ИЗВЕСТИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК. МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА 2023, № 6, с. 165–179

УДК 531.381: 534.1

СЕМЕЙСТВО КОЛЕБАНИЙ, СВЯЗЫВАЮЩЕЕ УСТОЙЧИВОЕ И НЕУСТОЙЧИВОЕ ПЕРМАНЕНТНЫЕ ВРАЩЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

В. Н. Тхай[a,*]

[a] *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*
**e-mail: tkhaivn@yandex.ru*

Поступила в редакцию 28.02.2023 г.
После доработки 18.04.2023 г.
Принята к публикации 10.05.2023 г.

Исследуется вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки в случае принадлежности центра тяжести главной плоскости эллипсоида инерции. Дается редукция системы уравнений Эйлера–Пуассона к обратимой консервативной системе с двумя степенями свободы, проводится бифуркационный анализ перманентных вращений. Находятся глобальные семейства периодических движений, связывающие устойчивое и неустойчивое перманентные вращения одной частоты. Доказывается, что невырожденное симметричное периодическое движение в обратимой механической системе всегда продолжается на глобальное семейство.

Ключевые слова: тяжелое твердое тело с неподвижной точкой, обратимость, перманентные вращения, редукция, бифуркация, ляпуновское семейство, глобальное продолжение, колебания вращающегося тела

DOI: 10.31857/S0572329923600123, **EDN:** HQIKAO

1. Предварительные замечания. Постановка задачи. Для изучения движений твердого тела с одной неподвижной точкой и центром тяжести, принадлежащем главной плоскости эллипсоида инерции, применяются уравнения Эйлера–Пуассона

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B - C)qr + Pz_0\gamma_2, \quad & \dot{\gamma}_1 &= \gamma_2 r - \gamma_3 q \\ B\dot{q} &= (C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad & \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3 p - \gamma_1 r \\ C\dot{r} &= (A - B)pq - Px_0\gamma_2 \quad & \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1 q - \gamma_2 p \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь A, B, C – главные моменты инерции тела, P – вес тела, x_0, y_0, z_0 – координаты центра тяжести ($y_0 = 0$), $\mathbf{\Omega} = (p, q, r)$ – угловая скорость, $\mathbf{\Gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор вертикали, направленный вверх.

Система (1.1) инвариантна относительно преобразования

$$R_y : (p, r, \gamma_1, \gamma_3, q, \gamma_2, t) \to (p, r, \gamma_1, \gamma_3, -q, -\gamma_2, -t)$$

Она принадлежит [1] к классу обратимых механических систем

$$\begin{gathered} \dot{u} = U(u, v), \quad \dot{v} = V(u, v), \quad u \in \mathrm{R}^l, \quad v \in \mathrm{R}^n, \quad l \geq n \\ U(u, -v) = -U(u, v), \quad V(u, -v) = V(u, v) \end{gathered} \tag{1.2}$$

с неподвижным множеством $M = \{u, v : v = 0\}$. Переменные u и v обычно ассоциируются с квазикоординатой (координатой) и с квазискоростью (скоростью) соответственно, совпадая с ними в некоторых механических системах [1]. В записи системы (1.2) отражается фундаментальное свойство пространственно-временной симметрии моделей ньютоновой механики. Системой уравнений (1.2) описывается большинство моделей классической и небесной механики [1].

Теория обратимых механических систем развивается на основе свойства пространственно-временной симметрии. В пространстве (u, v) фазовой портрет системы (1.2) симметричен относительно множества M. На симметричных движениях переменная v равняется на M нулю. Если обращение v в нуль на M происходит и во второй раз, то получается симметричное периодическое движение (СПД) в виде колебания. Постоянные решения системы (1.2), принадлежащие M, называются в обратимой механической системе (1.2) положениями равновесия: $u = \mathrm{const}$, $v = 0$. СПД вырождается в положение равновесия.

Данное элементарное изложение теории СПД будет достаточным для понимания материала статьи. Что же касается применяемого в статье нелокального результата о глобальном семействе невырожденных СПД, то он подробно излагается в разд. 6.

В формальной записи (1.2) системы (1.1) за вектор u берется $u = (p, r, \gamma_1, \gamma_3)$, а $v = (q, \gamma_2)$. Множество M записывается в виде

$$M_y = \{p, r, \gamma_1, \gamma_3, q, \gamma_2 : q = 0, \gamma_2 = 0\}$$

При исследовании системы (1.2) переменные γ_1, γ_2 и γ_3 в общем случае не стеснены ограничением принадлежности сфере Пуассона.

Основной целью статьи является нахождение глобальных семейств движений – колебаний вращающегося тела с фиксированным значением кинетического момента. Семейство связывает устойчивое и неустойчивое перманентные вращения; такие движения ранее не описывались.

При этом система уравнений Эйлера–Пуассона исследуется как обратимая механическая система (1.2), в которой q и γ_2 объединены в пару переменных $v = (q, \gamma_2)$, принимающей на перманентных вращениях нулевое значение и интерпретирущейся как скорость. Для физической задачи (1.1) учивается принадлежность вектора Γ сфере Пуассона.

В [2] вводилось понятие вращательного движения механической системы – колебания, наложенного на равномерное вращение. Такие движения исследуются как колебания посредством перехода в равномерно вращающуюся систему координат. В этой статье ситуация сложнее.

Перманентные вращения тела изучаются как равновесия обратимой механической системы (1.2). Дается редукция системы (1.2) к обратимой консервативной системе с двумя степенями свободы. Проводится бифуркационный анализ равновесий редуцированной системы. С помощью доказанной теоремы о глобальном семействе невырожденных СПД находятся все семейства маятниковых колебаний вращающегося тела, которые связывают устойчивое и неустойчивое перманентные вращения. Такие семейства колебаний реализуются для любых значений кинетического момента, за исключением нулевого и бифуркационного значений.

В статье дается параллельное рассмотрение системы (1.1) и системы (1.2) с неподвижным множеством M_y. В системе (1.2) скорости p, q, r и проекции γ_1, γ_2, γ_3 системы (1.1) рассматриваются как формальные переменные. Смысл переменных в (1.2) при необходимости поясняется в тексте. Редуцированная система также записывается в виде (1.2). Теория бифуркаций Пуанкаре–Четаева применяется к равновесиям редуцированной системы. Выводы об устойчивости получаются из анализа квадратичной части интеграла энергии, дополненном построением кривых перманентных вращений. Наконец, применяется теория глобального семейства СПД, включающая локальную теорему Ляпунова–Брюно–Девани и теорему о существовании и построении глобального семейства периодических движений.

