрены кватернионные регулярные уравнения возмущенного центрального движения; в разделе 3 невозмущенное центральное

движение; в разделе 4 задача о возмущенном движении искусственного спутника в гравитационном поле Земли. В конце статьи приведено Заключение.

2. Кватернионные регулярные уравнения возмущенного центрального движения. 2.1. *Кватернионная регуляризация векторного дифференциального уравнения возмущенного центрального движения.* В наших работах [10–13, 35] предложенные нами [8, 9] идеи кватернионной регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел были использованы для разработки кватернионной теории регуляризации векторного дифференциального уравнения возмущенного движения материальной точки M в центральном силовом поле, имеющего вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{1}{m} \left(\frac{d\Pi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{p}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi = \Pi(r) \quad (2.1)$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}) = \Pi^*(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}} = \text{grad} \Pi^* = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \xi_1} \xi_1 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \xi_2} \xi_2 + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \xi_3} \xi_3$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt) = \mathbf{p}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3).$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки M , проводимый из центра O силового поля, m — масса точки, Π — потенциал центрального силового поля, полагаемый произвольной дифференцируемой функцией расстояния r от точки M до центра O , Π^* — возмущающий потенциал, полагаемый произвольной функцией времени t и координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 местоположения точки M в системе координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ (ξ), которая движется относительно инерциальной системы координат поступательно; ξ_1, ξ_2, ξ_3 орты осей $O\xi_1, O\xi_2, O\xi_3$; $\mathbf{p}$ — вектор возмущающего ускорения точки M , полагаемый произвольной функцией времени t , радиус-вектора $\mathbf{r}$ и вектора скорости $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ точки M в системе координат ξ .

Векторное дифференциальное уравнение невозмущенного центрального движения материальной точки получается из уравнения (2.1) при $\Pi^* = 0, \mathbf{p} = 0$.

В работах [10–13, 35] были получены общие кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного центрального движения материальной точки с тремя регуляризующими функциями, установлены необходимые и достаточные условия их приводимости к удобному для аналитического и численного исследования осцилляторному виду (к виду уравнений движения четырехмерного возмущенного осциллятора, совершающего в случае невозмущенного центрального движения гармонические колебания с одинаковой частотой); получены различные (в том числе новые регулярные) системы кватернионных дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения материальной точки в нормальной и осцилляторной формах, отличающиеся своей структурой, размерностью, используемыми зависимыми и независимыми переменными; дана сравнительная характеристика полученных систем уравнений, указаны их свойства и области использования.

Для получения регулярных уравнений возмущенного центрального движения материальной точки векторное уравнение (2.1) было записано нами

во вращающейся системе координат η , ось η_1 которой была направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки M . В качестве параметров ориентации этой системы координат были использованы четырехмерные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона) λ_j . В состав уравнений движения точки, записанных во вращающейся системе координат, входят следующие дифференциальные уравнения: скалярное уравнение второго порядка для расстояния r , два скалярных уравнения первого порядка для проекций ω_2 и ω_3 вектора абсолютной угловой скорости вращения системы координат η на ее же координатные оси η_2 и η_3 , кватернионное уравнение первого порядка для кватерниона λ , описывающего ориентацию системы координат η в инерциальном пространстве, эквивалентное четырем скалярным уравнениям для параметров Эйлера λ_j . Проекция ω_1 угловой скорости вращения системы координат η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки является произвольно задаваемым параметром и полагается нами равной нулю.

В дальнейшем вместо переменных ω_2 и ω_3 были введены проекции c_2 и c_3 на оси системы координат η вектора $\mathbf{c}$ момента скорости материальной точки, определяемые равенствами

$$c_2 = r^2 \omega_2, \quad c_3 = r^2 \omega_3 \quad (c_1 = 0).$$

Для получения регулярных уравнений были также использованы дифференциальные уравнения для кеплеровской энергии h материальной точки, ее полной энергии h^* и для модуля c вектора $\mathbf{c}$ момента скорости точки или его квадрата c^2 .

Дальнейшие регуляризующие преобразования указанных уравнений, выполненные нами, включают следующие этапы:

1) Переход от дифференциальных уравнений первого порядка для переменных c_2 и c_3 и λ к дифференциальному кватернионному уравнению второго порядка для кватернионной переменной $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}$. Для этого исходное уравнение первого порядка для переменной λ дифференцируется по времени t и учитываются дифференциальные уравнения для переменных c_2 и c_3 .

2) Дополнение полученного кватернионного уравнения для переменной λ дифференциальными скалярными уравнениями второго порядка для расстояния r и первого порядка для энергий h , h^* и модуля c вектора момента скорости. Правые части уравнений для h , h^* и c при этом записываются через параметры Эйлера λ_j и расстояние r .

3) Замена переменной λ в полученном кватернионном уравнении второго порядка на новую четырехмерную переменную $\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}$ по формуле

$$\lambda = \kappa(r) \mathbf{u},$$

где $\kappa(r)$ — регуляризующая функция (дважды дифференцируемая функция расстояния r). При $\kappa(r) = r^{-1/2}$ новые скалярные переменные u_j (компоненты кватернионной переменной $\mathbf{u}$) являются переменными Кустаанхеймо—Штифеля.

В итоге получается основное дифференциальное кватернионное уравнение второго порядка для переменной $\mathbf{u}$ с регуляризующей функцией $\kappa(r)$.

На этом же этапе производится замена переменных λ_j на новые переменные u_j в уравнениях для переменных r , h , h^* , c по формулам

$$\lambda_0 = \kappa(r) u_0, \quad \lambda_i = -\kappa(r) u_i.$$

4) Выполнение регуляризующего преобразования реального времени t . Для этого осуществляется переход в полученном дифференциальном кватернионном уравнении второго порядка для переменной $\mathbf{u}$ от времени t к новой независимой переменной τ по формуле

$$dt = v(r)d\tau,$$

где $v(r)$ – вторая регуляризующая функция расстояния r .

В итоге было получено основное дифференциальное кватернионное уравнение второго порядка для переменной $\mathbf{u}$, содержащее две регуляризующие функции $\kappa(r)$ и $v(r)$.

Аналогичный переход осуществляется в уравнении второго порядка для расстояния r от времени t к новой переменной τ_1 по формуле

$$dt = v_1(r)d\tau_1,$$

где $v_1(r)$ – третья регуляризующая функция расстояния r .

В итоге было получено дифференциальное уравнение второго порядка для расстояния r , содержащее регуляризующую функцию $v_1(r)$.

2.2. Кватернионные уравнения возмущенного центрального движения с регуляризующими функциями. В результате указанных преобразований была получена следующая совокупность кватернионных соотношений и уравнений задачи возмущенного центрального движения материальной точки с тремя регуляризующими функциями $\kappa(r)$, $v(r)$ и $v_1(r)$.

Связь обобщенных переменных Кустаанхеймо–Штифеля u_j (u -переменных) с параметрами Эйлера (Родрига–Гамильтона) λ_j :

$$\lambda = \kappa(r)\bar{\mathbf{u}}; \quad \lambda_0 = \kappa(r)u_0, \quad \lambda_i = -\kappa(r)u_i \quad (i=1,2,3); \quad \dot{\lambda} = \dot{\kappa}\bar{\mathbf{u}} + \kappa\dot{\bar{\mathbf{u}}}, \quad \kappa = \kappa(r).$$

Здесь и далее верхняя точка – символ дифференцирования по времени t .

Обобщенное преобразование Кустаанхеймо–Штифеля (u -преобразование):
Для расстояния

$$(\kappa(r))^2 (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 1.$$

Для декартовых координат

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = r \lambda \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda} = r(\kappa(r))^2 \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}.$$

Для проекций вектора скорости

$$\mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = \dot{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\mu} = \mu \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda}, \quad \mu = \dot{r} \lambda + 2r \dot{\lambda}, \quad \lambda = \kappa(r)\bar{\mathbf{u}}, \quad \dot{\lambda} = \dot{\kappa}\bar{\mathbf{u}} + \kappa\dot{\bar{\mathbf{u}}}.$$

Для возмущающих сил (для кватерниона $\mathbf{Q}$, содержащего возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий потенциал Π^*)

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2m\sqrt{r}} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}^*}, \quad P_1 = \kappa(r) \text{scal}(\mathbf{u} \circ \mathbf{Q})$$

$$\mathbf{q} = -\kappa(r) \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}^*} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_0^*} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_1^*} \mathbf{i} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_2^*} \mathbf{j} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial u_3^*} \mathbf{k}$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi) = \Pi^*(t, \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}^*), \quad \mathbf{u}^* = \sqrt{r\kappa(r)}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{p}_\xi = p_{\xi 1}\mathbf{i} + p_{\xi 2}\mathbf{j} + p_{\xi 3}\mathbf{k} = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \dot{\mathbf{r}}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r(\kappa(r))^2 \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u},$$

где $\text{scal}(\cdot)$ — скалярная часть кватерниона, стоящего в скобках, $p_{\xi 1}, p_{\xi 2}, p_{\xi 3}$ — проекции возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси системы координат ξ , движущейся относительно инерциальной системы координат поступательно.

Основное дифференциальное кватернионное уравнение для обобщенных переменных Кустанхеймо—Штифеля (для u -переменных)

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + \left(\frac{2}{r\kappa} \frac{d(r\kappa)}{d\tau} - \frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} \right) \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} + \frac{v^2}{2r\kappa} \alpha \mathbf{u} = \frac{v^2}{2r\kappa} \left(\mathbf{Q} - \left(2r \frac{d\kappa}{dr} + \kappa \right) P_1 \mathbf{u} \right) \quad (2.2)$$

$$\alpha = \alpha(r, c^2, h) = 2r \left(\frac{2}{m} (h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d^2\kappa}{dr^2} + 2 \left(\frac{4}{m} (h - \Pi) - \frac{r}{m} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d\kappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3} \kappa. \quad (2.3)$$

Дифференциальное уравнение для расстояния

$$\frac{d^2r}{d\tau_1^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{d(v_1^2 \Pi)}{dr} - h \frac{dv_1^2}{dr} \right) + \frac{1}{2} c^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{v_1^2}{r^2} \right) = v_1^2 P_1. \quad (2.4)$$

Дифференциальные уравнения для переменных h, h^*, c, c^2

$$\frac{dh}{dt} = m \text{scal}(\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{Q}), \quad \frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m \text{scal}(\boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{q})$$

$$h = \frac{1}{2} m v^2 + \Pi(r), \quad h^* = h + \Pi^*, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{dr}{dt} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = 2 \frac{r^3}{c} \text{scal} \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dc^2}{dt} = 4r^3 \text{scal} \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \circ \mathbf{Q} \right).$$

Уравнения для времени

$$\frac{dt}{d\tau} = v(r), \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\tau}{d\tau_1} = \frac{v_1(r)}{v(r)}.$$

Из приведенных уравнений формируется замкнутая система дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки, в которой неизвестными являются переменные u_j (обобщенные переменные Кустанхеймо—Штифеля), расстояние r , энергия h материальной точки при $\Pi^* = 0$ или энергия h^* материальной точки при $\Pi^* \neq 0$, модуль c вектора момента скорости точки или его квадрат c^2 и время t . В качестве независимой переменной может быть принята либо переменная τ , либо переменная τ_1 .

Уравнение (2.4) для расстояния может быть исключено из состава указанной системы дифференциальных уравнений в случаях, когда уравнение

$$(\kappa(r))^2 (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 1$$

может быть разрешено (при заданном виде функции $\kappa = \kappa(r)$) относительно расстояния r , т.е. в случаях, когда расстояние r может быть выражено через переменные u_j .

Отметим, что при переходе в уравнениях для переменных h , c и c^2 от времени t к новой независимой переменной τ или τ_1 вид этих уравнений не меняется. Отметим также, что в ряде случаев вместо уравнения для переменной h целесообразно использовать уравнение для полной энергии h^* материальной точки.

Для нахождения координат ξ_k и проекций скорости $\dot{\xi}_k$ материальной точки на оси системы координат ξ через переменные u_j и расстояние r и их производные необходимо воспользоваться вышеприведенными соотношениями для кватернионов $\mathbf{r}_\xi$ и $\mathbf{v}_\xi$.

2.3. Условия приводимости кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к осцилляторному виду. Приведенные уравнения возмущенного движения материальной точки содержат в качестве произвольных функций расстояния r регуляризующие функции $\kappa(r)$, $v(r)$ и $v_1(r)$. Их выбор осуществляется нами [10, 12, 13, 35] таким образом, чтобы кватернионное уравнение (2.2) и (2.3) для переменной $\mathbf{u}$ и скалярное уравнение (2.4) для расстояния r или, по крайней мере, одно из них были эквивалентны уравнениям движения гармонических осцилляторов для невозмущенного центрального движения, когда $\Pi^* = 0$, $\mathbf{p} = 0$ и, следовательно, когда $\mathbf{Q} = 0$, $P_1 = 0$, $h = \text{const}$, $c = \text{const}$.

Для того чтобы основное кватернионное уравнение (2.2) для переменной $\mathbf{u}$ было эквивалентно в указанном случае уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора необходимо, чтобы оно не содержало первой производной $d\mathbf{u}/d\tau$. Поэтому нами было потребовано, чтобы функции κ и v удовлетворяли условию

$$\frac{2}{r\kappa} \frac{d(r\kappa)}{d\tau} - \frac{1}{v} \frac{dv}{d\tau} = 0. \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.5) имеет вид

$$r\kappa = bv^{1/2}, \quad b = \text{const}.$$

Без потери общности нами полагается $b = 1$ и рассматриваются в дальнейшем такие регуляризующие функции κ и v , которые связаны между собой соотношением

$$r\kappa = v^{1/2}.$$

Это означает, что при конкретном выборе функции κ будет однозначно определена в соответствии с последним соотношением и функция v , и наоборот.

Таким образом, вместо двух произвольных функций κ и v произвольной остается лишь одна из них: κ или v . При этом выбор функции v , так же как и функции κ , ограничивается классом C^2 .

Кватернионное уравнение (2.2) для переменной $\mathbf{u}$ с учетом соотношения $r\kappa = v^{1/2}$ принимает вид уравнения движения четырехмерного нелинейного возмущенного осциллятора

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2}(r\kappa)^3 \alpha \mathbf{u} = \frac{1}{2}(r\kappa)^3 \left(\mathbf{Q} - \left(2r \frac{d\kappa}{dr} + \kappa \right) P_1 \mathbf{u} \right). \quad (2.6)$$

Для того чтобы это уравнение было эквивалентно в случае невозмущенного центрального движения точки уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора необходимо потребовать выполнение условия $(r\kappa)^3 \alpha = a = \text{const}$ где a – некоторая постоянная величина (можно, например, положить $a = h$).

Это условие с учетом соотношения (2.3) в развернутом форме принимает вид

$$(r\kappa)^3 \alpha = (r\kappa)^3 \left[2r \left(\frac{2}{m}(h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d^2 \kappa}{dr^2} + 2 \left(\frac{4}{m}(h - \Pi) - \frac{r}{m} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d\kappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3} \kappa \right] = a = \text{const}. \quad (2.7)$$

Соотношение (2.7) может рассматриваться как дифференциальное уравнение второго порядка для нахождения регуляризующей функции $\kappa(r)$ при заданном виде потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля. После нахождения из этого уравнения функции κ однозначно определяется функция v из условия $r\kappa = v^{1/2}$. Условие (2.7) может также рассматриваться как дифференциальное уравнение первого порядка для нахождения потенциала $\Pi(r)$ при заданном виде регуляризующей функции $\kappa(r)$.

Таким образом, соотношение $r\kappa = v^{1/2}$ и соотношение $(r\kappa)^3 \alpha = a = \text{const}$, развернутая запись которого имеет вид (2.7), являются необходимыми и достаточными условиями приводимости основного кватернионного уравнения (2.2) возмущенного центрального движения материальной точки к осцилляторному виду. Они связывают между собой регуляризующие функции κ , v и потенциал $\Pi(r)$. Если при заданном виде потенциала $\Pi(r)$ регуляризующие функции κ и v выбраны так, что эти условия выполняются (напомним, что в выражении для $(r\kappa)^3 \alpha = a$ следует положить $h = \text{const}$, $c = \text{const}$), то основное кватернионное уравнение (2.2) для переменной u становится в случае невозмущенного центрального движения материальной точки с потенциалом $\Pi(r)$ эквивалентным уравнению движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора, имеющего частоту $k = \sqrt{a/2}$.

Уравнению (2.4) для расстояния r в случае невозмущенного центрального движения также можно придать вид уравнения движения гармонического осциллятора за счет соответствующего выбора регуляризующей функции $v_1(r)$. Действительно, в этом случае оно принимает вид уравнения, исследованного Бельским [59]:

$$\frac{d^2 r}{d\tau_1^2} = \frac{1}{m} \frac{d}{dr} (v_1^2 (h - \Pi_1)), \quad \Pi_1 = \Pi(r) + \frac{mc^2}{2r^2}.$$

Отсюда следует известное условие [59]

$$v_1^2 (h - \Pi_1) = \frac{1}{2} C_1^* r^2 + C_2^* r + C_3^*, \quad C_i^* = \text{const},$$

накладываемое на регуляризующую функцию $v_1(r)$ и приведенный потенциал $\Pi_1(r)$ (потенциал $\Pi(r)$), при выполнении которого уравнение для расстояния r эквивалентно уравнению движения гармонического осциллятора.

К сожалению, это условие и условия $r\kappa = v^{1/2}$, $(r\kappa)^3 \alpha = \text{const}$, при $v(r) = v_1(r)$ оказываются в общем случае (т.е. для любого вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля) несовместными.

Таким образом, нами было установлено [10, 13], что векторное дифференциальное уравнение (2.1) возмущенного центрального движения материальной точки приводится при указанном выше выборе регуляризующих функций к кватернионному уравнению (2.6) осцилляторного вида. В общем случае это кватернионное уравнение должно дополняться скалярными уравнениями для расстояния r и переменных h или h^* и c . При соответствующем выборе регуляризующих функций одно или два из этих уравнений (например, в случае Кустанхеймо–Штифеля это уравнения для r и c) выпадают из рассмотрения.

2.4. Кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в нормальной форме. Рассмотренные выше уравнения возмущенного центрального движения материальной точки содержат в качестве основного дифференциальное кватернионное уравнение второго порядка для четырехмерной переменной $\mathbf{u}$, которое принимает при соответствующем выборе регуляризующих функций форму уравнения движения четырехмерного возмущенного осциллятора. В задачах возмущенного центрального движения материальной точки также целесообразно применение кватернионных уравнений возмущенного центрального движения в нормальной форме, в которых в качестве переменных используются кватернион λ , описывающий ориентацию выше введенной системы координат η , вращающейся в инерциальном пространстве, а также проекции c_i вектора $\mathbf{c}$ момента скорости точки на оси этой системы координат или его проекции c_{ξ_j} на оси системы координат ξ , движущейся поступательно в инерциальной системе координат. Эти уравнения движения имеют следующий вид [10, 13, 35]:

Уравнения в отображениях на вращающийся базис η

$$\frac{d\mathbf{c}_\eta}{dt} = -r \operatorname{vect}(\mathbf{Q} \circ \lambda), \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2r^2} \lambda \circ \mathbf{c}_\eta \quad (2.8)$$

$$\mathbf{c}_\eta = c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k} \quad (c_1 = 0), \quad \frac{d\mathbf{c}_\eta}{dt} = \frac{dc_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dc_3}{dt} \mathbf{k}.$$

Уравнения в отображениях на инерциальный базис (совпадают с уравнениями в отображениях на основной базис ξ)

$$\frac{d\mathbf{c}_\xi}{dt} = -r \operatorname{vect}(\lambda \circ \mathbf{Q}), \quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2r^2} \mathbf{c}_\xi \circ \lambda \quad (2.9)$$

$$\mathbf{c}_\xi = c_{\xi 1} \mathbf{i} + c_{\xi 2} \mathbf{j} + c_{\xi 3} \mathbf{k}, \quad \frac{d\mathbf{c}_\xi}{dt} = \frac{dc_{\xi 1}}{dt} \mathbf{i} + \frac{dc_{\xi 2}}{dt} \mathbf{j} + \frac{dc_{\xi 3}}{dt} \mathbf{k}.$$

Здесь выражение для кватерниона $\mathbf{Q}$, содержащего возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий потенциал Π^* , имеет вид

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \bar{\lambda}}$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \bar{\lambda} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \dot{\mathbf{r}}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r \lambda \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda}$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi) = \Pi^*(t, r \lambda \circ \mathbf{i} \circ \bar{\lambda}), \quad \frac{\partial \Pi^*}{\partial \bar{\lambda}} = \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_0} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_1} \mathbf{i} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_2} \mathbf{j} - \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda_3} \mathbf{k}.$$

Каждая из этих совокупностей уравнений должна быть в общем случае дополнена уравнением для расстояния r

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{1}{m} \frac{d\Pi(r)}{dr} = \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r}, \quad c^2 = c_2^2 + c_3^2 = c_{\xi 1}^2 + c_{\xi 2}^2 + c_{\xi 3}^2. \quad (2.10)$$

Из приведенных уравнений образуется замкнутая система дифференциальных уравнений (2.8) и (2.10) возмущенного центрального движения материальной точки восьмого порядка относительно неизвестных проекций c_2, c_3 вектора момента скорости на оси вращающейся системы координат η , параметров Эйлера λ_j и расстояния r , а также замкнутая система уравнений (2.9) и (2.10) этого движения точки девятого порядка относительно трех проекций $c_{\xi j}$ вектора момента скорости на оси инерциальной системы координат (а также на оси системы координат ξ), параметров λ_k и расстояния r .

Координаты ξ_k и проекций скорости $\dot{\xi}_k$ материальной точки на оси системы координат ξ и инерциальной системы координат определяются через указанные переменные с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\xi} &= \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = r \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \mathbf{v}_{\xi} &= \frac{d\xi_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{d\xi_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{d\xi_3}{dt} \mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{v}_{\eta} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_{\eta} = \mathbf{i} \circ \left(\frac{dr}{dt} - \frac{1}{r} \mathbf{c}_{\eta} \right); \quad \mathbf{v}_{\xi} = \frac{1}{r} \mathbf{r}_{\xi} \circ \left(\frac{dr}{dt} - \frac{1}{r} \mathbf{c}_{\xi} \right), \\ \mathbf{v}_{\eta} &= \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{v}_{\xi} \circ \boldsymbol{\lambda} \end{aligned}$$

Отметим, что порядок системы уравнений (2.8) и (2.10), в которых используются отображения векторов $\mathbf{c}$ и $\dot{\mathbf{c}}$ на вращающийся базис η , на единицу меньше порядка системы уравнений (2.9) и (2.10), в которых используются отображения этих векторов на базис ξ (а, следовательно, и на инерциальный базис). Кроме того, кватернионное уравнение для переменной $\boldsymbol{\lambda}$ в первой из этих систем проще кватернионного уравнения для этой переменной во второй из этих систем, т.к. проекция c_1 вектора $\mathbf{c}$ на ось η_1 (направление радиус-вектора $\mathbf{r}$) равна нулю.

Отметим также, что уравнения первого порядка для переменных $c_2, c_3; c_{\xi i}$ ($i = 1, 2, 3$) и $\boldsymbol{\lambda}$, как и следовало ожидать, не содержат потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля (он присутствует лишь в уравнении второго порядка для расстояния r).

Системы уравнений возмущенного центрального движения материальной точки (2.8), (2.10) и (2.9), (2.10), содержащие кватернионные дифференциальные уравнения первого порядка, сводятся в некоторых важных случаях (в частности, при отсутствии возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ и возмущающего потенциала Π^*) с помощью замены времени t и расстояния r на новые переменные к системам, в которых все дифференциальные уравнения являются линейными с постоянными коэффициентами.

Приведенные выше дифференциальные кватернионные уравнения возмущенного центрального движения были использованы нами для решения ряда задач: для регуляризации уравнений возмущенного движения (устранения имеющейся при наличии центрального тела сингулярности типа полюса); для построения решения пространственной задачи невозмущенного центрального движения при любом виде потенциала $\Pi(r)$ в униформизированной форме, позволяющей избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений,

возникающего при обходе критических точек; для аналитического и численного исследования возмущенных движений в задачах небесной механики и астродинамики, а также в инерциальной навигации. Эти уравнения и соотношения позволили нам также получить дифференциальные уравнения возмущенного движения точки, в которых вместо угловых оскулирующих элементов используются кватернионные элементы.

2.5. Системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения осцилляторного вида в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. В наших работах [10–13, 35] рассмотрена задача регуляризации: устранения особенности типа сингулярности, возникающей в дифференциальных уравнениях возмущенного центрального движения материальной точки при ее прохождении вблизи центра O центрального силового поля (когда расстояние r близко к нулю) или при ее движении по возмущенным высокоэллиптическим орбитам. Для этого были использованы приведенные выше кватернионные уравнения возмущенного центрального движения с регуляризующими функциями, в которых эти функции были выбраны определенным образом.

Так, для регуляризующей функции $\kappa(r)$, определенной равенством $\kappa = r^{-1/2}$, из условия $r\kappa = v^{1/2}$ было получено, что регуляризующая функция $v(r) = r$, а соотношение для коэффициента $(r\kappa)^3 \alpha$ в основном кватернионном уравнении (2.2) и в уравнении (2.6) для переменной $\mathbf{u}$ принимает вид

$$(r\kappa)^3 \alpha = \frac{1}{m} \left(\frac{d(r\Pi(r))}{dr} - h \right).$$

Видно, что условия приводимости к осцилляторному виду основного кватернионного уравнения и уравнения (2.4) для расстояния r при выборе регуляризующих функций в виде

$$\kappa(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad v_1(r) = v(r) = r \quad \left(2r \frac{d\kappa}{dr} + \kappa = 0 \right)$$

выполняются лишь в случае невозмущенного кеплеровского движения, когда

$$\Pi(r) = -m \frac{\mu}{r}, \quad h = \text{const}, \quad \Pi^* = 0, \quad \mathbf{p} = 0.$$

При подстановке указанных выражений для регуляризующих функций $\kappa(r)$, $v(r)$ и $v_1(r)$ и коэффициента $(r\kappa)^3 \alpha$ в уравнения возмущенного центрального движения с регуляризующими функциями нами были получены для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$ центрального силового поля следующие две системы уравнений возмущенного центрального движения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля.

Система уравнений для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$, содержащая в качестве переменной энергию h центрального движения

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{d}{dr} (r\Pi(r)) - h \right) \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{Q} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} (r^2 \Pi(r)) - 2hr \right) &= r \text{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dh}{d\tau} &= 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{q} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi) \\ r &= \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \mathbf{r}_\xi = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$h = 2mr \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 + \Pi(r) = \frac{2m}{r} \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{d\tau} \right)^2 + \Pi(r).$$

Система уравнений для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$, содержащая полную энергию движения $h^* = h + \Pi^*$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2m} \left(\frac{d}{dr} (r\Pi(r)) - h^* \right) \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{q} - \frac{1}{4m} \frac{\partial (r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} (r^2 \Pi(r)) - 2h^* r \right) &= r \left(-\frac{2}{m} \Pi^* + \operatorname{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \right) \\ \frac{dh^*}{d\tau} &= r \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из уравнений (2.11)–(2.12) при $\Pi = -m\mu / r$ следуют дифференциальные кватернионные уравнения возмущенного кеплеровского движения.

Система регулярных уравнений для возмущенного кеплеровского движения (когда потенциал $\Pi = -m\mu / r$) содержащая кеплеровскую энергию h

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2m} h \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{Q} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{2}{m} h r - \mu &= r \operatorname{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r.$$

Система регулярных уравнений для возмущенного кеплеровского движения, содержащая полную энергию $h^* = h + \Pi^*$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2m} h^* \mathbf{u} &= \frac{1}{2} r \mathbf{q} - \frac{1}{4m} \frac{\partial (r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} - \frac{2}{m} h^* r - \mu &= r \left(-\frac{2}{m} \Pi^* + \operatorname{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q}) \right) \\ \frac{dh^*}{d\tau} &= r \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + 2m \operatorname{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Здесь μ – произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего тела (точнее, на сумму масс тела (материальной точки), движение которого изучается, и притягивающего тела).

Системы уравнений (2.13)–(2.15) дополняются соотношениями (2.12) для кватерниона $\mathbf{Q}$, которым описываются действующие возмущения.

Системы уравнений (2.14) и (2.15) являются кватернионными формами регулярных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в переменных Кустаанхеймо–Штифеля. Они учитывают действие возмущающей силы, имеющей потенциал $\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi) = \Pi^*(t, \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u})$, и содержат в качестве одной из переменных кеплеровскую энергию h или полную энергию h^* . Дифференциальное уравнение для расстояния r в силу равенства $r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ может быть исключено из этих систем.

2.6. Системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения осцилляторного вида, в которых используются параметры Эйлера. Иной, чем в случае Кустаанхеймо–Штифеля, выбор регуляризирующих функций $\kappa(r), v(r)$ и $v_1(r)$, а также введение наряду с переменной h^* (полной энергии) новой переменной c^2 (квадрата модуля c вектора момента скорости) позволяют получить более общие регулярные уравнения возмущенного центрального движения [10, 13, 35].

Положим $\kappa = 1$, $v_1(r) = v(r)$. Тогда в соответствии с условием $r\kappa = v^{1/2}$ приводимости основного кватернионного уравнения (2.2) для переменной $\mathbf{u}$ к осцилляторному виду имеем: $v = v_1 = r^2$, а условие (2.7) для коэффициента $(r\kappa)^3 \alpha$ в этом уравнении принимает вид

$$(r\kappa)^3 \alpha = (1/2)c^2.$$

Так как для невозмущенного центрального движения $c = \text{const}$, то из последнего соотношения следует, что при выборе регуляризирующих функций в виде $\kappa = 1$, $v(r) = r^2$ условие $(r\kappa)^3 \alpha = \text{const}$ приводимости к осцилляторному виду основного кватернионного уравнения выполняется для любого вида потенциала $\Pi(r)$. Однако условие приводимости к осцилляторному виду уравнения (2.4) для расстояния r при $v_1(r) = v(r) = r^2$ не выполняется.