Подходы могут быть полезны в других задачах механики.

В динамике тяжелого твердого тела известны три решения, для которых центр тяжести лежит в главной плоскости эллипсоида инерции (решения Гесса, Гриоли, Докшевича). Для них эллипсоид инерции не является эллипсоидом вращения и поэтому результаты, полученные в статье, могут быть использованы для получения новых свойств в указанных решениях.

Обзор современного состояния исследований задачи Эйлера о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки дается в [3]. Перманентные вращения тела изучались во многих работах (см. [4]). Для рассматриваемого тела ($y_0 = 0$) результаты по устойчивости и бифуркации перманентных вращений наиболее полно описаны В.Н. Рубановским в [5, § 3].

Что касается теоремы Ляпунова о центре (см. [6]) в нелокальной постановке, то в [7] даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Theta \in \mathrm{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Theta$, эти результаты развиты в [8]. Связанная проблема ставилась в [9, 10] как задача продолжения симметричного периодического движения обратимой механической системы на глобальное семейство СПД. Также в [9] для тела в общем случае, когда его параметры не стеснены условиями типа равенства, установлены два семейства маятниковых колебаний, связывающие нижнее и верхнее равновесия; в [10] найдено глобальное пространственное семейство колебаний для тела с центром тяжести в главной плоскости эллипсоида инерции.

2. Перманентные вращения. Функция $V = (V_q, V_{\gamma_2})$ в системе (1.1) дается проекциями

$$V_q = [(C - A)rp + P(x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)]/B$$
$$V_{\gamma_2} = \gamma_3 p - \gamma_1 r$$

Поэтому все перманентные вращения тела

$$\begin{aligned} &p = p^0(\text{const}), \quad q = 0, \quad r = r^0(\text{const}) \\ &\gamma_1 = \gamma_1^0(\text{const}), \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma_3^0(\text{const}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

находятся из равенств

$$(C - A)r^0p^0 + P(x_0\gamma_3^0 - z_0\gamma_1^0) = 0, \quad \gamma_3^0p^0 - \gamma_1^0r^0 = 0 \tag{2.2}$$

Постоянные решения (2.1) образуют семейства и включают при $p^0 = r^0 = 0$ верхнее и нижнее положения равновесия тела. Решениями (2.1) описываются перманентные вращения тела вокруг вертикальной оси.

Из (2.2) следует, что $p^0r^0 \neq 0$. В самом деле, если $p^0 \neq 0$, $r^0 = 0$, то $\gamma_3^0 = 0$ и $\gamma_1^0 = 0$. Поэтому для перманентных вращений из второго равенства в (2.2) выводится отношение

$$\frac{p^0}{\gamma_1^0} = \frac{r^0}{\gamma_3^0} = \chi, \quad \chi^2 = p^{02} + r^{02} \tag{2.3}$$

в котором $\chi \neq 0$. Параметр χ может быть положительным или отрицательным. Полагается: $\gamma_1 = \cos\alpha$, $\gamma_3 = \sin\alpha$. Тогда первое равенство в (2.2) записывается в виде

$$\chi^2(C - A)\cos\alpha\sin\alpha + P(x_0\sin\alpha - z_0\cos\alpha) = 0 \tag{2.4}$$

В результате из (2.4) для любого фиксированного $\chi \neq 0$ получается уравнение

$$\chi^2 = F(\alpha), \quad F(\alpha) = \frac{P}{C - A}\left(-\frac{x_0}{\cos\alpha} + \frac{z_0}{\sin\alpha}\right) \tag{2.5}$$
$$C \neq A, \quad \sin\alpha \neq 0, \quad \cos\alpha \neq 0$$

для нахождения перманентных вращений рассматриваемого тела. Без ограничения общности уравнение (2.5) рассматривается в интервале $\alpha \in (-\pi, \pi)$. В промежутке длиной $\pi/2$ (по переменной α) уравнение (2.5) допускает один или два корня. Для этих корней параметр χ – фиксирован, они различаются только углами α.

Функция (2.5) содержит параметры тела. Далее анализ равенства (2.5) проводится на примере тела, для которого

$$C > A, \quad x_0 > 0, \quad z_0 > 0$$

Функция $F(\alpha)$ возрастает в интервале $(-\pi, -\pi/2)$, причем $F(-\pi + 0) \to -\infty$, $F(-\pi/2 - 0) \to +\infty$. Поэтому при $\alpha \in (-\pi, -\pi/2)$ уравнение (2.5) допускает единственный корень. В интервале $(-\pi/2, 0)$ функция $F(\alpha)$ принимает отрицательные значения, поэтому уравнение (2.5) не имеет корней.

В интервале $(0, \pi/2)$ асимптотика такова: $F(+0) \to +\infty$, $F(\pi/2 - 0) \to -\infty$. Функция $F(\alpha)$ монотонно убывает. Поэтому при $\alpha \in (0, \pi/2)$ уравнение (2.5) имеет единственный корень.

В интервале $(\pi/2, \pi)$ функция $F(\alpha)$ принимает положительные значения. Поэтому, начиная с значения угловой скорости $\chi = \chi^*$, уравнение (2.5) допускает два различных корня: числу χ^* отвечает двойной корень. Соответствующее χ^* значение угла $\alpha = \alpha^*$ находится из равенства:

$$x_0 \sin^3\alpha^* + z_0 \cos^3\alpha^* = 0$$

Число χ^* будет бифуркационным значением угловой скорости, оно вычисляется из равенства

$$\chi^{*2} = \frac{P}{C - A}\left(-\frac{x_0}{\cos\alpha^*} + \frac{z_0}{\sin\alpha^*}\right)$$

Соответствующее ему значение s^* постоянной кинетического момента s (явный вид для s приводится в (3.1)) также является бифуркационным. Параметром в уравнении (2.5) служит χ^2, поэтому можно рассматривать только положительные значения χ (или s).

Таким образом, выводится лемма 1.

Лемма 1. Пусть $C > A$, $x_0 > 0$, $z_0 > 0$. Тогда тяжелое твердое тело с неподвижной точкой в случае $y_0 = 0$ при любых фиксированных значениях кинетического момента $s \neq 0$ допускает два перманетных вращения, один из которых принадлежит интервалу $\alpha \in (-\pi, -\pi/2)$, второй – интервалу $\alpha \in (0, \pi/2)$. При росте модуля кинетического момента, начиная с граничного значения s^*, к указанным вращениям добавляются еще два перманетных вращения, которые принадлежат интервалу $\alpha \in (\pi/2, \pi)$.