С учетом двух последних равенств и равенства $v_1 = r^2$ из вышеприведенных уравнений с регуляризирующими функциями нами получена следующая кватернионная система дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения материальной точки для произвольного вида потенциала $\Pi(r)$, имеющая осцилляторный вид [10, 13, 35]:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{1}{4} c^2 \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} r^3 (\bar{\mathbf{Q}} - \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q})) \boldsymbol{\lambda} \quad (2.16)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 r + \frac{1}{m} \left(\frac{d}{dr} (r^4 \Pi(r)) - 4(h^* - \Pi^*) r^3 \right) = r^4 \left(\text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r^2 \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + m \text{scal}(\boldsymbol{\mu}^* \circ \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\mu}^* = \frac{dr}{d\tau} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \quad (2.18)$$

$$\frac{dc^2}{d\tau} = 4r^3 \text{scal} \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad (2.19)$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \bar{\Pi}^*}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{q}} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{p}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \quad (2.20)$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}^*, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^* = \frac{dr}{d\tau} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + 2r \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\tau}.$$

В этой системе уравнений неизвестными являются параметры Эйлера λ , расстояние r , время t , полная энергия h^* и квадрат модуля с вектора момента скорости c^2 . В качестве независимой переменной выступает переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$.

Для невозмущенного центрального движения имеет место интеграл площадей

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = c = \text{const},$$

где φ — полярная координата.

Из сопоставления этого соотношения с равенством $dt = r^2 d\tau$, связывающим новую независимую переменную τ , соответствующую регуляризующей функции $v = r^2$, с временем t , следует, что

$$d\varphi = c d\tau.$$

Переходя в уравнениях (2.16)–(2.19) возмущенного центрального движения с независимой переменной τ , определенной дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2} dt$, к новой независимой переменной φ , определенной дифференциальным соотношением $d\varphi = cr^{-2} d\tau$, и учитывая, что в случае возмущенного движения $c \neq \text{const}$, получим уравнения возмущенного центрального движения следующего вида [10, 13, 35]:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\varphi^2} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\lambda} = -\frac{1}{2c^2} \left(\frac{dc^2}{d\varphi} \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\varphi} - r^3 (\bar{\mathbf{Q}} - \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q})) \boldsymbol{\lambda} \right) \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{d\varphi^2} + r + \frac{1}{mc^2} \left(\frac{d}{dr} (r^4 \Pi(r)) - 4(h^* - \Pi^*) r^3 \right) = \\ = \frac{1}{c^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{dc^2}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} + r^4 \left(\text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\frac{dh^*}{d\varphi} = \frac{r^2}{c} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \tau} + m \text{scal}(\boldsymbol{\mu}^{**} \circ \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\mu}^{**} = \frac{dr}{d\varphi} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\varphi} \quad (2.23)$$

$$\frac{dc^2}{d\varphi} = 4r^3 \text{scal} \left(\frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\varphi} \circ \mathbf{Q} \right), \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}, \quad c \neq 0. \quad (2.24)$$

Здесь кватернионы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{q}$, описывающие действующие возмущения, определяются соотношениями (2.20), в которых

$$\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{c}{r^2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}^{**}, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^{**} = \frac{dr}{d\varphi} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + 2r \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\varphi}.$$

Отметим, что случай прямолинейного движения точки (когда $c = 0$) при использовании системы уравнений (2.21)–(2.24) с независимой переменной φ должен быть исключен из рассмотрения, поскольку для него эти уравнения не определены.

Основное достоинство полученных с использованием параметров Эйлера λ_j систем уравнений возмущенного центрального движения заключается в том, что каждое из дифференциальных кватернионных уравнений второго порядка в параметрах Эйлера (2.16), (2.21) (для кватернионной переменной λ), входящих в состав этих систем, является регулярным для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ при условии, что члены уравнений, обусловленные возмущающим потенциалом Π^* и возмущающим ускорением $\mathbf{p}$, сохраняют конечные значения.

Кроме того, в случае невозмущенного центрального движения каждое из этих кватернионных уравнений становится эквивалентным уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2\lambda}{d\tau^2} + \frac{1}{4}c^2\lambda = 0, \quad c = \text{const}; \quad \frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = 0.$$

Частота колебаний осциллятора, соответствующего в этом случае кватернионному уравнению (2.16), равна $c/2$ и ее значение зависит от типа движения. Частота же колебаний осциллятора, соответствующего кватернионному уравнению (2.21), имеет одинаковое для всех типов движения постоянное значение, равное $1/2$, что является удобным для решения ряда задач.

Кватернион λ характеризует собой в случае невозмущенного центрального движения ориентацию плоскости орбиты материальной точки в пространстве. Следовательно, каждое из уравнений (2.16) и (2.21) для кватерниона λ является регулярным кватернионным уравнением мгновенной ориентации плоскости возмущенной орбиты в пространстве.

Каждое из уравнений (2.18) и (2.23) для полной энергии h^* и каждое из первых уравнений (2.19) и (2.24) для переменной c^2 также являются регулярным для любого вида потенциала $\Pi(r)$ (при том же условии конечности возмущающих сил). Уравнения же (2.17) и (2.22) для расстояния r регулярны лишь для потенциала $\Pi(r)$ вида

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_3}{r^3} - \frac{a_4}{r^4}, \quad a_i = \text{const},$$

для которого уравнение (2.17) принимает вид

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + c^2r - \frac{1}{m}(a_3 + 2a_2r + 3a_1r^2) - \frac{4}{m}(h^* - \Pi^*)r^3 = r^4 \left(\text{scal}(\lambda \circ \mathbf{q}) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} \right). \quad (2.25)$$

Поэтому приведенные системы уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), полученные с использованием параметров Эйлера, в целом являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом (2.25), имеющим четвертый порядок относительно величины r^{-1} , обратной расстоянию до центра притяжения.

Эти уравнения сложнее полученных кватернионных уравнений в переменных Кустанхаймо–Штифеля, поскольку содержат “лишнее” уравнение для расстояния r (как уже отмечалось, уравнения в переменных Кустанхаймо–Штифеля

могут рассматриваться независимо от уравнения для расстояния r) и уравнение для переменной c^2 , к тому же уравнение для расстояния r не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения. Однако уравнения в переменных Кустаанхеймо–Штифеля являются регулярными лишь для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с ньютоновским потенциалом $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$ (при том же условии конечности возмущающих сил), кроме того, основное кватернионное уравнение из систем уравнений (2.11) или (2.13) для переменных Кустаанхеймо–Штифеля является нелинейным для невозмущенного центрального движения с любым видом потенциала $\Pi(r)$, за исключением потенциала $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$, в отличие от кватернионных уравнений (2.16) и (2.21) для кватернионной переменной λ , которые в этом случае эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора во “времени” τ или φ , что является удобным при построении уравнений в регулярных оскулирующих элементах.

Отметим, что если возмущающее ускорение $\mathbf{p}$ и возмущающий Π^* потенциал не зависят явно от времени t , то уравнения (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24) могут рассматриваться независимо от уравнения для времени. Кроме того, если возмущающее ускорение от непотенциальных сил $\mathbf{p} = 0$, а потенциал Π^* возмущающих сил не зависит явно от времени t , то полная энергия $h^* = \text{const}$ и уравнения (2.18) и (2.23) для этой переменной выпадают из рассмотрения.

2.6.1. О регулярных кватернионных уравнениях орбитального движения с учетом эффектов ОТО. В настоящее время из сопоставления полученных результатов расчетов для смещений элементов орбит планет с данными эфемерид (Simon, Bretagnon, Chapront, Chapront-Touze, Francon, Laskar, 1994) на эпоху J2000 определяется, как согласуется разница в этих данных с релятивистским эффектом, предсказываемым общей теорией относительности (ОТО). Дополнительное смещение перигелия орбиты планеты по ОТО за один оборот планеты вокруг Солнца определяется известной формулой (Эйнштейн А. Объяснение движения перигелия Меркурия в общей теории относительности). Эта формула следует из решения задачи о движении материальной точки в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда. Траектории точки в таком пространстве соответствуют траекториям при движении в поле центральной силы с потенциалом

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_3}{r^3}, \quad a_i = \text{const},$$

который является частным случаем потенциала (2.25).

В таком поле к ньютоновскому ускорению добавляется возмущающее ускорение, которое имеет только радиальную компоненту, пропорциональную r^{-4} . Из уравнений возмущенного движения в оскулирующих элементах следует, что такое возмущение влияет только на поведение долготы перигелия и эксцентриситета орбиты. Установлено, что наличие релятивистского эффекта подтверждается для смещения перигелия Меркурия. Для перигелиев остальных планет эффект, предсказываемый ОТО, находится внутри интервала погрешности расчетов.

Приведенные регулярные уравнения (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24) могут быть использованы, в частности, для прогноза движения планет с учетом эффектов ОТО, а также были использованы нами [60] (2019, 2020) для построения

регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессериальных и секториальных гармоник (с регуляризацией слагаемых уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния r до четвертого порядка включительно).

2.7. Системы регулярных кватернионных уравнений возмущенного центрального движения в нормальных формах. Регулярные уравнения возмущенного центрального движения были также получены нами [10, 13, 35, 36] в двух нормальных кватернионных формах из уравнений (2.8) в отображениях на вращающийся базис η в результате перехода в них к новой независимой переменной t по формуле $dt = r^2 d\tau$ и к новой независимой переменной φ .

Уравнения с независимой переменной t имеют вид

$$\frac{d\mathbf{c}_\eta}{d\tau} = -r^3 \text{vect}(\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\lambda}), \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{c}_\eta, \quad \frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad \mathbf{c}_\eta = c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k} \quad (c_1 = 0). \quad (2.26)$$

Эти дифференциальные уравнения первого порядка для кватернионных переменных $\mathbf{c}_\eta$ и $\boldsymbol{\lambda}$ дополняются дифференциальными уравнениями (2.17) и (2.18) для расстояния r и полной энергии h^* , а также соотношениями (2.20) для кватерниона $\mathbf{Q}$, которым описываются действующие возмущения.

Уравнения с независимой переменной φ имеют вид

$$\frac{d\mathbf{c}_\eta}{d\varphi} = -\frac{r^3}{c} \text{vect}(\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\lambda}), \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2c} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{c}_\eta, \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}, \quad c = \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \neq 0 \quad (c_1 = 0). \quad (2.27)$$

Эти уравнения дополняются дифференциальными уравнениями (2.22) и (2.23) для расстояния r и полной энергии h^* , а также соотношениями (2.20) для кватерниона $\mathbf{Q}$.

Из уравнений (2.9) следуют аналогичные уравнения в отображениях на инерциальный базис, которые имеют большую на единицу размерность и более сложный вид.

Системы уравнений (2.26), (2.17), (2.18) и (2.27), (2.22), (2.23), так же как и системы уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), являются регулярными для возмущенного движения в центральном силовом поле с потенциалом вида

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_3}{r^3} - \frac{a_4}{r^4}, \quad a_i = \text{const.}$$

Однако порядок этих систем равен 10 (такой же порядок имеют системы уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля), что на 3 единицы меньше порядка систем уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), содержащих кватернионные уравнения осцилляторного типа.

Отметим, что случай прямолинейного движения точки (когда $c = 0$) при использовании системы уравнений (2.27), (2.22), (2.23) с независимой переменной φ , так же как и системы уравнений (2.21)–(2.24), должен быть исключен из рассмотрения, поскольку для него эти уравнения не определены.

2.8. Системы кватернионных уравнений возмущенного движения, содержащие обобщенное уравнение Бинэ. Системы уравнений (2.16)–(2.19) и (2.21)–(2.24), как уже отмечалось, имеют общий недостаток: входящее в эти системы уравнение для расстояния r не является линейным ни в общем случае невозмущенного центрального движения, ни в важном частном случае невозмущенного

кеплеровского движения, что затрудняет их непосредственное использование в аналитических исследованиях.

Этот недостаток для кеплеровского движения может быть устранен за счет введения вместо расстояния r новой переменной $\rho = r^{-1}$, что предполагает исключение из рассмотрения тех движений точки, при которых происходит соударение с центральной массой.

Переходя в уравнениях (2.21)–(2.24) к новой переменной $\rho = r^{-1}$, получаем [10–13, 32, 35] систему уравнений

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = -\frac{1}{2c^2} \left(\frac{dc^2}{d\varphi} \frac{d\lambda}{d\varphi} - \frac{1}{\rho^3} (\bar{Q} - \text{scal}(\lambda \circ Q)) \lambda \right) \quad (2.28)$$

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho + \frac{1}{mc^2} \frac{d\P(1/\rho)}{d\varphi} = -\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \frac{dc^2}{d\varphi} \frac{d\rho}{d\varphi} + \frac{1}{\rho^2} \left(\text{scal}(\lambda \circ q) - \frac{1}{m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial(1/\rho)} \right) \right) \quad (2.29)$$

$$\frac{dc^2}{d\varphi} = \frac{4}{\rho^3} \text{scal} \left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \circ Q \right), \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{c\rho^2}, \quad c \neq 0, \quad \rho = \frac{1}{r}. \quad (2.30)$$

Здесь кватернионы Q и q , описывающие действующие возмущения, определяются соотношениями

$$Q = q - \frac{\rho}{2m} \frac{\partial \bar{\Pi}^*}{\partial \lambda}, \quad q = -i \circ \bar{\lambda} \circ p_\xi, \quad \bar{Q} = \bar{q} - \frac{\rho}{2m} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \lambda}, \quad \bar{q} = -p_\xi \circ \lambda \circ i$$

$$\Pi^* = \Pi^*(t, r_\xi), \quad p_\xi = p_\xi(t, r_\xi, v_\xi), \quad r_\xi = \frac{1}{\rho} \lambda \circ i \circ \bar{\lambda}, \quad v_\xi = c \lambda \circ i \circ \left(2\rho \frac{d\bar{\lambda}}{d\varphi} - \frac{d\rho}{d\varphi} \bar{\lambda} \right).$$

Эта система уравнений, содержащая обобщенное уравнение Бинэ (2.29), проще системы (2.21)–(2.24), поскольку в нее не входит уравнение для полной энергии h^* . К тому же уравнение (2.29) в случае невозмущенного кеплеровского движения, когда потенциал $\Pi = -m\mu/r$, принимает вид известного линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho - \frac{\mu}{c^2} = 0, \quad c = \text{const},$$

в то время как уравнение (2.22) для расстояния r , принимающее в этом случае вид

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} + r - \frac{3\mu}{c^2} r^2 = 0$$

остается существенно нелинейным.

Поэтому в ряде случаев аналитического и численного исследования возмущенных движений система (2.28)–(2.30) предпочтительнее системы (2.21)–(2.24).

Отметим также следующие положительные свойства системы (2.28)–(2.30). В случае невозмущенного кеплеровского движения универсальное решение этой системы уравнений (т.е. решение, форма которого не зависит от типа движения) строится в элементарных (тригонометрических) функциях, в то время как для построения универсального решения системы уравнений (2.14) в переменных Кустанхеймо–Штифеля в этом случае приходится вводить специальные функции

Штумпфа [7]. Это обстоятельство является немаловажным при аналитическом и численном исследовании возмущенных движений, так как тип орбиты может меняться под влиянием возмущающих сил, действующих в течение конечного промежутка времени. Кроме того, система (2.28)–(2.30) позволяет получить уравнения возмущенного движения в оскулирующих кватернионных элементах, которые не содержат тригонометрических функций от медленных переменных, не имеют связанных с ними особенностей и пригодны для исследования любого возмущенного центрального движения, в то время как область применения уравнений возмущенного движения в оскулирующих кватернионных элементах, получаемых из уравнений (2.14), ограничивается областью возмущенного эллиптического кеплеровского движения.

Указанные свойства уравнений (2.28)–(2.30) обуславливаются тем, что кватернионное уравнение (2.28) для параметров Эйлера эквивалентно уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора для всех типов невозмущенного кеплеровского движения (эллиптического, параболического, гиперболического), а уравнение (2.29) для переменной $\rho = r^{-1}$, обратной расстоянию r , эквивалентно уравнению движения гармонического осциллятора, возмущенного постоянной силой.

Более того, уравнение (2.28) эквивалентно уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора для произвольного невозмущенного центрального движения. Уравнения же в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (первое и второе уравнения системы (2.14)) эквивалентны уравнениям движения гармонических осцилляторов лишь для эллиптического движения, когда $h < 0$ (для параболического движения $h = 0$, а для гиперболического $h > 0$).

К недостаткам системы (2.28)–(2.30) следует отнести то, что она, в отличие от систем, рассмотренных ранее, не является регулярной и не пригодна для исследования движений в окрестности начала координат (в окрестности центра притяжения). При этом следует иметь в виду, что эта нерегулярность обуславливается уравнением (2.29) для переменной ρ . Уравнения же (2.28), (2.30) являются регулярными для любого возмущенного центрального движения.

Отметим, что переход к новой переменной $\rho = r^{-1}$ в нормальной системе уравнений (2.27) приводит к системе кватернионных уравнений в нормальной форме

$$\frac{d\mathbf{c}_\eta}{d\varphi} = -\frac{1}{\rho^3 c} \text{vect}(\mathbf{Q} \circ \boldsymbol{\lambda}), \quad \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\varphi} = \frac{1}{2c} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{c}_\eta, \quad \frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{c\rho^2}, \quad c = \sqrt{c_2^2 + c_3^2} \neq 0 (c_1 = 0),$$

которая должна быть дополнена обобщенным уравнением Бинэ (2.29) для переменной ρ и выше приведенными соотношениями для кватерниона $\mathbf{Q}$, описывающего действующие возмущения.

Эта система имеет такие же достоинства и недостатки по сравнению с системой (2.27), (2.22), (2.23), как и система (2.28)–(2.30) по сравнению с системой (2.21)–(2.25).

Отметим, что некоторые из предложенных в наших работах [10–13] регулярных уравнений, приведенных выше, были также получены нами другим способом в работе [32] (1992).

3. Невозмущенное центральное движение. 3.1. Кватернионные уравнения невозмущенного центрального движения. Уравнения пространственного невозмущенного

центрального движения материальной точки получаются из уравнений возмущенного движения (2.6), (2.7), (2.4) с учетом равенств $\mathbf{p} = 0$, $\Pi^* = 0$ и имеют вид [11, 35]

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} + \frac{1}{2}(r\kappa)^3 \alpha \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\alpha = 2r \left(\frac{2}{m}(h - \Pi) - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d^2 \kappa}{dr^2} + 2 \left(\frac{4}{m}(h - \Pi) - \frac{r}{m} \frac{d\Pi}{dr} - \frac{c^2}{r^2} \right) \frac{d\kappa}{dr} + \frac{c^2}{2r^3} \kappa$$

$$\Pi = \Pi(r), \quad c^2 = \text{const}$$

$$r\kappa = v^{1/2}, \quad \kappa = \kappa(r), \quad v = v(r); \quad h = h(0) = \text{const}, \quad c = c(0) = \text{const}$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau_1^2} = \frac{1}{m} \frac{d}{dr} (v_1^2 (h - \Pi_1)), \quad \Pi_1 = \Pi(r) + \frac{mc^2}{2r^2}, \quad v_1 = v_1(r) \quad (3.2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = v(r), \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\tau}{d\tau_1} = v^{-1}(r) v_1(r). \quad (3.3)$$

Эти уравнения необходимо дополнить соотношениями

$$\mathbf{r}_\xi = \xi_1 \mathbf{i} + \xi_2 \mathbf{j} + \xi_3 \mathbf{k} = r \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \kappa(r) \bar{\boldsymbol{\mu}} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{v}_\xi = \dot{\xi}_1 \mathbf{i} + \dot{\xi}_2 \mathbf{j} + \dot{\xi}_3 \mathbf{k} = \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \boldsymbol{\mu} = i\dot{\boldsymbol{\lambda}} + 2r\dot{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\kappa} \bar{\boldsymbol{\mu}} + \kappa \ddot{\boldsymbol{\mu}}, \quad (3.5)$$

позволяющими находить координаты ξ_i и проекции скорости $\dot{\xi}_i$ материальной точки через переменные u_j , расстояние r и их производные.

Для того, чтобы уравнение (3.1) было эквивалентно уравнению движения четырехмерного гармонического осциллятора необходимо выполнение условия

$$(r\kappa)^3 \alpha = a = \text{const},$$

где a — некоторая постоянная величина (можно, например, положить $a = h$).

Уравнение (3.2) совпадает с уравнением, полученным Беленьким [59] при рассмотрении задач центрального движения в полярных координатах r , φ .

Полагая регуляризующую функцию $\kappa = 1$, получим

$$v = r^2, \quad \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \alpha = \frac{c^2}{2r^3}.$$

Уравнения (3.1) и (3.3) с учетом этого соотношения принимают вид

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{c^2}{4} \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad c^2 = \text{const} \quad (3.6)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\tau}{d\tau_1} = r^{-2} v_1(r). \quad (3.7)$$

Если вместо переменной τ использовать полярный угол φ , связанный с τ дифференциальным равенством $d\varphi = c d\tau$, то уравнения (3.6) и (3.7) примут вид

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \frac{1}{4}\lambda = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r^2}{c}, \quad \frac{dt}{d\tau_1} = v_1(r), \quad \frac{d\varphi}{d\tau_1} = \frac{c}{r^2} v_1(r), \quad c \neq 0. \quad (3.9)$$

Начало отсчета дуговой координаты φ поместим в перигецентр. Тогда в уравнениях (3.8) и (3.9) переменная φ будет являться истинной аномалией.

Уравнения (3.2), (3.6), (3.7) или (3.2), (3.8), (3.9) и соотношения (3.4), (3.5) (в них $\kappa = 1$) представляют собой уравнения невозмущенного пространственного центрального движения материальной точки. Каждое из уравнений (3.6) и (3.8) эквивалентно уравнению движения одночастотного четырехмерного гармонического осциллятора. Частота колебаний осциллятора, соответствующего уравнению (3.6), во “времени” τ равна $c/2$ и ее значение зависит от типа движения. Частота колебаний осциллятора, соответствующего уравнению (3.8), во “времени” φ имеет одинаковое для всех типов движения значение, равное $1/2$.

3.2. Связи λ и u -переменных с элементами орбиты. Кватернион λ , фигурирующий в уравнениях движения материальной точки M , характеризует собой ориентацию вращающейся системы координат η относительно системы координат ξ . Система координат ξ имеет начало в центре притяжения O , а ее оси сохраняют свои направления в инерциальной системе координат с течением времени неизменными. Начало системы координат η помещено в точку M , а ее ось $M\eta_1$ направлена по радиус-вектору $\mathbf{r}$ точки. Кроме того, полагается, что проекция ω_1 абсолютной угловой скорости вращения системы координат η на ось $M\eta_1$ во все время движения равна нулю.

В случае невозмущенного центрального движения ось $M\eta_2$ системы координат η целесообразно расположить в плоскости орбиты. Тогда угловое положение системы координат η относительно системы координат ξ может быть определено тремя углами: долготой восходящего узла Ω , наклоном орбиты I и аргументом широты $\sigma = \omega^* + \varphi$, где ω^* —угловое расстояние перигецентра от узла, а φ — истинная аномалия. Плоскость орбиты будет располагаться в этом случае в координатной плоскости $M\eta_1\eta_2$, а проекция $\omega_1 = I \cos \sigma + \Omega \sin I \sin \sigma = 0$.

Поставим в соответствие конечным поворотам системы координат η на углы Ω , I и σ собственные кватернионы поворотов

$$\lambda_1 = \cos \frac{\Omega}{2} + \sin \frac{\Omega}{2} \mathbf{k}, \quad \lambda_2 = \cos \frac{I}{2} + \sin \frac{I}{2} \mathbf{i}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{\sigma}{2} + \sin \frac{\sigma}{2} \mathbf{k}.$$

Кватернион λ , соответствующий результирующему повороту системы координат η относительно системы координат ξ , находится через кватернионы λ_i ($i = 1, 2, 3$) составляющих поворотов по кватернионной формуле сложения конечных поворотов

$$\lambda = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3. \quad (3.10)$$

Из последних соотношений получаем формулы

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= \cos \frac{I}{2} \cos \frac{\Omega + \sigma}{2}, \quad \lambda_1 = \sin \frac{I}{2} \cos \frac{\Omega - \sigma}{2} \\ \lambda_2 &= \sin \frac{I}{2} \sin \frac{\Omega - \sigma}{2}, \quad \lambda_3 = \cos \frac{I}{2} \sin \frac{\Omega + \sigma}{2},\end{aligned}\quad (3.11)$$

которые вместе с соотношением

$$\sigma = \omega^* + \varphi \quad (3.12)$$

устанавливают связи параметров Эйлера λ_j с классическими элементами орбиты Ω , I и ω^* .

Учитывая равенство (3.12), представим формулу (3.10) в виде

$$\lambda = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_3 = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega \circ \lambda_\varphi = \lambda^* \circ \lambda_\varphi, \quad \lambda^* = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega, \quad (3.13)$$

где

$$\lambda_\omega = \cos \frac{\omega^*}{2} + \sin \frac{\omega^*}{2} \mathbf{k}, \quad \lambda_\varphi = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k}. \quad (3.14)$$

Здесь кватернион λ^* определяет собой ориентацию системы координат η^* относительно системы координат ξ . Ось $M\eta_1^*$ этой системы координат проходит через перицентр, а ось $M\eta_2^*$ лежит в плоскости орбиты. Следовательно, кватернион λ^* определяет собой ориентацию орбиты в пространстве.

Кроме того, кватернион λ можно записать в таком виде:

$$\lambda = \lambda^* \circ \lambda_\varphi = \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* + \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* \circ \mathbf{k}, \quad \lambda^* = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega = \text{const}. \quad (3.15)$$

Из этого соотношения находим производную

$$\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \lambda^* \circ \frac{d\lambda_\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left[\left(-\sin \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* + \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right) \lambda^* \circ \mathbf{k} \right], \quad (3.16)$$

которую можно также представить в виде

$$\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \lambda^* \circ \mathbf{k} \circ \lambda_\varphi = \frac{1}{2} \lambda^* \circ \lambda_\varphi \circ \mathbf{k} = \frac{1}{2} \lambda \circ \mathbf{k}. \quad (3.17)$$

Формулы (3.11), (3.12) и соотношения

$$u_0 = \kappa^{-1}(r) \lambda_0, \quad u_i = -\kappa^{-1}(r) \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

устанавливают связи между переменными u_i и классическими элементами орбиты.

В кватернионной форме имеем

$$\mathbf{u}_0 = \kappa^{-1}(r) \bar{\lambda} = \kappa^{-1}(r) \bar{\lambda}_3 \circ \bar{\lambda}_2 \circ \bar{\lambda}_1 = \kappa^{-1}(r) \bar{\lambda}_\varphi \circ \bar{\lambda}^*.$$

Отметим, что одному и тому же угловому положению системы координат η относительно системы координат ξ соответствуют два кватерниона: $+\lambda$ и $-\lambda$, каждый из которых определяет собой одно и то же преобразование вращения. Поэтому соотношения (3.11), (3.12) позволяют получить через заданные значения углов Ω , I , σ (или ω^* и φ) две совокупности значений параметров Эйлера, отличающихся лишь знаками: $+\lambda_j$ и $-\lambda_j$. Каждая из этих совокупностей определяет собой одно и то же угловое положение системы координат η относительно системы координат ξ . Соответственно этому соотношения (3.18), (3.11), (3.12) позволяют находить через заданные значения углов Ω , I , σ (или ω^* и φ) также две совокупности значений переменных u_j : $+u_j$ и $-u_j$. Полагая в равенствах (3.18) $\kappa(r) = r^{-1/2}$ и беря параметры Эйлера, найденные через углы Ω , I , σ по формулам (3.11), со знаками минус, получим формулы, связывающие KS -переменные с элементами орбиты, совпадающие с формулами, полученными Штифелем и Шейфеле [7] другим способом.

3.3. Униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения. Для построения решения пространственной задачи невозмущенного центрального движения можно воспользоваться либо уравнениями (3.2), (3.6), (3.7), либо уравнениями (3.2), (3.8), (3.9). Воспользуемся последними.

Интегрируя уравнение (3.8), получаем

$$\lambda(\varphi) = \alpha \cos \frac{\varphi}{2} + \beta \sin \frac{\varphi}{2} \quad (3.19)$$

$$\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left(\beta \cos \frac{\varphi}{2} - \alpha \sin \frac{\varphi}{2} \right). \quad (3.20)$$

Здесь α и β — постоянные кватернионы, определяемые равенствами

$$\alpha = \lambda(0) = \lambda_0, \quad \beta = 2 \left(\frac{d\lambda(\varphi)}{d\varphi} \right)_0, \quad (3.21)$$

где λ_0 и $(d\lambda(\varphi)/d\varphi)_0$ — значения кватернионов λ и $(d\lambda(\varphi)/d\varphi)$ в момент прохождения через перигентр (когда $\varphi = 0$).

Кватернион λ_0 в общем случае определяет собой ориентацию системы координат η^0 , ось $M\eta_1^0$ которой направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, а оси $M\eta_2^0$ и $M\eta_3^0$ развернуты в пространстве вокруг оси $M\eta_1^0$ произвольным образом (т.е. в общем случае ось $M\eta_2^0$ может не лежать в плоскости орбиты). Если же кватернион λ_0 определить таким образом, чтобы ось $M\eta_2^0$ лежала в плоскости орбиты (ось $M\eta_3^0$ при этом будет ортогональна этой плоскости), то общее решение уравнения (3.8) может быть представлено в виде формул (3.15), (3.16) или (3.13), (3.14), (3.17), полученных из геометрических соображений. Сопоставляя уравнения (3.19) и (3.20) с уравнениями (3.15) и (3.16), получаем в этом случае

$$\alpha = \lambda^* = \text{const}, \quad \beta = \lambda^* \circ \mathbf{k} = \text{const}, \quad \lambda^* = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_\omega = \text{const}, \quad (3.22)$$

где кватернион λ^* , определяющий собой ориентацию системы координат η^* относительно ξ (т.е. ориентацию орбиты), может быть найден через элементы орбиты Ω , I , ω^* в соответствии со вторым из соотношений (3.15).