Модуль кинетического момента отражает величину угловой скорости вращения тела. При $s < s^*$ динамика тела в основном определяется силой тяжести, после преодоления кинетическим моментом бифуркационного значения s^* вклад вращения тела в динамику становится “решающим” в смысле леммы 1.

Аналогичный анализ проводится для тела в случае $C < A$, а также для точек параметрической плоскости (x_0, z_0) из оставшихся квадрантов. Формулировки соответствующих лемм опускаются.

Лемма 1 иллюстрируется на рис. 1. На нем в скобках приводится степень неустойчивости точек (перманентных вращений) кривой.

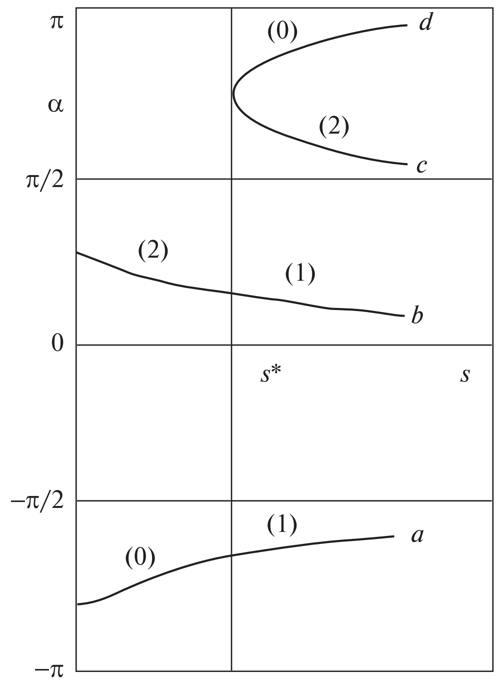

Рис. 1. $C > A,\ x_0 > 0,\ z_0 > 0.$

3. Редукция системы (1.1) на уровне кинетического момента. Система (1.1) допускает классические интегралы

$$
\begin{gathered}
H \equiv Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2P(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3) = 2h(\text{const}) \\
K \equiv Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = s(\text{const}) \\
I \equiv \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \zeta(\text{const})
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

При $\zeta = 1$ равенство $I = 1$ выражает принадлежность единичного вектора сфере Пуассона; сам интеграл существует при любых значениях переменных γ_1, γ_2 и γ_3.

В системе (1.1) для значений $s \neq 0$ применяются замены

$$
\gamma_1 = \rho_1\cos\alpha, \quad \gamma_3 = \rho_1\sin\alpha, \quad p = \rho_2\cos\delta, \quad r = \rho_2\sin\delta
\tag{3.2}
$$

Тогда система (1.1) записывается в виде

$$
\begin{gathered}
\dot\rho_1 = \gamma_2\rho_2\sin(\delta - \alpha) \\
\rho_1\dot\alpha = q\rho_1 + \gamma_2\rho_2\cos(\delta - \alpha) \\
\rho_2\dot\delta = -\left(\frac{B - C}{A}q\rho_2\sin\delta + \frac{P}{A}z_0\gamma_2\right)\sin\delta + \left(\frac{A - B}{C}q\rho_2\cos\delta - \frac{P}{C}x_0\gamma_2\right)\cos\delta \\
\dot\gamma_2 = -\rho_1\rho_2\sin(\delta - \alpha) \\
B\dot q = \frac{1}{2}(C - A)\rho_2\sin 2\delta + P\rho_1(x_0\sin\alpha - z_0\cos\alpha)
\end{gathered}
\tag{3.3}
$$

При этом она остается инвариантной относительно замены

$$
(\rho_1, \alpha, \delta, \gamma_2, q, t) \to (\rho_1, \alpha, \delta, -\gamma_2, -q, -t)
$$

и принадлежит к классу обратимых механических систем с неподвижным множеством $M_1 = \{\rho_1, \alpha, \delta, \gamma_2, q : \gamma_2 = 0, q = 0\}$. Интегралы (3.1) переписываются в виде

$$H = \rho_2^2(A\cos^2\delta + C\sin^2\delta) + Bq^2 + 2P\rho_1(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha)$$
$$\rho_2 = \frac{s}{A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha}$$
$$\rho_1^2 + \gamma_2^2 = \zeta$$

Системой (3.3), с учетом геометрического равенства $\zeta = 1$, на сфере Пуассона задается консервативная система с двумя степенями свободы, содержащая параметр s^2.

Теорема 1. Движение твердого тела с центром тяжести, принадлежащим главной плоскости эллипсоида инерции при любом значении кинетического момента, за исключением нулевого и бифуркацинных $\pm s^*$ значений, описывается на сфере Пуассона обратимой консервативной системой с двумя степенями свободы, содержащей параметр s^2.

Таким образом, при каждом значении кинетического момента s, за исключением нулевого и бифуркационных значений, на сфере Пуассона происходит редукция системы уравнений Эйлера–Пуассона к системе (3.3), в которой выполняется равенство $\zeta = 1$.

Для редуцированной системы записывается интеграл энергии

$$H = \frac{s^2(A\cos^2\delta + C\sin^2\delta)}{(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^2} + Bq^2 + 2P\sqrt{1-\gamma_2^2}(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha) \qquad (3.4)$$

В обратимой механической системе (1.2) переменные q и γ_2 интерпретируются как скорости. Постоянные решения, на которых $q = 0$, $\gamma_2 = 0$, являются равновесиями редуцированной системы, а для тела они означают перманентные вращения. При этом из равенств (2.3) находится связь между параметрами χ и s для равновесий

$$\chi = \frac{s}{A\cos^2\alpha^0 + C\sin^2\alpha^0}$$

Наконец, для перманентных вращений согласно (2.4) справедливо равенство

$$f(\alpha^0) = 0,$$
$$f(\alpha) \equiv -\frac{s^2(C-A)\sin 2\alpha}{2(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^2} - P(x_0\sin\alpha - z_0\cos\alpha)$$

Редуцированная консервативная система (3.3) записана в виде, отличном от стандартного, где применяются силовая функция и выражение для кинетической энергии. Поэтому далее проводится анализ функции W

$$W = \frac{s^2(A\cos^2\delta + C\sin^2\delta)}{(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^2} + 2P(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha) \qquad (3.5)$$

полученной из выражения (3.4) при $q = 0$, $\gamma_2 = 0$ и заданной на пересечении сферы Пуассона, фиксированного уровня интеграла кинетического момента $K = s$ и неподвижного множества M_y обратимой механической системы (1.1). Функция W совпадает с H на неподвижном множестве M_y. Критические точки функции W совпадают с равновесиями редуцированной системы и дают перманетные вращения тела.

4. Семейство симметричных движений, связывающее перманентные вращения. Записываются условия существования равновесий редуцированной системы

$$W'_\alpha = -\frac{s^2(A\cos^2\delta + C\sin^2\delta)(-A\cos\delta\sin\alpha + C\sin\delta\cos\alpha)}{(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^3} + \\ + 2P(-x_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha) = 0$$

$$W'_\delta = \frac{s^2(C-A)\sin 2\delta}{2(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^2} - \\ - s^2\frac{(A\cos^2\delta + C\sin^2\delta)(-A\sin\delta\cos\alpha + C\cos\delta\sin\alpha)}{(A\cos\delta\cos\alpha + C\sin\delta\sin\alpha)^3} = 0,$$

в которых через (') обозначается частная производная по соответствующей переменной. Второе равенство выполняется тождественно по α, если $\delta = \alpha$. Поэтому только первое равенство

$$f(\alpha) = 0 \tag{4.1}$$

служит уравнением для нахождения всех равновесий редуцированной системы. Уравнение (4.1) совпадает с уравнением (2.5), качественное исследование корней которого проведено в разд. 2. Поэтому производная

$$f'(\alpha) = -\frac{s^2(C-A)\cos 2\alpha}{(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^2} + \frac{s^2(C-A)^2\sin^2 2\alpha}{(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^3} - P(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha) \tag{4.2}$$

при $s = s^*$ для значения угла $\alpha^* \in (\pi/2, \pi)$ равна нулю. В остальных интервалах производная $f'(\alpha)$ для точек равновесия отлична от нуля.

Все критические точки функции (3.5) находятся из условий $W'_\alpha = 0$, $W'_\delta = 0$. Они принадлежат прямой $\delta = \alpha$ и находятся из уравнения (4.1). Следовательно, при любом значении кинетического момента два соседних по углу α равновесия на плоскости (α, δ) связываются прямой $l_1 : \delta = \alpha$.

Оказывается, равновесия связываются двумя кривыми. Исключим нулевое и бифуркационное значения кинетического момента. Функция W представляется в виде

$$W(\alpha, x) = \frac{s^2}{(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)}\left(1 + x^2\left(1 + \frac{3(C-A)^2\sin^2 2\alpha}{4(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha)^2}\right)\right) + \\ + 2P[(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha) + xf(\alpha) - x^2/2(x_0\cos\alpha + z_0\sin\alpha)] + \ldots \tag{4.3}$$
$$\delta = \alpha + x$$

В силу равенства (4.1) функция $f(\delta)$ обращается в нуль только в точках равновесия. Это означает, что в (4.3) коэффициент при x вне кривых равновесий (рис. 1) отличен от нуля. Поэтому из условия равенства значений функции W при $x = 0$ и $x \neq 0$ находится вторая кривая l_2, соединяющая равновесия, на которой функция W меняется также, как и на кривой l_1.

Таким образом, равновесия при $s \neq 0$ и $s \neq \pm s^*$ всегда соединяются двумя кривыми, на которых функция W меняется единообразно. Эти кривые принадлежат неподвижному множеству M_1 обратимой механической системы (3.3).

Лемма 2. При фиксированном значении кинетического момента $s \neq 0, \pm s^*$ соседние по углу α равновесия соединяются двумя кривыми, на каждой из которых энергия H меняется монотонно.

Система (1.1) обратима. Поэтому согласно лемме 2 в системе (1.1) при $\zeta = 1$ реализуются два семейства симметричных движений, связывающих соседние по углу α перманентные вращения. Другие семейства симметричных движений не могут связывать перманентные вращения.

5. Типы точек на кривых равновесия (перманентного вращения). Исследование равновесий консервативной системы с параметром обычно проводится с применением теории бифуркаций Пуанкаре–Четаева [11]. Однако система (3.3) записана в таком виде, где трудно выделить силовую функцию и кинетическую энергию. Поэтому для различения типов точек на кривой равновесий и построения бифуркационной диаграммы используется функция W и выражение для энергии H. В системе (3.3) квадратичная часть

$$H_2 = k_\xi \xi + k_x x^2 + Bq^2 + k_\gamma \gamma_2^2, \quad \xi = \alpha - \alpha^0 \tag{5.1}$$

энергии H в окрестности равновесия определяет тип равновесия. Коэффициенты k_ξ, k_x, k_γ на каждой кривой (см. рис. 1) принимают соответствующие этой кривой значения одного знака.

Функция $W(\alpha, 0)$ на кривой равновесия принимает экстремальные значения. При этом в диапазоне $s \in (-s^*, s^*)$ миниум достигается на кривой a, максиум – на кривой b (рис. 1). В диапазоне $s \in (-\infty, -s^*) \cup (s^*, +\infty)$ функция $W(\alpha, 0)$ убывает между кривыми $a(c)$ и $b(d)$, возрастает между кривыми $b(d)$ и $c(a)$. При этом миниум достигается на кривой $b(d)$, максиум – на кривой $a(c)$ (рис. 1). Согласно лемме 2 такое же поведение наблюдается на кривой l_2 для функции $W(\alpha, x)$.

Для значений α^0, $f(\alpha^0) = 0$, из выражения (4.3) выводится функция $W(\alpha^0, x)$ одной переменной x. При $|s| > |s^*|$ значение этой функции определяется слагаемым с множителем s^2. Поэтому в (5.1) коэффициент $k_x > 0$ на всех кривых равновесия. В выражении (3.4) для полной механической энергии радикал раскладывается в окрестности точки $\gamma_2 = 0$.

В диапазоне $s \in (-s^*, s^*)$ значения функции W определяются силой тяжести; тело допускает только две кривые перманентных вращений, которые примыкают соответственно к нижнему (кривая a) и верхнему (кривая b) равновесиям. Нижнему равновесию отвечает две пары чисто мнимых корней, верхнему – две пары действительных корней [9]. Эти характеристики, в силу непрерывной зависимости корней от параметра χ, распространяются на малые угловые скорости вращения, а также согласно теории бифуркации [11] на весь регулярный диапазон до точки бифуркации.