Из равенств (3.22) следует, что кватернионы α и β являются единичными (т.е. с нормами, равными единице), а также то, что компоненты α_j и β_j кватернионов α и β удовлетворяют условию ортогональности:

$$\sum_{j=0}^3 \alpha_j \beta_j = \text{scal}(\bar{\alpha} \circ \beta) = 0.$$

Перейдем к уравнению (3.2) для расстояния r . Определяя регуляризующую функцию $v_1(r)$ для заданного вида приведенного потенциала $\Pi_1(r)$ из соотношения

$$v_1^2(h - \Pi_1) = (1/2)C_1^* r^2 + C_2^* r + C_3^*, \quad C_1^*, C_2^*, C_3^* = \text{const} \quad (3.23)$$

для нахождения расстояния r получим из уравнений (3.2) и (3.23) линейное дифференциальное уравнение, имеющее вид известного линейного уравнения движения возмущенного гармонического осциллятора [59]

$$\frac{d^2 r}{d\tau_1^2} = \frac{1}{m}(C_1^* r + C_2^*).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$r(\tau_1) = A \text{ch}(k\tau_1 + \varepsilon) - C_2^* / C_1^*, \quad k^2 = C_1^* / m, \quad (3.24)$$

где A и ε — постоянные интегрирования.

Соотношения (3.19), (3.20) и (3.24) или (3.13), (3.17) и (3.24), дополненные равенствами

$$\varphi = c \int r^{-2}(\tau_1) v_1(r(\tau_1)) d\tau_1 = \text{const} \quad (3.25)$$

$$t = \int v_1(r(\tau_1)) d\tau_1 = \text{const} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{r}_\xi = r(\tau_1) \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi) \quad (3.27)$$

$$\mathbf{v}_\xi = \left(\left(A k v_1^{-1}(r(\tau_1)) \right) \text{sh}(k\tau_1 + \varepsilon) \boldsymbol{\lambda}(\varphi) + 2c r^{-1}(\tau_1) \frac{d\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}{d\varphi} \right) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi), \quad (3.28)$$

вытекающими из соотношений (3.9), (3.4) и (3.5), представляют собой общее решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения [11, 35]. Роль независимой переменной здесь играет переменная τ_1 . Переменная φ , фигурирующая в формулах (3.19), (3.20) и (3.27), (3.28), выражается через τ_1 посредством соотношений (3.25) и (3.24).

Используя уравнение (3.17), соотношение (3.28) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_\xi = \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \left(\left(A k v_1^{-1}(r(\tau_1)) \right) \text{sh}(k\tau_1 + \varepsilon) \mathbf{i} + c r^{-1}(\tau_1) \mathbf{j} \right) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi). \quad (3.29)$$

Аналогичное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения можно построить, используя кватернионные уравнения (3.6) и (3.7). Роль переменной φ в этом случае будет играть переменная τ .

Представим полученное решение в униформизированной форме, позволяющей избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений, возникающих при обходе критических точек типа полюсов. Используя решения для

переменных r , φ и t , описывающих движение точки в плоском случае в униформизированной форме, установленной в [61], получим построенное автором статьи [11, 35] униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения в виде соотношений (3.19), (3.20) и соотношений

$$\begin{aligned} r &= a(\gamma(z; g_2, g_3) + \mu^*) \\ \varphi &= (2\tilde{n} / (ka^2)) \int (\gamma(z) + \mu^*)^{-3/2} v_1(a(\gamma(z) + \mu^*)) dz + \text{const} \\ t &= (2/k) \int (\gamma(z) + \mu^*)^{1/2} v_1(a(\gamma(z) + \mu^*)) dz + \text{const} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\mathbf{r}_\xi = a(\gamma(z) + \mu^*) \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi) \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\xi &= \left(\dot{r} \boldsymbol{\lambda}(\varphi) + 2c(a(\gamma(z) + \mu^*))^{-1} \frac{d\boldsymbol{\lambda}(\varphi)}{d\varphi} \right) \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi) \\ \dot{r} &= akv_1^{-1}(a(\gamma(z) + \mu^*)) \left((\gamma(z) + \mu^* + l_1)^2 - l_2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь $\gamma(z; g_2, g_3)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса, z — униформизирующая переменная, g_2, g_3 — инварианты.

Значения постоянных a , μ^* , l_1 , l_2 и инвариантов g_2, g_3 определяются в зависимости от знаков величин C_i^* выражениями [59] (Беленький):

$$1) \quad C_2^* / C_1^* > 0$$

$$a = C_2^* / C_1^*, \quad A = ae > 0, \quad \mu^* = -2/3, \quad l_1 = 1, \quad l_2 = e^2, \quad g_2 = (4/3)(1 + 3e^2), \\ g_3 = (8/27)(1 - 9e^2)$$

$$2) \quad C_2^* / C_1^* < 0$$

$$a = |C_2^* / C_1^*|, \quad A = ae > 0, \quad \mu^* = 2/3, \quad l_1 = -1, \quad l_2 = e^2, \quad g_2 = (4/3)(1 + 3e^2), \\ g_3 = -(8/27)(1 - 9e^2)$$

$$3) \quad C_2^* / C_1^* = 0$$

$$a = A, \quad \mu^* = 0, \quad l_1 = -1, \quad l_2 = 0, \quad g_2 = 4, \quad g_3 = 0$$

Здесь e — квазиэксцентриситет.

Переменная φ , фигурирующая в соотношениях (3.19), (3.20), (3.31) и (3.32), должна быть предварительно найдена в соответствии с соотношением (3.30).

Формулу (3.32) можно представить в другом виде:

$$\mathbf{v}_\xi = \boldsymbol{\lambda}(\varphi) \circ \left(\dot{r} \mathbf{i} + c(a(\gamma(z) + \mu^*))^{-1} \mathbf{j} \right) \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}(\varphi), \quad \dot{r} = akv_1^{-1}(a(\gamma(z) + \mu^*)) \left((\gamma(z) + \mu^* + l_1)^2 - l_2 \right)^{1/2}.$$

Приведенные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки и их решения могут быть использованы для построения новых регулярных кватернионных уравнений возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, в том числе

уравнений в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных, в частности, в переменных α и β .

4. Задача о возмущенном движении искусственного спутника в гравитационном поле Земли. 4.1. *Векторные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли.* В векторной форме дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial \Pi_E}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{p} = -\left(\frac{d\Pi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{r}} \right) + \mathbf{p} \quad (4.1)$$

$$r = |\mathbf{r}|, \quad \Pi_E = \Pi + \Pi^*, \quad \Pi = \Pi(r) = -\frac{f m_E}{r}, \quad \Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt),$$

где $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор спутника, $m_E = m_{\text{earth}}$ – масса Земли, $\Pi_E = \Pi_{\text{earth}} = \Pi + \Pi^*$ – потенциал гравитационного поля Земли, $\Pi = \Pi(r)$ – его центральная составляющая, $\Pi^* = \Pi_z^*(\mathbf{r}) + \Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$ – составляющая, обусловленная нецентральной гравитационного поля Земли ($\Pi_z^*(\mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая зональные гармоники гравитационного поля Земли, $\Pi_{ts}^*(t, \mathbf{r})$ – составляющая потенциала, содержащая тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли [62–64]), f – постоянная тяготения, $\mathbf{p}$ – вектор возмущающего ускорения центра масс спутника от действующих на спутник негравитационных сил.

Систему координат $O\xi_1 \xi_2 \xi_3$ (ξ), в которой рассматривается орбитальное движение спутника, введем следующим образом: ее начало O поместим в центр Земли, ось $O\xi_3$ направим к северному полюсу Земли, а ось $O\xi_1$ – в точку весеннего равноденствия. Декартовы координаты спутника в этой системе координат обозначим через ξ_k ($k = 1, 2, 3$).

Составляющие поденциала Π^* являются функцией координат ξ_k и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_z^*(\mathbf{r}) &= \Pi_z^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Pi_z^*(r, \gamma) = \frac{f m_E}{r} \sum_{i=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\gamma), \quad \gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} \\ \Pi_{ts}^*(\mathbf{r}) &= \Pi_{ts}^*(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \Pi_{ts}^*(r, \gamma, \lambda) = \frac{f m_E}{r} \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nk}(\gamma) (C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, R – средний экваториальный радиус Земли, J_n – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_n – полином Лежандра n -го порядка, ϑ – угол между осью $O\xi_3$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$, φ – геоцентрическая широта, C_{nk}, S_{nk} – безразмерные постоянные, характеризующие фигуру Земли, P_{nk} – присоединенные функции Лежандра, λ – географическая долгота.

В [10, 33] нами были предложены кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо–Штифеля (KS -переменных). Была показана целесообразность использования вместо переменных Кустаанхеймо–Штифеля модифицированных четырехмерных регулярных переменных, предложенных нами в этих работах.

В [42] эти результаты нами были развиты. Получены кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном

поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, в которых уравнения движения спутника имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями движения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля. Полученные уравнения линейны для невозмущенных кеплеровских движений, в общем случае имеют вид уравнений движения возмущенного четырехмерного осциллятора. Они, в отличие от классических уравнений, регулярны (не содержат особых точек типа сингулярности) для движения спутника в центральном гравитационном поле Земли под действием возмущающих сил, в описании которых не содержатся отрицательные степени расстояния спутника до центра Земли выше первой. В этих уравнениях основными переменными являются переменные Кустаанхеймо—Штифеля или наши модифицированные четырехмерные переменные, а также энергия движения спутника и время. Новая независимая переменная связана со временем t дифференциальным соотношением, содержащим расстояние спутника до центра масс Земли. Уравнения удобны для применения методов нелинейной механики и высокоточных численных расчетов.

В случае движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого не учитываются тессеральные и секториальные гармоники, но учитываются его зональные гармоники, найдены первые интегралы полученных уравнений движения спутника, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

В [60] предложены регулярные кватернионные модели возмущенного орбитального движения твердого тела (космического аппарата, рассматриваемого как твердое тело), не имеющие особенностей, присущих классическим моделям, при движении тела в ньютоновском гравитационном поле и, в общем случае, при движении тела в центральном силовом поле, потенциал которого имеет вид полинома отрицательных степеней расстояния до центра притяжения четвертого порядка. Предложены также регуляризованные кватернионные модели орбитального движения тела в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения, учитывающие несферичность Земли. В этих моделях понижены на несколько порядков отрицательные степени расстояния до центра притяжения в слагаемых, описывающих влияние на орбитальное движение твердого тела зональных, тессеральных и секториальных гармоник потенциала поля тяготения Земли. Основными переменными являются параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона), расстояние от центра масс тела до центра притяжения, полная энергия орбитального движения тела и квадрат модуля вектора момента орбитальной скорости тела (или проекции этого вектора). В полученных моделях используется новая независимая переменная, связанная с временем дифференциальным соотношением, содержащим квадрат расстояния от центра масс тела до центра притяжения.

В случае возмущенного движения, в описании которого учитываются только его центральная и зональные гармоники, найдены первые интегралы полученных уравнений орбитального движения, предложены замены переменных

и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения тела замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, систему уравнений третьего порядка для расстояния, синуса геоцентрической широты и квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости.

Приведем регуляризованные кватернионные уравнения движения спутника в гравитационном поле Земли в переменных Кустаанхеймо—Штифеля и в модифицированных четырехмерных переменных, а также регуляризованные кватернионные модели орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига—Гамильтона).

4.2. Регуляризованные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля. В случае использования для описания движения спутника четырехмерных переменных Кустаанхеймо—Штифеля u_j ось η_1 введенной ранее вращающейся системы координат η направляется нами по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс спутника. Ориентация системы координат η в системе координат ξ характеризуется параметрами Эйлера λ_j . Координаты ξ_k центра масс спутника в системе координат ξ связаны с расстоянием r и параметрами Эйлера λ_j , а также с переменными Кустаанхеймо—Штифеля u_j соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 \\ \xi_2 &= 2r(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) = 2(u_1u_2 - u_0u_3), \quad \xi_3 = 2r(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) = 2(u_1u_3 + u_0u_2),\end{aligned}\quad (4.3)$$

где $u_0 = \sqrt{r}\lambda_0$, $u_i = -\sqrt{r}\lambda_i$, $i = 1, 2, 3$; $r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$.

Поэтому функции γ и λ , присутствующие в потенциалах Π_z^* и Π_s^* могут быть представлены через расстояние r и параметры Эйлера λ_j , а также через KS -переменные u_j следующим образом:

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} = 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) = \frac{2}{r}(u_1u_3 + u_0u_2) \quad (4.4)$$

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} = \arctg \frac{2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2} = \arctg \frac{2(u_1u_2 - u_0u_3)}{u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}, \quad (4.5)$$

где λ_a и Ω_E — абсолютная долгота и угловая скорость суточного вращения Земли.

Кватернионные дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо—Штифеля получаются из уравнений (2.15) и имеют следующий вид [42]:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h^*\mathbf{u} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} - \frac{1}{4}\frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial\mathbf{u}}, \quad \frac{dh^*}{d\tau} = r\frac{\partial\Pi_s^*}{\partial t} + 2\text{scal}\left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}}. \quad (4.6)$$

Дифференциальное уравнение для расстояния r спутника до центра масс Земли имеет вид

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} - 2h^*r - fm_E = r(-2\Pi^* + \text{scal}(\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{Q})).$$

Фигурирующая в этих уравнениях полная энергия h^* единицы массы спутника определяется соотношением

$$h^* = h + \Pi^*(t, \mathbf{r}_\xi), \quad h = 2r \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 + \Pi(r) = \frac{2}{r} \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{d\tau} \right)^2 + \Pi(r). \quad (4.7)$$

Кватернион возмущений $\mathbf{Q}$ обусловлен действующим непотенциальным возмущением $\mathbf{p}$ и нецентральностью гравитационного поля Земли и имеет вид

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \mathbf{u}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi).$$

Расстояние r до центра масс Земли, проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс спутника и его вектора скорости $\mathbf{v}$ в системе координат ξ находятся через переменные Кустаанхеймо–Штифеля и их производные с помощью кватернионных соотношений

$$r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad \mathbf{r}_\xi = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau}. \quad (4.8)$$

Обозначим

$$\Pi_z^+(r, \gamma) = r \Pi_z^*(r, \gamma) = f m_E \sum_{i=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\gamma) \quad (4.9)$$

$$\Pi_{is}^+(r, \gamma, \lambda) = r \Pi_{is}^*(r, \gamma, \lambda) = f m_E \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_{nk}(\gamma) (C_{nk} \cos(k\lambda) + S_{nk} \sin(k\lambda)). \quad (4.10)$$

Из кватернионных уравнений (4.6) с учетом обозначений (4.9) и (4.10) следуют скалярные дифференциальные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли с учетом его зональных, тессеральных и секториальных гармоник в переменных Кустаанхеймо–Штифеля [42]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_j = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_j + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} \right) u_j^+ \right) - \\ - \frac{1}{4(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \frac{\partial \Pi_{is}^+}{\partial \lambda} \left(\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial u_j} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u_j} \right) + \frac{1}{2} r q_j, \quad j = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r \frac{\partial \Pi_{is}^*}{\partial t} + 2 \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{d\tau} q_j \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} \quad (4.12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_0^+ = u_2, \quad u_1^+ = u_3, \quad u_2^+ = u_0, \quad u_3^+ = u_1; \quad \Pi^+ = \Pi_z^+ + \Pi_{is}^+ \\ \xi_1 = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad \xi_2 = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3). \end{aligned}$$

Π_z^+ , Π_{is}^+ и Π_{is}^* имеют вид (4.9), (4.10) и (4.2) соответственно.