В диапазоне $s \in (-\infty, -s^*) \cup (s^*, +\infty)$ значение функции W определяется слагаемым с множителем s^2. Поэтому на кривых b и d функция $W(\alpha, x)$ достигает минимума, а на кривых a и c она имеет седловые точки. Качественные характеристики сохраняются в пределах рассматриваемого диапазона.

На кривой a функция $W(\alpha, 0)$ достигает максиума. При $\alpha^0 \to -\pi/2$, $r = x_0 \cos\alpha^0 + z_0 \sin\alpha^0 < 0$. Поэтому в (5.1) получается: $k_\xi < 0$, $k_x > 0$, $k_\gamma > 0$. Точка на кривой a имеет пару чисто мнимых корней и пару действительных корней противоположного знака.

На кривой b имеем $r > 0$, а коэффициенты в (5.1) имеют знаки: $k_\xi > 0$, $k_x > 0$, $k_\gamma < 0$. Поэтому точке на кривой b отвечает пара чисто мнимых корней и пара действительных корней противоположного знака.

На кривой c функция $W(\alpha, 0)$ достигает максиума, что приводит к неравенству $k_\xi < 0$ в функции (5.1). Коэффициент $k_x > 0$. При $\alpha^0 \to \pi/2$ на рассматриваемой кривой $r > 0$, и $k_\gamma < 0$. Точкам на кривой c отвечают две пары действительных корней.

На кривой d при достаточно больших s^2 угол α^0 близок к π, поэтому $r < 0$. При этом функция $W(\alpha, 0)$ достигает миниума. Поэтому все коэффициенты в (5.1) – положительные: точкам кривой d отвечают две пары чисто мнимых корней.

Из проведенного анализа выделяется один качественный результат. При любом s, за исключением бифуркационных значений, реализуется комбинация точек центр – седло, в которой равновесия принадлежат соседним кривым: $a - b$ и $c - d$. Согласно лемме 2 эти точки связываются симметричными движениями. Движения могут быть периодическими. Для обоснования этого предположения обратимся к глобальным семействам невырожденных СПД обратимой механической системы (1.2).

6. Глобальные семейства невырожденных СПД обратимой механической системы. Для редуцированной системы справедлива [6] теорема Ляпунова о существовании в окрестности равновесия, содержащего чисто мнимые корни характеристического уравнения, локального семейства периодических движений (теорема Ляпунова о центре). Эта теорема находит многочисленные приложения, в том числе в механике. Однако долго оставалась неясной граница применимости ляпуновского семейства. Прогресс в этом вопросе начался с работ [7, 8]. В [7] даны условия на гамильтониан, гарантирующие в компакте $\Theta \in \mathrm{R}^{2n}$ продолжение ляпуновского семейства на границу $\partial\Theta$, эти результаты развиты в [8].

В обратимых механических системах вопрос о границе ставился [9, 10] как задача о двустороннем продолжении по периоду T любого невырожденного СПД на глобальное семейство невырожденных СПД. Глобальное семейство содержит все невырожденные СПД с непрерывно изменяющимся на семействе периодом T: оно ограничивается движениями, не принадлежащими семейству. К примеру, семейство колебаний математического маятника образует глобальное семейство, на фазовой плоскости оно ограничено равновесиями и сепаратрисами.

Далее излагается следующий результат: если в обратимой механической системе есть невырожденное СПД, то оно всегда продолжается на глобальное семейство невырожденных СПД. В [9, 10] результат о продолжении получался при наложении некоторых дополнительных условий.

Рассматривается гладкая обратимая механическая система (1.2). Необходимые и достаточные условия существования СПД с начальной точкой u^0 и периодом T даются равенствами

$$v_s(u^0, \tau) = 0, \quad \tau = 0, T/2; \quad s = 1, \ldots, n \tag{6.1}$$

отражающими факт двоекратного пересечения траекторией неподвижного множества.

Равенства (6.1) выполняются и в случае равновесия, но при этом число T не определяется.

Условия (6.1) сводятся к n равенствам, полученным при $\tau = 0, T/2$. Они содержат параметр T и приводят к семейству СПД по T. Вводится понятие невырожденного СПД.

Определение [9]. Случай

$$\operatorname{rank} G(u^0, \tau) \neq n, \quad G(u^0, \tau) = \left\| \frac{\partial v_s(u^0, \tau)}{\partial u_j^0} \right\|, \quad \tau = 0, T/2 \tag{6.2}$$

называется невырожденным для симметричного периодического движения, а само СПД – невырожденным.

Условия (6.2) заданы неравенствами и выполняются также в некоторой окрестности точки u^0. Поэтому невырожденное СПД локально продолжается по периоду T или то же самое – по скалярному параметру h семейства СПД, от которого зависит период: $T = T(h)$, $T' \neq 0$, где (') означает дифференцирование по h. При этом $u^0 = u^0(h) \in M$.

Ввиду важности указанного свойства невырожденного СПД формулируется и подробно доказывается лемма 3.

Лемма 3. Невырожденное СПД локально продолжается по периоду T (параметру h).

Доказательство. Пусть обратимая механическая система (1.2) допускает СПД с периодом T^*. Значит, система (6.1) имеет решение $u^0 = u^*$, $\tau = 0, T^*/2$. В его окрестности совместна линейная система

$$G(u^*,\tau)\delta u^0 + b(u^*,\tau)\delta t = 0$$
$$G(u^*,\tau) = \left\| \frac{\partial v_s(u^*,\tau)}{\partial u_j^0} \right\|, \quad b(u^*,\tau) = \left\| \frac{\partial v_s(u^*,\tau)}{\partial t} \right\|, \quad \tau = 0, T^*/2 \tag{6.3}$$

выводимая из (6.1) для вариаций δu^0 и δt. В начальной точке СПД:

$$b(u^*,0) = V(u^*,0) \neq 0$$

Для невырожденного СПД по определению $\operatorname{rank} G(u^*,T^*/2) \neq 0$. Оно гарантирует единственность СПД данного периода T^*. Тогда единственность решения в начальной точке дается неравенством $\operatorname{rank} G(u^*,0) \neq 0$. При $\tau = T^*/2$ траектория СПД пересекает неподвижное множество: $u^{**} = u(u^*,T^*/2)$, $v^{**} = 0$. Поэтому $b(u^*, T^*/2) = V(u^{**},0) \neq 0$.