4.3. Регуляризованные уравнения возмущенного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в модифицированных четырехмерных переменных. Нами также предложены [42] другие уравнения движения спутника, которые,

обладая всеми достоинствами вышеприведенных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, имеют более простую и симметричную структуру. Для этого нами было предложено использовать вместо переменных Кустаанхеймо—Штифеля другие четырехмерные переменные, введенные нами в [10, 33] (см. также книгу [35]).

В случае Кустаанхеймо—Штифеля ось η_1 введенной ранее вращающейся системы координат η была направлена нами по радиус-вектору $\mathbf{r}$ центра масс спутника. Координаты ξ_k спутника в системе координат ξ связаны в этом случае с переменными Кустаанхеймо—Штифеля u_j соотношениями (4.3).

Направим по радиус-вектору $\mathbf{r}$ не ось η_1 системы координат η , а ось η_3 . В этом случае все выше приведенные кватернионные уравнения подраздела 4.1 сохраняют свой вид, лишь вместо орта $\mathbf{i}$ необходимо взять орт $\mathbf{k}$ (это, кстати, демонстрирует удобство использования кватернионных моделей астродинамики). Новые четырехмерные переменные u_j^* , определяемые через параметры Родрига—Гамильтона λ_j^* ориентации этой новой вращающейся системы координат η , будут связаны с декартовыми координатами ξ_k соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 2r(\lambda_1^* \lambda_3^* + \lambda_0^* \lambda_2^*) = 2(u_1^* u_3^* - u_0^* u_2^*), & \xi_2 &= 2r(\lambda_2^* \lambda_3^* - \lambda_0^* \lambda_1^*) = 2(u_2^* u_3^* + u_0^* u_1^*) \\ \xi_3 &= 2r((\lambda_0^*)^2 - (\lambda_1^*)^2 - (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2) = ((u_0^*)^2 - (u_1^*)^2 - (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2) \\ u_0^* &= \sqrt{r} \lambda_0^*, & u_i^* &= -\sqrt{r} \lambda_i^*, \quad i = 1, 2, 3; \quad r = (u_0^*)^2 + (u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2.\end{aligned}\quad (4.13)$$

Расстояние r до центра масс Земли, проекции радиус-вектора $\mathbf{r}$ центра масс спутника и его вектора скорости $\mathbf{v}$ на оси системы координат ξ находятся через модифицированные четырехмерные переменные и их производные с помощью кватернионных соотношений

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{u}^* \circ \bar{\mathbf{u}}^* = (u_0^*)^2 + (u_1^*)^2 + (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2, & \mathbf{u}^* &= u_0^* \mathbf{i} + u_1^* \mathbf{j} + u_2^* \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_\xi &= \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \mathbf{u}^*, & \mathbf{v}_\xi &= \frac{d\mathbf{r}_\xi}{dt} = 2\bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \frac{d\mathbf{u}^*}{dt} = \frac{2}{r} \bar{\mathbf{u}}^* \circ \mathbf{k} \circ \frac{d\mathbf{u}^*}{d\tau}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Кватернионные уравнения движения ИСЗ в модифицированных четырехмерных переменных имеют вид

$$\frac{d^2 \mathbf{u}^*}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* \mathbf{u}^* = \frac{1}{2} \mathbf{r} \mathbf{q}^* - \frac{1}{4} \frac{\partial(r\Pi^*)}{\partial \mathbf{u}^*}, \quad \frac{dh^*}{d\tau} = r \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} + 2 \text{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}^*}{d\tau} \circ \mathbf{q}^* \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u}^* \circ \bar{\mathbf{u}}^*.$$

совпадающий по своей форме с кватернионными уравнениями ИСЗ в переменных Кустаанхеймо—Штифеля (4.6).

В этих уравнениях кватернион непотенциальных возмущений $\mathbf{q}^* = -\mathbf{k} \circ \mathbf{u}^* \circ \mathbf{p}_\xi$.

Переменные γ и λ , фигурирующие в потенциале гравитационного поля Земли, выражаются через модифицированные переменные с помощью следующих соотношений, отличных от (4.4) и (4.5):

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} = (\lambda_0^*)^2 - (\lambda_1^*)^2 - (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2 = \frac{1}{r} ((u_0^*)^2 - (u_1^*)^2 - (u_2^*)^2 + (u_3^*)^2) \quad (4.15)$$

$$\lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} = \arctg \frac{\lambda_2^* \lambda_3^* - \lambda_0^* \lambda_1^*}{\lambda_1^* \lambda_3^* + \lambda_0^* \lambda_2^*} = \arctg \frac{u_3^* u_3^* + u_0^* u_1^*}{u_1^* u_3^* - u_0^* u_2^*}. \quad (4.16)$$

Учитывая равенство $(\lambda_0^*)^2 + (\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2 + (\lambda_3^*)^2 = 1$, представим соотношение (4.15) в двух различных формах:

$$\gamma = 1 - 2((\lambda_1^*)^2 + (\lambda_2^*)^2) = 2((\lambda_0^*)^2 + (\lambda_3^*)^2) - 1 = 1 - \frac{2}{r}((u_1^*)^2 + (u_2^*)^2) = \frac{2}{r}((u_0^*)^2 + (u_3^*)^2) - 1. \quad (4.17)$$

Из сопоставления (4.4) с (4.15) видно, что выражения переменной γ , от которой зависит потенциал $\Pi^* = \Pi_z^*(r, \gamma) + \Pi_{ts}^*(r, \gamma, \lambda)$, описывающий зональные, тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли, через новые переменные могут быть представлены в двух различных формах и имеют более простую и симметричную структуру, что и позволяет получить более простые и симметричные, чем в случае использования переменных Кустанхеймо—Штифеля, скалярные уравнения движения спутника, имеющие вид [42]

$$\frac{d^2 u_k^*}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_k^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_k^* - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k^*} + \frac{1}{2} r q_k, \quad k = 0.3$$

$$\frac{d^2 u_s^*}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h^* u_s^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma + 1}{r} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \gamma} - \frac{\partial \Pi^+}{\partial r} \right) u_s^* - \frac{1}{4} \frac{\partial \Pi_{ts}^+}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u_s^*} + \frac{1}{2} r q_s, \quad s = 1.2$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = -r \Omega_E \frac{\partial \Pi_{ts}^*}{\partial \lambda} + 2 \sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j^*}{d\tau} q_j^* \right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_j^*} = \frac{1}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \left(\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial u_j^*} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial u_j^*} \right), \quad \xi_1 = 2(u_1^* u_3^* - u_0^* u_2^*), \quad \xi_2 = 2(u_2^* u_3^* + u_0^* u_1^*)$$

$$q_0^* = u_0^* p_3 + u_1^* p_2 - u_2^* p_1, \quad q_1^* = u_0^* p_2 - u_1^* p_3 + u_3^* p_1$$

$$q_2^* = -u_0^* p_1 - u_2^* p_3 + u_3^* p_2, \quad q_3^* = u_1^* p_1 + u_2^* p_2 + u_3^* p_3$$

$$\Pi^+ = \Pi_z^+(r, \gamma) + \Pi_{ts}^+(r, \gamma, \lambda) = r \Pi_z^+(r, \gamma) + r \Pi_{ts}^+(r, \gamma, \lambda).$$

В этих уравнениях полная энергия h^* единицы массы спутника пределяется соотношениями (4.7), в которых вместо переменных u_j необходимо взять переменные u_j^* .

Уравнения движения спутника в модифицированных четырехмерных переменных, как уже отмечалось, имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями в KS -переменных, что упрощает их аналитическое и численное исследование.

Отметим, что модифицированные переменные u_j^* связаны с переменными Кустанхеймо—Штифеля u_j соотношениями

$$u_0^* = \frac{1}{2}(u_0 + u_1 + u_2 + u_3), \quad u_1^* = -\frac{1}{2}(u_0 - u_1 - u_2 + u_3)$$

$$u_2^* = -\frac{1}{2}(u_0 + u_1 - u_2 - u_3), \quad u_3^* = \frac{1}{2}(u_0 - u_1 + u_2 - u_3)$$

и являются их линейными композициями.

В кватернионной записи эти соотношения имеют следующий вид:

$$\mathbf{u}^* = u_0^* + u_1^* \mathbf{i} + u_2^* \mathbf{j} + u_3^* \mathbf{k} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \circ \mathbf{u} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \circ (u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}).$$

4.4. Регуляризованные кватернионные уравнения орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона). Уравнения, в которых в качестве независимой переменной выступает переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$, получается из уравнений (2.16)–(2.19) и имеют следующий вид [60]:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{\lambda}}{d\tau^2} + \frac{1}{4} c^2 \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{2} r^3 (\bar{\mathbf{Q}} - \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{Q})) \boldsymbol{\lambda} \quad (4.18)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + c^2 r - 3 f m_E r^2 - 4 h^* r^3 = - \frac{\partial(r^4 \Pi^*)}{\partial r} + r^4 \text{scal}(\boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{q}) \quad (4.19)$$

$$\frac{dh^*}{d\tau} = r^2 \frac{\partial \Pi_{\text{is}}^*}{\partial t} + \text{scal}(\boldsymbol{\mu}^* \circ \mathbf{q}), \quad \boldsymbol{\mu}^* = \frac{dr}{d\tau} \boldsymbol{\lambda} + 2r \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \quad (4.20)$$

$$\frac{dc^2}{d\tau} = 4r^3 \text{scal}\left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\tau} \circ \mathbf{Q}\right), \quad \frac{dt}{d\tau} = r^2, \quad (4.21)$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{q} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \bar{\Pi}^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}} \circ \mathbf{p}_\xi, \quad \Pi^* = \Pi_z^*(r, \gamma) + \Pi_{\text{is}}^*(r, \gamma, \boldsymbol{\lambda}), \quad \bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{q}} - \frac{1}{2mr} \frac{\partial \Pi^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = -\mathbf{p}_\xi \circ \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i}$$

$$\gamma = \sin \varphi = \cos \vartheta = \frac{\xi_3}{r} = 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2), \quad \lambda = \lambda_a - \Omega_E t, \quad \lambda_a = \arctg \frac{\xi_2}{\xi_1} = \arctg \frac{2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3)}{\lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}$$

$$\mathbf{p}_\xi = \mathbf{p}_\xi(t, \mathbf{r}_\xi, \mathbf{v}_\xi), \quad \mathbf{r}_\xi = r \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \quad \mathbf{v}_\xi = \frac{1}{r^2} \boldsymbol{\lambda} \circ \mathbf{i} \circ \bar{\boldsymbol{\mu}}^*, \quad \bar{\boldsymbol{\mu}}^* = \frac{dr}{d\tau} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + 2r \frac{d\bar{\boldsymbol{\lambda}}}{d\tau}.$$

В регуляризованной кватернионной системе уравнений (4.18)–(4.21) неизвестными являются параметры Эйлера λ_j , расстояние r , время t , полная энергия h^* и квадрат модуля c вектора момента орбитальной скорости c^2 . В качестве независимой переменной выступает новая переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$.

В этих уравнениях помимо центральной (ньютоновской) составляющей гравитационного поля Земли учитываются его зональные, тессеральные и секториальные гармоники. Уравнения регулярны для возмущенного орбитального движения тела в ньютоновском гравитационном поле Земли (при условии конечности возмущающих сил). Кроме того, они имеют дополнительные (в смысле регулярности) достоинства, в частности, в дифференциальных регуляризованных уравнениях второго порядка (4.18) и (4.19) для параметров Эйлера λ_j и расстояния r отрицательные степени расстояния в слагаемых правых частях уравнений, описывающих влияние зональных, тессеральных и секториальных

гармоники гравитационного потенциала поля Земли, уменьшаются (по сравнению с нерегуляризованными уравнениями) на четыре единицы.

В правой части уравнения (4.20) для полной энергии h^* присутствует слагаемое $r^2 \partial \Pi_{\text{гс}}^* / \partial t$, содержащее лишь частную производную по времени t от потенциала, описывающего тессеральные и секториальные гармоники гравитационного поля Земли (влияние на изменение полной энергии зональных гармоник гравитационного поля Земли отсутствует). В отличие от нерегуляризованного уравнения для полной энергии, в регуляризованном уравнении (4.20) отрицательные степени расстояния в слагаемых, описывающих влияние тессеральных и секториальных гармоник гравитационного поля Земли, уменьшаются на две единицы.

В уравнении (4.21) для переменной c^2 (квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости тела) отрицательные степени расстояния в слагаемых, описывающих влияние зональных, тессеральных и секториальных гармоник гравитационного поля Земли, уменьшаются на две единицы.

Уравнения (4.18)–(4.21) сложнее выше приведенных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и в наших модифицированных четырехмерных переменных, поскольку содержат “лишние” уравнения для расстояния r и квадрата модуля вектора момента орбитальной скорости c^2 , к тому же уравнение (4.19) для расстояния не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения, как в случае использования KS и модифицированных переменных. Однако уравнения в KS и модифицированных переменных регулярны лишь для возмущенного орбитального движения тела в центральном силовом поле с ньютоновским потенциалом (при том же условии конечности возмущающих сил).

5. Заключение. В статье кратко изложена предложенная нами общая кватернионная теория регуляризирующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле, потенциал которого $\Pi = \Pi(r)$ полагается произвольной дифференцируемой функцией расстояния r от точки до центра поля. Точка находится также под действием возмущающего потенциала $\Pi^* = \Pi^*(t, \mathbf{r}) = \Pi^*(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, полагаемого произвольной функцией времени t и декартовых координат ξ_i местоположения точки в инерциальной системе координат, и под действием возмущающего ускорения $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \mathbf{r}, d\mathbf{r}/dt) = \mathbf{p}(t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)$, полагаемого произвольной функцией времени, радиус-вектора и вектора скорости точки. Рассмотрены условия приводимости кватернионных уравнений возмущенного центрального движения к осцилляторному виду с помощью использования трех регуляризирующих функций, содержащих расстояние r . Приведены различные дифференциальные регулярные кватернионные уравнения возмущенного центрального движения в осцилляторной и нормальной формах, построенные с помощью этой теории, в том числе уравнения, в которых используются четырехмерные параметры Эйлера (Родрига–Гамильтона) и четырехмерные переменные Кустаанхеймо–Штифеля и их модификации.

В качестве дополнительных переменных в рассматриваемых дифференциальных уравнениях осцилляторного вида в переменных Кустаанхеймо–Штифеля, используются энергия h центрального движения или полная энергия h^* возмущенного центрального движения материальной точки, включающая

потенциал Π^* возмущающих сил, и реальное время t . Из этих уравнений следуют, как частные, системы регулярных кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля для возмущенного кеплеровского движения, содержащие или кеплеровскую энергию или полную энергию материальной точки, широко используемые в настоящее время. В качестве независимой переменной в уравнениях используется переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-1}dt$ (т.е. используется дифференциальное преобразование времени Зундмана $dt = r d\tau$).

В качестве дополнительных переменных в рассматриваемых дифференциальных уравнениях осцилляторного вида в переменных Эйлера используются расстояние r , полная энергия h^* , квадрат модуля c вектора $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ момента орбитальной скорости материальной точки (c^2) и время t . В качестве независимой переменной используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$, либо переменная φ (полярная координата), определяемая дифференциальным соотношением $d\varphi = (c/r^2)dt$.