Равенства (6.3) рассматриваются при $\tau = 0, T^*/2$, как системы n линейных уравнений с $l \geq n$ неизвестными. В матрице $G(u^*,\tau)$ выделяется невырожденная квадратная матрица, которой отвечают переменные $\delta u_1^0,\ldots,\delta u_n^0$. Тогда из систем (6.3) находятся $\delta u_1^0,\ldots,\delta u_n^0$ как линейные функции δt и $\theta = (\delta u_{n+1}^0,\ldots,\delta u_l^0)$. При $\delta t = 0$ и $\theta = 0$ имеем нулевое решение. Пусть $\delta t = 0$, $\theta \neq 0$. Тогда получается, что вместе с данным невырожденным СПД система допускает $(l-n)$-семейство по параметру θ невырожденных СПД. Возникает задача продолжения по периоду T невырожденного СПД при фиксированном θ. При этом задача продолжения при $l > n$ сводится к задаче с $l = n$ для возмущенного ($\theta \neq 0$) СПД.

В случае $l = n$ получается, что точки пересечения СПД с неподвижным множеством меняются монотонно вместе с δt. При $\delta t \neq 0$ вариация $(\delta u_1^0,\ldots,\delta u_n^0)$ становится ненулевой, а точки u^* и $u^* + \delta u^0$ при непрерывном изменении δt соединяются прямой, параметризованной посредством h. На этой прямой период $T(h)$ становится функцией переменной h. Если значению $h = h^*$ отвечает СПД с точкой u^*, то при двустороннем изменении δt получается $T'(h^*) \neq 0$. По теореме о неявной функции это приводит (локально) к монотонному по периоду T (по параметру h) продолжению СПД.

Лемма 3 доказана.

Из доказательства леммы 3 следует, что семейство невырожденных СПД может ограничиваться, в частности, равновесием (условие $V(u,0) = 0$) или вырожденным СПД (условие $\operatorname{rank} G < n$, $V(u,0) \neq 0$).

Условия (6.2) выделяют на неподвижном множестве обратимой механической системы две области: начальных ($\tau = 0$) и конечных ($\tau = T/2$) точек невырожденных СПД. Эти точки связываются траекторией СПД. Области могут быть локальными, удовлетворящими лемме 3, и глобальными, содержащими все точки связных открытых множеств. Глобальные области обозначаются соответственно через Λ_0 и Λ_T.

Оказывается, на основе свойства локальной продолжимости невырожденного СПД для любого невырожденного СПД конструируется содержащее его глобальное семейство невырожденных СПД. Лемма 3 справедлива для системы $l \geq n$, поэтому глобальное семейство заполняет в фазовом пространстве область размерности $l - n + 2$.

Справедлива теорема 2.

Теорема 2. Пусть обратимая механическая система (1.2) допускает невырожденное симметричное периодическое движение. Тогда оно всегда продолжается по периоду T на глобальное семейство невырожденных СПД, на котором период $T(h)$ монотонно зависит от параметра семейства h.

Доказательство. Пусть обратимая механическая система допускает невырожденное СПД. Тогда оно принадлежит локальному семейству невырожденных СПД. При этом начальные и конечные точки принадлежат соответственно областям $\Lambda_0^k \in \Lambda_0$ и $\Lambda_T^k \in \Lambda_T$. Согласно лемме 3 все СПД локального семейства продолжаются по периоду T. При этом возникают две ситуации. В первой их них области Λ_0^k и Λ_T^k они не приобрели новых точек: глобальное семейство построено.

Во-второй ситуации области Λ_0^k и Λ_T^k расширяются (одновременно) в том смысле, что содержат все точки прежней области, а также новые точки. Значит, семейство невырожденных СПД получило продолжение по периоду T, как в сторону увеличения, так и уменьшения T. На полученном семействе монотонное изменение периода $T(h)$ от параметра семейства сохраняется.

На следующем шаге возникает такая же альтернатива, как на предыдущем шаге итерации.

В конечном результате получаются глобальные области Λ_0 и Λ_T, в которой выполняются условия (6.2). При этом точки этих областей связываюся СПД, принадлежащими глобальному семейству невырожденных СПД. В областях выполняется условия $\mathrm{rank}G(u^0, 0) = n$ и $\mathrm{rank}G(u^0, T/2) = n$, на границе областей Λ_0 и Λ_T эти условия нарушаются. Глобальное семейство достигается за бесконечное число шагов. На глобальном семействе СПД период $T(h)$ является монотонной функцией постоянной энергии h.

Теорема 2 доказана.

Теорема 2 в случае $l = n$ приводилась по существу в [9, 10]. В формулировках [9, 10] накладывались условия: $V(u, 0) \neq 0$, $\delta V(u, 0) \neq 0$.

Следствие. Локальное ляпуновское семейство в обратимой механической системе продолжается на глобальное семейство симметричных колебаний (глобальная теорема Ляпунова о центре для СПД).

Доказательство. На ляпуновском семействе период T является монотонной функцией постоянной энергии, и семейство состоит из невырожденных СПД. По теореме 2 любое невырожденное СПД продолжается на глобальное семейство колебаний.

Глобальное семейство СПД обозначается через Σ. Оно заполняет $(l - n + 2)$-инвариантное многообразие $\hat{\Sigma}$ в фазовом пространстве.

В рамках глобальной теоремы Ляпунова о центре для СПД семейство Σ может быть ограниченным по координате с неограниченно растущим периодом. Это происходит, когда граница $\partial\Sigma$ семейства Σ содержит центр и седло. Здесь СПД глобального семейства называются *маятниковыми колебаниями*.

Доказательство теоремы 2 сопровождается замечаниями.

1. Системы (6.3) с заменой u^* на u^0 выполняются на глобальном семействе тождественно по паре (u^0, τ). При этом линейные дифференциальные формы

$$\xi_s \equiv \sum_{s=1}^{n} g_{sj}(u^0,\tau)\delta u_j^0 + b_s(u^*,\tau)\delta t, \quad \tau = 0, T/2, \quad s = 1,\ldots,n \tag{6.4}$$

связаны условиями $\xi_s = 0$, $s = 1,\ldots,n$. Они справедливы одновременно как при $\tau = 0$, так и при $\tau = T/2$. Поэтому формы (6.4) приводятся к виду, в котором, например, только формы с номерем $s = 1$ содержат δt. Независимость остальных форм от δt означает, что глобальное семейство описывается обратимой механической системой (1.2) с переменными $u \in \mathrm{R}^{l-n+1}$, $v \in \mathrm{R}$.