Основное достоинство полученных нами с использованием параметров Эйлера λ , осцилляторных систем дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения заключается в том, что каждое из приводимых дифференциальных кватернионных уравнений второго порядка в параметрах Эйлера (для кватернионной переменной λ), входящих в состав этих систем, является регулярным для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с любым видом потенциала $\Pi(r)$ при условии, что члены уравнений, обусловленные возмущающим потенциалом Π^* и возмущающим ускорением $\mathbf{p}$, сохраняют конечные значения. Кроме того, в случае невозмущенного центрального движения каждое из этих кватернионных уравнений становится эквивалентным уравнению движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора, частота колебаний которого равна $c/2$ (половине модуля вектора момента орбитальной скорости) и зависит от типа движения, или же одинакова для всех типов движения и имеет постоянное значение, равное $1/2$. Каждое из приводимых уравнений для полной энергии h^* и каждое из уравнений для переменной c^2 также является регулярным для любого вида потенциала $\Pi(r)$. Уравнения же для расстояния r регулярны лишь для потенциала $\Pi(r)$ вида

$$\Pi(r) = -\frac{a_1}{r} - \frac{a_2}{r^2} - \frac{a_3}{r^3} - \frac{a_4}{r^4}, \quad a_i = \text{const}.$$

Поэтому эти системы уравнений осцилляторного вида, полученные с использованием параметров Эйлера, в целом являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом $\Pi(r)$, имеющим четвертый порядок относительно величины r^{-1} , обратной расстоянию до центра притяжения.

Эти уравнения сложнее полученных нами кватернионных уравнений в переменных Кустаанхеймо—Штифеля, поскольку содержат “лишние” уравнение для расстояния r и уравнение для переменной c^2 , к тому же уравнение для расстояния r не является линейным для невозмущенного кеплеровского движения. Однако уравнения в переменных Кустаанхеймо—Штифеля являются регулярными лишь для возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле с ньютоновским потенциалом $\Pi(r) = -a_1 r^{-1}$ ($a_1 = \text{const}$).

Излагаемые регулярные уравнения, в которых используются параметры Эйлера, могут быть использованы, в частности, для прогноза движения планет с учетом эффектов общей теории относительности (ОТО), поскольку траектории материальной точки в искривленном пространстве-времени, описываемом метрикой Шварцшильда, соответствуют траекториям точки при движении в поле центральной силы с потенциалом $\Pi(r) = -a_1/r - a_3/r^3$, $a_i = \text{const}$, являющимся частным случаем вышеприведенного потенциала. Эти уравнения также были использованы нами для построения регулярных кватернионных уравнений возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли.

В качестве дополнительных переменных одного из рассмотренных вариантов кватернионных дифференциальных уравнений осцилляторного вида в переменных Эйлера используются переменная $\rho = 1/r$, обратная расстоянию r , полная энергия h^* , переменная c^2 и время t . В качестве независимой переменной используется полярная координата φ ($d\varphi = (c/r^2)dt$). Этот вариант уравнений содержит обобщенное уравнение Бинэ, которое линейно для невозмущенного кеплеровского движения, однако он не пригоден для исследования движений в окрестности начала координат, поскольку содержит нерегулярное дифференциальное уравнение второго порядка для переменной ρ (нерегулярность обусловлена переменной $\rho = 1/r$).

В рассмотренных нормальных формах дифференциальных уравнений возмущенного центрального движения (первого порядка) в качестве переменных используются кватернион λ , описывающий инерциальную ориентацию неголономной системы координат, в которой нами записываются уравнения возмущенного центрального движения (его компоненты – параметры Эйлера), двухмерный или трехмерный кватернион s момента орбитальной скорости материальной точки, а также расстояние r , полная энергия h^* и время t . В качестве независимой переменной используется либо переменная τ , определяемая дифференциальным соотношением $d\tau = r^{-2}dt$, либо полярная координата φ . Эти нормальные системы уравнений в целом являются регулярными для возмущенного центрального движения материальной точки в силовом поле с потенциалом

$$\Pi(r) = -a_1/r - a_2/r^2 - a_3/r^3 - a_4/r^4 (a_i = \text{const}).$$

В статье также рассмотрены кватернионные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки, связи четырехмерных λ и u -переменных с элементами орбиты, а также приведено униформизированное решение пространственной задачи невозмущенного центрального движения, позволяющее избавиться от необходимости рассмотрения ветвления решений, возникающих при обходе критических точек типа полюсов. Приведенные уравнения пространственного невозмущенного центрального движения материальной точки и их решения могут быть использованы для построения новых регулярных кватернионных уравнений возмущенного пространственного центрального движения материальной точки, в том числе уравнений в кватернионных оскулирующих (медленно изменяющихся) переменных.

В качестве приложения изложены регуляризованные (в отношении ньютоновской силы притяжения) дифференциальные кватернионные уравнения движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли, в которых используются переменные Кустанхеймо–Штифеля (первый вариант уравнений)

или наши модифицированные четырехмерные регулярные переменные (второй вариант уравнений, которые имеют более простую и симметричную структуру в сравнении с уравнениями в переменных Кустанхеймо—Штифеля). Также излагаются дифференциальные кватернионные уравнения движения спутника, построенные с использованием параметров Эйлера, в которых регуляризуются слагаемые уравнений, содержащих отрицательные степени расстояния до центра Земли четвертого порядка включительно. Во всех этих уравнениях в описании гравитационного поля Земли учитываются не только центральная (ньютоновская), но и зональные, тессеральные и секториальные гармоники потенциала поля тяготения (учитывается несферичность Земли).

В случае движения спутника в гравитационном поле Земли, в описании которого учитываются только его центральная и зональные гармоники, нами найдены первые интегралы дифференциальных кватернионных уравнений движения спутника в модифицированных четырехмерных переменных и дифференциальных кватернионных уравнений, построенных с использованием параметров Эйлера, предложены замены переменных и преобразования этих уравнений, позволившие получить для изучения движения спутника замкнутые системы дифференциальных уравнений меньшей размерности, в частности, системы уравнений четвертого и третьего порядков.

Перспективы развития теории возмущенного центрального движения и построения в рамках этой теории новых регулярных моделей возмущенного орбитального движения. Изложенная в статье кватернионная теория регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле основана на записи уравнений возмущенного центрального движения в неголономной системе координат η и на использовании в качестве параметров ориентации этой системы координат четырехмерных параметров Эйлера (Родрига—Гамильтона) и кватерниона Гамильтона. Ось η_1 неголономной системы координат η направлена вдоль радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки M , а проекция ω_1 угловой скорости вращения системы координат η на направление радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки является произвольно задаваемым параметром и полагается нами равной нулю. В первом разделе статьи был описан предложенный нами [37] метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, основанный на использовании двумерных идеальных прямоугольных координат Ганзена и двумерных переменных Леви-Чивита, описывающих движение материальной точки в идеальной (по Deprit) системе координат [57], а также основан на использовании параметров Эйлера и кватерниона Гамильтона, характеризующих ориентацию идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Ось η_3^{id} идеальной системы координат параллельна вектору $\mathbf{c}$ момента скорости $\mathbf{v}$ точки M , а координатные оси η_1^{id} и η_2^{id} лежат в плоскости мгновенного движения точки. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости идеальной системы координат параллелен радиус-вектору $\mathbf{r}$ точки M .

Аналогичный подход целесообразно использовать для построения новой кватернионной теории регуляризующих и стабилизирующих преобразований ньютоновских дифференциальных уравнений возмущенного движения материальной точки в центральном силовом поле, записывая их в идеальной системе координат и используя параметры Эйлера и кватернион Гамильтона

для описания ориентации идеальной системы координат в инерциальной системе координат. Привлекательность такого подхода заключается в том, что возмущенное пространственное (трехмерное) движение в идеальной системе координат принимает вид плоского (двухмерного) движения и, следовательно, для его описания можно эффективно использовать двухмерные переменные Леви-Чивита, введенные им для регуляризации уравнений плоского движения. Используемые же для описания ориентации идеальной системы координат параметры Эйлера и кватернион Гамильтона являются скалярными и кватернионным оскулирующими элементами орбиты центрального движения (медленно изменяющимися переменными), что удобно для изучения возмущенного центрального движения. В качестве приложения построенной таким образом теории центрального движения может быть рассмотрено построение новых регуляризованных дифференциальных кватернионных уравнений пространственного движения искусственного спутника в гравитационном поле Земли в двухмерных переменных Леви-Чивита и в четырехмерных параметрах Эйлера.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-21-00218.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Euler L.* De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium // Nov. Comm. Petrop. 1765. V. 11. P. 144–151.
2. *Levi-Civita T.* Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi // Ann. mat. pura appl. 1904. V. 9. P. 1–32.
3. *Levi-Civita T.* Sur la regularization du probleme des trois corps // Acta Math. 1920. V. 42. P. 99–144. <https://doi.org/10.1007/BF02418577>
4. *Levi-Civita T.* Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps // Opere matematiche. 1956. № 2. P. 411–417.
5. *Kustaanheimo P.* Spinor regularization of the Kepler motion // Ann. Univ. Turku. 1964. V. 73. P. 3–7.
6. *Kustaanheimo P., Stiefel E.* Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204–219.
7. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975. 304 с.
8. *Челноков Ю.Н.* К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. № 6. С. 12–21.
9. *Челноков Ю.Н.* О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 1. С. 151–158.
10. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 1: Общая теория. Приложения к задаче регуляризации и к задаче о движении ИСЗ. М.: ВИНТИ, 1985. № 218628-В 36 с.
11. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы в задачах возмущенного центрального движения материальной точки. Ч. 2: Пространственная задача невозмущенного центрального движения. Задача с начальными условиями. М.: ВИНТИ, 1985. № 8629-В. 18 с.
12. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 1 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 1. С. 20–30.
13. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация и стабилизация возмущенного центрального движения. Ч. 2 // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 2. С. 3–11.
14. *Velte W.* Concerning the regularizing KS-transformation // Celest. Mech. 1978. V. 17. P. 395–403. <https://doi.org/10.1007/BF01228959>
15. *Vivarelli M.D.* The KS-transformation in hypercomplex form // Celest. Mech. 1983. V. 29. P. 45–50.
16. *Vivarelli M.D.* Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions // Celest. Mech. 1988. V. 41. P. 359–370.

17. *Vivarelli M.D.* On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1991. V. 50. № 2. P. 109–124.
18. *Шагов О.Б.* О двух видах уравнений движения искусственного спутника Земли в осцилляторной форме // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1990. № 2. С. 3–8.
19. *Deprit A., Elpe A. and Ferrer S.* Linearization: Laplace vs. Stiefel // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1994. V. 58. P. 151–201. <https://doi.org/10.1007/BF00695790>
20. *Vrbik J.* Celestial mechanics via quaternions // *Can. J. Phys.* 1994. V. 72. P. 141–146. <https://doi.org/10.1139/p94-023>
21. *Vrbik J.* Perturbed Kepler problem in quaternionic form // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1995. V. 28. № 21. P. 193–198. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/21/027>
22. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2006. V. 95. P. 201–212.
23. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2008. V. 102. № 1. P. 149–162. <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9124-y>
24. *Saha P.* Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 2009. V. 400. P. 228–231. <https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x>
25. *Zhao L.* Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy // *Regul. Chaotic Dyn.* 2015. V. 20. № 1. P. 19–36. <https://doi.org/10.1134/S1560354715010025>
26. *Roa J., Urrutxua H., Pelaez J.* Stability and chaos in Kustaanheimo-Stiefel space induced by the Hopf fibration // *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* 2016. V. 459. № 3. P. 2444–2454. <https://doi.org/10.1093/mnras/stw780>
27. *Roa J., Pelaez J.* The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2017. V. 127. P. 343–368.
28. *Breiter S., Langner K.* Kustaanheimo-Stiefel transformation with an arbitrary defining vector // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2017. V. 128. P. 323–342. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9754-z>
29. *Breiter S., Langner K.* The extended Lissajous-Levi-Civita transformation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2018. V. 130. P. 68. <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4>
30. *Breiter S., Langner K.* The Lissajous-Kustaanheimo-Stiefel transformation // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2019. V. 131. P. 9. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3>
31. *Ferrer S. and Crespo F.* Alternative angle-based approach to the KS-Map. An interpretation through symmetry // *J. Geom. Mech.* 2018. V. 10. № 3. P. 359–372.
32. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. I // *Космические исследования.* 1992. Т. 30. Вып. 6. С. 759–770.
33. *Челноков Ю.Н.* Применение кватернионов в теории орбитального движения искусственного спутника. II // *Космические исследования.* 1993. Т. 31. Вып. 3. С. 3–15.
34. *Челноков Ю.Н.* Анализ оптимального управления движением точки в гравитационном поле с использованием кватернионов // *Изв. РАН. Теория и системы управления.* 2007. № 5. С. 18–44.
35. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. М.: Физматлит, 2011. 560 с.
36. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. I // *Космические исследования.* 2013. Т. 51. № 5. С. 389–401. <https://doi.org/10.7868/S0023420613050026>
37. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. II // *Космические исследования.* 2014. Т. 52. № 4. С. 322–336. <https://doi.org/10.7868/S0023420614030029>
38. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация в небесной механике и астродинамике и управление траекторным движением. III // *Космические исследования.* 2015. Т. 53. № 5. С. 430–446. <https://doi.org/10.7868/S0023420615050040>
39. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // *Изв. РАН. МТТ.* 2017. № 6. С. 24–54.
40. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // *Изв. РАН. МТТ.* 2018. № 6. С. 41–63. <https://doi.org/10.31857/S057232990000712-3>

41. Челноков Ю.Н. Возмущенная пространственная задача двух тел: регулярные кватернионные уравнения относительного движения // ПММ. 2018. Т. 82. № 6. С. 721–733. <https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>
42. Челноков Ю.Н. Кватернионные уравнения возмущенного движения искусственного спутника Земли // Космические исследования. 2019. Т. 57. № 2. С. 117–131. <https://doi.org/10.1134/S002342061902002X>
43. Chelnokov Yu.N. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math. Mech. 2022. V. 43. № 1. P. 21–80. <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
44. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
45. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
46. Fukushima T. Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo-Stiefel regularization // Astron. J. 2005. V. 129. P. 5. <http://doi.org/10.1086/429546>
47. Fukushima T. Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J. 2007. V. 133. P. 6. <http://doi.org/10.1086/518165>
48. Pelaez J., Hedo J.M., Rodriguez P.A. A special perturbation method in orbital dynamics // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2007. V. 97. P. 131–150. <https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
49. Bau G., Bombardelli C., Pelaez J., and Lorenzini E. Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem // Mon. Notices Royal Astron. Soc. 2015. V. 454. № 3. P. 2890–2908. <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106>
50. Amato D., Bombardelli C., Bau G., Morand V., Rosengren A.J. Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2019. V. 131. № 21. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1>
51. Bau G., Roa J. Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements. // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2020. V. 132. № 10.
52. Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю. Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. материалов: XXVIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, 2021. С. 292–295.
53. Aarseth S.J. and Zare K.A. Regularization of the three-body problem // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 185–205. <https://doi.org/10.1007/BF01227619>
54. Aarseth S.J. Gravitational N-Body Simulations. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
55. Hopf H. Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche // Math. Ann. 1931. V. 104. P. 637–665. <https://doi.org/10.1007/BF01457962>
56. Hurwitz A. Mathematische Werke. V2. Birkhauser. Basel, 1933.
57. Deprit A. Ideal frames for perturbed keplerian motions // Celest. Mech. 1976. V. 13. № 2. P. 253–263.
58. Sundman K.F. Mémoire sur le problème des trois corps // Acta Math. 1912. V. 36. P. 105–179. <https://doi.org/10.1007/BF02422379>
59. Бельский И.М. Об одном методе униформизации решений в задачах центрального движения // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 34–41.
60. Челноков Ю.Н. Кватернионные регулярные модели возмущенного орбитального движения твердого тела в гравитационном поле Земли // ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 4. С. 562–585. <http://doi.org/10.1134/S003282351902005X>
61. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.
62. Дубошин Г.Н. Небесная механика: Методы теории движения искусственных небесных тел. М.: Наука, 1983. 352 с.
63. Демин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. М.-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований. 2010. 420 с.

QUATERNION REGULARIZATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PERTURBED CENTRAL MOTION AND REGULAR MODELS OF ORBITAL (TRAJECTORY) MOTION: REVIEW AND ANALYSIS OF MODELS, THEIR APPLICATIONS

Yu. N. Chelnokov^{a,*}

^a*Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences, Saratov, 410028 Russia*

^{*}*e-mail: ChelnokovYuN@gmail.com*

Received 14.03.2023

Revised 10.04.2023

Accepted 12.04.2023

Abstract — The review article briefly outlines our proposed general quaternion theory of regularizing and stabilizing transformations of Newtonian differential equations of perturbed motion of a material point in a central force field, the potential of which is assumed to be an arbitrary differentiable function of the distance from the point to the center of the field. The point is also under the influence of a disturbing potential, assumed to be an arbitrary function of time and Cartesian coordinates of the point's location, and under the influence of a disturbing acceleration, assumed to be an arbitrary function of time, the radius vector and the point's velocity vector. The conditions for the reducibility of the presented quaternion equations of perturbed central motion to an oscillatory form are considered using three regularizing functions containing the distance to the center of the field. Various differential quaternion equations of perturbed central motion in oscillatory and normal forms, constructed using this theory, are presented, including regular equations that use four-dimensional Euler (Rodrigue—Hamilton) parameters or four-dimensional Kustaanheim—Stiefel variables or their modifications, proposed by us. Regular quaternion equations of spatial unperturbed central motion of a material point, connections of the four-dimensional variables used with orbital elements, and a uniformized solution to the spatial problem of unperturbed central motion are considered. As an application, regularized differential quaternion equations of motion of an artificial satellite in the Earth's gravitational field are presented in four-dimensional Kustaanheim—Stiefel variables, as well as in our modified four-dimensional variables and in Euler parameters. An analysis of the stated regular quaternion equations of perturbed central motion is presented, showing that the quaternion regularization method, based on the use of Euler parameters or Kustaanheim—Stiefel variables or their modifications, is unique in joint regularization, linearization and increase in dimension for three-dimensional Keplerian systems and central movement.

Presented regularized (with respect to the Newtonian force of attraction) differential quaternion equations of motion of an artificial satellite in the gravitational field of the Earth in our modified four-dimensional variables have the advantages indicated in the article over quaternion equations in the Kustaanheim—Stiefel variables. In the presented differential quaternion equations of satellite motion, constructed using four-dimensional Euler parameters, the terms of the equations containing negative powers of the distance to the center of the Earth of the fourth order, inclusive, are

regularized. In all these regularized equations, the description of the Earth's gravitational field takes into account not only the central (Newtonian), but also the zonal, tesseral and sectorial harmonics of the potential of the Earth's gravitational field (the nonsphericity of the Earth is taken into account).

Keywords: differential equations of the perturbed central motion of a material point, quaternion theory of regularizing and stabilizing transformations, conditions for the reducibility of quaternion equations to oscillatory form, regularizing functions, quaternion equations in oscillatory and normal forms, Euler (Rodrigue–Hamilton) parameters, Kustaanheimo–Stiefel variables, modified four-dimensional variables, orbital elements, uniform solution, regularized quaternion equations of satellite motion; central (Newtonian), zonal, tesseral and sectorial harmonics of the Earth's gravitational field potential

REFERENCES

1. *L. Euler*, “De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium,” *Nov. Comm. Petrop.* **11**, 144–151 (1765).
2. *T. Levi-Civita*, “Traettorie singolari ed urbi nel problema ristretto dei tre corpi,” *Ann. Mat. Pura Appl.* 1904. V. **9**, 1–32.
3. *T. Levi-Civita*, “Sur la regularization du probleme des trois corps,” *Acta Math.* **42**, 99–144 (1920). <https://doi.org/10.1007/BF02418577>
4. *T. Levi-Civita*, “Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps,” *Opere Matematiche*, No 2, 411–417 (1956).
5. *P. Kustaanheimo*, “Spinor regularization of the Kepler motion,” *Ann. Univ. Turku* **73**, 3–7 (1964).
6. *P. Kustaanheimo and E. Stiefel*, “Perturbation theory of Kepler motion based on spinor regularization,” *J. Reine Angew. Math.* **218**, 204–219 (1965).
7. *E.L. Stiefel and G. Scheifele*, *Linear and Regular Celestial Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin, 1971; Nauka, Moscow, 1975).
8. *Yu.N. Chelnokov*, “Regularization of equations of three-dimensional two-body problem,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 6, 12–21 (1981).
9. *Yu.N. Chelnokov*, “Regular equations of three-dimensional two-body problem,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 1, 151–158 (1984).
10. *Yu.N. Chelnokov*, *Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Part 1. General Theory. Applications to Problem of Regularization and to Problem of Satellite Motion*, Available from VINITI, No. 8628 (Moscow, 1985).
11. *Yu.N. Chelnokov*, *Quaternion Methods in Problems of Perturbed Motion of a Material Point. Part 2. Three-Dimensional Problem of Unperturbed Central Motion. Problem with Initial Conditions*, Available from VINITI, No. 8629 (Moscow, 1985).
12. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. I,” *Izv. RAN, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 1, 20–30 (1993).
13. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion regularization and stabilization of perturbed central motion. II,” *Izv. RAN, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 2, 3–11 (1993).
14. *W. Velte*, “Concerning the regularizing KS-transformation,” *Celest. Mech.* **17**, 395–403 (1978). <https://doi.org/10.1007/BF01228959>
15. *M.D. Vivarelli*, “The KS-transformation in hypercomplex form,” *Celest. Mech.* **29**, 45–50 (1983).
16. *M.D. Vivarelli*, “Geometrical and physical outlook on the cross product of two quaternions,” *Celest. Mech.* **41**, 359–370 (1988).
17. *M.D. Vivarelli*, “On the connection among three classical mechanical problems via the hypercomplex KS-transformation,” *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **50** (2), 109–124 (1991).
18. *O.B. Shagov*, “Two types of equations of motion for an Earth's satellite in oscillatory form,” *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mekh. Tverd. Tela*, No. 2, 3–8 (1990).
19. *A. Deprit, A. Elipe, and S. Ferrer*, “Linearization: Laplace vs. Stiefel,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **58**, 151–201 (1994). <https://doi.org/10.1007/BF00695790>

20. *J. Vrbik*, “Celestial mechanics via quaternions,” *Can. J. Phys.* **72**, 141–146 (1994).
<https://doi.org/10.1139/p94-023>
21. *J. Vrbik*, “Perturbed Kepler problem in quaternionic form,” *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (21), 193–198 (1995). <https://doi.org/10.1088/0305-4470/28/21/027>
22. *J. Waldvogel*, “Quaternions and the perturbed Kepler problem,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **95**, 201–212 (2006).
23. *J. Waldvogel*, “Quaternions for regularizing Celestial Mechanics: the right way,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **102** (1), 149–162 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10569-008-9124-y>
24. *P. Saha*, “Interpreting the Kustaanheimo-Stiefel transform in gravitational dynamics,” *Mon. Notices Roy. Astr. Soc.* **400**, 228–231 (2009).
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.15437.x>
25. *L. Zhao*, “Kustaanheimo-Stiefel regularization and the quadrupolar conjugacy,” *Regul. Chaotic Dyn.* **20** (1), 19–36 (2015). <https://doi.org/10.1134/S1560354715010025>
26. *J. Roa, H. Urrutxua, and J. Pelaez*, “Stability and chaos in Kustaanheimo-Stiefel space induced by the Hopf fibration,” *Mon. Notices Royal Astr. Soc.* **459** (3), 2444–2454 (2016).
<https://doi.org/10.1093/mnras/stw780>
27. *J. Roa and J. Pelaez*, “The theory of asynchronous relative motion II: universal and regular solutions,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **127**, 343–368 (2017).
28. *S. Breiter and K. Langner*, “Kustaanheimo-Stiefel transformation with an arbitrary defining vector,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **128**, 323–342 (2017).
<https://doi.org/10.1007/s10569-017-9754-z>
29. *S. Breiter and K. Langner*, “The extended Lissajous-Levi-Civita transformation,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **130**, 68 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9862-4>
30. *S. Breiter and K. Langner*, “The Lissajous-Kustaanheimo-Stiefel transformation,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **131**, 9 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9887-3>
31. *S. Ferrer and F. Crespo*, “Alternative angle-based approach to the KS-Map. An interpretation through symmetry,” *J. Geom. Mech.* **10** (3), 359–372 (2018).
<https://doi.org/10.3934/jgm.2018013>
32. *Yu. N. Chelnokov*, “Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. I,” *Cosmic Res.* **30** (6), 612–621 (1992).
33. *Yu. N. Chelnokov*, “Application of quaternions in the theory of orbital motion of an artificial satellite. II,” *Cosmic Res.* **31** (3), 409–418 (1993).
34. *Yu. N. Chelnokov*, “Analysis of optimal motion control for a material point in a central field with application of quaternions,” *J. Comp. Syst. Sci. Int.* **46** (5), 688–713 (2007).
<https://doi.org/10.1134/S1064230707050036>
35. *Yu. N. Chelnokov*, *Quaternion Models and Methods in Dynamics, Navigation, and Motion Control* (Fizmatlit, Moscow, 2011) [in Russian].
36. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization in celestial mechanics and astrodynamics and trajectory motion control. I,” *Cosmic Res.* **51** (5), 350–361 (2013).
<https://doi.org/10.1134/S001095251305002X>
37. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization and trajectory motion control in celestial mechanics and astrodynamics: II,” *Cosmic Res.* **52** (4), 304–317 (2014).
<https://doi.org/10.1134/S0010952514030022>
38. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization in celestial mechanics, astrodynamics, and trajectory motion control. III,” *Cosmic Res.* **53** (5), 394–409 (2015).
<https://doi.org/10.1134/S0010952515050044>
39. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I,” *Mech. Solids* **52** (6), 613–639 (2017).
<https://doi.org/10.3103/S0025654417060036>
40. *Yu. N. Chelnokov*, “Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II,” *Mech. Solids* **53** (6), 633–650 (2018).
<https://doi.org/10.3103/S0025654418060055>
41. *Yu. N. Chelnokov*, “The perturbed three-dimensional two body problem: regular quaternion equations of relative motion,” *Prikl. Mat. Mekh.* **82** (6), 721–733 (2018).
<https://doi.org/10.31857/S003282350002736-9>

42. *Y.N. Chelnokov*, “Quaternion equations of disturbed motion of an artificial Earth satellite,” *Cosmic. Res.* **57**, 101–114 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0010952519020023>
43. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics,” *Appl. Math. Mech.* **43** (1), 21–80 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
44. *T.V. Bordovitsyna*, *Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics* (Nauka, Moscow, 1984) [in Russian].
45. *T.V. Bordovitsyna and V.A. Avdyushev*, *Theory of Motion of the Earth’s Satellites: Analytical and Numerical Methods* (Tomsk. Univ., Tomsk, 2007) [in Russian].
46. *T. Fukushima*, “Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo-Stiefel regularization,” *Astron. J.* **129**, 5 (2005). <https://doi.org/10.1086/429546>
47. *T. Fukushima*, “Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.* **133**, 6 (2007). <https://doi.org/10.1086/518165>
48. *J. Pelaez, J.M. Hedo, and P.A. Rodriguez*, “A special perturbation method in orbital dynamics,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **97**, 131–150 (2007). <https://doi.org/10.1007/s10569-006-9056-3>
49. *G. Bau, C. Bombardelli, J. Pelaez, and E. Lorenzini*, “Non-singular orbital elements for special perturbations in the two-body problem,” *Mon. Notices Royal Astron. Soc.* **454** (3), 2890–2908 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnras/stv2106>
50. *D. Amato, C. Bombardelli, G. Bau, et al.*, “Non-averaged regularized formulations as an alternative to semi-analytical orbit propagation methods,” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **131**, 21 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9897-1>
51. *G. Bau and J. Roa*, “Uniform formulation for orbit computation: the intermediate elements. *Celest.*” *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **132**, 10 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10569-020-9952-y>
52. *Yu.N. Chelnokov and M. Yu. Loginov*, “New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space,” in *Proc. of 28th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems* (Concern CSRI Elektropribor, St. Petersburg, 2021), pp. 292–295.
53. *S.J. Aarseth and K.A. Zare*, “Regularization of the three-body problem,” *Celest. Mech.* **10**, 185–205 (1974). <https://doi.org/10.1007/BF01227619>
54. *S.J. Aarseth*, *Gravitational N-Body Simulations* (Cambridge Univ. Press, New York, 2003).
55. *H. Hopf*, “Über die Abbildung der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche,” *Math. Ann.* **104**, 637–665 (1931). <https://doi.org/10.1007/BF01457962>
56. *A. Hurwitz*, *Mathematische Werke*, Vol. 2 (Birkhauser, Basel, 1933).
57. *A. Deprit*, “Ideal frames for perturbed keplerian motions,” *Celest. Mech.* **13** (2), 253–263 (1976).
58. *K.F. Sundman*, “Memoire sur le probleme des trois corps,” *Acta Math.* **36**, 105–179 (1912). <https://doi.org/10.1007/BF02422379>
59. *I.M. Belen’kii*, “On a method for the uniformization of solutions in central motion problems,” *J. Appl. Math. Mech.* **45** (1), 24–29 (1981). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(81\)90005-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(81)90005-8)
60. *Yu.N. Chelnokov*, “Quaternion regular models of perturbed orbital motion of a rigid body in the gravitational field of the Earth,” *Prikl. Mat. Mekh.* **83** (4), 562–585 (2019). <https://doi.org/10.1134/S003282351902005X>
61. *V.K. Abalakin, E.P. Aksenov, E.A. Grebenikov, et al.*, *Handbook on Celestial Mechanics and Astrodynamics* (Nauka, Moscow, 1976) [in Russian].
62. *G.N. Duboshin*, *Celestial Mechanics: Methods for Theory of Artificial Celestial Bodies* (Nauka, Moscow, 1983) [in Russian].
63. *V.G. Demin*, *Motion of Artificial Satellite in Noncentral Gravitational Field* (“Reg. Haot. Din.”, IKI, Moscow, Izhevsk., 2010) [in Russian].