2. Согласно теореме 2 при подходе к границе $\hat{\Sigma}$ производная $T'(h)$ стремится к нулю или бесконечности. В консервативной системе первый случай реализуется для центра или вырожденного СПД, второй – для центра, седла или неограниченного в фазовом пространстве СПД.

3. Глобальное семейство невырожденных периодических решений для автономной системы общего вида построено в [12]; глобальная теорема Ляпунова о центре дается в [12, следствие 1].

7. Семейства колебаний вращающегося тела. Для локальных периодических движений близ равновесия обратимой механической системы применяется аналог теоремы Ляпунова о центре. Основное отличие аналога от теоремы Ляпунова заключается в применимости его для системы, не допускающей первый интеграл. В исследуемой задаче (1.1) первый интеграл (энергии) существует. Поэтому нет принципиальных препятствий к применению результатов [9, 10] для нелокального продолжения ляпуновского семейства. Однако в [9, 10] не гарантируется достижения глобального семейства периодических движений, содержащих все возможные движения семейства.

Далее применяется теорема 2 о глобальном семействе невырожденных СПД, существование которой естественным образом следует из локального утверждения. Сама локальная теорема установлена в работах [13, 14] и названа в [13, 14] теоремой Ляпунова–Брюно–Девани.

Здесь система (1.2) в окрестности равновесия представляется в виде

$$\dot{u} = \hat{A}v + \ldots, \quad \dot{v} = \hat{B}u + \ldots, \quad u \in \mathrm{R}^l, \quad v \in \mathrm{R}^n, \quad l \geq n \tag{7.1}$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – матрицы, в правых частях явно выписаны только линейные члены.

Приведем формулировку теоремы Ляпунова–Брюно–Девани [14].

Пусть: а) характеристическое уравнение системы (7.1) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\lambda$, б) среди других корней этого уравнения нет равных $\pm ip\lambda (p \in \mathrm{N})$, в) $\mathrm{rank}\hat{B} = n$. Тогда к равновесию примыкает семейство симметричных периодических движений (СПД).

На семействе СПД период монотонно меняется с расстоянием от равновесия [14].

Теорема Ляпунова–Брюно–Девани применяется к обратимой механической системе (1.1). При этом находятся все возможные ляпуновские семейства, примыкающие к перманетным вращениям. В системе (1.1) переменные $u \in \mathrm{R}^4$ и $v \in \mathrm{R}^2$. Поэтому в системе (7.1) характеристическое уравнение имеет $l - n = 2$ нулевых корней. Согласно анализу в разд. 5 в регулярных по s диапазонах остальные корни для (7.1) не равны нулю. Поэтому в (7.1) получается $\mathrm{rank}\hat{A} = \mathrm{rank}\hat{B} = n$. Значит, условие в) теоремы Ляпунова–Брюно–Девани выполняется.

Локальные семейства, найденные по теореме Ляпунова–Брюно–Девани, продолжаются на глобальные семейства невырожденных СПД (теорема 2). В итоге получаются колебания вращающегося тела. Далее результаты приводятся для тела с характеристиками: $C > A$, $x_0 > 0$, $z_0 > 0$.

В диапазоне $-s < s < s^*$ функция $W(\alpha, 0)$ при фиксированном s возрастает от точки A_1 кривой a до точки B_1 кривой b (рис. 1), само перманентное вращение в точке A_1 содержит две пары чисто мнимых корней $\pm\lambda_{1,2}$, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, а перманетное вращение в точке B_1 – две пары действительных корней противоположного знака, равных по модулю $|\lambda_{1,2}|$. Согласно теореме Ляпунова–Брюно–Девани из точки A_1 начинается ляпуновское семейство, отвечающее корню λ_1, которое согласно теореме 2 продолжается на глобальное семейство колебаний. При этом глобальное семейство согласно теореме 1 принадлежит пересечению сферы Пуассона и уровня интеграла $K = s$. В силу замечания 1 к теореме 2 глобальное семейство описывается консервативной системой с одной степенью свободы. Его границей является седловая точка B_1 на кривой b. Поэтому период колебаний монотонно возрастает вместе с $W(\alpha, 0)$, пока угол α не достигает граничного значения в точке B_1. Реализуется глобальное семейство маятниковых колебаний.

При выполнении условия $\lambda_2 \neq p\lambda_2$, $p \in \mathrm{N}$, по теореме Ляпунова–Брюно–Девани в точке A_1 берет начало также другое – второе ляпуновское семейство, которое при продолжении по теореме 2 приводит к глобальному семейству СПД, отвечающему корню λ_2: это семейство также связывает точки A_1 и B_1. Следовательно, устойчивое и неустойчивое перманетные вращения связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний. При этом в указанных глобальных семействах реализуется один и тот же сценарий достижения предельного значения периода: для точки A_1 период $T \to T_* \neq 0$, для точки B_1 период $T \to +\infty$. Согласно анализу фукнции $W(\alpha, x)$ (разд. 5) начальные и конечные точки СПД глобальных семейств маятниковых колебаний принадлежат соответственно кривым $\delta = \alpha$ и $\delta = \alpha + x + o(x)$.

Таким образом, с учетом результата, полученном в [10] для равновесий тела, получается, что в диапазоне $-s^* < s < s^*$ два глобальных семейства колебаний вращающегося тела связывают устойчивое и неустойчивое перманентные вращения.

По такому же сценарию реализуются в диапазоне $(-\infty < s < -s^*) \cup (s^* < s < +\infty)$ глобальные семейства, начинающиеся на устойчивых перманетных вращениях кривой d (рис. 1). Здесь функция $W(\alpha, 0)$ убывает между кривыми c и d. Реализуются два глобальных семейства маятниковых колебаний вращающегося тела.

Далее в этом же диапазоне рассматривается точка A_2 на кривой b (рис. 1). Ей отвечает пара чисто мнимых корней $\pm\lambda_1$. К точке A_2 примыкает ляпуновское семейство, которое согласно теореме 2, продолжается на глобальное семейство, ограниченное точкой B_2 на кривой a. Точки пересечения СПД с неподвижным множеством согласно анализу в разд. 5 принадлежат прямой l_1. Поэтому при подходе к точке B_2 период колебаний стремится к бесконечности: B_2 отвечает седлу. Перманентные вращения связываются глобальным семейством маятниковых колебаний.

Наконец, обратимся к точке B_2 на кривой a (рис. 1). Она содержит пару чисто мнимых корней $\pm\lambda_2$, которой отвечает ляпуновское семейство. По теореме 2 ляпуновское продолжается на глобальное семейство колебаний. Из анализа функции $W(\alpha, x)$ (разд. 5) следует, что точки пересечения СПД с неподвижным множеством принадлежат кривой l_2. Поэтому период колебаний ограничивается наличием чисто мнимых корней для точки на кривой d: на границе глобального семейства неизбежно реализуется сценарий $T' \to 0$.

Проведенный анализ остается справедливым и в других случаях, когда $C \neq A$, $x_0 \neq 0$, $z_0 \neq 0$. С учетом этого обстоятельства формулируется основной результат.

Теорема 3. Тяжелое твердое тело с неподвижной точкой и центром, расположенным в главной плоскости элипсоида инерции, допускает глобальные семейства колебаний вращающегося тела. Они существуют в регулярных для кинетического момента диапазонах, где $s \neq 0, \pm s^*$, s^* – бифуркационное значение.

В диапазонах

$$1. \quad -s^* < s < 0, \quad 0 < s < s^*$$

в теле наблюдаются устойчивые и неустойчивые перманентные вращения. При фиксированном s они связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела.

В дипапазонах

$$2. \quad -\infty < s < -s^*, \quad s^* < s < \infty$$

в теле наблюдаются четыре семейства перманентных вращений, из которых два семейства рождаются в результате бифуркации. Точки рождающихся семейств (устойчивых и неустойчивых) при каждом s связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела. Остальные два семейства являются продолжением семейств, примыкающих к равновесиям тела. Эти семейства связываются только одним глобальным семейством маятниковых колебаний вращающегося тела. Для семейства, исходящего из нижнего равновесия тела, период движений при подходе к границе глобального семейства стремится к конечному числу.

Заметим, что частные случаи задачи, в которых реализуется равенство между параметрами тела, также анализируются с помощью теоремы Ляпунова—Брюно—Девани и теоремы 2.

8. Заключение. Тяжелое твердое тело с одной неподвижной точкой и центром масс, расположенным в главной плоскости эллипсоида инерции, допускает маятниковые движения Млодзиевского [15]. Они состоят из СПД типа колебаний и СПД типа вращений [2] с горизонтальной осью. В последнем типе движений колебания накладываются на равномерные вращения. Наряду с этими движениями, тело допускает второе – пространственное семейство маятниковых колебаний, соединяющее нижнее (устойчивое) и верхнее (неустойчивое) равновесия тела [10]. На указанных движениях кинетический момент тела $s = 0$.

Перманентные вращения тела происходят вокруг вертикальной оси и реализуются, когда $s \neq 0$. Вместе с ними наблюдаются глобальные семейства маятниковых колебаний вращающегося тела.

В диапазонах изменения кинетического момента

$$1. \quad -s^* < s < 0, \quad 0 < s < s^*$$

в теле реализуются два семейства перманетных вращений, одно из которых примыкает к нижнему (устойчивому) равновесию, другое – к верхнему (неустойчивому) равновесию. Семейства наследуют свойство устойчивости равновесий тела. При каждом фиксированном s устойчивое и неустойчивое перманетные вращения связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела.

В диапазонах

$$2. \quad -\infty < s < -s^*, \quad s^* < s < \infty$$

в теле реализуются четыре семейства перманентных вращений, из которых два семейства рождаются в результате бифуркации. Точки рождающихся семейств (устойчивых и неустойчивых) при каждом s связываются двумя глобальными семействами маятниковых колебаний вращающегося тела. Остальные два семейства являются продолжением семейств, примыкающих к равновесиям тела. Эти семейства связываются только одним глобальным семейством маятниковых колебаний вращающегося тела. Для семейства, исходящего из нижнего равновесия тела, при $|s| > |s^*|$ период движений при подходе к границе глобального семейства стремится к конечному числу.

Выводы справедливы для тела, в котором $C \neq A$, $x_0 \neq z_0$, $y_0 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тхай В.Н.* Обратимость механических систем // ПММ. 1991. Т. 55. В. 4. С. 578–586.
2. *Тхай В.Н.* Вращательные движения механических систем // ПММ. 1999. Т. 63. В. 2. С. 79–195.
3. *Ганешенко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М.* Классические задачи динамики твергода тела. Серия “Задачи и методы: математика, механика, кибернетика”. Т. 7. Киев: Наукова думка, 2012. 401 с.
4. *Холостова О.В.* Об устойчивости перманентных вращений Штауде в общем случае геометрии масс твердого тела // Нелинейная динамика. 2009. Т. 5. № 3. С. 357–375.
5. *Рубановский В.Н.* О бифуркации и устойчивости стационарных движений систем с известными первыми интегралами. Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ РАН, 1975. С. 121–200.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. С. 7–263.
7. *Zevin A.A.* Nonlocal generalization of Lyapunov theorem // Nonlinear analysis, theory, methods and applications. 1997. V. 28. № 9. P. 1499–1507.
8. *Zevin A.A.* Global continuation of Lyapunov centre orbits in Hamiltonian systems // Nonlinearity. 1999. V. 12. P. 1339–1349.
9. *Тхай В.Н.* Колебания и равновесия в обратимой механической системе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия. 2021. В. 4. С. 709–715. https: // doi.org/ https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.416
10. *Tkhai V.N.* Spatial oscillations of a physical pendulum // Proc. 2022 16th Int. Conf. on stability and oscillations of nonlinear control systems (Pyatnitskiy’s Conference). IEEE, 2022. P. 21844085. https://doi.org/10.1109/STAB54858.2022.9807507.
11. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 176 с.
12. *Тхай В.Н.* Стабилизация колебаний управляемой автономной системы // Автомат. и телемех. 2023. № 5. С. 30–44.
13. *Тхай В.Н.* О продолжении периодических движений обратимой системы в негрубых случаях. Приложение к *N*-планетной задаче // ПММ. 1998. Т. 62. В. 1. С. 56–72.
14. *Тхай В.Н.* Ляпуновские семейства периодических движений в обратимой системе // ПММ. 2000. Т. 64. В. 1. С. 46–58.
15. *Млодзиевский Б.К.* О перманентных осях в движении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // Тр. отд. физ. наук о-ва любит. естеств., антропол. и этнограф. 1894. Т. 7. Вып. 1. С. 46–48.